

СТАБІЛІЗАЦІЯ МАЯТНИКАМИ ПОЛОЖЕННЯ ОСІ ОБЕРТАННЯ ІЗОЛЬОВАНОГО АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

Г.Б.Філімоніхін

Кіровоградський державний технічний університет

Розглянуто задача стабілізації маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла відносно самого тіла. Ізольоване тіло рухається плоскопаралельно. На його вісь обертання насаджено два однакових математичних маятника. Усередині тіла знаходиться маса, що може переміщуватися. Знайдено необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості основного руху системи – рух, у якому маятники компенсують внутрішнє переміщення мас у системі й система обертається навколо осі обертання тіла.

Маятникові автобалансири застосовуються для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються. [1]. На надкритичних швидкостях обертання маятники, що вільно насаджені на вал ротора, самі набувають положення, в якому зрівноважують ротор. Далі вони обертаються з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс або швидкість обертання ротора [1,2]. Це явище можна використовувати для стабілізації положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла щодо самого тіла [3]. Таким тілом може бути штучний супутник Землі, положення якого у просторі стабілізується обертанням навколо певної осі. В ідеальному випадку положення цієї осі щодо супутника не повинно змінюватися, у тому числі і при пересуванні мас усередині супутника. Нижче в рамках плоскої моделі вивчається задача стабілізації осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла щодо самого тіла.

Нехай ізольоване абсолютно тверде тіло масою M здійснює плоскопаралельний рух. У площині руху тіла зображає деяка плоска фігура (рис. 1). В ідеальному випадку тіло повинно обертатися навколо власної центральної осі w , що перпендикулярна площині руху і проходить через точку O фігури. Оскільки система ізольована і також повинна обертатися навколо осі w , то остання повинна проходити через центр мас системи. Позначимо через J_O осьовий момент інерції тіла відносно власної центральної осі w . Усередині тіла може рухатися матеріальна точка маси m_d , що створює дисбаланс. Для зрівноважування дисбалансу на вісь w , жорстко зв'язану з тілом, вільно насаджені два однакові математичні маятники, кожний масою m і довжиною l . Рух тіла визначаємо відносно осей x, y , що виходять із центра мас системи - точки C і обертаються синхронно з тілом із кутовою швидкістю ω . Не обмежуючи загальності, можна вважати, що точка C нерухома. Проведемо через точку O допоміжні осі u, v , що паралельні осям x, y . Положення маятників визначаємо кутами φ, ψ , що відрховуємо від осі v , як це показано на рис.1. Вважаємо, що при повороті маятників відносно тіла на них діють моменти сил в'язкого опору $-h\dot{\varphi}, -h\dot{\psi}$, пропорційні відносним кутовим швидкостям обертання маятників. Положення незрівноваженої маси m_d визначаємо відстанню $e=|OD|$ від точки D , де знаходиться маса, до точки O і кутом γ між віссю u і відрізком OD . В початковий момент часу матеріальна точка знаходилася на відстані e_0 від осі обертання, система була зрівноваженою і оберталася з кутовою швидкістю ω_0 навколо осі $w=z$. Потім під дією внутрішніх сил матеріальна точка зайняла нове положення, що визначається параметрами e, γ . В зв'язку з цим зрівноваженість тіла порушилася, осі w, z перестали співпадати і система почала здійснювати нестационарні рухи. Дослідимо динаміку системи.

У силу теореми про рух центра мас системи і відповідно до вибору початку осей - точки C , координати центра мас системи відносно осей x, y завжди дорівнюють 0. Теорема дає наступні інтеграли рівнянь руху:

$$Mx + m_d(x + e \cos \gamma) + m(2x - l \sin \varphi - l \sin \psi) = 0, \quad My + m_d(y + e \sin \gamma) + m(2y - l \cos \varphi + l \cos \psi) = 0. \quad (1)$$

Оскільки на систему діють тільки дисипативні сили з неповною дисипацією, то

$$\frac{dT}{dt} = -2R, \quad (2)$$

де T - кінетична енергія системи, R - дисипативна функція Релея. З інтегралів (1) видно, що нестационарні рухи системи можливі тільки при русі маятників відносно тіла. Відносному руху маятників перешкоджають сили в'язкого опору. Оскільки до системи не підводиться зовнішня і внутрішня енергії, то з часом рух системи установиться. В усталених рухах система займає фіксоване положення щодо осей x, y .

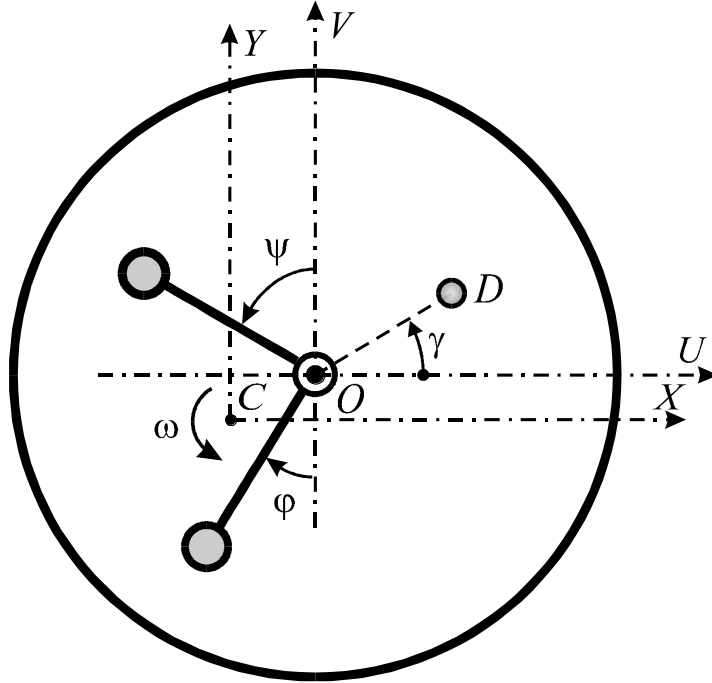


Рис. 1. Плоска модель ізолюваного абсолютно твердого тіла, що зрівноважується маятниками

Оскільки система ізолювана, то має місце закон збереження кінетичного моменту. В початковий момент часу система була зрівноважена і оберталася зі сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо осі w . Тому закон має вид

$$L_z = J_{z0} \omega_0, \quad (3)$$

де

$$J_{z0} = J_0 + m_d e_0^2 + 2ml^2 \quad (4)$$

- осьовий момент інерції системи відносно осі $z=w$ у початковий момент часу, L_z - кінетичний момент системи в довільний момент часу. Останній можна подати у виді

$$L_z = L_{ze} + L_{zr}, \quad (5)$$

де L_{ze} - кінетичний момент системи в переносному, L_{zr} - відносному русі. За переносний рух прийемо обертання системи навколо центра мас разом з осями x, y , а за відносний - рух системи відносно осей x, y . Кінетичний момент переносного руху має вид

$$L_{ze} = J_z \omega, \quad (6)$$

$$J_z = J_O + M(x^2 + y^2) + m_d[(x + e \cos \gamma)^2 + (y + e \sin \gamma)^2] +$$

$$+ m[(x - l \sin \varphi)^2 + (y - l \cos \varphi)^2 + (x - l \sin \psi)^2 + (y + l \cos \psi)^2],$$

де J_z - осьовий момент інерції системи відносно осі z , що перпендикулярна площині руху і проходить через центр мас системи - точку C . Кінетичний момент відносного руху має вид

$$L_{zr} = \vec{k} \cdot (\vec{r}_M \times \vec{v}_{Mr} + \vec{r}_{m_d} \times \vec{v}_{m_dr} + \vec{r}_\varphi \times \vec{v}_{\varphi r} + \vec{r}_\psi \times \vec{v}_{\psi r}), \quad (7)$$

де: $\vec{k}$ - одиничний вектор, спрямований на нас; $\vec{r}_i$ - радіуси-вектори центра мас тіла, матеріальної точки і маятників, $\vec{v}_{ir}$ - їхні відносні швидкості / $i = M, m_d, \varphi, \psi$ /. У проекціях на осі x, y, z

$$\begin{aligned} \vec{k}(0, 0, 1), \quad \vec{r}_M(x, y, 0), \quad \vec{v}_{Mr}(x', y', 0), \quad \vec{r}_{m_d}(x + e \cos \gamma, y + e \sin \gamma, 0), \quad \vec{v}_{m_dr}(x', y', 0), \\ \vec{r}_\varphi(x - l \sin \varphi, y - l \cos \varphi, 0), \quad \vec{v}_{\varphi r}(x' - l \varphi' \cos \varphi, y' + l \varphi' \sin \varphi, 0), \\ \vec{r}_\psi(x - l \sin \psi, y + l \cos \psi, 0), \quad \vec{v}_{\psi r}(x' - l \psi' \cos \psi, y' - l \psi' \sin \psi, 0). \end{aligned}$$

Тоді кінетичний момент відносного руху прийме вид

$$\begin{aligned} L_{zr} = [(M + m_d + 2m)x + m_d e \cos \gamma - ml(\sin \varphi + \sin \psi)]y' - \\ - [(M + m_d + 2m)y + m_d e \sin \gamma - ml(\cos \varphi - \cos \psi)]x' + \\ + ml(\varphi' \cos \varphi + \psi' \cos \psi)y + ml(\varphi' \sin \varphi - \psi' \sin \psi)x - ml^2(\varphi' - \psi'). \end{aligned}$$

Продиференціюємо один раз за часом інтеграли (1), одержимо

$$(M + m_d + 2m)x' - ml(\varphi' \cos \varphi + \psi' \cos \psi) = 0, \quad (M + m_d + 2m)y' + ml(\varphi' \sin \varphi - \psi' \sin \psi) = 0. \quad (8)$$

Використовуючи формули (1), (8), приводимо L_z до виду

$$L_z = [J_O + m_d e^2 + 2ml^2 - (M + m_d + 2m)(x^2 + y^2)]\omega + (M + m_d + 2m)(x'y - y'x) + ml^2(\psi' - \varphi'). \quad (9)$$

Рівняння динаміки маятників при змінній швидкості обертання тіла мають вид

$$\begin{aligned} ml^2(\varphi'' - \omega') + h\varphi' - ml[(x'' - 2\omega y' - \omega^2 x - \omega' y)\cos \varphi - (y'' + 2\omega x' - \omega^2 y + \omega' x)\sin \varphi] = 0, \\ ml^2(\psi'' + \omega') + h\psi' - ml[(x'' - 2\omega y' - \omega^2 x - \omega' y)\cos \psi + (y'' + 2\omega x' - \omega^2 y + \omega' x)\sin \psi] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В усталених рухах похідні дорівнюють нулю і координати x, y, φ, ψ , та кутова швидкість ω задовольняють наступній системі рівнянь:

$$\begin{aligned} (M + m_d + 2m)x + m_d e \cos \gamma - ml(\sin \varphi + \sin \psi) = 0, \\ (M + m_d + 2m)y + m_d e \sin \gamma - ml(\cos \varphi - \cos \psi) = 0, \\ ml\omega^2(x \cos \varphi - y \sin \varphi) = 0, \quad ml\omega^2(x \cos \psi + y \sin \psi) = 0, \\ [J_O + m_d e^2 + 2ml^2 + (M + m_d + 2m)(x^2 + y^2)]\omega = (J_O + m_d e_O^2 + 2ml^2)\omega_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Ця система допускає чотири істотно відмінних розв'язки, що відповідають різним положенням маятників відносно тіла. У першому - основному русі

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \varphi_1 = -\gamma + \arcsin \frac{m_d e}{2ml}, \quad \psi_1 = \gamma + \arcsin \frac{m_d e}{2ml}, \quad \omega_1 = \frac{J_O + m_d e_O^2 + 2ml^2}{J_O + m_d e^2 + 2ml^2} \omega_0, \quad (12)$$

дисбаланс матеріальної точки зрівноважений і система обертається навколо центральної осі тіла. У інших - побічних - дисбаланс матеріальної точки не зрівноважений і система обертається навколо осей, що не співпадають з центральною віссю тіла. У цих рухах маятники займають наступні положення:

$$\varphi_2 = -\gamma - \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2 = \gamma + \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_3 = -\gamma - \frac{\pi}{2}, \quad \psi_3 = \gamma - \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_4 = -\gamma + \frac{\pi}{2}, \quad \psi_4 = \gamma + \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

В другому русі маятники розташовані один навпроти одного по лінії, спрямованій по вектору дисбалансу, у третьому русі обидва маятники відхилені у напрямку вектора дисбалансу, а в четвертому - навпаки. Нижче досліджується стійкість основного руху.

Приведемо рівняння руху до безрозмірного виду. Введемо безрозмірні змінні і час

$$u = \frac{x}{l}, \quad v = \frac{y}{l}, \quad p = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \tau = \omega_1 t \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_1 \frac{d}{d\tau} \right). \quad (14)$$

Введемо безрозмірні параметри

$$R_m = \frac{m}{M + m_d + 2m}, \quad R_J = \frac{ml^2}{J_O + m_d e^2 + 2ml^2}, \quad R_{JO} = \frac{ml^2}{J_O + m_d e_0^2 + 2ml^2}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{m_d e}{2ml}. \quad (15)$$

Тоді рівняння руху приймуть вид

$$\begin{aligned} u + R_m(2 \sin \varphi_0 \cos \gamma - \sin \varphi - \sin \psi) &= 0, \quad v + R_m(2 \sin \varphi_0 \sin \gamma - \cos \varphi + \cos \psi) = 0, \\ \left[\frac{1}{R_J} - \frac{u^2 + v^2}{R_m} \right] p + \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{R_m} + \dot{\psi} - \dot{\varphi} &= \frac{1}{R_J}, \\ \ddot{\varphi} - \dot{p} + H\dot{\varphi} - (\ddot{u} - 2p\dot{v} - p^2u - \dot{p}v) \cos \varphi + (\ddot{v} + 2p\dot{u} - p^2v + \dot{p}u) \sin \varphi &= 0, \\ \ddot{\psi} + \dot{p} + H\dot{\psi} - (\ddot{u} - 2p\dot{v} - p^2u - \dot{p}v) \cos \psi - (\ddot{v} + 2p\dot{u} - p^2v + \dot{p}u) \sin \psi &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут точка над змінною означає похідну по τ . Основний рух у безрозмірних координатах має вид

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \varphi_1 = -\gamma + \varphi_0, \quad \psi_1 = \gamma + \varphi_0, \quad p_1 = 1. \quad (17)$$

Введемо відхилення від основного руху

$$u = u, \quad v = v, \quad \alpha = \varphi + \gamma - \varphi_0, \quad \beta = \psi - \gamma - \varphi_0, \quad q = p - 1. \quad (18)$$

З перших трьох рівностей у (16), із точністю до величин першого порядку мализни, знаходимо

$$\begin{aligned} u &= R_m[\alpha \cos(\varphi_0 - \gamma) + \beta \cos(\varphi_0 + \gamma)], \quad v = -R_m[\alpha \sin(\varphi_0 - \gamma) - \beta \sin(\varphi_0 + \gamma)], \\ \dot{u} &= R_m[\dot{\alpha} \cos(\varphi_0 - \gamma) + \dot{\beta} \cos(\varphi_0 + \gamma)], \quad \dot{v} = -R_m[\dot{\alpha} \sin(\varphi_0 - \gamma) - \dot{\beta} \sin(\varphi_0 + \gamma)], \\ \ddot{u} &= R_m[\ddot{\alpha} \cos(\varphi_0 - \gamma) + \ddot{\beta} \cos(\varphi_0 + \gamma)], \quad \ddot{v} = -R_m[\ddot{\alpha} \sin(\varphi_0 - \gamma) - \ddot{\beta} \sin(\varphi_0 + \gamma)], \\ p &= 1 + R_J(\dot{\varphi} - \dot{\psi}), \quad \dot{p} = R_J(\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}). \end{aligned} \quad (19)$$

Тоді два останніх рівняння в (16) зводяться до виду

$$\begin{aligned} (1 - R_m - R_J)\ddot{\alpha} + H\dot{\alpha} + R_m\alpha + [R_J - R_m \cos 2\varphi_0]\ddot{\beta} + 2R_m\dot{\beta} \sin 2\varphi_0 + R_m\beta \cos 2\varphi_0 &= 0, \\ (1 - R_m - R_J)\ddot{\beta} + H\dot{\beta} + R_m\beta + [R_J - R_m \cos 2\varphi_0]\ddot{\alpha} - 2R_m\dot{\alpha} \sin 2\varphi_0 + R_m\alpha \cos 2\varphi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Знайдемо характеристичне рівняння. Позначимо

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = (1 - R_m - R_J)\lambda^2 + H\lambda + R_m, \\ a_{12} &= (R_J - R_m \cos 2\varphi_0)\lambda^2 + 2R_m\lambda \sin 2\varphi_0 + R_m \cos 2\varphi_0, \\ a_{21} &= (R_J - R_m \cos 2\varphi_0)\lambda^2 - 2R_m\lambda \sin 2\varphi_0 + R_m \cos 2\varphi_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді характеристичне рівняння має вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0,$$

$$a_0 = (1 - 2R_J - R_m + R_m \cos 2\varphi_0)(1 - R_m - R_m \cos 2\varphi_0), \quad a_1 = 2H(1 - R_m - R_J), \quad (22)$$

$$a_2 = 2R_m(1 - R_J - R_J \cos 2\varphi_0) + 2R_m^2 \sin^2 2\varphi_0 + H^2, \quad a_3 = 2HR_m, \quad a_4 = R_m^2 \sin^2 2\varphi_0.$$

Критерій Рауса-Гурвіца дає наступні умови асимптотичної стійкості

$$a_i > 0, \quad /i = \overline{1,4}/, \quad \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4. \quad (23)$$

Перша група умов буде виконуватися, якщо буде виконуватися умова $1 - 2R_J - R_m + R_m \cos 2\varphi_0 > 0$, або,

$$1 - 2R_J - 2R_m \sin^2 \varphi_0 > 0, \quad (24)$$

Якщо в умову (24) підставити параметри з (15), то вона стане еквівалентною наступній умові

$$(M + 2m \cos^2 \varphi_0)(J_O + m d e^2) + J_O m_d > 0,$$

яка виконується при будь-яких дисбалансах, що забезпечують існування основного руху.

Остання умова в (23), по підстановці a_i , набуває виду

$$\Delta_3 = 4R_m H^4 (1 - R_m - R_J) + 4R_m^2 H^2 [R_J (1 + \cos 2\varphi_0) - (1 - 2R_m) \cos 2\varphi_0]^2 + 4R_m [1 - R_m - R_J (1 + \cos 2\varphi_0)] \geq 0. \quad (25)$$

Видно, що ця умова виконується автоматично при виконанні умови (24).

Висновки.

1. Матеріальна система, що здійснює плоскопаралельний рух і складається з: абсолютно твердого тіла; двох математичних маятників, вільно насаджених на центральну вісь тіла, перпендикулярну площині руху; матеріальної точки, що може переміщуватися усередині тіла, допускає чотири усталені рухи: основний рух, у якому маятники компенсують дисбаланс матеріальної точки і система обертається навколо центральної осі тіла; три побічні рухи, у яких система розбалансована і обертається навколо осей, які не співпадають з центральною віссю тіла.

2. За умови існування основний рух системи асимптотично стійкий.

1. Гусаров А.А., Сусанин В.И. и др. Автоматическая балансировка роторов машин. М.: “Наука”, 1979, 151 с. **2. Филимоных Г.Б.** К устойчивости основного движения двух-маятникового автобалансира // Доп. НАН України. Сер.А. - 1996. - №8. - С. 74-78.. **3. Мирер С.А., Сарычев В.А.** Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. - 1997. -т. 35. №6. -С. 651-658.

G. Filimoniphin, STABILIZATIONS by PENDULUMS of the POSITION of the AXES of the ROTATION of the ISOLATED ABSOLUTE RIGID BODY. Is considered the problem of stabilization, by the pendulums, of the position of the axis of the rotation of the isolated absolute rigid body concerning itself. The isolated absolute rigid body makes plane-parallel motions. On the central axis of the absolute rigid body, which is perpendicular to the plane of motion is installed two identical mathematical pendulums. Inside the absolute rigid body there is a material point, which can move. Is established, that, under condition of existence, the main motion of a system – the motion, in which the pendulums compensate the unbalance of material point and the system rotates around the central axis of the absolute rigid body, is asymptotically stable.