МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРІЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

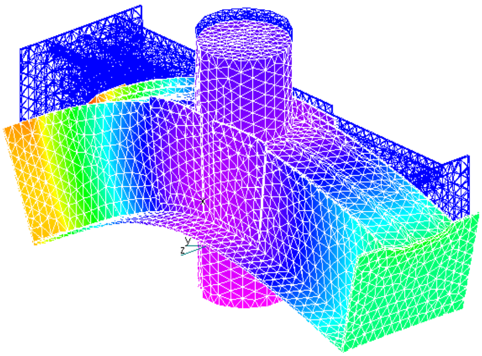
Кафедра будівельних, дорожніх машин і будівництва

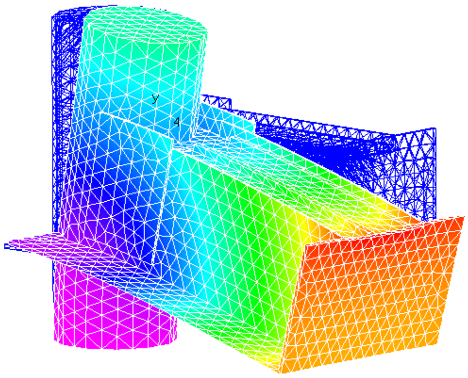
“Будівельна механіка”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково – проектувального завдання РПЗ №4 «Визначення переміщень в статично визначених рамах»

**для здобувачів І (бакалавр) рівня вищої освіти спеціальності
192 «Будівництво та цивільна інженерія»
усіх форм навчання**





Кропивницький 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра будівельних, дорожніх машин і будівництва

“Будівельна механіка”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково – проектувального завдання РПЗ№4 «Визначення переміщень в статично визначених рамах»

для здобувачів I (бакалавр) рівня вищої освіти спеціальності
192 «Будівництво та цивільна інженерія»
усіх форм навчання

Затверджено
на засіданні кафедри будівельних,
дорожніх машин і будівництва.
Протокол № 8 від 12.01.2022 р.

Кропивницький 2022

УДК 624.04: (075.8)

"Будівельна механіка". Методичні вказівки до виконання розрахунково – проектувального завдання РПЗ №4 «Визначення переміщень в статично визначених рамах» для здобувачів І (бакалавр) рівня вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» усіх форм навчання / Укл.: Портнов Г.Д., Пукалов В.В., Тихий А.А., Дарієнко В.В. – Кропивницький: ЦНТУ, 2022. – 45 с.

Укладачі – к.т.н., доцент Портнов Г.Д., к.т.н., доцент Пукалов В.В.., к.т.н., доцент Тихий А.А., к.т.н., доцент Дарієнко В.В.

Рецензент – к.т.н., доцент Яцун В.В.

Відповідальний за випуск – завідувач кафедри будівельних,
дорожніх машин і будівництва,
професор Настоящий В.А.

Введение

Методические указания составлены с целью облегчения самостоятельной работы студентов при выполнении расчетно-графического задания на тему: «Определение перемещений в статически определимых рамах» по дисциплине «Строительная механика».

Под действием внешней нагрузки и других факторов (изменение температуры, смещения опор, неточности изготовления конструкций) сооружения деформируются. Все или почти все его сечения (точки, узлы) занимают новые положения. Определение изменения положения любой точки (сечения) необходимо не только для оценки жесткости сооружений, но и для расчета статически неопределимых систем.

Линейные и угловые перемещения сечений в рамах можно находить различными способами. В методических указаниях рассматривается самый распространенный и простой метод, который заключается в использовании универсальной формулы – интеграла Максвелла – Мора.

При разработке методических указаний использовались материалы [4].

1. Требования к выполнению задания

1. Исходные данные к выполнению задания принимаются по указанию преподавателя, исходя из рис.1 и табл. 1…4.

2. Работы выполняются (варианты):

2.1 <u>Вариант 1</u>: на стандартных листах писчей бумаги (формата А4) на одной стороне листа (другая остается чистой для возможных исправлений) или в тетради; на обложке должны быть указаны: фамилия, имя и отчество студента (полностью), название факультета, шифр группы. Задание следует выполнять чернилами (не красными) четким почерком с полями: слева – 20 мм, справа – 10 мм. Рисунки выполняются карандашом или чернилами.

2.2 Вариант 2: распечатка файла Word с использованием средств графики ПК на бумажном носителе.

3. Работа должна содержать тему задания, техническое задание с числовыми данными, расчетную схему в масштабе с числовым указанием величин, необходимых для расчета.

4. Решение должно сопровождаться краткими, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в числах.

5. При вычислениях в формулы подставляются значения входящих в них параметров в системе СИ, а затем приводятся окончательные результаты с указанием единиц измерения найденных величин.

6. Расчет выполнять с двумя значащими цифрами после запятой.

7. Эпюры и другой графический материал должны выполняться в соответствии с требованиями ЕСКД (единой системы конструкторской документации). На всех эпюрах необходимо указывать масштаб, знаки и числовые значения характерных ординат. Эпюры изгибающих моментов строятся на растянутом волокне.

8. После проверки преподавателем расчетного задания студент должен исправить в нем все отмеченные ошибки.

2. Техническое задание

В РПЗ требуется определить перемещение сечений в статически определимой раме:

– от действия внешней нагрузки;

– от температурного воздействия;

– от смещения опор.

2.1 Определение перемещений от действия внешней нагрузки

2.1.1 Схему рамы принять согласно рис. 1.

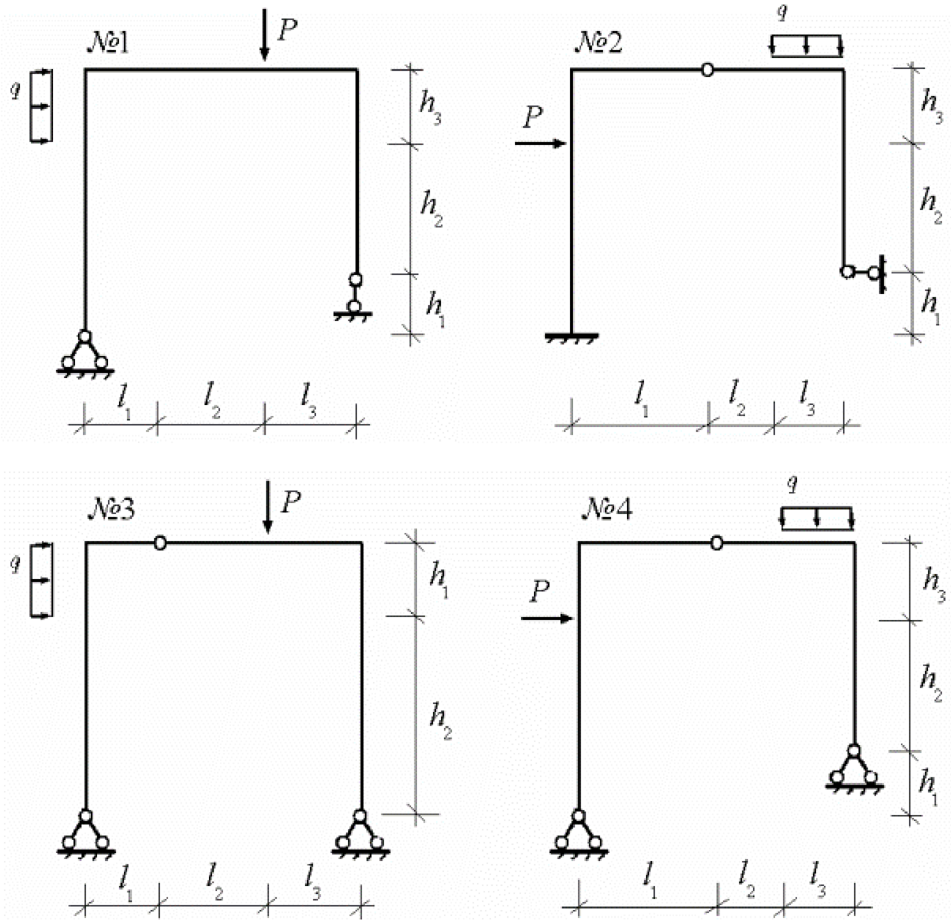


Рис. 1

2.1.2 Искомое перемещение принять по табл. 1

Таблица 1

№ задачи	Искомое перемещение
1	Горизонтальное перемещение левого узла рамы
2	Угол поворота правого узла рамы
3	Вертикальное перемещение точки приложения силы *P*
4	Взаимный угол поворота сечений, примыкающих к шарниру ригеля рамы

2.1.3 При определении перемещений, жесткостные характеристики принять по табл. 2.

Таблица 2

№ задачи	Жесткостные параметры		Изгибные жесткости		
	E в МПа	I_z в см^4	Левая стойка	Правая стойка	Ригель
1	$2 \cdot 10^5$ МПа	8230 см^4	$3EI_z$	EI_z	$4EI_z$
2	$2 \cdot 10^5$ МПа	6590 см^4	$2{,}5EI_z$	EI_z	$3{,}5EI_z$
3	$2 \cdot 10^5$ МПа	9120 см^4	$3{,}5EI_z$	EI_z	$4{,}5EI_z$
4	$2 \cdot 10^5$ МПа	7640 см^4	$1{,}5EI_z$	EI_z	$2{,}5EI_z$

2.1.4 Размеры рам и значения нагрузок приведены в табл. 3.

Таблица 3

№ задачи	Нагрузки		Размеры рам в м					
	P в кН	q в кН/м	l_1	l_2	l_3	h_1	h_2	h_3
1	14,2	18	2	3	7	1	2	1
2	16,3	21	4	6	4	1	2	2
3	17,8	28	5	8	3	2	4	-
4	19,5	24	9	3	6	2	3	2

2.2 Определение перемещений от температурного воздействия

2.2.1 Параметры температурного воздействия и характеристики смещения опор принять по табл. 4.

Таблица 4

№ задачи	Температурное воздействие			Осадка опор		
	$t_н$	$t_в$	$t_з$	Опора	Направление	Величина
1	-16	+28	-9	левая	вниз	14 см
2	+10	+32	-15	левая	поворот по часовой стрелке	0,03 рад
3	-21	-2	-10	правая	вправо	8 см
4	+20	+41	+14	правая	вверх	12 см

3. Этапы выполнения РПЗ

3.1 Обработка исходных данных

1. Изображение расчетной схемы рамы.

2. Задание параметров внешних воздействий.

3. Задание параметров физических свойств материала рамы.

3.2 Кинематический анализ

1. Подсчет числа степеней свободы.

2. Анализ геометрической структуры.

3. Вывод о кинематических и статических свойствах расчетной схемы рамы.

3.3 Аналитическое определение внутренних усилий от неподвижной нагрузки

1. Изображение расчетной схемы рамы с неподвижной нагрузкой

2. Вычисление опорных реакций и проверка их правильности.

3. Получение для каждого участка рамы аналитических выражений для внутренних усилий M, Q , N и вычисление их характерных значений.

4. Построение эпюр M, Q , N.

5. Изображение узлов и стержней рамы и проверка их равновесия.

3.4 Определение перемещения для выбранного сечения от неподвижной нагрузки

1. Образование первого вспомогательного единичного состояния.

2. Вычисление единичных опорных реакций и проверка их правильности.

3. Построение единичных эпюр внутренних усилий.

5. Определение перемещения от нагрузки без учета влияния поперечных и продольных сил.

3.5 Определение перемещения для выбранного сечения от температурного воздействия

1. Изображение расчетной схемы рамы с заданными параметрами температурного воздействия.

2. Вычисление для каждого участка рамы удельного температурного перепада $\Delta t'$ и изменения температуры на оси Δt_o.

3. Построение эпюр $\Delta t'$ и Δt_o.

4. Определение температурного перемещения.

3.6 Определение перемещения для выбранного сечения от кинематического воздействия

1. Изображение расчетной схемы рамы с заданными параметрами кинематического воздействия.

2. Образование второго вспомогательного единичного состояния.

3. Вычисление единичных опорных реакций и проверка их правильности.

4. Определение перемещения от кинематического воздействия.

5. Изображение рамы в смещенном положении с выделением на схеме найденного перемещения.

4. Теоретическая часть

4.1 Общие сведения о перемещениях

4.1.1 Понятие деформации конструкции

Конструкции при приложении к ним внешних воздействий изменяют свою форму и размеры. Эти изменения называются деформацией конструкции. Деформация сопровождается переходом конструкции из начального недеформированного состояния в некоторое деформированное состояние.

В зависимости от способности конструкции сохранять деформацию различают упругие и упругопластические деформации. В первом случае конструкция после снятия внешних воздействий полностью восстановит свою форму и размеры и возвратится в начальное недеформированное состояние. Во втором случае происходит частичное восстановление формы и размеров конструкции.

В зависимости от изменения деформаций конструкции во времени при постоянных внешних воздействиях различают постоянные и переменные во времени деформации.

4.1.2 Количественные характеристики деформированного состояния конструкции

Изменения формы и размеров стержневой конструкции складываются из деформаций отдельных стержней. В свою очередь изменения формы и размеров отдельного стержня складываются из деформаций элементарных объемов сплошной среды, моделирующей конструкционный материал. Поэтому для количественного описания деформированного состояния конструкции используются две разновидности величин - дифференциальные и интегральные характеристики.

Дифференциальные характеристики описывают происшедшие изменения формы и размеров конструкции в окрестности ее произвольной точки. Ими являются относительные числовые величины ε и γ.

С помощью величины ε описывается изменение линейных размеров элементарного параллелепипеда; она называется относительной линейной деформацией. Другая величина γ используется для описания изменения формы элементарного параллелепипеда за счет сдвига его граней: она называется сдвиговой деформацией или углом сдвига.

Интегральные характеристики описывают происшедшие изменения формы и размеров конструкции в целом. Ими являются линейное и угловое перемещения. Рассмотрим в недеформированном состоянии некоторой конструкции две точки A и B и соединяющий их отрезок прямой (рис. 2, а).

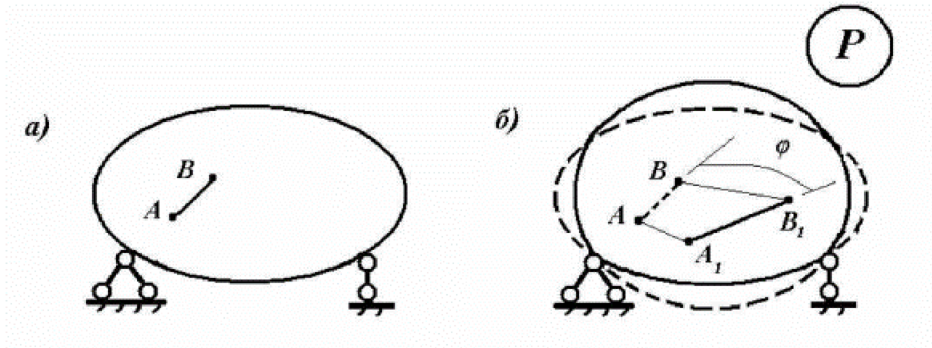


Рис.2

При деформировании конструкции от действия, например, нагрузки эти точки займут новые положения A_1 и B_1. Линейные перемещения этих точек характеризуются длинами отрезков прямых AA_1 и BB_1, соединяющих положения точек в недеформированном и деформированном состояниях конструкции (рис. 2, б). Угловое перемещение характеризуется величиной угла поворота φ отрезка прямой AB при переходе конструкции из недеформированного в деформированное состояние (рис. 2, б).

4.1.3 Существующие подходы к определению перемещений

Умение определять перемещения необходимо для оценки пригодности конструкций к нормальной эксплуатации. Такая пригодность конструкции характеризуется ее *жесткостью*. Понятием, противоположным жесткости конструкции, является *податливость* конструкции. Следовательно, податливость характеризует способность конструкции допускать возникновение в ней перемещений.

Жесткость конструкции зависит от применяемого конструкционного материала, жесткости конструктивных элементов и способов соединения этих элементов между собой.

Влияние конструкционного материала на жесткость конструкции описывается двумя модулями - E и G. Модуль упругости E характеризует способность материала сопротивляться возникновению упругих линейных деформаций, а модуль сдвига G – угловых деформаций.

Жесткость конструктивного элемента зависит от жесткости его поперечного сечения и длины элемента.

Жесткость поперечного сечения описывается тремя величинами:

– изгибной жесткостью EI, где I - момент инерции поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба;

– продольной жесткостью EA, где A - площадь поперечного сечения;

– сдвиговой жесткостью GA.

Жесткость конструктивного элемента характеризуется отношением жесткости поперечного сечения к длине элемента и называется, соответственно, его *погонной жесткостью при изгибе, растяжении-сжатии или сдвиге.*

В зависимости от жесткости конструкции возможны два подхода к определению перемещений.

Один подход связан с определением малых перемещений, и он справедлив для жестких конструкций. Такие конструкции обычно относятся к линейно деформируемым системам. Согласно этому подходу, определяются перемещения, которые малы по сравнению с размерами самой конструкции.

Второй подход позволяет определять большие перемещения, и он справедлив для гибких конструкций. Такие конструкции обычно относятся к геометрически нелинейным системам. Согласно этому подходу, определяются перемещения, которые не малы по сравнению с размерами самой конструкции.

В дальнейшем рассматриваются малые перемещения, возникающие при упругой деформации стержневых конструкций от внешних воздействий – нагрузки, изменений температуры и осадки опор.

4.2 Связь между внешними силами и перемещениями в линейно деформируемых системах

Рассмотрим произвольную линейно деформируемую стержневую конструкцию, которую условно изобразим в виде простой балки. Пусть к ней приложены n сосредоточенных сил (рис. 3, а).

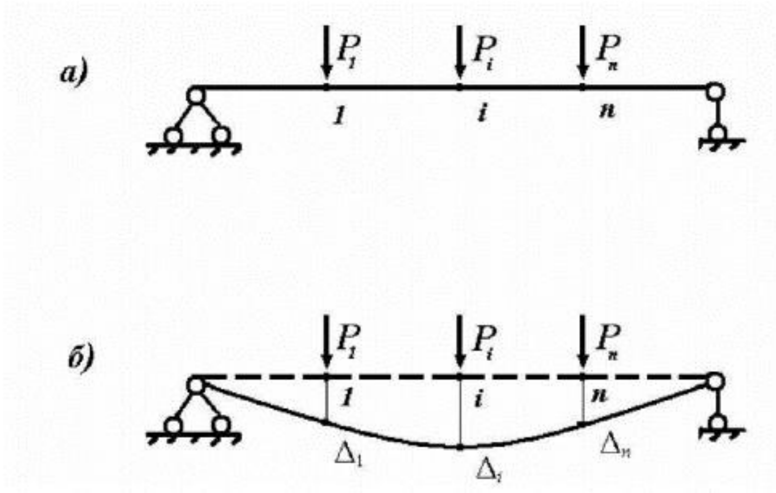


Рис. 3.

От действия заданных сил конструкция деформируется, и по направлению каждой из них возникнут линейные перемещения точек их приложения.

4.2.1 Полные, частичные и единичные перемещения

Линейные перемещения, происходящие в конструкции от действия всех сил одновременно, будем называть *полными перемещениями* и обозначать Δ_i, ($i = 1, ..., n$) (рис. 3, б). Индекс i указывает номер направления, по которому возникает перемещение.

При раздельном приложении сил P_j ($j = 1, ..., n$) по рассматриваемым направлениям в конструкции также будут возникать линейные перемещения Δ_{ij} ($i,j = 1,...,n$) (рис. 4), являющиеся частями соответствующих полных перемещений Δ_i,. Первый индекс i в обозначении частичных перемещений указывает номер направления, по которому перемещение происходит, а второй индекс j - номер направления, по которому действует сила, вызывающая это перемещение.

Частичное перемещение вида Δ_{ii} называется *собственным перемещением*, и оно возникает от силы P_i, по ее направлению. *Частичное перемещение* вида Δ_{ij} $(i \neq j)$ называется *побочным перемещением*.

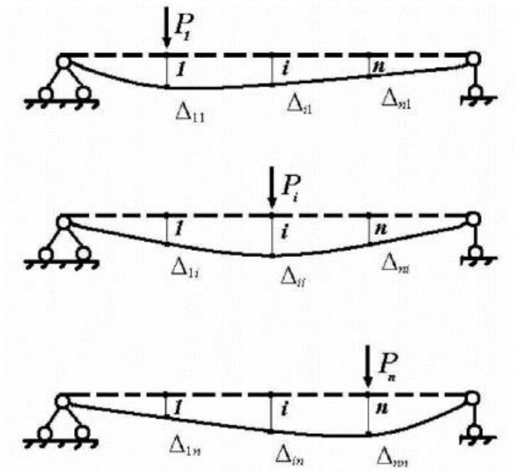


Рис. 4

Если к конструкции по направлению номер j приложить безразмерную силу $\overline{P}_j$ j=1, то возникающие в конструкции перемещения по указанным выше направлениям называют *единичными*. Такие перемещения обозначаются δ_{ij} (рис. 5), и их индексы указывают те же направления, что и для частичных перемещений Δ_{ij}. Единичные перемещения, как и частичные, подразделяются на собственные и побочные.

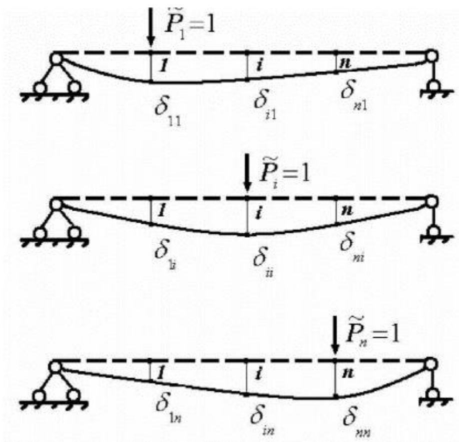


Рис. 5

4.2.2 Характеристики деформативности линейно деформируемых систем

Полное и частичное перемещения конструкции по некоторому направлению *i*, согласно принципу независимости действия сил, связаны следующим соотношением:

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} \qquad (1)$$

В свою очередь произвольное частичное перемещение Δ_{ij} связано линейной зависимостью с соответствующим ему единичным перемещением δ_{ij}:

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} P_j \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим соотношение, связывающее полное перемещение конструкции с действующими силами

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} P_j \qquad (3)$$

Соотношение (3), согласно которому полное перемещение Δ_i, является линейной функцией действующих сил P_j ($j = 1, ..., n$) называется обобщенным законом Гука или законом Гука для конструкции.

Входящие в (2) и (3) единичные перемещения играют роль коэффициентов пропорциональности между силами и перемещениями. Они позволяют количественно оценивать способность конструкции получать перемещения по определенному направлению и поэтому называются *коэффициентами податливости*.

4.3 Работа внешних сил линейно деформируемой конструкции

Основным видом внешнего воздействия, вызывающего деформацию стержневой конструкции, является нагрузка. При деформации конструкции внешние силы совершают работу. Будем полагать действующую на конструкцию нагрузку *статической*. Нагружение считается *статическим*, если перемещения конструкции происходят очень медленно. Это позволяет не учитывать силы инерции масс конструкции, возникающие при ее деформировании.

При определении работы внешних сил различают *действительную* и *возможную* работу. Определение действительной и возможной работы поясним на примере деформации простой балки от действия простейшей нагрузки - сосредоточенной силы (рис. 6, а), а затем обобщим на случай произвольной нагрузки.

4.3.1 Действительная работ внешних сил

Действительной работой сосредоточенной силы P является работа, которую она совершает на собственном перемещении Δ (рис. 6, б).

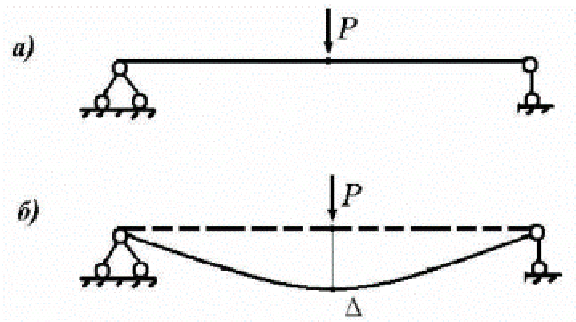


Рис. 6

В процессе выполнения работы считается, что сила и перемещение плавно изменяются от нуля до некоторых конечных значений P_K и Δ_K

Поскольку конструкция считается линейно деформируемой системой, то зависимость перемещений от нагрузки имеет вид

$$\Delta = \delta P, \qquad (7)$$

где коэффициент пропорциональности δ равняется собственному единичному перемещению силы $\bar{P}=1$. Соотношение (7) описывается линейным графиком, показанным на рис. 7, а. По оси абсцисс этого графика откладываются значения собственного перемещения Δ, а по оси ординат - значения силы *P*.

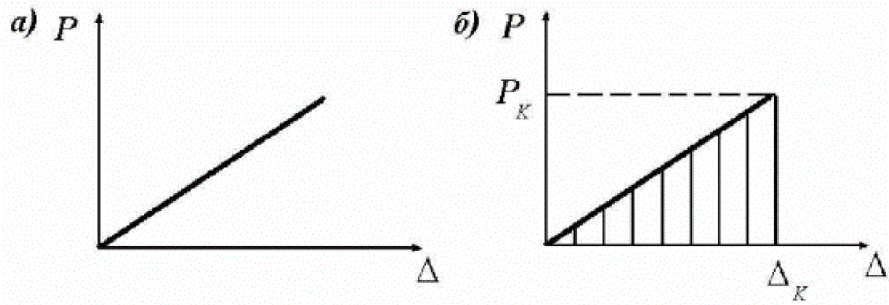


Рис. 7

Если перемещение Δ получит некоторое приращение $d\Delta$, то сила *P* выполнит на нем элементарную действительную работу

$$dA = Pd\Delta.$$

Тогда вся действительная работа, совершаемая силой *P*, определяется по формуле

$$A = \int_0^{\Delta_K} Pd\Delta. \tag{8}$$

и, с учетом (7), равняется

$$A = \delta \int_0^{P_K} PdP = \frac{1}{2}\delta P_K^2. \tag{9}$$

Из формулы (9) видно, что действительная работа сосредоточенной силы всегда является положительной величиной.

Применяя соотношение для конечных значений $P_к$, Δ_K и подставляя его в (9), приведем формулу для вычисления действительной работы к виду

$$A = \frac{1}{2} P_K \Delta_K. \tag{10}$$

Выражение (10) называется формулой Клапейрона и из нее следует, что действительная работа равняется площади заштрихованного треугольника на графике рис. 7, б.

При действии на конструкцию системы сосредоточенных сил действительная работа внешних сил равняется полусумме произведений каждой силы на перемещение по ее направлению, вызванное действием всех сил, и определяется по формуле

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i . \qquad (11)$$

4.3.2 Возможная работа внешних сил

Возможной работой является работа, которую сосредоточенная сила P совершает на перемещении, вызванным какой-либо иной причиной, например, осадкой левой опоры (рис. 8). В процессе выполнения работы сила P считается неизменной, а перемещение плавно изменяется от нуля до некоторого конечного значения Δ'_K .

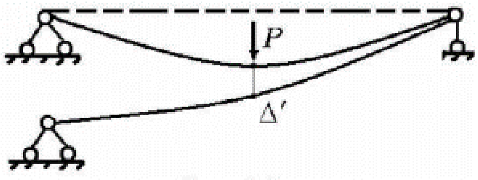


Рис. 8

Графически такой процесс описывается прямой линией, показанной на рис. 9, а.

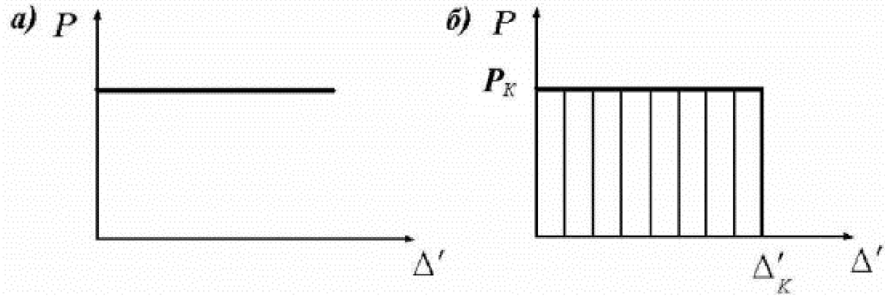


Рис. 9

Тогда возможная работа сосредоточенной силы P равняется

$$A' = P\Delta'_K . \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что возможная работа равняется площади заштрихованного прямоугольника (рис. 9, б). Эта работа может быть как положительной, так и отрицательной. Знак плюс в (12) будет в случае, если направление действия силы совпадает с направлением перемещения. В противном случае в формуле (12) берется знак «минус».

При действии на конструкцию системы сосредоточенных сил (рис. 10) возможная работа внешних сил равняется алгебраической сумме произведений каждой силы на перемещения по их направлению, вызванные другими причинами, и определяется по формуле

$$A' = \sum_{i=1}^{n} P_i \Delta'_i . \tag{13}$$

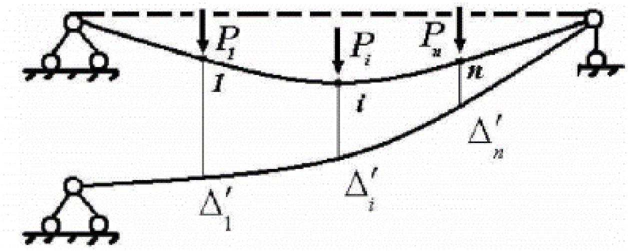


Рис. 10

4.3.3 Обобщенная сила и обобщенное перемещение

В общем случае, при статическом нагружении стержневой конструкции на нее действует некоторая совокупность сосредоточенных сил, моментов и распределенных нагрузок. Если составляющие этой совокупности нагрузок изменяются пропорционально одному параметру P, то она называется ***обобщенной силой***, а параметр P – значением ***обобщенной силы***.

Понятию обобщенной силы соответствует понятие ***обобщенного перемещения***. Под обобщенным перемещением понимают некоторую геометрическую величину, связанную с деформированным состоянием конструкции, произведение которой на параметр обобщенной силы позволяет вычислить действительную или возможную работу заданной совокупности нагрузок по одночленным формулам вида (13).

Для иллюстрации понятий обобщенной силы и обобщенного перемещения рассмотрим простую балку (рис. 11), нагруженную тремя сосредоточенными силами, которые изменяются пропорционально параметру P:

$$P_1 = P;\; P_2 = 3P;\; P_3 = 0{,}5P.$$

От действия осадки левой опоры балка дополнительно деформировалась; в процессе деформации силы P_1, P_2, P_3, не изменялись. Используя формулу (13), запишем величину возможной работы, которую совершат силы, действующие на балку

$$A' = P\Delta_1' + 3P\Delta_2' - 0{,}5P\Delta_3'. \tag{14}$$

Вынося параметр P за скобки, приведем (14) к виду

$$A' = P\Delta^*,$$

где $\Delta^* = \Delta_1' + 3\Delta_2' - 0{,}5\Delta_3'$ – обобщенное перемещение рассматриваемой обобщенной силы (Рис. 11).

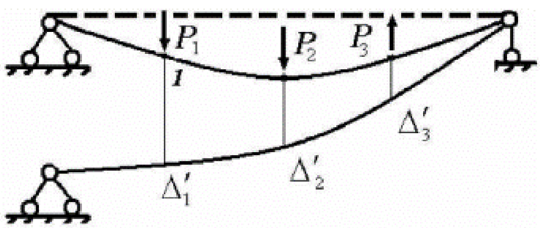


Рис. 11

Таким образом, обобщенным перемещением является геометрическая величина, произведение которой на параметр обобщенной силы позволяет определить возможную работу этой обобщенной силы.

Некоторые виды обобщенных сил и соответствующих им обобщенных перемещений приведены на рис. 12.

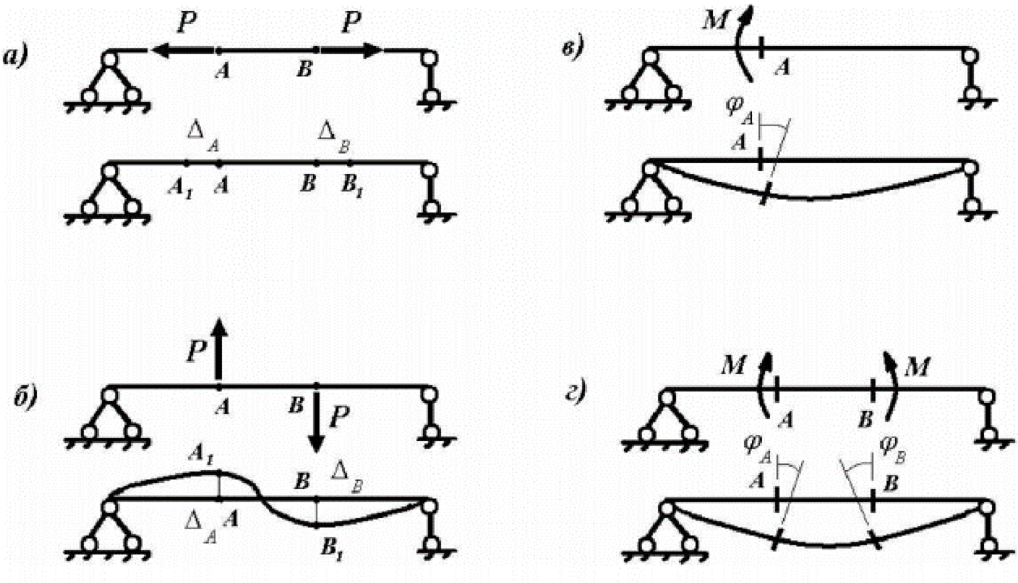


Рис. 12

Пусть к конструкции в двух точках, лежащих на горизонтальной прямой, приложены две одинаковые горизонтальные силы P противоположного направления (рис. 12, а). Тогда взаимное смещение по горизонтали точек приложения этих сил $\Delta^* = \Delta_A + \Delta_B$ является обобщенным перемещением этой обобщенной силы.

Пусть к конструкции в двух точках, лежащих на горизонтальной прямой, приложены две одинаковые вертикальные силы P противоположного направления (рис. 12, б). Тогда взаимное смещение по вертикали точек приложения этих сил $\Delta^* = \Delta_A + \Delta_B$ является обобщенным перемещением этой обобщенной силы.

Пусть к конструкции в некотором сечении приложен момент M (рис. 12, в). Тогда угол поворота этого сечения $\Delta^* = \varphi_A$ является обобщенным перемещением этой обобщенной силы.

Пусть к конструкции в двух сечениях приложены два одинаковых момента M противоположного направления (рис. 12, г). Тогда взаимный угол поворота этих сечений $\Delta^* = \varphi_A + \varphi_B$ является обобщенным перемещением этой обобщенной силы.

4.4 Работа внутренних сил линейно деформируемой конструкции

При деформации стержневой конструкции наряду с внешними силами совершают работу и внутренние силы. Так как внутренние силы оказывают сопротивление деформации конструкции при ее загружении, то работа этих сил для линейно деформируемых систем всегда отрицательна. Внутренние силы так же, как и внешние силы, могут совершать действительную и возможную работу.

4.5 Аналитическая форма определения перемещений в плоских стержневых конструкциях от произвольных внешних воздействий

В основе аналитической формы определения перемещений в деформируемых системах лежит принцип ***возможных перемещений***. *Согласно этому принципу, если деформируемая система находится в равновесии, то сумма работ всех действующих сил, включая и внутренние силы, на возможных перемещениях системы от положения равновесия равняется нулю.*

Возможными перемещениями деформируемой системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, которые допускаются наложенными связями системы. Так как рассматриваемые плоские стержневые конструкции являются линейно деформируемыми системами, то для

них, ввиду линейной зависимости между перемещениями и внешними воздействиями, возможными перемещениями являются любые малые конечные перемещения, которые могут возникать в конструкции.

4.6 Некоторые теоремы о перемещениях в линейно деформируемых конструкциях

Перемещения, возникающие в линейно деформируемых конструкциях, удовлетворяют ряду теорем, отражающих существенные особенности деформирования таких конструкций. Основополагающее значение среди них имеет теорема о взаимности работ и вытекающее из нее следствие - теорема о взаимности перемещений.

Для выяснения сути и доказательства этих теорем рассмотрим произвольную линейно деформируемую стержневую конструкцию, нагруженную двумя обобщенными силами P_i и P_k. Такую конструкцию условно изобразим в виде простой балки (рис. 13, а). Под действием приложенных сил конструкция деформируется, и в ней возникают соответствующие этим силам полные перемещения Δ_i, и Δ_k (рис. 13, б).

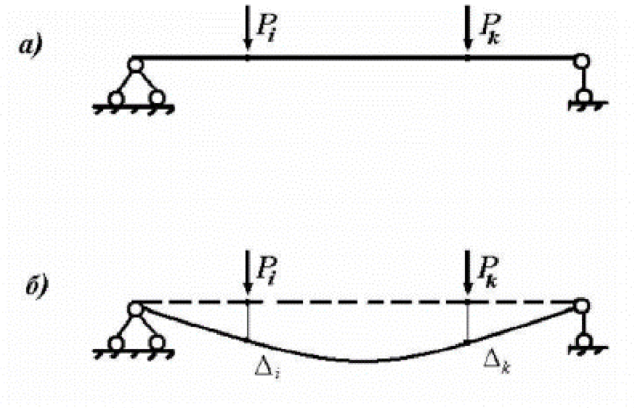


Рис. 13

4.6.1 Теорема о взаимности работ

При нагружении конструкции возможны две последовательности статического приложения сил.

В одном случае сначала прикладывается сила P_i, а затем происходит догружение конструкции силой P_k : в ходе догружения сила P_i не изменяется.

В другом случае сначала прикладывается сила P_k , а затем происходит догружение конструкции силой P_i : в ходе догружения сила P_k не изменяется.

Определим величину работы, производимой внешними силами в процессе деформирования конструкции для обеих схем нагружения.

В первом случае от действия силы P_i, возникает собственное перемещение Δ_{ii} (рис. 14, а), и на этом перемещении сила совершает действительную работу $\frac{1}{2} P_i \Delta_{ii}$.

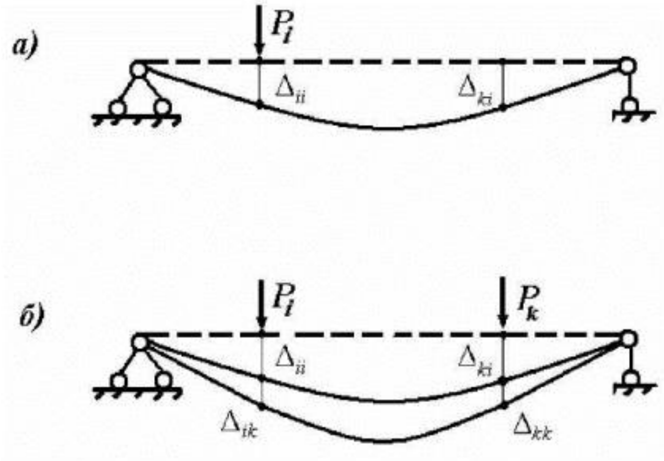


Рис. 14

При дополнительном деформировании конструкции силой P_k возникает собственное перемещение Δ_{kk} и соответствующее силе P_i побочное перемещение Δ_{ik} (рис. 14, б). На этих перемещениях силы совершат, соответственно, действительную работу $\frac{1}{2} P_k \Delta_{kk}$ и возможную работу $P_i \Delta_{ik}$. Тогда полная работа, совершенная силами при первой схеме нагружения, описывается выражением

$$A_1 = \frac{1}{2} P_i \Delta_{ii} + \frac{1}{2} P_k \Delta_{kk} + P_i \Delta_{ik}.$$

Во втором случае сначала приложим силу P_k. При деформировании конструкции возникнет собственное перемещение Δ_{kk} (рис. 15, а), на котором сила совершит действительную работу $\frac{1}{2} P_k \Delta_{kk}$.

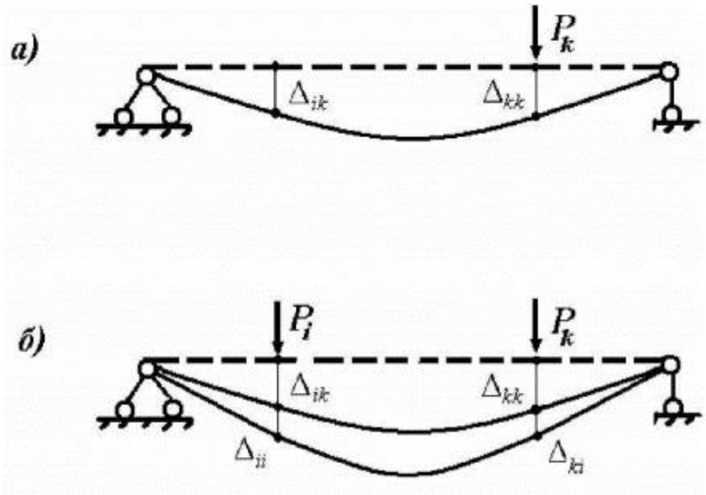


Рис. 15

При догружении конструкции силой P_k дополнительно возникнут собственное перемещение Δ_{kk} и побочное перемещение Δ_{ki}. На этих перемещениях силы совершат, соответственно, действительную работу $\frac{1}{2}P_i\Delta_{ii}$ и возможную работу $P_k\Delta_{ki}$. Тогда полная работа внешних сил при второй схеме нагружения описывается выражением

$$A_2 = \frac{1}{2}P_k\Delta_{kk} + \frac{1}{2}P_i\Delta_{ii} + P_k\Delta_{ki}.$$

В связи с тем, что рассматривается линейно деформируемая конструкция, то ее конечное деформированное очертание и, следовательно, потенциальная энергия деформации не зависят от схемы нагружения конструкции. Поэтому в обоих случаях на накопление потенциальной энергии деформации конструкции затрачена одинаковая работа внешних сил.

$$A_1 = A_2.$$

Отсюда следует

$$P_i\Delta_{ik} = P_k\Delta_{ki}. \tag{15}$$

Полученное соотношение (15) отражает суть теоремы о взаимности работ, которая формулируется следующим образом: *Возможная работа внешних сил i-того состояния конструкции на перемещениях, вызванных внешними силами k-того состояния, равняется возможной работе внешних* *сил k-того состояния конструкции на перемещениях, вызванных внешними силами i-того состояния.*

4.6.2 Теорема о взаимности перемещений

Поскольку рассматривается линейно деформируемая конструкция, то побочные перемещения Δ_{ik}. и Δ_{ki}, входящие в (15), описываются следующими линейными соотношениями:

$$\Delta_{ik} = P_k \delta_{ik}; \; \Delta_{ki} = P_i \delta_{ki}. \tag{16}$$

Подставим соотношения (16) в (15):

$$P_i P_k \delta_{ik} = P_k P_i \delta_{ki},$$

после сокращения получим

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \tag{17}$$

Из соотношения (4.57), отражающего суть теоремы о взаимности перемещений, следует, что *побочные единичные перемещения конструкции с различным порядком расположения одинаковых индексов равны между собой.*

4.7 Определение перемещений в плоских стержневых системах

4.7.1 Метод определения перемещений

Под действием внешней нагрузки и других факторов (изменение температуры, смещения опор, неточности изготовления конструкций) сооружения деформируются. Все или почти все его сечения (точки, узлы) занимают новые положения. Изменение положения любой точки (сечения) называется перемещением. Умение определять перемещения необходимо не только для оценки жесткости сооружений, но и для расчета статически неопределимых систем.

Линейные и угловые перемещения сечений в рамах можно находить различными способами.

Один из основных, самый распространенный и простой метод, заключается в использовании универсальной формулы интеграла Максвелла - Мора, позволяющей определить малые перемещения сечений от нагрузки, смещения опор (узлов) конструкции и от температурного воздействия.

При определении перемещений нужно рассматривать два состояния стержневой системы: первое - действительное состояние, зависящее от внешнего воздействия, и второе вспомогательное (фиктивное) под действием единичной силы или момента, приложенных по направлению искомого перемещения.

Для определения взаимного смещения точек или поворота сечений во вспомогательном состоянии необходимо приложить противоположно направленные единичные силы или моменты по направлению искомого перемещения.

4.7.2 Формула Мора для определения перемещений от нагрузки

Рассмотрим два состояния упругой системы. Одно из них – состояние *f*, в котором действует заданная нагрузка (рис. 16, а), другое - состояние *i* (рис. 16, б), в котором по направлению некоторого перемещения Δ_i от заданной нагрузки приложена сила $\bar{P}_i = 1$. Из теоремы о взаимности работ и принципа возможных перемещений, получают формулу Мора для определения перемещений от нагрузки:

$$\Delta_i = \int \frac{M\bar{M}_i ds}{EI} + \int \mu \frac{Q\bar{Q}_i ds}{GA} + \int \frac{N\bar{N}_i ds}{EA}. \qquad (18\ ).$$

Для вычисления:

1) определяют внутренние усилия *M, Q, N* от заданной нагрузки;

2) по направлению искомого перемещения прикладывают единичную обобщенную силу $\bar{P}_i = 1$;

3) находят внутренние усилия $\bar{M}, \bar{Q}, \bar{N}$ – от единичной силы;

4) подставляют выражения усилий в формулу Мора и вычисляют перемещение.

При расчете балок и рам влиянием поперечных и продольных деформаций на перемещения обычно пренебрегают.

4.7.3 Техника определения перемещений в изгибаемых системах

Вычисление интегралов в правой части (18) в ряде случаев можно заменить перемножением эпюр M и $\bar{M}$, по правилу Верещагина или по формуле Симпсона.

Правило Верещагина заключается в том, что интеграл от произведения двух функций, одна из которых любая, а другая линейна, *равен площади, ограниченной произвольной функцией, умноженной на ординату линейной функции, взятой под центром тяжести этой площади* (рис. 16)*:*

$$\Delta = \frac{M_F \overline{M}}{EI} = \frac{\omega y_C}{EI}.$$

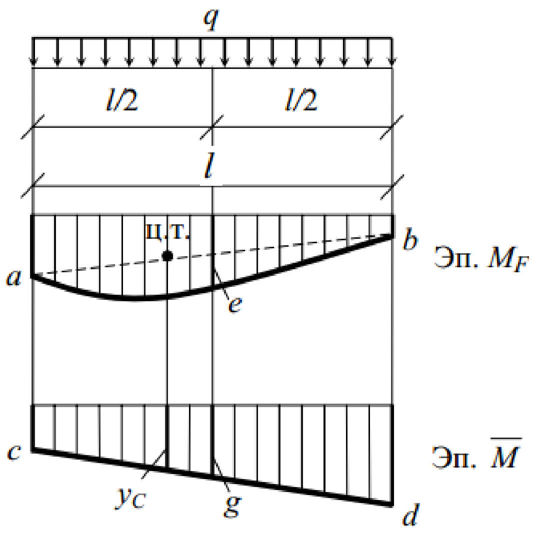


Рис. 16

Для фигур, у которых сложно найти площадь и центр тяжести, можно применить развернутую формулу Верещагина:

$$\Delta = \frac{M_F \overline{M}}{EI} = \frac{l}{6EI}\left(2ac + 2bd + ad + bc \pm \frac{ql^2}{4}\left|c + d\right|\right).$$

В этой формуле в скобках первые два слагаемых представляют собой удвоенные произведения соответствующих ординат графиков друг на друга - левой ординаты эп. M_F на левую ординату эп. $\overline{M}$ и правой ординаты эп. M_F на правую ординату эп. $\overline{M}$. Следующие два слагаемых – произведения ординат крест-на-крест, т.е. левой ординаты грузовой эпюры на правую ординату, взятую из единичной, и наоборот. Произведения ординат берутся со знаком плюс, если перемножаемые ординаты лежат по одну сторону от оси. Если же они лежат по разные стороны от оси, причем совершенно неважно, какая из них сверху, а какая снизу, произведение берется со знаком минус.

Далее в этой формуле следует слагаемое, зависящее от интенсивности распределенной нагрузки q. Перед ним знак выбирается следующим образом: ординаты a и b на грузовой эпюре мысленно соединим прямой линией (на рис. 16 эта линия показана пунктиром). Если криволинейная добавка расположена от спрямляющей линии с той же стороны, что и серединное значение на единичной эпюре от своей оси (оба сверху или оба снизу), берется знак плюс. Если же они лежат по разные стороны – знак минус.

Правило Верещагина удобно при перемножении прямоугольных и треугольных эпюр.

Формулу Симпсона можно использовать, если одна из функций под интегралом не сложнее квадратной параболы, а другая линейна. *Тогда интеграл равен сумме произведений левых ординат эпюр, правых ординат и учетверенного произведения средних, умноженной на длину участка и поделённой на 6 (шесть):*

$$\Delta = \frac{M_F \overline{M}}{EI} = \frac{l}{6EI}\left(ac + 4eg + bd\right).$$

Формула Симпсона применяется для перемножения более сложных эпюр, типа трапеции на трапецию.

Здесь в скобках первое и последнее слагаемые представляют собой произведения соответствующих граничных ординат перемножаемых графиков (см. рис.16). Второе слагаемое – это учетверенное произведение средних ординат.

Результат будет положительным, если центр тяжести криволинейной эпюры и ордината ус в прямолинейной эпюре расположены по одну сторону от оси стержня. Если же они расположены по разные стороны от оси, произведение берется со знаком минус.

Площади некоторых простейших фигур, а также координаты их центров тяжести приведены на рис. 17.

Определяя перемещения, следует помнить о том, что перемножение грузовой и единичной эпюр будет представлять собой сумму произведений соответствующих друг другу участков.

Если при перемножении эпюр мы получим отрицательный результат, это будет означать, что искомое перемещение направлено в противоположную сторону, чем приложенное единичное воздействие.

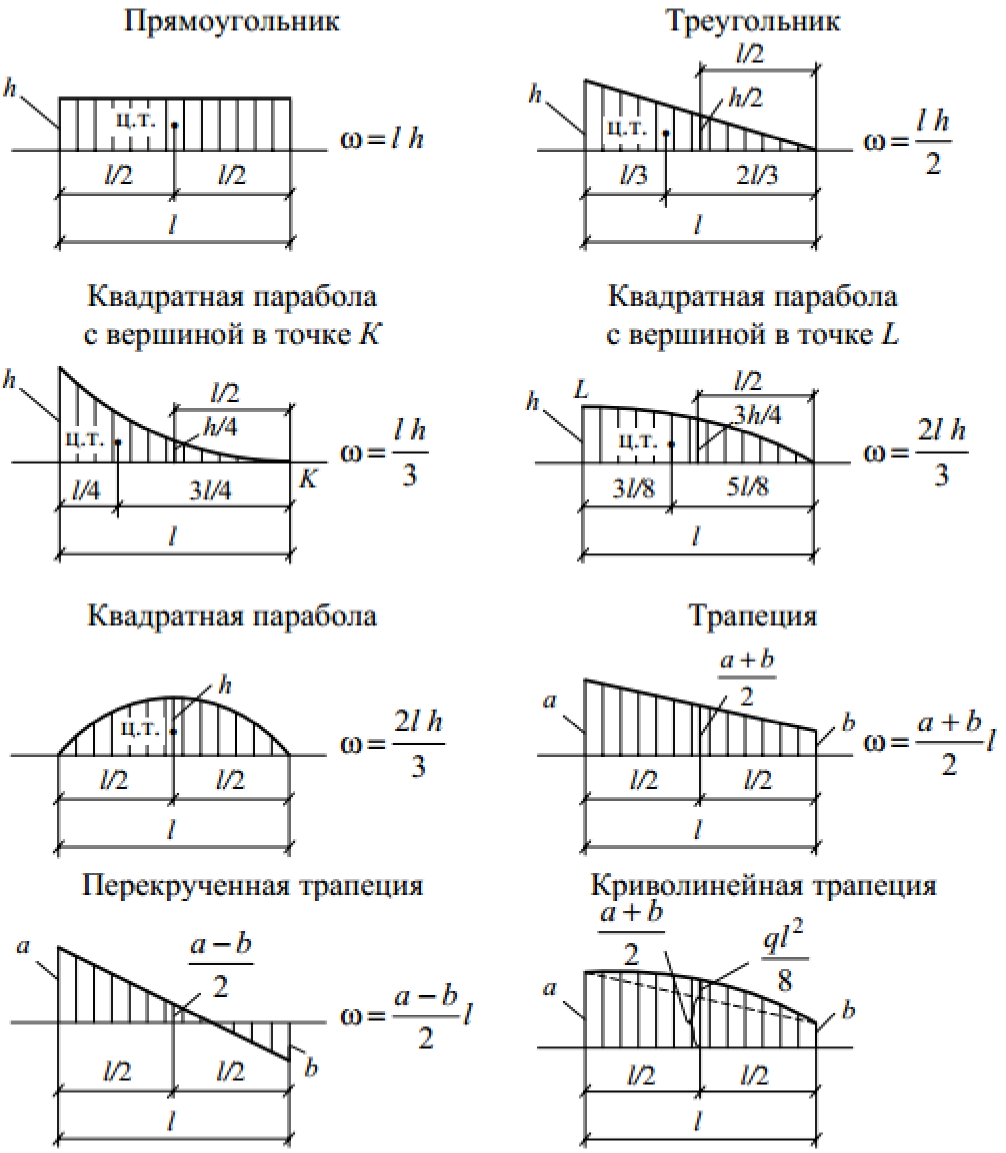


Рис. 17

5. Определение перемещений от внешних воздействий

5.1 Определение линейного перемещения заданного сечения рамы от приложенной нагрузки

<u>Пример</u>. Для рамы, показанной на рис.18, требуется определить вертикальное перемещение шарнира С от приложенной нагрузки. Жесткостные параметры рамы имеют значения - $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и I_z=7080см^4.

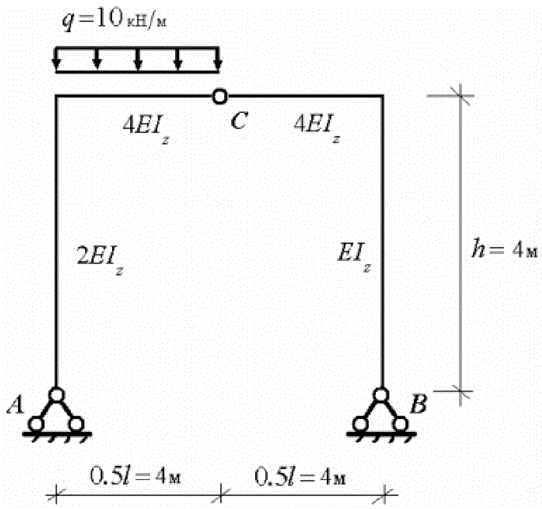


Рис. 18

1. Определяем опорные реакции (рис.19)

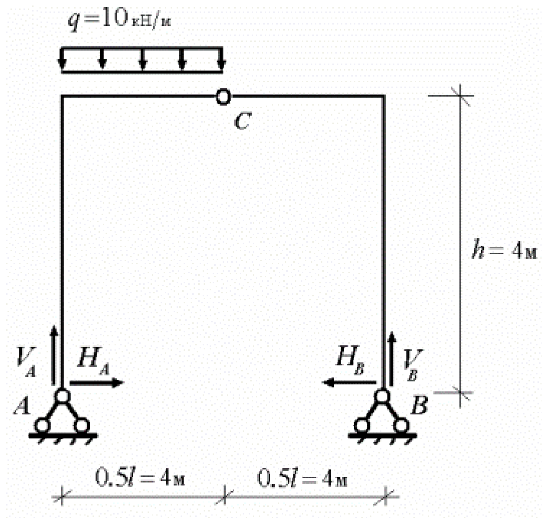


Рис. 19

Для определения вертикальных составляющих опорных реакций составим для рамы суммы моментов сил относительно левой

$$\sum M_B = 0;\ V_A l - \frac{ql}{2}\cdot\frac{3}{4}l = 0;\ V_A = \frac{3}{8}ql = 30\,\text{кН}$$

и правой

$$\sum M_A = 0;\ -V_B l + \frac{ql}{2}\cdot\frac{1}{4}l = 0;\ V_B = \frac{1}{8}ql = 10\,\text{кН}$$

опор.

Для определения горизонтальных составляющих опорных реакций составим суммы моментов сил относительно точки C для левой части рамы

$$\sum M_C^{л.ч.}=0;\ -H_A h+V_A 0{,}5l-\frac{ql}{2}\cdot\frac{1}{4}l=0;\ H_A=0{,}5\frac{V_A l}{h}-\frac{1}{8}\frac{ql^2}{h}=10\,\text{кН}$$

и для правой части рамы

$$\sum M_C^{п.ч.}=0;\ H_B h-V_B 0{,}5l=0;\ H_B=0{,}5\frac{V_B l}{h}=10\,\text{кН}.$$

Для проверки правильности найденных составляющих опорных реакций составим для рамы сумму проекций сил на оси:

$$\sum y=0;\ V_A-\frac{ql}{2}+V_B=30-40+10=0$$

$$\sum x=0;\ H_A-H_B=10-10=0.$$

Для рассматриваемой рамы можно выделить 4 участка - *AM*, *MC*, *CN*, *NB*. Пунктирной линией на рис. 20 обозначаются «отмеченные» волокна каждого участка рамы.

Применим метод сечений на участке *AM* и отбросим нижнюю часть рамы (рис. 20).

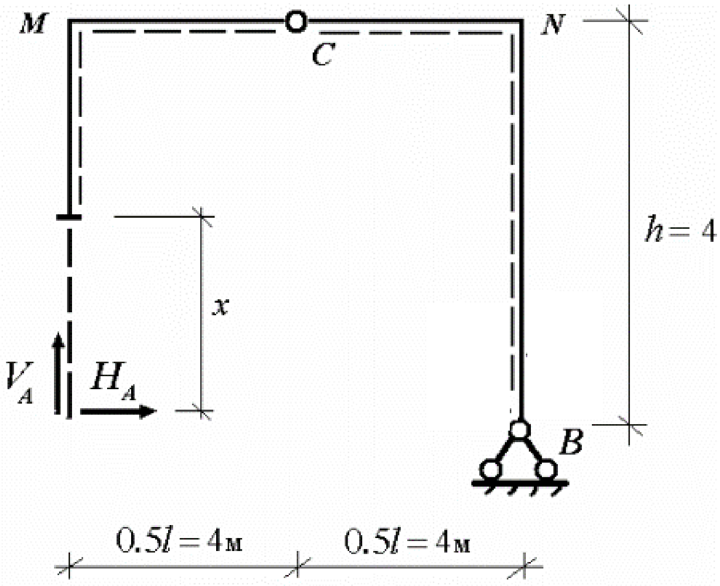


Рис. 20

Переменная x, определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале: $0 \le x \le 4$ м.

Приводя внешние силы отброшенной части участка к центру тяжести поперечного сечения оставшейся части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка:

$$M = -H_A x = -10x;$$
$$Q = -H_A = -10;$$
$$N = -V_A = -30.$$

Применим метод сечений на участке MC и отбросим левую часть рамы (рис. 21). Переменная x, определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале: $0 \le x \le 4$ м.

Приводя внешние силы отброшенной части участка к центру тяжести поперечного сечения оставшейся части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка:

$$M = -H_A h + V_A x - \frac{qx^2}{2} = -40 + 30x - 5x^2;$$
$$Q = V_A - qx = 30 - 10x;$$
$$N = -H_A = -10.$$

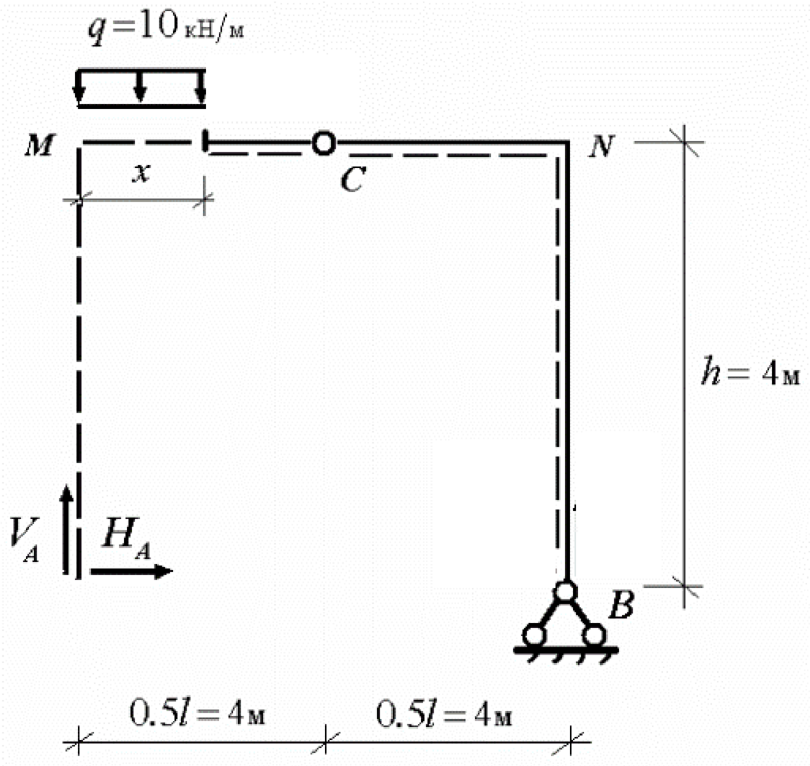


Рис. 21

Применим метод сечений на участке CN и отбросим правую часть рамы (рис. 22). Переменная x, определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале: $0 \le x \le 4$ м.

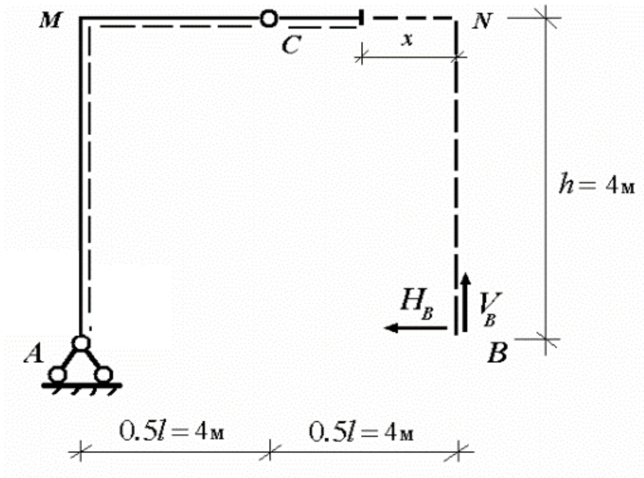


Рис. 22

Приводя внешние силы отброшенной части участка к центру тяжести поперечного сечения оставшейся части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка:

$$M = -H_B h + V_B x = -40 + 10x;$$
$$Q = -V_B = -10;$$
$$N = -H_B = -10.$$

Применим метод сечений на участке N_8 и отбросим нижнюю часть рамы (рис. 23). Переменная x, определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале: $0 \le x \le 4$ м.

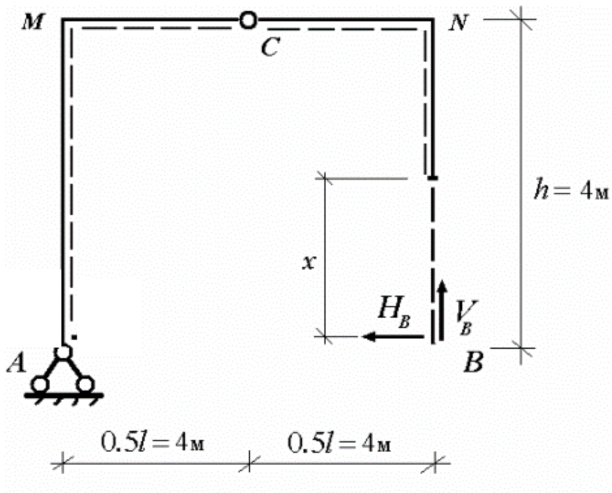


Рис. 23

Приводя внешние силы отброшенной части участка к центру тяжести поперечного сечения оставшейся части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка:

$$M = -H_B x = -10x;$$
$$Q = H_B = 10;$$
$$N = -V_B = -10.$$

Эпюры внутренних усилий рамы, построенные согласно полученным аналитическим выражениям для *M, Q* и *N* на каждом участке, приведены на рис. 24.

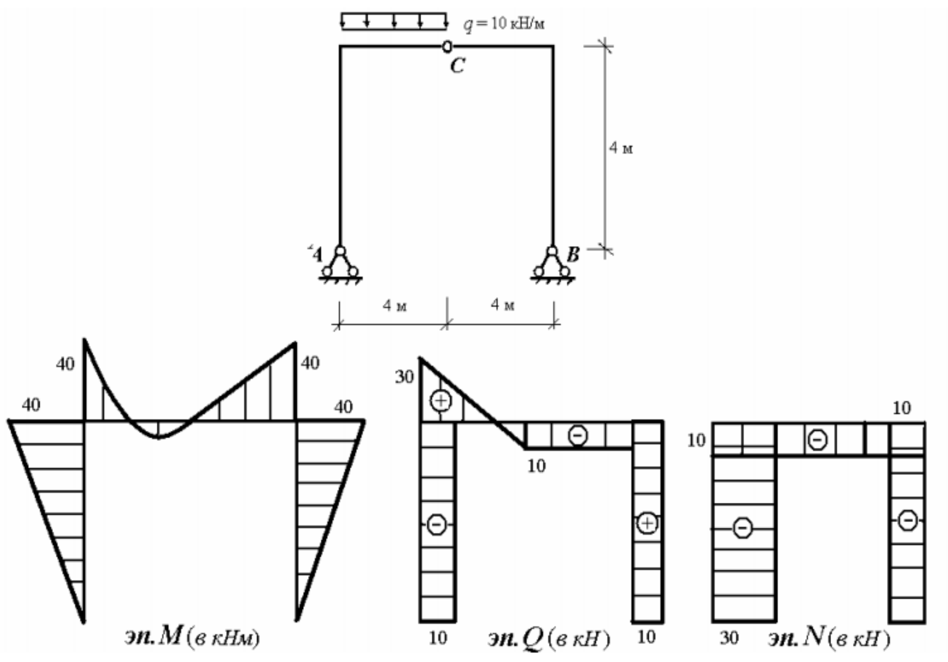


Рис. 24

Эпюра изгибающих моментов действительного состояния имеет вид, показанный на рис. 25, а

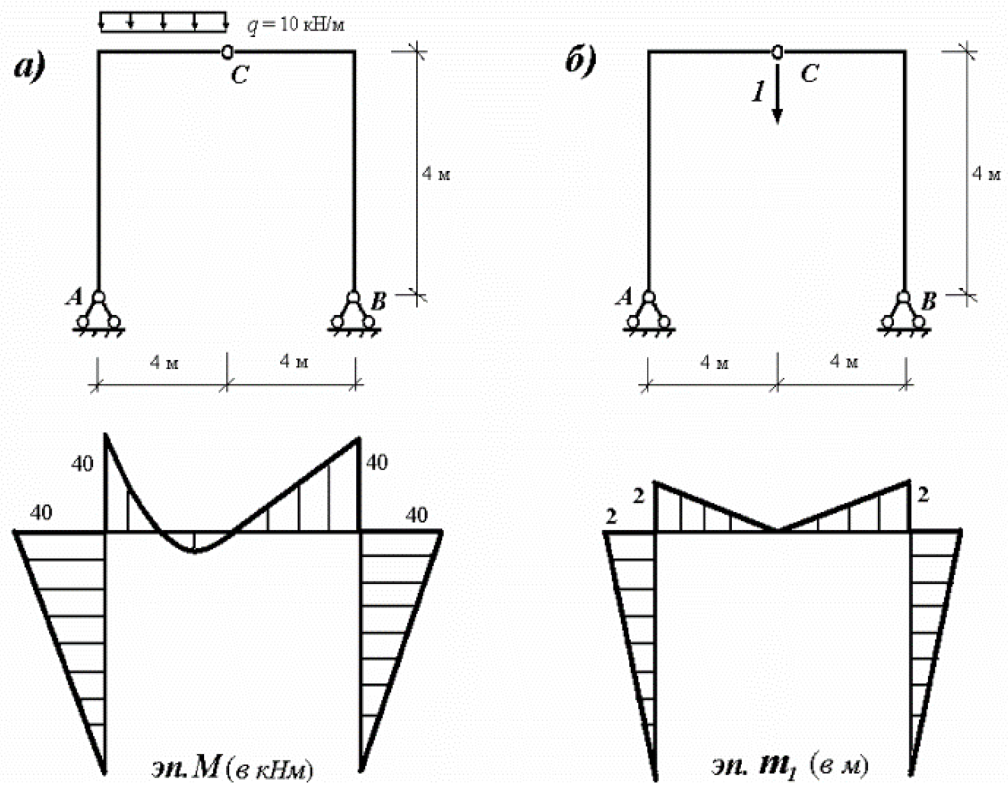


Рис. 25

Вспомогательное единичное состояние, соответствующее искомому перемещению, и единичная эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 25, б.

Для определения вертикального перемещения шарнира С перемножим по правилу Верещагина эпюры изгибающих моментов действительного и вспомогательного состояний заданной рамы

$$\Delta_1 = \frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{4EI}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{10\cdot 4^3}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\right) + \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\right) +$$

$$+\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{186{,}7}{EI}.$$

Числовое значение искомого перемещения

$$\Delta_1 = \frac{186{,}7}{EI} = \frac{186{,}7}{2\cdot 10^8\cdot 7080\cdot 10^{-8}} = 0{,}013\ \text{м}.$$

5.2 Определение перемещения от температурного воздействия

Под температурным воздействием понимается влияние изменения температуры стержней конструкций по отношению к начальной, т.е. имевшей место при возведении сооружения. Температурное воздействие в сооружениях приводят к перемещениям, не вызывая внутренних усилий в статически определимых системах. Стержни в таких конструкциях удлиняются (укорачиваются) и искривляются. Вследствие этого сечения элементов сооружения поступательно перемещаются (линейные перемещения) и поворачиваются (угловые перемещения).

Температурное воздействие на стержни конструкции обычно характеризуется двумя независимыми величинами - внутренней температурой $t_в$ и наружной температурой $t_н$ и зависимой от них величиной - температурой на оси t_o. Внутренней температурой всегда считается более высокая температура

$$t_в > t_н$$

Поэтому внутренняя температура не всегда совпадает с температурой внутри контура конструкции.

Например, если температура внутри контура рамы равняется -25°С, а снаружи - +15°С, то в этом случае $t_в$ =+15°С, а $t_н$ = -25 °С.

Выразим приращение температуры в произвольной точке конструкции Δt через $t_в$ и $t_н$.

Поскольку температурные изменения в конструкции происходят с того момента, как завершен монтаж конструкции, то величину Δt будем определять по отношению к температуре завершения монтажа конструкции. Такая температура называется температурой замыкания $t_з$.

Будем считать, что изменение температуры по высоте поперечного сечения некоторого стержня конструкции происходит по линейному закону (рис. 26, а).

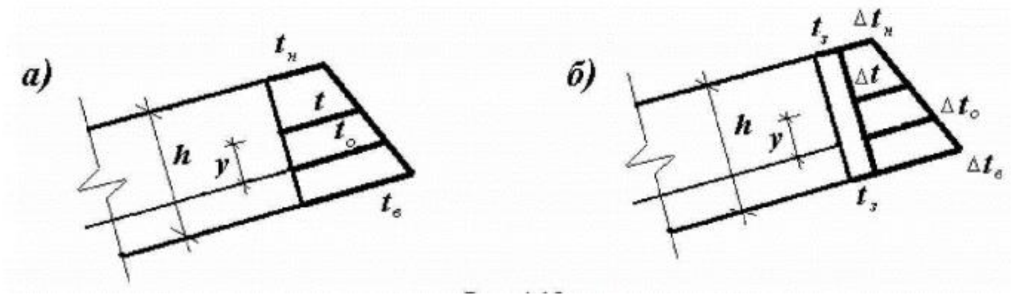


Рис. 26

Считаем, что сечение отнесено к главным центральным осям инерции.

Приращения температуры в трех характерных точках рассматриваемого сечения связаны с температурой замыкания следующими соотношениями:

$$\Delta t_в = t_в - t_з;\ \Delta t_н = t_н - t_з;\ \Delta t_о = t_о - t_з,$$

а график, описывающий изменение величины Δt по высоте поперечного сечения, имеет вид трапеции (рис. 26, б). Скорость изменения приращения температуры по высоте поперечного сечения определяется по формуле

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_в - \Delta t_н}{h}$$

Если центр тяжести сечения находится на половине высоты стержня, то перемещения от температурного воздействия вычисляются по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \cdot \Delta t_o \cdot \omega_N + \sum \alpha \cdot \Delta t' \cdot \omega_M,$$

где α коэффициент температурного расширения материала;

ω_N – площадь эпюры продольных сил на участке стержня в единичном состоянии системы;

ω_M – площадь эпюры изгибающих моментов на участке стержня в единичном состоянии системы.

Знак суммы в этой формуле распространяется на все стержни, подвергнутые тепловому воздействию.

Знаки слагаемых определяются следующим образом: t_o и N берутся со своими знаками; произведение $\Delta t' \cdot \omega_M$ положительно, если изгибающий момент от единичной нагрузки растягивает на участке бруса те же волокна, которые удлиняются от температурного воздействия, соответствующего Δt.

Пример. Для рамы, показанной на рис. 27, определить вертикальное перемещение шарнира С от температурного воздействия со следующими параметрами: $t_в$ =+17°С, а $t_н$ = -10 °С, $t_з$ =0°С. Коэффициент линейного расширения материала рамы $\alpha = 1{,}18 \cdot 10^{-5}$. Поперечное сечение всех элементов рамы - двутавр № 30.

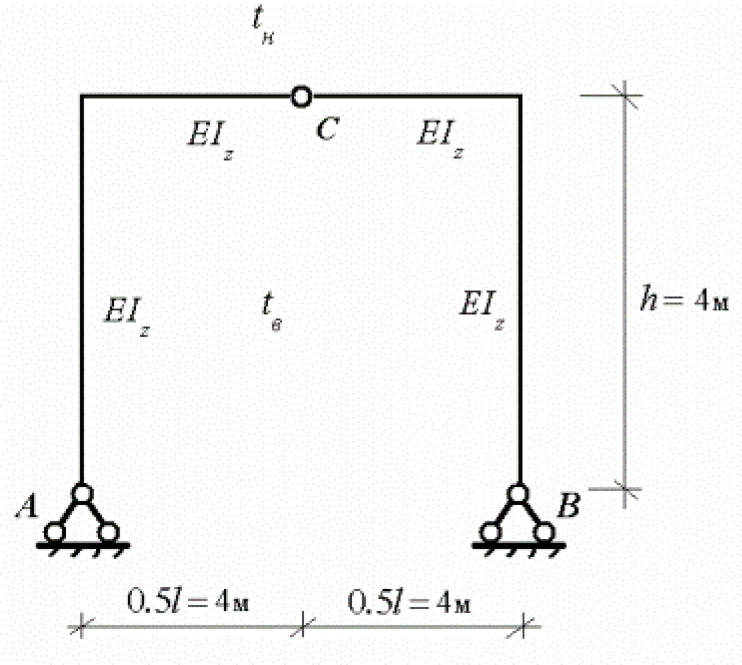


Рис. 27

Поскольку параметры температурного воздействия для всех элементов рамы одинаковы, то приращения температур для них принимают следующие значения:

$$\Delta t_н = t_н - t_з = -10^\circ C,$$

$$\Delta t_в = t_в - t_з = +17^\circ C.$$

С учетом равенства высот поперечных сечений и их симметрии, удельный температурный перепад $\Delta t'$ и приращение температуры на оси Δt_0 для всех рамных элементов принимают следующие значения:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_в - \Delta t_н}{h} = \frac{17-(-10)}{0{,}3} = 90\,{}^\circ C/м\ ,$$

$$\Delta t_o = \frac{\Delta t_в + \Delta t_н}{2} = \frac{17+(-10)}{2} = 3{,}5^\circ C.$$

Вспомогательное состояние характеризуется эпюрами M_1 и N_1 (рис. 28).

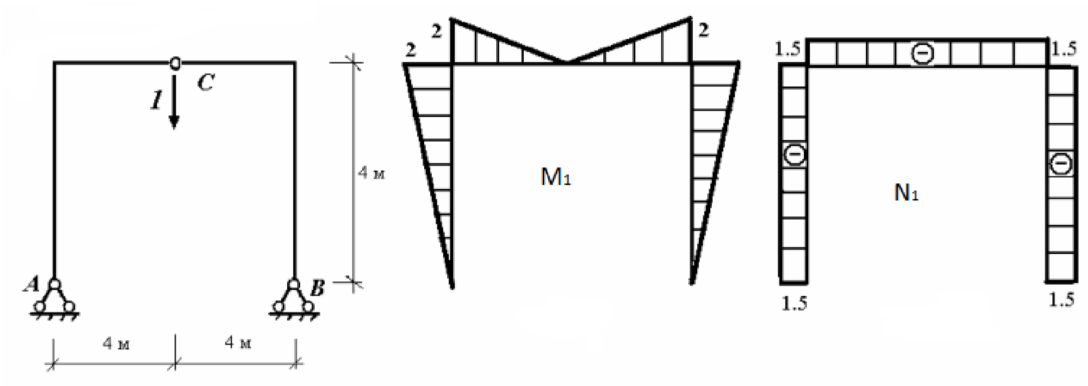


Рис. 28

Для определения искомого перемещения перемножим значение Δt_0 со значениями площадей эпюр M_1, и значением $\Delta t'$ со значениями эпюр N_1.

$$\Delta_1 = \alpha\left(-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 90\cdot 4 - 3{,}5\cdot 4\cdot 1.5\cdot 4\right) = -\alpha\cdot 1{,}524\cdot 10^3.$$

или

$$\Delta_1 = \alpha\cdot 1{,}524\cdot 10^3 = -1{,}18\cdot 10^{-5}\cdot 1{,}524\cdot 10^3 = -0{,}018\,м.$$

5.3 Определение перемещений от осадки опор

Формула для определения перемещений от осадки опор (или неточности изготовления) в стержневых системах выводится на основании принципа возможных перемещений. Записав работу сил «единичного» состояния на перемещениях заданного состояния, получаем

$$\Delta_{iC} = -\sum R_j \cdot c_j \tag{19}$$

В этой формуле: Δ_{iC} -искомое перемещение какой-либо точки (сечения) в заданном направлении *i*; R_j реакция в *j*-й связи, которая возникает от действия единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения; c_j -заданное смещение *j*-й связи (опоры). Чем вызвано это смещение не имеет значения.

Произведение $R_j \cdot c_j$ положительно, если реакции R_j и заданное смещение опоры c_j совпадают по направлению.

Пример. Для рамы, показанной на рис. 29, определить вертикальное перемещение шарнира С от горизонтального смещения опоры А влево на величину 15см.

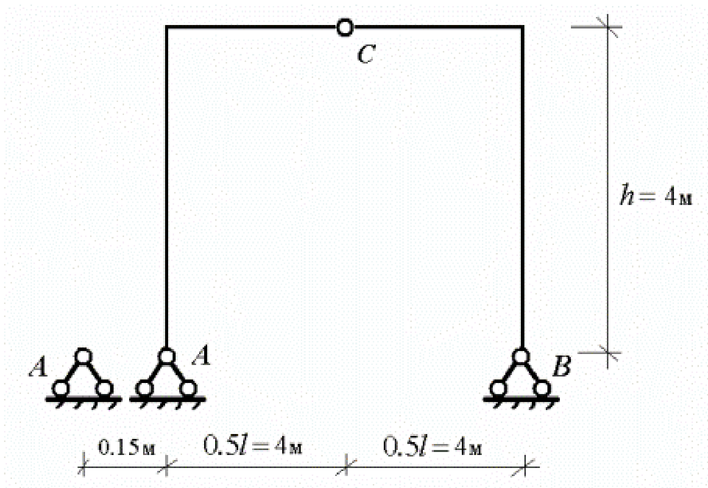


Рис. 29

Действительное состояние рамы (рис. 30, а), где смещения опор могут происходить по четырем направлениям, характеризуется следующими значениями:

$$c_1 = 15 \text{ см},\ c_2 = 0,\ c_3 = 0,\ c_4 = 0.$$

Вспомогательное состояние рамы (рис. 30, б) характеризуется единичными опорными реакциями

$$R_{11} = -0,5,\ R_{21} = 0,5,\ R_{31} = 0,5,\ R_{41} = 0,5,$$

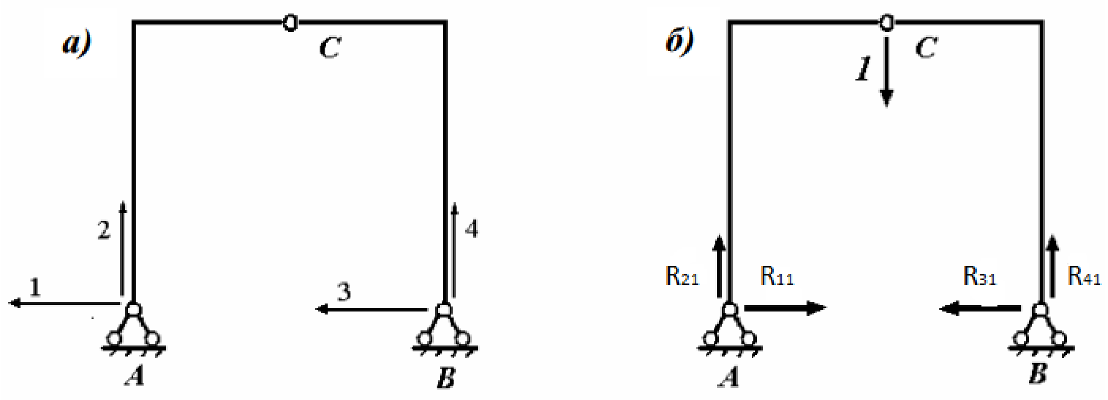


Рис. 30

Тогда числовое значение искомого перемещения равняется

$$\Delta_{iC} = -\sum_{j=1}^{4} R_{j1} \cdot c_j = -(-0,5) \cdot 0,15 = 0,075\text{м}$$

6. Выполнение расчетов на ПК

Расчеты выполняются в соответствии с инструкцией, представленной в [5, 6].

Библиографический список

1. Дарков, А. В. Строительная механика/ А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. - М.: Высш. шк., 1986. - 607 с.

2. Клейн, Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики/ Г. К. Клейн, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат. - М. : Высш. шк., 1978. -318 с.

3. Снитко, Н. К. Строительная механика/ Н. К. Снитко. - М.: Высш. шк., 1989.- 187 с.

4. Строительная механика: Учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1-70 02 01. В 3-х ч. Ч. 1. Статически определимые системы / Сост. и общ. ред. Л.С. Турищева.– Новополоцк: ПГУ, 2005. – 224 с.

5. Будівельна механіка”. Методичні вказівки до вивчення теми "Визначення переміщень в статично визначених рамах в ПК SCAD" для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія усіх форм навчання (російськ.)/ Укл.: Портнов Г.Д., Пукалов В.В., Тихий А.А. – Кропивницький: ЦНТУ, 2020. – 33 с.

6. “Будівельна механіка”. Методичні вказівки до вивчення теми "Визначення переміщень в статично визначених рамах в ПК ЛИРА - САПР" для студентів спеціальності 192 Будівництво та цивільна інженерія усіх форм навчання (російськ.)/ Укл.: Портнов Г.Д., Пукалов В.В., Тихий А.А. – Кропивницький: ЦНТУ, 2020. – 34 с.

Содержание