

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ДЛЯ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

КРЕДИТНО-МОДУЛЬНА СИСТЕМА

Навчальний посібник

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів*

Рецензент

доктор фіз.-мат. наук, професор Д.В. Гусак

Теорія ймовірностей і математична статистика для економічних спеціальностей. Кредитно-модульна система: Навчальний посібник / Гончаров В.В., Гончарова С.Я., Личук М.В. – Кіровоград: КНТУ, 2006 р. – 172 с.

Навчальний посібник є одним з перших навчальних видань, написаних спеціально для роботи за кредитно-модульною системою організації навчального процесу. Пропонує конкретну модульно-рейтингову навчальну технологію викладання теорії ймовірностей і математичної статистики для економічних спеціальностей.

Містить курс лекцій із основних розділів теорії ймовірностей і математичної статистики, питання для самоконтролю, завдання з відповідних розділів для модульного контролю та довідково-інформаційні таблиці для розв'язання задач.

Орієнтований на студентів економічних спеціальностей.

© В.В. Гончаров, 2006

© С.Я. Гончарова, 2006

© М.В. Личук, 2006

© КНТУ 2006

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ЗА КРЕДИТНО МОДУЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ	6
1. План організації навчального процесу	6
2. Схема організації навчального процесу	9
3. Система оцінювання	10
4. Критерій оцінювання	11
5. Урахування результатів поточного та модульного контролів.....	11
Розділ I. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ	12
§1. Стохастичний експеримент, випадкові події	12
§2. Основні поняття комбінаторики.....	15
§3. Імовірність	18
§4. Геометричні ймовірності	24
§5. Незалежні випадкові події	25
§6. Умовні ймовірності	26
Розділ II. ПОСЛІДОВНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ	31
§1. Схема Бернуллі	31
§2. Теореми Лапласа	32
§3. Теорема Пуассона	34
§4. Імовірність відхилення частоти від імовірності в незалежних випробуваннях	35
Розділ III. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ	37
§1. Випадкові величини.....	37
§2. Розподіли випадкових величин.....	38
§3. Математичне сподівання випадкової величини	50
§4. Нерівність Чебишова	57
§5. Нормальний розподіл	59
Розділ IV. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ	61
§1. Теорема Чебишова	61
§2. Поняття про центральну граничну теорему	63
Розділ V. ФУНКЦІЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ	64
§1. Функція одного випадкового аргументу	64
§2. Функція двох випадкових аргументів	68
Розділ VI. ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ	70
§1. Функція розподілу випадкового вектора	70
§2. Дискретні випадкові вектори	71

§3. Неперервні випадкові вектори	74
Розділ VII. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАЛЕЖНОСТІ	76
§1. Коваріація двох випадкових величин	76
§2. Коефіцієнт кореляції та його властивості	77
§3. Числові характеристики випадкових векторів	80
Розділ VIII. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА І СТАТИСТИЧНІ	
МЕТОДИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ	82
§1. Методи статистичного опису результатів спостережень	82
§2. Методи виключення грубих похибок експерименту	87
§3. Числові характеристики вибіркового розподілу	88
§4. Статистичне оцінювання параметрів розподілу генеральної сукупності за вибіркою	90
§5. Перевірка статистичних гіпотез	103
§6. Критерій χ^2 і його застосування	111
§7. Однофакторний дисперсійний аналіз	116
§8. Кореляційний і регресивний аналіз	121
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	127
ДОДАТКИ	158
ЛІТЕРАТУРА	172

ПЕРЕДМОВА

Конструктивне намагання держави узгодити національну систему освіти із загальноєвропейською веде до реформ вищої школи, а саме до переходу до кредитно-модульної системи планування та організації навчального процесу, яка згідно з Болонською декларацією ухвалена як універсальний загальноєвропейський стандарт. В основу системи покладено спеціальну кредитно-модульну схему, яка, в свою чергу, базується на специфічних модульно-рейтингових технологіях організації навчання. Навчальний посібник пропонує одну з таких технологій, яка в процесі практичної роботи може вдосконалюватись і розвиватись.

Посібник є конспектом лекцій курсу „Теорія ймовірностей і математична статистика”, який написаний у повній відповідності до типової програми з вищої математики для економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Посібник може бути корисним також для студентів технічних спеціальностей та педагогічних університетів.

Посібник містить необхідні означення та поняття, головні теоретичні твердження та велику кількість прикладів і розв’язаних задач, а також питання для самоперевірки, які дозволяють студентові більш ефективно опрацювати навчальний матеріал в процесі самостійного вивчення. Розділи посібника розбиті на модулі. Індивідуальні завдання, які складені у відповідності до модулів, сприятимуть формуванню практичних прийомів і навичок логічного мислення.

ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ЗА КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ

1. ПЛАН ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ТИПОВОГО СЕМЕСТРОВОГО КУРСУ

Загальна кількість годин за робочим навчальним планом 108.

Модуль I. Випадкові події. Послідовні незалежні випробування.

№ тижня	Теми лекцій	Теми практичних занять	Індивідуальні завдання	Самостійна робота
1	2	3	4	5
1	1. Стохастичний експеримент, випадкові події.	1. Стохастичний експеримент, випадкові події.		1. Випадкові події.
2	2. Основні поняття комбінаторики.	Основні поняття комбінаторики.		2. Основні поняття комбінаторики.
3	3. Імовірність. Геометричні ймовірності.	2. Імовірність. Геометричні ймовірності.	№ 1.	3. Імовірність. Геометричні ймовірності.
4	4. Незалежні випадкові події. Умовні ймовірності.	Незалежні випадкові події. Умовні ймовірності.	№ 2, 3.	4. Незалежні випадкові події. Умовні ймовірності.
5	5. Схема Бернуллі. Теорема Лапласа, Пуассона. Імовірність відхилення частоти від імовірності в незалежних випробуваннях.	3. Схема Бернуллі. Теорема Лапласа, Пуассона.	№ 4, 5.	5. Схема Бернуллі. Теорема Лапласа, Пуассона.
Модульний контроль I.				

**Модуль II. Випадкові величини і функції розподілу. Закон великих чисел.
Функція випадкової величини. Випадкові вектори. Числові
характеристики залежності.**

1	2	3	4	5
6	6. Випадкові величини. Розподіли дискретних випадкових величин.	4. Випадкові величини. Розподіли дискретних випадкових величин.	№ 6.	6. Випадкові величини. Розподіли дискретних випадкових величин.
7	7. Функції розподілу та їх властивості. Неперервні випадкові величини. Математичне сподівання та дисперсія. Нерівність Чебишова.	Функції розподілу та їх властивості. Неперервні випадкові величини. Математичне сподівання та дисперсія.	№ 7, 8, 9.	7. Функції розподілу та їх властивості. Неперервні випадкові величини. Математичне сподівання та дисперсія.
8	8. Нормальний розподіл. Теорема Чебишова. Поняття про центральну граничну теорему.	5. Нормальний розподіл. Теорема Чебишова.	№ 10, 11.	8. Нормальний розподіл.
9	9. Функція випадкової величини.		№ 12, 13.	9. Функція випадкової величини.
10	10. Функція розподілу випадкового вектора. Дискретні випадкові вектори. Неперервні випадкові вектори.	6. Випадкові вектори. Коваріація двох випадкових величин.	№ 14, 15, 16.	10. Випадкові вектори.
11	11. Коваріація двох випадкових величин. Коефіцієнт кореляції та			

	його властивості. Числові характеристики випадкових векторів.	Модульний контроль II
--	--	-----------------------

**Модуль III. Математична статистика і статистичні методи обробки
результатів**

1	2	3	4	5
12	12. Методи статистичного опису результатів спостережень. Методи виключення грубих похибок експерименту. Числові характеристики вибіркового розподілу.	7. Методи статистичного опису результатів спостережень. Числові характеристики вибіркового розподілу. Статистичне оцінювання параметрів розподілу за вибіркою.		11. Методи статистичного опису результатів спостережень. Числові характеристики вибіркового розподілу.
13	13. Статистичне оцінювання параметрів розподілу генеральної сукупності за вибіркою.		№ 17.	12. Статистичне оцінювання параметрів розподілу за вибіркою.
14	14. Перевірка статистичних гіпотез.	8. Перевірка статистичних гіпотез.		13. Перевірка статистичних гіпотез.
15	15. Критерій χ^2 і його застосування.	Критерій χ^2 і його застосування.	№ 18.	14. Критерій χ^2 і його застосування.
16	16. Однофакторний дисперсійний аналіз.	9. Однофакторний дисперсійний аналіз. Кореляційний і регресивний аналіз.	№ 19.	15. Однофакторний дисперсійний аналіз.
17	17. Кореляційний і регресивний аналіз.	Модульний контроль III.		

2. СХЕМА ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ З
ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ
ДЛЯ ТИПОВОГО СЕМЕСТРОВОГО КУРСУ

Загальна кількість годин за робочим навчальним планом 108.

Модуль (год)	Тематичні мікромодулі (год)	Форма вивчення матеріалу (год)		
		лекції	практичні заняття	самостійна робота
1	2	3	4	5
Модуль I (33)	1. Випадкові події. Випадкові події. Основні поняття комбінаторики. Імовірність. Геометричні ймовірності. Незалежні випадкові події. Умовні ймовірності. (23)	8	4	11
	2. Послідовні незалежні випробування. Схема Бернуллі. Теореми Лапласа, Пуассона. Імовірність відхилення частоти від імовірності в незалежних випробуваннях. (10)	2	2	6
Модуль II (41)	3. Випадкові величини і функції розподілу. Випадкові величини. Розподіли випадкових величин. Математичне сподівання випадкової величини. Нерівність Чебишова. Нормальний розподіл. (17)	5	3	9
	4. Закон великих чисел. Теорема Чебишова. Поняття про центральну граничну теорему. (5)	1	1	3
	5. Функція випадкової величини. Функція одного випадкового аргументу. Функція двох випадкових аргументів. (7)	2	–	5
	6. Випадкові вектори. Функція розподілу випадкового вектора. Дискретні випадкові вектори. Неперервні випадкові вектори. (6)	2	1	3
	7. Числові характеристики залежності. Коваріація двох випадкових величин Коефіцієнт кореляції та його властивості. Числові характеристики випадкових векторів. (6)	2	1	3

1	2	3	4	5
Модуль ІІІ (34)	8. Математична статистика і статистичні методи обробки результатів. Методи статистичного опису результатів спостережень. Методи виключення грубих похибок експерименту. Числові характеристики вибіркового розподілу. Статистичне оцінювання параметрів розподілу генеральної сукупності за вибіркою. Перевірка статистичних гіпотез. Критерій χ^2 і його застосування. Однофакторний дисперсійний аналіз. Кореляційний і регресивний аналіз. (34)	12	6	16

3. СИСТЕМА ОЦІНЮВАННЯ

Оцінка за шкалою навчального закладу	Оцінка за національною шкалою	Оцінка за Європейською кредитно-трансферною шкалою	
		Оцінка	Означення
90–100	Відмінно	A	Відмінно (відмінне виконання лише з незначною кількістю помилок)
82–89	Добре	B	Дуже добре (вище середнього рівня з кількома помилками)
75–81		C	Добре (в загальному правильне виконання з певною кількістю суттєвих помилок)
67–74	Задовільно	D	Задовільно (непогано, але зі значною кількістю недоліків)
60–66		E	Достатньо (виконання задовольняє мінімальні критерії)
35–59	Незадовільно	FX	Незадовільно (з можливістю повторного складання)
1–34		F	Незадовільно (з обов'язковим повторним курсом)

4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

№	Вид виконаної роботи	Максимальна кількість балів	Всього
1	Модульний контроль	18	54
2	Практичне заняття – мікромодуль	2	18
3	Індивідуальне завдання	2	28
Результуючий рейтинг			100

5. УРАХУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ПОТОЧНОГО ТА МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ СЕМЕСТРОВОЇ РЕЗУЛЬТУЮЧОЇ РЕЙТИНГОВОЇ ОЦІНКИ

Атестованим вважається студент, який:

- а) не отримав менше 10 балів на жодному модульному контролі;
- б) виконав і захистив усі індивідуальні завдання;
- в) має середню поточну рейтингову оцінку 60 і більше балів.

Розділ I. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

В нашому повсякденному житті ми постійно зустрічаємось з такими поняттями, як „випадковість”, „випадкова подія”. У цьому розділі ми дамо математичне визначення цих понять.

Спостережні нами події можна розділити на три види: вірогідні, неможливі і випадкові.

Вірогідною називають подію, яка обов’язково відбудеться, неможливою – яка обов’язково не відбудеться, а випадковою – яка відбудеться або не відбудеться за одних і тих же обставин.

Але теорія ймовірностей вивчає не всякі події, що можуть відбутися або не відбутися.

Відзначимо особливості подій, що вивчає теорія ймовірностей:

- 1) можливість відтворити подію за одних і тих же обставин;
- 2) можливість відтворити подію достатню кількість разів;
- 3) певна незалежність відтворення подій.

§1. Стохастичний експеримент, випадкові події.

Стохастичний експеримент, простір елементарних подій. Вихідними поняттями теорії ймовірностей є поняття стохастичного експерименту, випадкової події та ймовірності випадкової події. *Стохастичними* називають експерименти, результати яких не можна передбачити наперед.

В основі поширеного в теперішній час теоретико-множинного методу вивчення теорії ймовірностей, який прийнятий у даному посібнику, лежить припущення, що експерименту, який розглядається, поставлено у відповідність деяку множину Ω , елементи якої дають найбільш повну інформацію про можливі результати в даному експерименті. Множину Ω називають *простором елементарних подій*, а її елементи ω – *елементарними подіями*. Надалі елементи ω простору елементарних подій Ω називатимемо *точками*.

Приклади.

1. Проводиться експеримент: один раз підкидають монету. Простір елементарних подій цього експерименту має вигляд $\Omega = \{\tilde{A}, \tilde{O}\}$, де буква $\tilde{A}$ означає появу герба, буква $\tilde{O}$ – появу цифри.

2. Монету підкидають двічі. Простір елементарних подій цього експерименту має вигляд $\Omega = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\tilde{O}, \tilde{O}\tilde{A}, \tilde{O}\tilde{O}\}$. Тут, наприклад, $\tilde{A}\tilde{O}$ означає, що при першому

підкиданні з'явиться герб, а при другому – цифра.

3. Підкидають гральний кубик. Нас цікавить кількість зерен, яка випаде на верхній грані. Простором елементарних подій є множина $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. Гральний кубик підкидають m раз підряд. У якості простору елементарних подій можна розглядати множину всіх m -вимірних векторів вигляду $(i_1, i_2, \dots, i_m)$, де кожна компонента i_k може приймати одне із значень 1, 2, 3, 4, 5, 6.

У розглянутих вище прикладах простір елементарних подій був скінченною множиною. Проте в багатьох задачах теорії ймовірностей доводиться мати справу з експериментами, що мають нескінченну кількість можливих результатів випробування.

Приклади.

1. Припустимо, що монету підкидають до першої появи герба. Простором елементарних подій такого експерименту є множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots, \omega_\infty\}$, де $\omega_n = \underbrace{\ddot{O} \dots \ddot{O}}_n \ddot{A}$ означає, що герб вперше з'явиться при n -ому підкиданні монети, а ω_∞ відповідає тому випадку, коли герб ніколи не з'явиться (експеримент продовжується нескінченно довго).

2. Задача про зустріч. Дві особи A і B домовились зустрітися на проміжку часу $[0, T]$. Якщо через x позначити час приходу A , а через y час приходу B , то простором елементарних подій буде множина $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$.

3. Спостерігається частинка, що здійснює броунівський рух. Простір елементарних подій – множина всіх можливих траєкторій частинки.

Випадкові події. Говорячи про експеримент у теорії ймовірностей, ми не цікавимось його технічною стороною, а тільки тим, які події в цьому експерименті можуть спостерігатися і що в результаті проведеного експерименту дійсно спостерігалось. Таким чином, з кожним експериментом пов'язують деяку множину подій, про які можна зробити висновок, здійснились вони в даному експерименті чи ні. Такі події називають *спостережними в даному експерименті*.

Нехай A – довільна спостережна в даному експерименті подія. Оскільки кожна елементарна подія ω простору елементарних подій Ω дає повну інформацію про результат експерименту, то, знаючи, що результат експерименту описується точкою ω , завжди можна сказати, відбулась подія A чи ні. Точки ω , що описують результат експерименту, в якому подія A відбулась, називають *елементарними подіями, сприятливими події A* .

Випадковою подією називають будь-яку підмножину простору елементарних подій. Отже, надалі подія A – це деяка підмножина Ω , що складається з усіх точок ω – елементарних подій, які сприяють події A . Якщо результат експерименту

описується точкою $\omega \in A$, то в даному експерименті подія A відбулась, якщо ж $\omega \notin A$, то подія A в даному експерименті не відбулась.

Приклади.

1. Нехай монету підкидають двічі і A – подія, що полягає в тому, що хоча б один раз з'явиться герб. Тоді $\Omega = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\tilde{O}, \tilde{O}\tilde{A}, \tilde{O}\tilde{O}\}$, $A = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\tilde{O}, \tilde{O}\tilde{A}\}$.

2. Нехай один раз підкидають гральний кубик і A – подія, що полягає в тому, що випаде парна кількість зерен. Тоді $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$.

Як відомо, для множин визначено відношення порядку і над ними можна виконувати певні алгебраїчні операції. Проаналізуємо зміст цих понять у тому випадку, коли підмножини деякої множини Ω інтерпретуються як події, спостережні в деякому експерименті.

1. Сама множина Ω , що розглядається як подія, характеризується тим, що в результаті експерименту вона обов'язково відбудеться. Дійсно, ніякі інші результати експерименту, крім тих, які описуються точками $\omega \in \Omega$, за означенням неможливі. Множину Ω називають *вірогідною* подією.

2. Підмножиною множини Ω , очевидно, є порожня множина $\emptyset$. Якщо $\emptyset$ ототожнювати з подією, то ця подія не відбувається і її називають *неможливою* подією.

3. Підмножини A, B множини Ω впорядковані. Пишуть $A \subset B$, якщо кожний елемент множини A міститься в B . Якщо A і B – події, то $A \subset B$ означає, що, якщо подія A відбулася, то подія B теж відбулася. В цьому випадку говорять, що з події A випливає подія B .

Для будь-якого A , очевидно, $A \subset \Omega$. За означенням приймають $\emptyset \subset A$.

4. *Сумою (або об'єднанням) двох множин $A \cup B$* називають множину, що містить всі елементи, які входять або в множину A , або в множину B і не містить ніяких інших елементів (див. рис. 1). Для подій це слід інтерпретувати так: сумою двох подій A і B називають подію $A \cup B$, яка полягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій A або B .

Аналогічний зміст має сума довільної кількості подій.

Відмітимо, що для будь-яких A і B : $A \cup \emptyset = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$. Якщо подія C така, що $A \subset C$, $B \subset C$, то $A \cup B \subset C$.

5. *Перетином (або добутком) двох множин $A \cap B$* називають множину, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать як множині A , так і множині B (див. рис. 2). На мові алгебри подій подія $A \cap B$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається і подія A , і подія B одночасно.

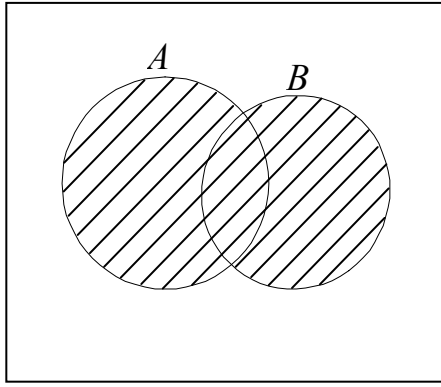


Рис. 1.

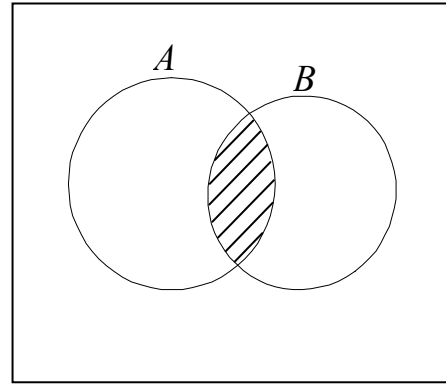


Рис. 2.

Аналогічний зміст має перетин довільної кількості подій.

Перетин подій називають також їх *суміщенням*.

Очевидні співвідношення: $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \Omega = A$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, і якщо $C \subset A \cap B$, то $C \subset A$ і $C \subset B$.

Домовимось дві події A і B називати *несумісними*, якщо їх суміщення є подією неможливою, тобто $A \cap B = \emptyset$.

Несумісні події зображаються множинами, що не мають спільних точок.

6. Кожній множині A поставимо у відповідність іншу множину – її доповнення $\bar{A}$, що складається з усіх точок, що не входять в множину A : $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

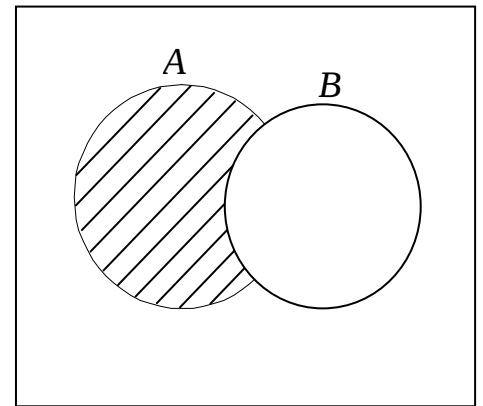


Рис. 3.

Якщо A – випадкова подія, то $\bar{A}$ – подія, що відбувається тоді і тільки тоді, коли A не відбувається. Подію $\bar{A}$ називають подією, *протилежною* до A .

7. Різницею $A \setminus B$ двох множин A і B є множина, що складається з елементів, що входять в A , але не входять у B . Якщо A і B – події, то $A \setminus B$ – подія, що відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається A , але не відбувається B (див. рис. 3).

§2. Основні поняття комбінаторики.

Комбінаторика – це розділ математики, що вивчає розташування об'єктів у відповідності зі спеціальними правилами і методи підрахунку кількості всіх можливих способів, якою ці розташування можна здійснити.

Сформулюємо основні поняття комбінаторики.

Основний принцип комбінаторики (правило добутку). Якщо деякий

вибір А можна здійснити n різними способами, а для кожного з цих способів деякий інший вибір В можна здійснити t способами, то вибір А і В (у вказаному порядку) можна здійснити $n \cdot t$ способами.

Приклад. З Києва до Умані веде t різних доріг, а з Умані до Одеси – n доріг. Якою кількістю різних доріг можна здійснити подорож з Києва до Одеси через Умань?

Розв'язок. $\triangleright$ Вибравши одну з t можливих доріг з Києва до Умані, далі можна продовжити подорож n способами. Тому загальна кількість доріг рівна $n \cdot t$. $\blacktriangleleft$

Правило суми. *Якщо деякий вибір А можна здійснити n різними способами, а деякий інший вибір В можна здійснити t способами, то вибір або А, або В можна здійснити $n + t$ способами.*

Приклад. З Києва до Кіровограда веде t різних доріг через Кагарлик і n доріг через Бориспіль. Якою кількістю різних доріг можна доїхати з Києва до Кіровограда?

Розв'язок. $\triangleright$ З Києва до Кіровограда можна доїхати, вибравши одну з $n + t$ можливих доріг. Тому загальна кількість доріг рівна $n + t$. $\blacktriangleleft$

Сполучення з n по k . Нехай Ω – множина з n елементів. Довільну k -елементну підмножину множини з n елементів називають *сполученням з n по k* . Порядок елементів в підмножині несуттєвий. Кількість сполучень з n по k позначається C_n^k .

Теорема 1.1. *Кількість сполучень з n елементів по k рівна*

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}. \quad (1.1)$$

Доведення. Щоб побудувати k -елементну підмножину множини Ω , треба до $(k - 1)$ -елементної підмножини приєднати один з $n - k + 1$ елементів, які не входять в цю підмножину. Оскільки $(k - 1)$ -елементних підмножин є C_n^{k-1} і кожную з них можна зробити k -елементною $n - k + 1$ способами, то таким чином отримаємо $(n - k + 1)C_n^{k-1}$ підмножин. Але не всі вони будуть різними, так як кожную k -елементну підмножину можна побудувати k способами: приєднанням будь-якого з k її елементів. Тому знайдене число в k раз більше, ніж число C_n^k .

Отже,

$$kC_n^k = (n - k + 1)C_n^{k-1}.$$

Звідки

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1} = \frac{(n-k+1)}{k} \cdot \frac{(n-k+2)}{(k-1)} C_n^{k-2} = \dots = \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot (n-1)}{k(k-1) \cdot \dots \cdot 2} C_n^1.$$

Оскільки кількість одноелементних підмножин множини Ω рівна кількості елементів n , то, підставивши замість C_n^1 число n , отримаємо рівність (1.1). ■

Приклад. Скільки карток „Спортлото” 5 із 36 треба заповнити, щоб серед них обов’язково одна була з п’ятьма вгаданими номерами?

Розв’язок. $\triangleright$ Оскільки порядок „викреслювання” не має значення, то мова йде про сполучення 5 з 36. Якщо одна картка буде відрізнятися від іншої хоча б одним викресленим номером, то перебравши усі сполучення по 5 з 36, отримаємо одну картку з п’ятьма вгаданими номерами.

Тобто кількість карток рівна

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{31! \cdot 5!} = 376992. \blacktriangleleft$$

Впорядковані множини, перестановки. Множину називають *впорядкованою*, якщо кожному елементу цієї множини поставлене у відповідність деяке число (номер елемента) від 1 до n , де n – кількість елементів множини, так, що різним елементам відповідають різні числа. Очевидно, кожну множину, що містить більше одного елементу, можна впорядкувати не єдиним способом. Впорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або складом елементів, або їх порядком. *Перестановками* називають сукупність впорядкованих множин, які можна отримати з n елементів.

Кількість перестановок з n елементів позначають через P_n .

Теорема 1.2. Кількість всіх можливих перестановок із n елементів рівна добутку всіх натуральних чисел від 1 до n :

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!.$$

Доведення. Послідовно вибиратимемо елементи множини Ω і розташовуватимемо їх в певному порядку на n місцях. На перше місце можна поставити довільний з n елементів. Після того як заповнили перше місце, на друге місце можна поставити довільний з $n-1$ елементу, що залишились, і т.д. За правилом множення всі n місць можна заповнити

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

способами.

Отже, множину Ω з n елементів можна впорядкувати $n!$ способами. ■

Приклад. Скількома способами можна роздати 6 білетів шістьом студентам так, щоб кожний отримав один білет?

Розв'язок. $\triangleright$ Занумеруємо студентів від 1 до 6. Тоді шукане число дорівнює кількості перестановок із 6 елементів:

$$P_6 = 6! = 720. \blacktriangleleft$$

Розміщення з n по k . Розглянемо впорядковані підмножини даної множини Ω . Саму множину Ω вважаємо неупорядкованою, тому кожен її підмножину можна впорядкувати яким-небудь можливим способом. Кількість всіх k -елементних підмножин множини Ω рівна C_n^k . Кожну підмножину можна впорядкувати $k!$ способами. Таким чином, отримаємо всі впорядковані k -елементні підмножини множини Ω і їх кількість рівна $A_n^k = k! \cdot C_n^k$.

Теорема 1.3. *Кількість упорядкованих k -елементних підмножин n -елементної рівна*

$$A_n^k = k! C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1). \blacksquare$$

Впорядковані k -елементні підмножини n -елементної множини називають розміщеннями з n елементів по k . Розміщення з n по k відрізняються складом елементів або їх порядком.

Приклад. Припустимо, що телефонний номер міської АТС шестизначний. Скільки номерів АТС, в яких не повторюється жодна цифра? (номери можуть починатися з 0).

Розв'язок. $\triangleright$ Відомо, що телефонний номер складається з різної послідовності шести цифр. При складанні телефонного номера з 10 цифр обирають 6. Один номер відрізняється від іншого або різними цифрами, або їх порядком.

Таким чином, кількість телефонних номерів, у яких цифри не повторюються, дорівнює кількості розміщень із 10 по 6:

$$A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200. \blacktriangleleft$$

§3. Імовірність.

Введемо поняття ймовірності випадкової події. Це можна зробити різними способами. Але при цьому введені поняття будуть мати спільні властивості, які будуть вказані надалі.

Частота як імовірність. Припускаємо, що розглядаються стохастичні експерименти, які можна повторювати довільне кількість раз, і що при багаторазовому повторенні експерименту результати попередніх експериментів ніяк не впливають на події, які відбудуться в даному експерименті.

Розглянемо деякий стохастичний експеримент і подію A , спостережну в цьому експерименті. Повторимо експеримент n раз. Нехай $k_n(A)$ – кількість експериментів, в яких подія A відбулась.

Означення. *Відношення*

$$\nu_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

називається відносною або емпіричною частотою появи події A в проведеній серії експериментів.

Частота $\nu_n(A)$ має властивості:

- 1) $0 \leq \nu_n(A) \leq 1$;
- 2) $\nu_n(\Omega) = 1$;
- 3) якщо A і B – дві спостережні несумісні події, то

$$\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

Ці властивості випливають з того, що $k_n(A) \leq n$, $k_n(\Omega) = n$ (вірогідна подія відбувається при кожному здійсненні експерименту), і, якщо A і B – несумісні події, то

$$k_n(A \cup B) = k_n(A) + k_n(B).$$

Частота може бути обчислена лише після проведення серії експериментів, і вона може змінитися при проведенні іншої серії з n експериментів або при зміні n . Проте, як показує досвід, при достатньо великих n для більшості таких серій експериментів частота зберігає майже сталу величину, до того ж великі відхилення спостерігаються тим рідше, чим більше n .

Приклад. Нехай багато разів підкидають монету. Частота появи герба в довгих серіях експериментів мало відрізняється від 0,5.

Якщо при великих n частота $\nu_n(A)$ появи події A мало відрізняється від деякого фіксованого значення p , то кажуть, що подія A стохастично стійка, а число p є ймовірністю події A .

Приклад. Із партії деталей для перевірки вибрали 100 деталей, серед яких виявлено 5 нестандартних. Яка частота появи нестандартної деталі в партії?

Розв'язок. $\triangleright$ Нехай подія A – поява нестандартної деталі. Частота дорівнює

відношенню кількості нестандартних деталей до загальної кількості деталей у вибраній сукупності:

$$v_{100}(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}. \blacktriangleleft$$

Приведене емпіричне означення ймовірності події характеризує природничо-науковий зміст поняття ймовірності. Щоб перейти до формального означення ймовірності, треба ввести аксіоми, що випливають з цього змісту.

Аксіоми ймовірності (за Колмогоровим). Розглянемо стохастичний експеримент зі скінченною або зліченною кількістю результатів випробувань $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots, \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$. Припустимо, що кожній елементарній події ω_i відповідає деяка „вага” p_i , яку назовемо „ймовірністю” елементарної події ω_i , і що вага p_i має наступні властивості:

- 1) $p_i \geq 0$;
- 2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Нехай A – довільна випадкова подія, спостережна в даному експерименті, тобто A – довільна підмножина Ω .

Означення. Ймовірністю $P(A)$ події A називають суму ймовірностей елементарних подій, що складають подію A :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

Для введення таким чином ймовірності справедливі аксіоми:

Аксіома 1. Кожній спостережній події A відповідає число $P(A)$, що приймає значення з $[0, 1]$ і називається ймовірністю події A .

Аксіома 2. $P(\Omega) = 1$, де Ω – вірогідна подія.

Аксіома 3. Якщо A, B – несумісні події, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

З аксіоми 3 методом математичної індукції легко отримати, що для довільного скінченного кількості попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_k$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i).$$

Теорія ймовірностей не вчить тому, як „правильно” визначати ймовірності p_i , елементарних подій ω_i . При визначенні цих ймовірностей приймаються до уваги інтуїтивні уявлення про p_i , як про частоту елементарної події ω_i в серії з

багаторазових повторень експерименту.

Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ є скінченним. Вважатимемо, що всі елементарні події $\omega_i, i = 1, 2, \dots, n$, є *рівноможливими*, тобто жодна з подій не має переваг появи при випробуванні – вони мають однакову ймовірність $1/n$. Випадковій події A відповідає однойменна скінченна множина $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, що складається з m елементарних подій.

Приклади.

1. Одночасно підкидають дві монети. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб.

Розв'язок. $\triangleright$ A – подія, що полягає в тому, що хоча б один раз випаде герб. Тоді $\Omega = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\tilde{O}, \tilde{O}\tilde{A}, \tilde{O}\tilde{O}\}$, $A = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\tilde{O}, \tilde{O}\tilde{A}\}$. Елементарні події $\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\tilde{O}, \tilde{O}\tilde{A}, \tilde{O}\tilde{O}$ – рівноможливі і, так як $P(\Omega) = 1$, їх ймовірності рівні $p_i = 1/4, i = \overline{1, 4}$, тому

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 p_i = \frac{3}{4}. \blacktriangleleft$$

2. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, \dots, 22\}$. З цієї множини навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що воно буде кратним 5 або 11?

Розв'язок. $\triangleright$ Ω – простір елементарних подій, що містить 22 рівноможливі елементарні події і, так як $P(\Omega) = 1$, їх ймовірності рівні $p_i = 1/22, i = \overline{1, 22}$.

Позначимо через A подію, що полягає в появі числа, кратного 5, а через B – у появі числа кратного 11. Тоді

$$A = \{5, 10, 15, 20\}, \quad B = \{11, 22\}.$$

Очевидно, що $A \cap B = \emptyset$.

За означенням ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 p_i = \frac{4}{22}, \quad P(B) = \sum_{i=1}^2 p_i = \frac{2}{22}.$$

За аксіомою 3

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{22} + \frac{2}{22} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}. \blacktriangleleft$$

Класичне означення ймовірності. Ймовірністю $P(A)$ події A називається відношення кількості сприятливих події A результатів випробування до кількості всіх рівноможливих несумісних результатів випробування:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад. З ящика, в якому знаходиться 6 білих і 3 чорних кульки, навмання беруть одну кульку. Знайти ймовірність того, що взяли білу кульку.

Розв'язок. $\triangleright$ Простір елементарних подій складається з 9 елементів (загальна кількість результатів випробування). Подію, яка полягає в появі білої кульки, позначимо через A . Кількість сприятливих події A результатів випробування рівна 6. Звідси $P(A) = 6/9 = 2/3$. $\blacktriangleleft$

Введене класичне означення ймовірності не підходить до тих випадків, в яких простір елементарних подій є нескінченним або не виконується припущення про рівноможливість елементарних подій. У таких випадках вдаються до інших підходів до визначення ймовірності, один з них буде розглянуто в наступному параграфі.

Властивості ймовірностей.

Теорема 1.4. Ймовірність події $\bar{A}$, протилежної події A , рівна

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.2)$$

Доведення. За означенням протилежної події $A \cup \bar{A} = \Omega$, а Ω – вірогідна подія. З аксіом 2, 3 випливає, що $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$, тому

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad \blacksquare$$

Приклад. На полиці довільним чином розставлені 15 підручників, 5 із них з математики. Студент навмання бере 3 підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один із них буде з математики.

Розв'язок. $\triangleright$ Подія A – хоча б один із взятих трьох підручників з математики, подія $\bar{A}$ – жоден з узятих підручників не з математики. Події A і $\bar{A}$ – протилежні, тому

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Ймовірність появи події $\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}.$$

Шукана ймовірність

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}. \quad \blacktriangleleft$$

Теорема 1.5. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю:

$$P(\emptyset) = 0.$$

Доведення. Візьмемо в рівності (1.2) $A = \Omega$. Тоді

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0. \blacksquare$$

Теорема 1.6. Нехай A і B – випадкові події, такі, що $A \subset B$. Тоді

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \quad (1.3)$$

Доведення. Так як $A \subset B$, то $B = A \cup (B \setminus A)$, до того ж $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Тому з аксіоми 3: $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, звідки випливає доведення теореми. ■

Теорема 1.7. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Доведення. З аксіоми 1 випливає, що $P(B \setminus A) \geq 0$. Тоді з рівності (1.3) отримаємо $P(B) \geq P(A)$. ■

Теорема 1.8 (додавання). Нехай A і B – випадкові події. Тоді

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Доведення. Представимо множину $A \cup B$ у вигляді об'єднання трьох множин, що попарно не перетинаються:

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

За аксіомою 3 і теоремою 1.6:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, \dots, 22\}$. Навмання з цієї множини беруть одне число. Яка ймовірність того, що воно кратне 2 або 5?

Розв'язок. $\triangleright \Omega$ – простір елементарних подій, що містить 22 рівноможливі елементарні події, їх ймовірності рівні $p_i = 1/22$, $i = \overline{1, 22}$.

Позначимо через A подію, що полягає в появі числа, кратного 2, а через B – у появі числа кратного 5. Тоді

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}, \quad B = \{5, 10, 15, 20\}.$$

Очевидно, що $A \cap B = \{10, 20\}$.

За означенням ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{11} p_i = \frac{11}{22}, \quad P(B) = \sum_{i=1}^4 p_i = \frac{4}{22}, \quad P(A \cap B) = \sum_{i=1}^2 p_i = \frac{2}{22}.$$

За теоремою 1.8

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{22} + \frac{4}{22} - \frac{2}{22} = \frac{13}{22}. \blacktriangleleft$$

§4. Геометричні ймовірності.

У багатьох задачах теорії ймовірностей простором елементарних подій є незліченна множина. У цьому випадку вводять означення геометричних ймовірностей. Припустимо, що ця множина є деякою геометричною областю. *Подією* назовемо наступне: вибрана точка належить заданій частині області. Ймовірність такої події визначимо як *відношення об'єму (площі, довжини) частини області до об'єму (площі, довжини) всієї області*.

Приклад. (Задача про зустріч) Два туристи домовилися зустрітися біля водоспаду між 10-ю і 11-ю годинами. Хто прийде першим, той чекає 20 хв. Знайти ймовірність того, що туристи зустрінуться.

Розв'язок. $\triangleright$ Нехай x – момент приходу до водоспаду першого туриста, y – момент приходу другого туриста і A – подія, яка полягає в тому, що туристи зустрінуться. За початок відліку часу вважатимемо 10-у годину, при цьому $x = 0$, $y = 0$.

За умовою задачі $0 \leq x \leq 1$ і $0 \leq y \leq 1$.

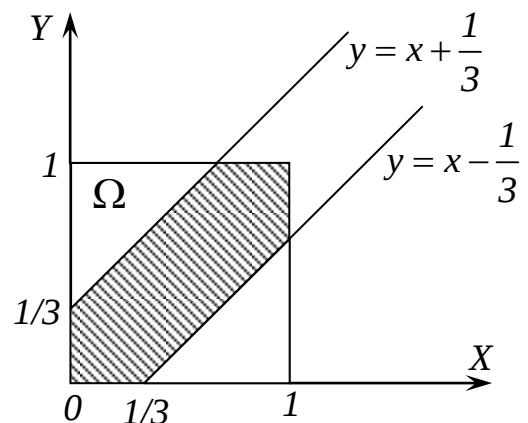
Туристи зустрінуться тоді, коли

$$|y - x| \leq \frac{1}{3} \text{ (год.)}, \quad (1.4)$$

що рівносильно

$$-\frac{1}{3} \leq y - x \leq \frac{1}{3} \quad \text{або} \quad x - \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3} + x.$$

Простором елементарних подій Ω буде квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці (рис. 4). Умова (1.4) виконується в заштрихованій області квадрата Ω . Отже, заштрихована область – множина результатів випробування, що сприяють події A , і ймовірність появи події A визначається



наступним чином:

$$P(A) = \frac{S_{\emptyset}}{S_{\Omega}} = \frac{5}{9},$$

так як

$$S_{\emptyset} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}, \quad S_{\Omega} = 1,$$

де $S_{\text{ш}}$ – площа заштрихованої фігури, S_{Ω} – площа фігури Ω . ◀

§5. Незалежні випадкові події.

Незалежні випадкові події. *Випадкові події A і B називаються незалежними, якщо*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Приклад. Монету підкидають двічі. Тоді $\Omega = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\ddot{O}, \ddot{O}\tilde{A}, \ddot{O}\ddot{O}\}$. Нехай A – подія, що полягає в тому, що перший раз випав герб, B – подія, що полягає в тому, що другий раз випав герб. Тоді $A = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\ddot{O}\}$, $\hat{A} = \{\tilde{A}\tilde{A}, \ddot{O}\tilde{A}\}$, $A \cap B = \{\tilde{A}\tilde{A}\}$ і

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Отже, випадкові події A , B – незалежні.

На практиці висновок про незалежність подій роблять із змісту задачі: якщо ймовірність появи кожної з подій не залежить від появи іншої, то події незалежні.

Теорема 1.9. *Якщо A , B незалежні події, то події $A, \bar{B}$ і $\bar{A}, \bar{B}$ теж незалежні.*

Доведення. Так як $A \cap \bar{B} = A \setminus (A \cap B)$, то

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}).$$

Отже, A і $\bar{B}$ незалежні, тоді і $\bar{A}$ і $\bar{B}$ незалежні. ■

Означення. *Випадкові події $A_1, \dots, A_n$ незалежні в сукупності, якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі суміщення інших.*

Ймовірність появи хоча б однієї події. Нехай у результаті випробовування може з'явитися n незалежних у сукупності подій або деяка кількість із них. Причому ймовірність появи кожної окремої події відома.

Теорема 1.10. *Ймовірність появи події A , що полягає в появі хоча б однієї з*

незалежних в сукупності подій $A_1, \dots, A_n$, рівна

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot \dots \cdot q_n,$$

де $q_1, \dots, q_n$, – ймовірності протилежних подій $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$.

Доведення. Події A і $\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n$ – протилежні, тому за теоремою 1.4

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n).$$

Так як $A_1, \dots, A_n$ незалежні в сукупності подій, то за теоремою 1.9 події $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ теж незалежні в сукупності, тому

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = 1 - q_1 \cdot \dots \cdot q_n.$$

Якщо ймовірності появи подій $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ однакові і рівні q , то $P(A) = 1 - q^n$. ■

Приклад. Ймовірності попадання в ціль при стрільбі двох спортсменів відповідно рівні $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,8$. Знайти ймовірність попадання в ціль хоча б одним спортсменом, якщо вони зробили по одному пострілу.

Розв'язок. $\triangleright$ 1-й спосіб. Ймовірність попадання в ціль кожним із спортсменів не залежить від результатів стрільби іншого, тому події A – попадання першого спортсмена, B – попадання другого спортсмена, незалежні і сумісні. Згідно теореми 1.8, отримаємо

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94. \end{aligned}$$

2-й спосіб. Ймовірності промаху відповідно рівні $q_1 = 1 - 0,7 = 0,3$, $q_2 = 1 - 0,8 = 0,2$, тому згідно теореми 1.10, отримаємо

$$P(A \cup B) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94. \blacktriangleleft$$

§6. Умовні ймовірності.

Умовні ймовірності. В багатьох випадках доводиться розглядати ймовірності випадкових подій, якщо відомо, що відбулась деяка випадкова подія з додатною ймовірністю.

Означення. Умовною ймовірністю $P(A/B)$ події A при умові, що відбулась подія B ($P(B) > 0$), називають

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1.5)$$

З означення і властивостей ймовірності випливає:

- 1) $P(A/B) \geq 0$;
- 2) $P(\Omega/B) = 1$;
- 3) $P(B/B) = 1$;
- 4) $P(A/B) = P(A)$, якщо A і B незалежні події.

Зі співвідношення (1.5) випливає наступне твердження:

Теорема 1.11. Якщо $P(B) > 0$, $P(A) > 0$, то має місце рівність

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A). \quad (1.6)$$

Співвідношення (1.6) називають *формулою множення*.

Ця формула допускає наступне узагальнення:

якщо $A_1, \dots, A_n$ – випадкові події, такі, що $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, то

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdot \dots \cdot P(A_n/(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})).$$

Останню формулу можна довести, застосувавши метод математичної індукції. ■

Приклади.

1. Двічі підкидають гральний кубик. Подія B – сума зерен, що випали, менша 4, подія A – перший раз випала 1. Обчислити умовну ймовірність $P(A/B)$ події A , якщо відомо, що відбулась подія B .

Розв'язок. $\triangleright \Omega = \{(i, j) : i = 1, 2, \dots, 6, j = 1, 2, \dots, 6\}$ – 36 елементарних подій.

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}, B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\},$$

$$A \cap B = \{(1, 1), (1, 2)\}.$$

Тому

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{18} : \frac{1}{12} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}. \blacktriangleleft$$

2. Виготовлено партію з 30 підшипників, причому 5 із них відповідають вимогам III групи стандарту, 10 – II групи, 15 – I групи. Навмання вибирають три підшипники. Яка ймовірність того, що перший вибраний підшипник належить до III групи, другий – до II групи, третій – до I групи?

Розв'язок. $\triangleright$ Нехай подія A_1 – першим відібрали підшипник III групи, A_2 – другим відібрали підшипник II групи, A_3 – третім відібрали підшипник I групи. Необхідно визначити ймовірність появи події

$$A = A_1 \cap (A_2/A_1) \cap (A_3/(A_1 \cap A_2)).$$

Застосуємо формулу множення:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / (A_1 \cap A_2)) = \frac{5}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{15}{28} = \frac{25}{812}. \blacktriangleleft$$

Формула повної ймовірності.

Означення. Кажуть, що набір випадкових подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворює повну групу подій, якщо:

$$1) H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega; \quad (1.7)$$

$$2) H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j. \quad (1.8)$$

Теорема 1.12. Якщо $H_1, H_2, \dots, H_n$ – повна група подій і $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$, то для будь-якої випадкової події $A \subset \Omega$ має місце рівність

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i). \quad (1.9)$$

Рівність (1.9) називають *формулою повної ймовірності*.

Доведення. З (1.7) випливає, що

$$A = A \cap \Omega = \bigcup_{i=1}^n (H_i \cap A).$$

З (1.8) випливає, що випадкові події $H_i \cap A, i = \overline{1, n}$, попарно несумісні. Тому за аксіомою 3

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i \cap A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i).$$

Формула (1.9) справедлива і для зліченного набору подій, що задовольняють умовам (1.7), (1.8). ■

Формули Байєса.

Теорема 1.13. Нехай $H_1, H_2, \dots, H_n$ – повна група подій і $P(H_k) > 0, k = \overline{1, n}$. Тоді для будь-якої випадкової події A такої, що $P(A) > 0$, виконуються рівності

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A / H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i)}. \quad (1.10)$$

Формули (1.10) називають *формулами Байєса*.

Доведення. Для доведення (1.10) використаємо формули множення і повної ймовірності. Маємо

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}. \blacksquare$$

Загальна схема застосування цих формул при розв'язанні практичних задач наступна.

Нехай подія A може відбуватися в різних умовах, про характер яких можна зробити n гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, і нехай відомі ймовірності цих подій $P(H_1), \dots, P(H_n)$ (апостеріорні ймовірності). Відомі також умовні ймовірності $P(A/H_1), \dots, P(A/H_n)$. Припустимо, що проведено експеримент, в результаті якого настала подія A . Це повинно викликати переоцінку ймовірностей гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$. Формули Байєса і дають вирази для умовних ймовірностей $P(H_k / A)$, $k = \overline{1, n}$ (апостеріорні ймовірності).

Приклади.

1. Верстат працює у двох режимах: рентабельному і нерентабельному. Рентабельний режим роботи має місце 80% часу, нерентабельний – 20%. Ймовірність того, що верстат вийде з ладу при рентабельному режимі становить 0,1, при нерентабельному – 0,7. Знайти ймовірність того, що: 1) верстат вийшов з ладу; 2) верстат вийшов з ладу при нерентабельному режимі роботи.

Розв'язок. $\triangleright$ 1) Події H_1 і H_2 полягають у тому, що верстат працює в рентабельному і нерентабельному режимах, A – верстат вийшов з ладу. За умовою задачі

$$P(H_1)=0,8; P(H_2)=0,2; P(A/H_1)=0,1; P(A/H_2)=0,7.$$

Відповідно до формули повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,22.$$

2) Ймовірність того, що верстат вийшов з ладу при нерентабельному режимі роботи визначимо за формулою Байєса:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,22} = 0,66. \blacktriangleleft$$

2. В ящику міститься 11 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта браковані. Із ящика навмання беруть три деталі й назад не повертають. Яка ймовірність після цього вийняти навмання з ящика стандартну деталь?

Розв'язок. $\triangleright$ Введемо позначення подій:

A – з ящика вийнято навмання стандартну деталь після того, як з нього було взято три деталі;

H_1 – було взято три стандартні деталі;

H_2 – було взято дві стандартні деталі і одну браковану;

H_3 – було взято одну стандартну і дві браковані деталі;

H_4 – було взято три браковані деталі.

Обчислимо ймовірності гіпотез, а також відповідні їм умовні ймовірності:

$$P(H_1) = \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{35}{165}, \quad P(A/H_1) = \frac{4}{8};$$

$$P(H_2) = \frac{C_7^2 C_4^1}{C_{11}^3} = \frac{84}{165}, \quad P(A/H_2) = \frac{5}{8};$$

$$P(H_3) = \frac{C_7^1 C_4^2}{C_{11}^3} = \frac{42}{165}, \quad P(A/H_3) = \frac{6}{8};$$

$$P(H_4) = \frac{C_7^0 C_4^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{165}, \quad P(A/H_4) = \frac{7}{8}.$$

Зауважимо, що $\sum_{i=1}^4 P(H_i) = 1$.

За формулою (1.9) шукана ймовірність

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(H_i)P(A/H_i) = \frac{35}{165} \cdot \frac{4}{8} + \frac{84}{165} \cdot \frac{5}{8} + \frac{42}{165} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{165} \cdot \frac{7}{8} = \frac{840}{1320} = \frac{7}{11}. \blacktriangleleft$$

Питання для самоперевірки.

1. Що називають стохастичним експериментом? Які події називають випадковими?
2. Які основні поняття комбінаторики?
3. Дайте означення частоти появи події та приведіть її основні властивості?
4. Сформулюйте аксіоми ймовірності та класичне означення ймовірності.
5. Сформулюйте основні властивості ймовірності.
6. Які ймовірності називають геометричними?
7. Які події називають незалежними?
8. Чому рівна ймовірність появи хоча б однієї події?
9. Що називають умовною ймовірністю випадкової події?
10. Запишіть формули повної ймовірності та Байєса.

Розділ II. ПОСЛІДОВНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

§1. Схема Бернуллі.

Випробування Бернуллі. Нехай проводяться послідовні випробування, при кожному з яких може відбутися або не відбутися певна подія A . Випробування, в якому подія A відбудеться, називатимемо *успіхом*, а випробування, в якому подія A не відбудеться – *невдачею*. Ймовірність успіху при кожному випробуванні однакова і рівна p ($0 < p < 1$), ймовірність невдачі – $q = 1 - p$. Такі випробування називають послідовними незалежними випробуваннями або *випробуваннями Бернуллі*.

Приклади.

1. Послідовно підкидають монету. Успіх – випадання, наприклад, герба.
2. Послідовно підкидають гральний кубик. Успіх – випадання певної кількості зерен.

Знайдемо $P_n(k)$ – ймовірність того, що кількість успіхів в серії з n випробувань рівна k .

Позначимо $A_k, 1 \leq k \leq n$, подію „при k -ому випробуванні відбулася подія A – успіх”. Зрозуміло, що $P(A_k) = p, P(\bar{A}_k) = q$. Для обчислення ймовірності $P_n(k)$ знайдемо спочатку ймовірність того, що успіх відбудеться при певних k випробуваннях, наприклад, при першому, другому, ..., k -ому, а при інших не відбудеться. За формулою множення (1.6), враховуючи незалежність випробувань, отримаємо

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap \bar{A}_{k+1} \cap \dots \cap \bar{A}_n) = P(A_1) \dots P(A_k) P(\bar{A}_{k+1}) \dots P(\bar{A}_n) = p^k q^{n-k}.$$

Але k випробувань, при яких може відбутися успіх, можна вибрати C_n^k способами. Тому

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (2.1)$$

Формулу (2.1) називають *формулою Бернуллі*.

Приклад. Прилад містить 5 вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи протягом часу t) для кожного вузла дорівнює 0,9. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що протягом часу t відмовить не більше двох вузлів.

Розв’язок. $\triangleright$ Ймовірність відмови вузла рівна 0,1.

Ймовірність того, що протягом часу t відмовить не більше двох вузлів знайдемо за формулою

$$P = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^5 + C_5^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^4 + C_5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3 = 0,99144. \blacktriangleleft$$

§2. Теорема Лапласа.

При великих значеннях n через громіздкість обчислень виникають труднощі при використанні формули Бернуллі, тому застосовують наближену формулу для обчислення ймовірності $P_n(k)$.

Теорема 2.1 (локальна теорема Лапласа). *Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля та одиниці, то ймовірності $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях k раз, приблизно рівні (тим точніше, чим більше n) значенню функції*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \blacksquare$$

Функцію $\varphi(x)$ називають функцією Гауса.

Властивості функції Гауса:

- 1) $\varphi(x)$ визначена для $x \in (-\infty, +\infty)$ і $\varphi(x) > 0$;
- 2) $\varphi(x)$ спадає і парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \varphi(x) = 0$.

Для функції $\varphi(x)$ складені таблиці, що відповідають додатним значенням аргументу x (таблиця 2 додатків).

Зауважимо, що при розв'язанні задач вважають

$$\varphi(x) \approx 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq 4.$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться рівно 80 раз в 400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні рівна 0,2.

Розв'язок. $\triangleright$ За умовою $n = 400, k = 80, p = 0,2, q = 0,8$.

Знайдемо значення x :

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0.$$

Тоді за таблицею 2 знаходимо $\varphi(0) = 0,3989$ і

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot 0,3989 = 0,04986. \blacktriangleleft$$

Теорема 2.2 (інтегральна теорема Лапласа). *Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від нуля та одиниці, то ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях від k_1 до k_2 раз, приблизно рівна*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (2.2)$$

$$\text{де } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

а

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (2.3)$$

є функцією Лапласа. ■

Властивості функції Лапласа:

- 1) $\Phi(x)$ визначена для $x \in (-\infty, +\infty)$;
- 2) $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 3) $\Phi(0) = 0$;

$$4) \Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,5, \text{ оскільки}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \quad (2.4)$$

є інтегралом Пуассона;

- 5) $\Phi(-\infty) = -0,5$, як непарна функція;
- 6) $\Phi(x)$ неспадна.

Складені таблиці, в яких обчислені значення функції Лапласа $\Phi(x)$, що відповідають невід'ємним значенням аргументу x (таблиця 3 додатків). Для від'ємних значень аргументу користуються тими ж таблицями, так як функція $\Phi(x)$ непарна.

Зауважимо, що при розв'язанні задач вважають

$$\Phi(x)|_{x \geq 4} \approx 0,5, \quad \Phi(x)|_{x \leq -4} \approx -0,5.$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться не менше 80 і не більше 100 раз у 400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні рівна 0,2.

Розв'язок. $\triangleright$ За умовою $n = 400$, $k_1 = 80$, $k_2 = 100$, $p = 0,2$, $q = 0,8$.

Знайдемо значення x_1, x_2 :

$$x_1 = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0, \quad x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Тоді за таблицею 3

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(2,5) = 0,4938.$$

Отже, $P_{400}(80, 100) \approx 0,4938$. $\blacktriangleleft$

Зауваження. Позначимо через k кількість появ події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події A стала і рівна p . Якщо число k змінюється від k_1 до k_2 , то дріб

$$\frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

змінюється

$$\text{від } \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = x_1 \quad \text{до} \quad \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = x_2.$$

Таким чином, інтегральну теорему Лапласа можна записати у вигляді

$$P \left\{ x_1 \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq x_2 \right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

§3. Теорема Пуассона.

Локальна формула Лапласа дає велику похибку при $p \rightarrow 0,1$, тому для обчислення ймовірності появи k раз події A в n випробуваннях застосовують асимптотичну формулу Пуассона.

Припустимо, що добуток np зберігає постійне значення і $np = \lambda$. Це означає, що середня кількість появ події в різних серіях випробувань, тобто при різних значеннях n , незмінна.

Теорема 2.3 (Пуассона). *Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала ($0 < p \rightarrow 0,1$) та добуток $n p$ зберігає стале значення, а саме*

$np = \lambda$, то ймовірності $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях k раз, приблизно рівні

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \blacksquare$$

Для функції e^{-x} складені таблиці (таблиця 1 додатків).

Приклад. Завод відправив на базу 5000 якісних виробів. Ймовірність того, що по дорозі виріб буде пошкодженим, рівна 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджених вироби.

Розв'язок. $\triangleright$ За умовою, $n = 5000$, $p = 0,0002$, $k = 3$. Знайдемо λ :

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1.$$

За формулою Пуассона шукана ймовірність приблизно рівна

$$P_{5000}(3) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0,06. \blacktriangleleft$$

§4. Ймовірність відхилення частоти від ймовірності в незалежних випробуваннях.

Вважатимемо, що проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A стала і рівна p ($0 < p < 1$).

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне задане число. Визначимо ймовірність виконання нерівності

$$\left| \frac{k}{n} - p \right| \leq \varepsilon, \tag{2.5}$$

де $\frac{k}{n}$ – відносна частота появи події A .

Цю ймовірність позначимо $P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\}$.

Замінімо нерівність (2.5) рівносильною їй:

$$-\varepsilon \leq \frac{k}{n} - p \leq \varepsilon \quad \text{або} \quad -\varepsilon \leq \frac{k - np}{n} \leq \varepsilon.$$

Помножимо останню нерівність на додатний множник $\sqrt{n/pq}$, отримаємо нерівність, рівносильну початковій:

$$-\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq \sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon.$$

За інтегральною теоремою Лапласа при $x_1 = -\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon$, $x_2 = \sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon$, маємо

$$P\left\{-\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq \sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon}^{\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon\right).$$

Таким чином,

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon\right). \quad (2.6)$$

Приклад. Ймовірність появи події в кожному з 625 незалежних випробувань рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

Розв'язок. $\triangleright$ За умовою, $n = 625$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $\varepsilon = 0,04$. Потрібно знайти ймовірність

$$P\left\{\left|\frac{k}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\}.$$

За формулою

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon\right)$$

маємо:

$$P\left\{\left|\frac{k}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\} \approx 2\Phi\left(0,04 \cdot \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5).$$

За таблицею 3 знаходимо $\Phi(2,5) = 0,4938$. Отже,

$$P\left\{\left|\frac{k}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\} = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876. \blacktriangleleft$$

Питання для самоперевірки.

1. Що називають схемою Бернуллі? Запишіть формулу Бернуллі.

2. Запишіть функції Гауса і Лапласа та сформулюйте їх основні властивості.
3. Сформулюйте локальну та інтегральну теореми Лапласа.
4. Сформулюйте теорему Пуассона.
5. Як знайти ймовірність відхилення частоти від імовірності в незалежних випробуваннях?

Розділ III. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

В цьому розділі вивчається одне з основних понять теорії ймовірностей – поняття випадкової величини. Випадкову величину будемо розглядати як змінну, значення якої залежать від випадку, тобто визначаються результатами стохастичного експерименту, а отже залежать від елементарних подій ω з простору Ω .

§1. Випадкові величини.

Випадкові величини – функції на просторі елементарних подій. Випадковою величиною X є число, яке ставиться у відповідність кожному можливому результату експерименту. Оскільки результати експерименту описуються елементарними подіями, *випадкову величину можна розглядати як функцію $X = X(\omega)$ на просторі елементарних подій Ω .*

Приклади.

1. Монету підкидають двічі. Простір елементарних подій цього експерименту має вигляд $\Omega = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}\tilde{O}, \tilde{O}\tilde{A}, \tilde{O}\tilde{O}\}$. Нехай X – кількість появ герба. Випадкова величина X є функцією $X = X(\omega)$ елементарної події. Таблиця значень функції $X = X(\omega)$ має вигляд:

ω	$\Gamma\Gamma$	$\Gamma\tilde{C}$	$\tilde{C}\Gamma$	$\tilde{C}\tilde{C}$
$X = X(\omega)$	2	1	1	0

2. Підкидають гральний кубик. Простір елементарних подій має вигляд: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_i означає, що випало i зерен. Випадкова величина X – кількість зерен, що випали, – є функцією елементарної події, причому $X = X(\omega) = i$, якщо $\omega = \omega_i$.

3. У круг радіуса R навмання кидають точку. Простір елементарних подій Ω – множина всіх точок круга. Для кожної точки $\omega \in \Omega$ введемо випадкову величину

$X = X(\omega)$ як відстань від ω до центра круга. У цьому випадку X може набувати будь-якого значення з відрізка $[0, R]$.

Відповідно до множини значень (вона може бути скінченною, зліченною або незліченною) випадкові величини бувають різних типів – дискретні, неперервні та змішаного типу.

§2. Розподіли випадкових величин.

Дискретні випадкові величини. *Випадкова величина X називається дискретною, якщо вона приймає скінченну або зліченну кількість значень.*

Основною характеристикою дискретної випадкової величини є її розподіл.

Нехай дискретна випадкова величина X набуває значень $x_k, k = 1, 2, \dots$, причому ймовірності набуття цих значень $p_k = P\{X = x_k\}, k = 1, 2, \dots$

Розподілом випадкової величини X називається відповідність між її значеннями та їх імовірностями.

Закон розподілу можна задавати у вигляді таблиці, аналітично або графічно.

Щоб задати закон розподілу в табличному вигляді, наводять значення випадкової величини і відповідні їм імовірності:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$\dots$

Приймаючи до уваги, що в одному випробуванні випадкова величина приймає одне і тільки одне можливе значення, отримаємо, що події $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_k, \dots$ утворюють повну групу, тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, p_k \geq 0.$$

Щоб задати закон розподілу графічно, в прямокутній системі координат відкладають точки $M_1(x_1, p_1), M_2(x_2, p_2), M_3(x_3, p_3), \dots, M_k(x_k, p_k), \dots$ і з'єднують їх відрізками. Отриману фігуру називають *многокутником розподілу*.

Дві випадкові величини X, Y називають незалежними, якщо закон розподілу ймовірностей кожної з них не залежить від того, які значення набуває інша. У протилежному випадку випадкові величини називають залежними.

Розглянемо деякі найбільш важливі приклади розподілів дискретних випадкових величин.

Біноміальний розподіл. Розглянемо схему Бернуллі, в якій проводиться n

незалежних випробувань. Імовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює p , ймовірність невдачі – $q = 1 - p$. Кількість успіхів k при n випробуваннях є випадковою величиною X , яка може набувати значень $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Імовірність p_k появи того чи іншого значення k випадкової величини X визначається за формулою Бернуллі:

$$p_k = P\{X = k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (3.1)$$

Права частина виразу (3.1) є загальним членом бінома Ньютона, який має вигляд:

$$(p + q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \dots + C_n^{n-k} p^{n-k} q^k \dots + C_n^0 q^n,$$

де $C_n^n p^n$ – ймовірність n успіхів, $C_n^{n-1} p^{n-1} q$ – ймовірність $n - 1$ успіху, ..., $C_n^0 q^n$ – ймовірність невдачі.

Так як

$$(p + q)^n = 1^n = 1 = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n p_k,$$

то набір ймовірностей $P_n(k)$, визначений в (3.1), є розподілом випадкової величини, який називають *біноміальним*.

Приклад. Прилад містить 3 вузли. Ймовірність відмови для кожного вузла протягом часу t дорівнює $0,1$. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості вузлів, що відмовили протягом часу t .

Розв'язок. $\triangleright$ Дискретна випадкова величина X приймає наступні можливі значення:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Так як вузли виходять з ладу незалежно один від одного та ймовірності відмови кожного вузла рівні між собою, то застосовна формула Бернуллі. Враховуючи, що за умовою $n = 3, p = 0,1; q = 1 - 0,1 = 0,9$; отримаємо:

$$P_3(0) = q^3 = 0,9^3 = 0,729; \quad P_3(1) = C_3^1 p q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027; \quad P_3(3) = p^3 = 0,1^3 = 0,001.$$

Контроль: $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$.

Запишемо шуканий закон розподілу X :

X	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

Геометричний закон розподілу. Нехай X – кількість випробувань до появи першого успіху в схемі Бернуллі. У цьому випадку кількість випробувань необмежена і простір елементарних подій

$$\Omega = \{O, I O, I I O, I I I O, \dots\},$$

де V – успіх, H – невдача.

Оскільки випробування незалежні, то

$$p_k = P\{X = k\} = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Поклавши $k = 1, 2, \dots$ в (3.2), отримаємо геометричну прогресію з першим членом p і знаменником q ($0 < q < 1$): $p, qp, q^2 p, \dots, q^{k-1} p, \dots$

Оскільки з формули суми нескінченно спадної геометричної прогресії випливає, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1,$$

то набір ймовірностей (3.2) є розподілом випадкової величини, який називають *геометричним*.

Приклад. Імовірність того, що стрілець влучить в мішень при одному пострілі, рівна 0,8. Йому видають патрони до першого промаху. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості патронів, виданих стрільцю.

Розв'язок. ▷ Дискретна випадкова величина X приймає наступні можливі значення:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad \dots, \quad x_k = k, \quad \dots$$

Знайдемо ймовірності цих значень:

$x_1 = 1$, якщо стрілець не влучить з першого разу, то $P(X = 1) = 0,2$;

$x_2 = 2$, якщо стрілець влучить перший раз і не влучить з другого разу, то

$$P(X = 2) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16;$$

$x_3 = 3$, якщо стрілець влучить перші два рази і не влучить з третього разу, то

$$P(X = 3) = 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128; \dots;$$

$x_k = k$, якщо стрілець влучить $(k - 1)$ раз і не влучить з k -го разу, то

$$P(X = k) = 0,8^{k-1} \cdot 0,2, \dots$$

Контроль:

$$0,2 + 0,8 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 + \dots + 0,8^k \cdot 0,2 + \dots =$$

$$= 0,2 \cdot (1 + 0,8 + 0,8^2 + \dots + 0,8^k + \dots) = 0,2 \cdot \frac{1}{1 - 0,8} = 1.$$

Запишемо шуканий закон розподілу X :

X	1	2	3	...	k	...
P	0,2	0,16	0,128	...	$0,8^{k-1} \cdot 0,2$	...



Гіпергеометричний розподіл. Припустимо, що в урні N куль, серед яких n білих і $N - n$ чорних. Навмання з урни взято k куль. Нехай X – кількість білих куль серед k взятих. Знайдемо розподіл випадкової величини X . Кількість всіх можливих комбінацій, що містять рівно k куль, рівне C_N^k ; серед них є $C_n^r \cdot C_{N-n}^{k-r}$ комбінацій, що містять рівно r білих куль. Тому

$$P(X = r) = \frac{C_n^r \cdot C_{N-n}^{k-r}}{C_N^k}, \quad (0 \leq r \leq \min(n, k)). \quad (3.3)$$

Набір імовірностей (3.3) називається *гіпергеометричним розподілом*.

Розподіл Пуассона. Випадкова величина X має *розподіл Пуассона* з параметром λ ($\lambda > 0$), якщо вона приймає значення $0, 1, 2, 3, \dots$ з імовірностями

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \quad (3.4)$$

Формулу Пуассона застосовують при побудові математичної моделі простого потоку подій.

Потоком подій називається послідовність подій, які з'являються у випадкові моменти часу. Наприклад: надходження викликів у міліцію; послідовність відмов елементів електронної схеми; надходження замовлень на АТС, тощо.

Простим (Гаусовим) потоком називають потік, якому властиві стаціонарність, ординарність і відсутність післядії.

Властивість *стаціонарності* полягає в тому, що ймовірність появи k подій за проміжок часу тривалістю t є функцією, що залежить тільки від t та k .

Властивість *ординарності* характеризується тим, що ймовірність появи більше однієї події за малий проміжок часу рівна нулю.

Властивість *відсутності післядії* полягає в тому, що ймовірність появи k

подій на довільному проміжку часу не залежить від того, чи з'являлись або не з'являлись події в моменти часу, що передували цьому проміжку.

Для простого потоку подій ймовірність появи k подій за час t визначається за формулою

$$P_t(k) = (\lambda t)^k \frac{e^{-\lambda t}}{k!}, \quad (3.5)$$

де λ – інтенсивність потоку, яка визначає середня кількість подій, які з'являються за одиницю часу.

Приклад. Середня кількість замовлень таксі, що надходять на диспетчерський пункт за одну хвилину, рівна трьом. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини надійде: а) 4 виклики; б) не менше чотирьох викликів.

Розв'язок. $\triangleright$ За умовою $\lambda = 3$, $t = 2$, $k = 4$. Скористаємося формулою Пуассона (3.5).

а) Шукана ймовірність того, що за 2 хвилини надійде 4 виклики, рівна

$$P_2(4) \approx \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} \approx \frac{1296 \cdot 0,0025}{24} = 0,135.$$

б) Події „надійде не менше чотирьох викликів” і „надійде менше чотирьох викликів” протилежні. Подія „надійде менше чотирьох викликів” відбудеться, якщо відбудеться одна з наступних несумісних подій : 1) надійшло 3 виклики; 2) надійшло 2 виклики; 3) надійшов 1 виклик; 4) не надійшло жодного виклику. Ці події несумісні, тому, за третьою аксіомою, ймовірність того, що за 2 хвилини надійде менше чотирьох викликів рівна

$$\begin{aligned} P(k < 4) &= P(3) + P(2) + P(1) + P(0) \approx \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6 \cdot e^{-6}}{1!} + e^{-6} = \\ &= e^{-6} (36 + 18 + 6 + 1) \approx 0,0025 \cdot 61 = 0,1525. \end{aligned}$$

Таким чином, шукана ймовірність того, що за 2 хвилини надійде не менше чотирьох викликів, дорівнюватиме

$$P(k \geq 4) = 1 - P(k < 4) \approx 1 - 0,1525 = 0,8475. \quad \blacktriangleleft$$

Функції розподілу випадкових величин та їх властивості. Найповнішою характеристикою випадкової величини є її функція розподілу.

Функцією розподілу або інтегральною функцією розподілу випадкової величини $X(\omega)$ називають ймовірність випадкової події

$$\{\omega : X(\omega) < x\}:$$

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\}.$$

Наведемо основні властивості функції розподілу $F(x)$:

Властивість 1. Областю значень функції $F(x)$ є відрізок $[0, 1]$.

Доведення. Властивість безпосередньо випливає з означення функції $F(x)$ як імовірності. ■

Властивість 2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Доведення. Припустимо, що $x_2 > x_1$. Подію, яка полягає в тому, що випадкова величина $X < x_2$, можна подати у вигляді суми двох несумісних подій:

$$\{X < x_2\} = \{X < x_1\} \cup \{x_1 \leq X < x_2\}.$$

За третьою аксіомою ймовірності

$$P\{X < x_2\} = P\{X < x_1\} + P\{x_1 \leq X < x_2\}.$$

Звідки

$$P\{X < x_2\} - P\{X < x_1\} = P\{x_1 \leq X < x_2\},$$

або

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \leq X < x_2\}.$$

З невід’ємності ймовірності випливає, що $F(x_2) \geq F(x_1)$. ■

Властивість 3. Для довільних x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[x_1, x_2)$

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Доведення. Властивість безпосередньо випливає з доведення властивості 2.

Властивість 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Доведення. Дійсно,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = P\{\omega : X(\omega) < -\infty\} = 0,$$

оскільки подія $\{\omega : X(\omega) < -\infty\}$ є неможливою.

$$\text{Аналогічно, } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = P\{\omega : X(\omega) < +\infty\} = 1,$$

оскільки подія $\{\omega : X(\omega) < +\infty\}$ є вірогідною. ■

Властивість 5. Функція $F(x)$ неперервна зліва:

$$F(x-0) = F(x). \blacksquare$$

Приклад. Побудувати графік функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X , заданої законом розподілу:

X	2	3	5
P	0,2	0,1	0,7

Розв'язок. $\triangleright$ Якщо $x \leq 2$, то $F(x) = P\{X < 2\} = 0$. Дійсно, подія „ $X < 2$ ” неможлива.

Якщо $2 < x \leq 3$, то $F(x) = P(X < 3) = P(X = 2) = 0,2$.

Якщо $3 < x \leq 5$, то $F(x) = P(X < 5) = P(„X = 2” \cup „X = 3”) = 0,2 + 0,1 = 0,3$, так як події „ $X = 2$ ” і „ $X = 3$ ” несумісні.

Якщо $x > 5$, то $F(x) = 1$, так як подія „ $X \leq 5$ ” вірогідна.

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дє } x \leq 2, \\ 0,2 & \text{ї дє } 2 < x \leq 3, \\ 0,3 & \text{ї дє } 3 < x \leq 5, \\ 1 & \text{ї дє } x > 5. \end{cases}$$

Графік функції розподілу $F(x)$ зображено на рис. 5. $\blacktriangleleft$

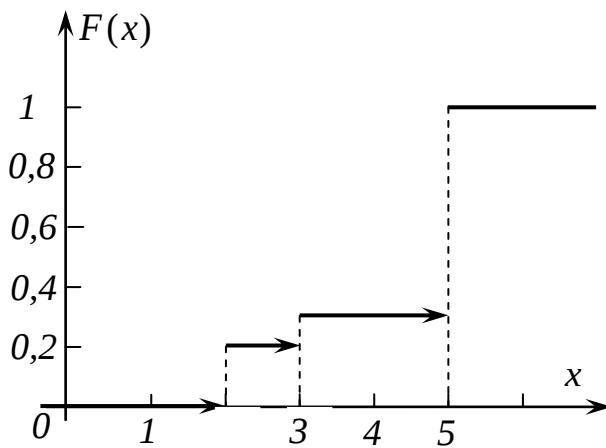


Рис. 5

Неперервні випадкові величини.

Випадкова величина $X(\omega)$ називається неперервною, якщо існує така невід'ємна інтегровна функція $p(u)$, $u \in (-\infty, +\infty)$, що функцію розподілу можна представити у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du. \quad (3.6)$$

Функцію $p(u)$ називають щільністю розподілу або диференціальною функцією

розподілу.

Властивості щільності розподілу.

- 1). За означенням $p(u) \geq 0$, $u \in (-\infty, +\infty)$.
- 2). Оскільки $F(+\infty) = 1$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = 1.$$

3). Якщо x – точка неперервності щільності розподілу, то

$$p(x) = F'(x).$$

4). З означення функції розподілу випливає, що

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(u) du.$$

5). Імовірність того, що неперервна випадкова величина приймає якесь одне фіксоване значення, рівна 0. Дійсно,

$$P\{X = C\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} P\{C \leq \xi < C + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_C^{C+\varepsilon} p(u) du = 0.$$

Приклади.

1. Дана функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дè } x \leq -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} & \text{ї дè } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{ї дè } x > 1/3. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина X прийме значення з інтервалу $(0, 1/3)$.

Розв'язок. $\triangleright$ За Вл. 3 функції розподілу отримаємо:

$$P\{0 \leq X < 1/3\} = F(1/3) - F(0) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right)\Big|_{x=1/3} - \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right)\Big|_{x=0} = \frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

2. Дана функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дè } x \leq 0, \\ \sin x & \text{ї дè } 0 < x \leq \pi/2, \\ 1 & \text{ї дè } x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу, побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Розв'язок. $\triangleright$ Щільність розподілу рівна першій похідній від функції розподілу:

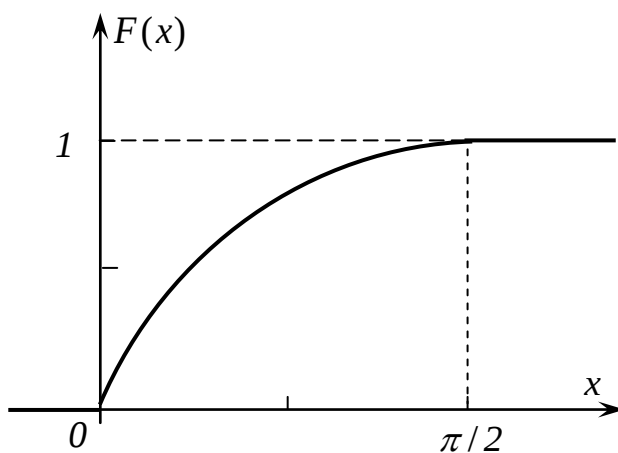


Рис. 6

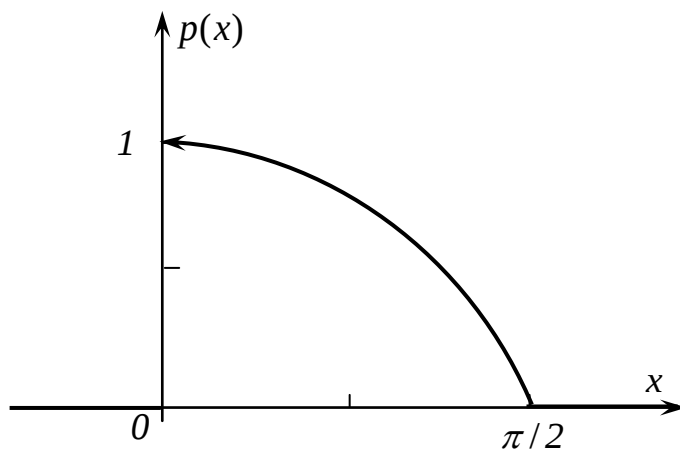


Рис. 7

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дї} \quad x \leq 0, \\ \cos x & \text{ї дї} \quad 0 < x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{ї дї} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Зауважимо, що при $x = 0$ похідна $F'(x)$ не існує.

Графіки функцій $F(x)$ та $p(x)$ зображені на рис. 6, 7, відповідно. ◀

3. Дана щільність розподілу $p(x)$ неперервної випадкової величини X :

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дї} \quad x \leq 0, \\ \cos x & \text{ї дї} \quad 0 < x \leq \pi/2, \\ 0 & \text{ї дї} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язок. ▷ Застосуємо формулу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du.$$

Якщо $x \leq 0$, то $p(x) = 0$ і

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 du = 0.$$

Якщо $0 < x \leq \pi/2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 du + \int_0^x \cos u du = \sin x.$$

Якщо $x > \pi/2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 du + \int_0^{\pi/2} \cos u du + \int_{\pi/2}^x 0 du = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Отже, шукана функція має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї} \text{ } \text{д} \text{ } \text{е} \quad x \leq 0, \\ \sin x & \text{ї} \text{ } \text{д} \text{ } \text{е} \quad 0 < x \leq \pi/2, \\ 1 & \text{ї} \text{ } \text{д} \text{ } \text{е} \quad x > \pi/2. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Розглянемо приклади найбільш важливих неперервних розподілів.

Рівномірний розподіл. На відрізок $[a, b]$ числової прямої навмання кидають точку, причому вважають, що всі положення точки „однаково можливі”. Визначимо випадкову величину X наступним чином: $X(\omega) = \omega$, якщо $\omega \in [a, b]$, тобто X – координата отриманої точки.

Рівномірним розподілом на відрізку $[a, b]$ називають розподіл зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ї} \text{ } \text{д} \text{ } \text{е} \quad x \in [a, b]; \\ 0 & \text{ї} \text{ } \text{д} \text{ } \text{е} \quad x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (3.7)$$

Оскільки $p(x) \geq 0$ і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = \int_a^b \frac{1}{b-a} du = 1,$$

то $p(x)$ – дійсно є щільністю розподілу.

Функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини дорівнює

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї} \text{ } \text{д} \text{ } \text{е} \quad x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ї} \text{ } \text{д} \text{ } \text{е} \quad a < x \leq b; \\ 1 & \text{ї} \text{ } \text{д} \text{ } \text{е} \quad x > b. \end{cases} \quad (3.8)$$

Графіки щільності та функції рівномірного розподілу зображені на рис. 8, 9, відповідно.

Прикладом рівномірно розподіленої випадкової величини може бути випадкова похибка, яка виникає при округленні результатів різноманітних розрахунків.

Приклад. Ціна поділки шкали амперметра рівна 0,1 А. Показники округлюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка, що перевищує 0,02 А.

Розв'язок. ▷ Помилку округлення відліку можна розглядати як випадкову величину X , яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми

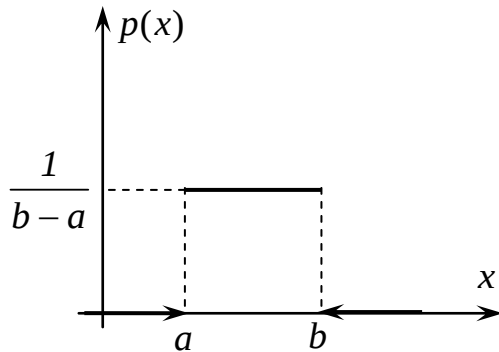


Рис. 8

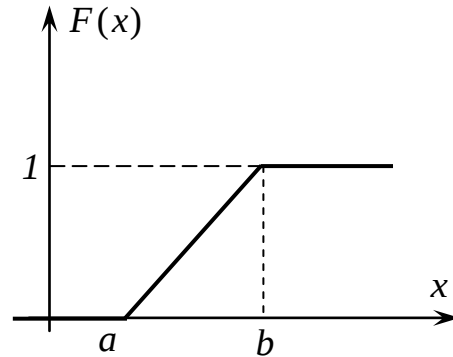


Рис. 9

поділками, тому

$$p(x) = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Зрозуміло, що помилка відліку перевищить 0,02, якщо вона попадатиме в інтервал (0,02, 0,08).

З властивості 4 щільності розподілу $p(x)$ отримаємо:

$$P(0,02 < X < 0,08) = \int_{0,02}^{0,08} 10 dx = 0,6. \blacktriangleleft$$

Нормальний розподіл (закон Гауса). Виключно важливу роль в теорії ймовірностей відіграє нормальний розподіл.

Нормальним розподілом $N(a, \sigma^2)$ з параметрами a і σ^2 називається розподіл зі щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.9)$$

Зауважимо, що $p(x)$ дійсно є щільністю розподілу, так як

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

Щоб переконатися в цьому, достатньо покласти

$$z = \frac{x - a}{\sigma}$$

і використати інтеграл Пуассона (2.4).

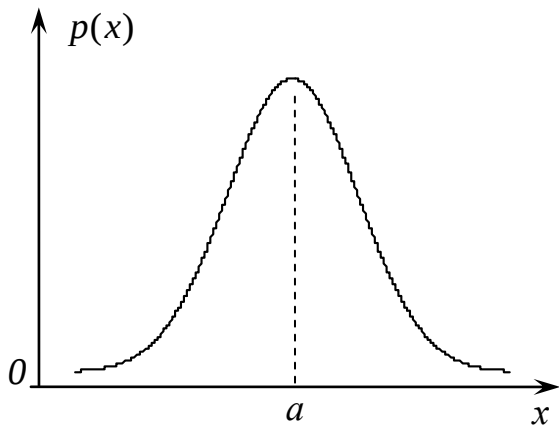


Рис. 10

Графік щільності нормального розподілу називають *нормальною кривою* або *кривою Гауса* (рис. 10). Параметр a показує, на скільки зсунутий вздовж осі OX , а параметр σ^2 – на скільки стиснутий вздовж осі OX графік щільності нормального розподілу.

Детальніший розгляд нормального розподілу буде зроблений пізніше.

Показниковий розподіл.

Показниковим розподілом з параметром $\lambda > 0$ називають розподіл зі щільністю

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дè } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ї дè } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Оскільки $p(x) \geq 0$ і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = 1,$$

то $p(x)$ – дійсно є щільністю розподілу.

Функція розподілу показникової випадкової величини дорівнює

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дè } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ї дè } x \geq 0. \end{cases}$$

Графіки щільності та функції показникового розподілу зображені на рис. 11.

Показниковому закону розподілу підпорядковано багато реальних випадкових величин. Як приклад, припустимо, що деякий механічний елемент починає працювати в момент часу $t = 0$ і через певний час може вийти з ладу. Очевидно, що ймовірність цієї події з часом збільшується. Дослідження показують, що ймовірність виходу елемента з ладу за час t задається показниковим розподілом

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Функцію

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

називають показниковим законом надійності, а параметр λ – інтенсивністю відмови.

Неперервна випадкова величина, що задає час між появою двох послідовних подій простого потоку теж має показниковий розподіл. Наприклад, час існування невеликих приватних підприємств.

Приклад. Тривалість часу безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл $F(t) = 1 - e^{-0,01t}$ ($t > 0$). Знайти ймовірність того, що за час тривалістю $t = 50$ год: а) елемент відмовить; б) елемент не відмовить.

Розв'язок. ▷ а) Так як функція розподілу $F(t) = 1 - e^{-0,01t}$ визначає ймовірність відмови елемента за час тривалістю t , то, підставивши $t = 50$ в функцію розподілу, отримаємо ймовірність відмови:

$$F(50) = 1 - e^{-0,01 \cdot 50} = 1 - e^{-0,5} = 1 - 0,606 = 0,394;$$

б) застосуємо функцію надійності $R(t) = 1 - F(t) = e^{-0,01t}$, яка визначає

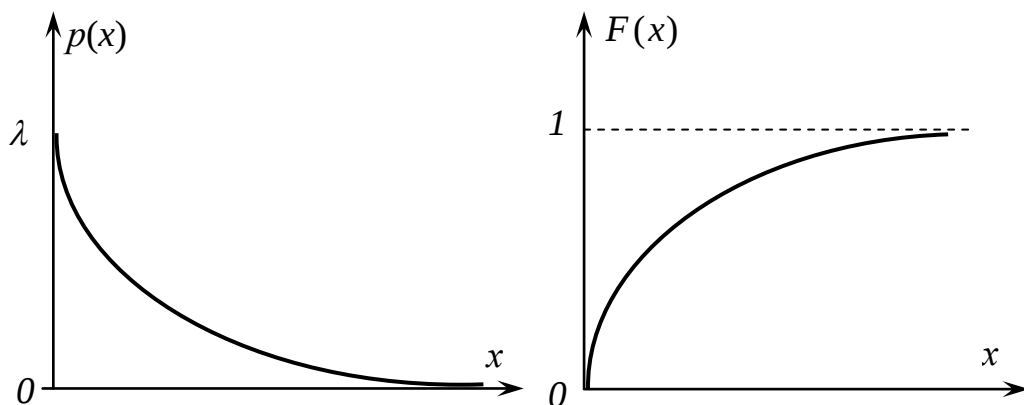


Рис. 11.

ймовірність безвідмовної роботи елемента за час t :

$$R(50) = e^{-0,01 \cdot 50} = e^{-0,5} = 0,606. \blacktriangleleft$$

§3. Математичне сподівання випадкової величини.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини. Нехай проведено n випробувань, в яких випадкова величина X набула k_1 раз значення x_1 , k_2 раз значення x_2 , ..., k_m раз значення x_m , при цьому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Тоді сума всіх значень, які набула X , рівна

$$x_1 k_1 + x_2 k_2 + \dots + x_m k_m.$$

Знайдемо середнє арифметичне $\bar{X}$ всіх значень, набутих випадковою величиною, для цього розділимо знайдену суму на загальну кількість випробувань:

$$\bar{X} = \frac{x_1 k_1 + x_2 k_2 + \dots + x_m k_m}{n} = x_1 \frac{k_1}{n} + x_2 \frac{k_2}{n} + \dots + x_m \frac{k_m}{n}. \quad (3.11)$$

Зауважимо, що відношення k_1 / n – відносна частота появи значення x_1 , k_2 / n – відносна частота появи значення x_2 і т.д.

Припустимо, що кількість випробувань достатньо велика, тоді відносна частота приблизно рівна ймовірності появи події.

Замінюючи в формулі (3.11) частоти на ймовірності, отримаємо величину

$$\bar{X} \approx \sum_{i=1}^m x_i p_i = MX, \quad (3.12)$$

яка називається *математичним сподіванням* (або *ймовірнісним середнім*) випадкової величини X .

За аналогією з формулою (3.12) визначається математичне сподівання довільної дискретної випадкової величини.

Означення. Якщо X – дискретна випадкова величина, яка приймає значення $x_1, x_2, \dots$ з імовірностями $p_1, p_2, \dots$, то її математичним сподіванням називається величина

$$MX = \sum_{k \geq 1} p_k x_k \quad (3.13)$$

при умові, що ряд справа абсолютно збіжний.

Приклади.

1) *Математичне сподівання біноміального розподілу.* Припустимо, що проводяться незалежні випробування і при кожному випробуванні може бути два результати: успіх з імовірністю p , або невдача з імовірністю $q = 1 - p$. Нехай проведено n випробувань. Позначимо через X кількість появ успіху. Як відомо,

випадкова величина X має біноміальний розподіл:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Тоді математичне сподівання випадкової величини X дорівнює:

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_n^k p^{k-1} q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = np(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

2) *Математичне сподівання геометричного розподілу.* Припустимо, що проводяться незалежні випробування і при кожному випробуванні може бути два результати: успіх з імовірністю p , або невдача з імовірністю $q = 1 - p$. Випробування проводяться до першої появи успіху. Нехай X – кількість випробувань до першої появи успіху. Випадкова величина X має геометричний розподіл

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тоді математичне сподівання випадкової величини X дорівнює:

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'_q = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'_q = p \left(\frac{q}{1-q} \right)'_q = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

3) *Математичне сподівання розподілу Пуассона.* Нехай випадкова величина X має розподіл Пуассона з параметром λ . Тоді

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

і

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

(остання сума є розкладом числа e^{λ} в ряд Маклорена).

Математичне сподівання неперервної випадкової величини.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називають число

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,$$

де $p(x)$ – щільність розподілу випадкової величини X , якщо інтеграл у правій частині абсолютно збіжний.

Приклади.

1) Математичне сподівання рівномірного розподілу. Нехай X – випадкова величина, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$. Тоді

$$MX = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

2) Математичне сподівання показникового розподілу. Нехай X – випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Тоді

$$MX = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Властивості математичного сподівання.

Нехай для випадкових величин X та Y існують математичні сподівання MX , MY .

1) Якщо $P\{X = C\} = 1$, то $M(C) = C$.

Дійсно, $MX = C \cdot P\{X = C\} = C \cdot 1 = C$.

2) Якщо $X \geq 0$, то $MX \geq 0$.

Ця властивість безпосередньо впливає з означень математичного сподівання і невід’ємності ймовірності.

3) $M(aX + \beta Y) = aMX + \beta MY$, де a, β – деякі сталі.

Ця властивість безпосередньо впливає з означень математичного сподівання.

4) Якщо $X \geq Y$, то $MX \geq MY$.

Дійсно, оскільки $X - Y \geq 0$, то за властивістю 2 $M(X - Y) \geq 0$, а за властивістю 3 $M(X - Y) = MX - MY$.

5) $|MX| \leq M|X|$.

Ця властивість безпосередньо впливає з означень математичного сподівання і властивості модуля.

6) Якщо X, Y – незалежні випадкові величини, то $M(XY) = MX \cdot MY$.

Доведення. Розглянемо випадок дискретних випадкових величин.

Визначимо *добуток незалежних випадкових величин* X, Y як випадкову величину XY , значення якої рівні всім можливим добуткам значень випадкових величин X, Y , а ймовірності можливих значень добутку X, Y рівні добуткам ймовірностей можливих значень множників.

Нехай для спрощення викладок випадкові величини X, Y задані законами розподілу ймовірностей:

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	g_1	g_2

Закон розподілу ймовірностей добутку XY матиме вигляд:

XY	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$
P	$p_1 g_1$	$p_1 g_2$	$p_2 g_1$	$p_2 g_2$

Тоді з означення математичного сподівання

$$\begin{aligned} M(XY) &= x_1 y_1 p_1 g_1 + x_1 y_2 p_1 g_2 + x_2 y_1 p_2 g_1 + x_2 y_2 p_2 g_2 = \\ &= (x_1 p_1 + x_2 p_2)(y_1 g_1 + y_2 g_2) = MX \cdot MY, \end{aligned}$$

що й треба було довести. ■

Ця рівність справедлива і для неперервних випадкових величин.

Зазначимо, що не для всіх випадкових величин існує математичне сподівання.

Моменти. Дисперсія. Для цілих невід'ємних m величина MX^m , якщо вона визначена, називається *m -им моментом*. Моменти величини $(X - MX)$ називають *центральними моментами*. Найбільш поширеним є другий центральний момент, який позначають DX і називають *дисперсією випадкової величини X* :

$$DX = M(X - MX)^2. \quad (3.14)$$

Так як $(X - MX)^2 \geq 0$, то DX невід'ємна величина і вона може приймати значення $+\infty$.

Величину

$$\sigma = \sqrt{DX}$$

називають *середнім квадратичним відхиленням* величини X . Величини DX , σ характеризують як тісно групуються значення випадкової величини X навколо її середнього значення.

Розглянемо формули для обчислення моментів і дисперсії.

В загальному випадку, для дискретної та неперервної випадкових величин X маємо

$$MX^m = \sum_{k \geq 1} p_k x_k^m, \quad M(X - MX)^m = \sum_{k \geq 1} p_k (x_k - MX)^m, \quad (3.15)$$

$$MX^m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF(x), \quad M(X - MX)^m = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^m dF(x),$$

відповідно.

Зокрема, якщо розкрити квадрат під знаком математичного сподівання в формулі (3.14), то отримаємо

$$DX = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2XMX + (MX)^2) = MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2$$

або

$$DX = MX^2 - (MX)^2. \quad (3.16)$$

Для дискретної величини X , яка приймає значення x_k з імовірністю p_k ,

$$DX = \sum_k (x_k - MX)^2 p_k = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k \right)^2.$$

Якщо ж величина X неперервна і має щільність розподілу $p(x)$, то

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \right)^2.$$

Приклади.

1). *Дисперсія біноміального розподілу.* Припустимо, що проводяться незалежні випробування і при кожному випробуванні може бути два результати: успіх з імовірністю p або невдача з імовірністю $q = 1 - p$. Нехай проведено n випробувань. Позначимо через X кількість появ успіху. Як відомо, випадкова величина X має біноміальний розподіл:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad \text{і} \quad MX = np.$$

Тоді

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 = \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} + np - (np)^2 = \\
& = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} + np - (np)^2 = n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k p^k q^{(n-2)-k} + \\
& + np - (np)^2 = n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} + np - (np)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq.
\end{aligned}$$

Отже,

$$DX = npq.$$

2). *Дисперсія геометричного розподілу.* Припустимо, що проводяться незалежні випробування і при кожному випробуванні може бути два результати: успіх з імовірністю p , або невдача з імовірністю $q = 1 - p$. Випробування проводяться до першої появи успіху. Нехай X – кількість випробувань до першої появи успіху. Випадкова величина X має геометричний розподіл

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тоді

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p - \left(\frac{1}{p}\right)^2.$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p &= p \sum_{k=1}^{\infty} k(kq^{k-1}) = p \sum_{k=1}^{\infty} k(q^k)'_q = p \sum_{k=1}^{\infty} \left(q \cdot (kq^{k-1}) \right)'_q = p \sum_{k=1}^{\infty} \left(q \cdot (q^k)'_q \right)'_q = \\
&= p \left(q \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'_q \right)'_q = p \left(q \left(\frac{q}{1-q} \right)'_q \right)'_q = p \left(\frac{q}{(1-q)^2} \right)'_q = p \cdot \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2},
\end{aligned}$$

маємо

$$DX = \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}.$$

Властивості дисперсії.

1). Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(C) = 0.$$

Дійсно, $D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = 0$.

2). $D(CX) = C^2 DX$.

Дійсно,

$$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M\{C^2(X - MX)^2\} = C^2 M(X - MX)^2 = C^2 DX.$$

3). Якщо X, Y – незалежні випадкові величини, то

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

Ця властивість безпосередньо впливає з означення дисперсії.

4). Якщо X, Y – незалежні випадкові величини, то

$$D(X - Y) = DX + DY.$$

Ця властивість впливає з властивостей 2, 3.

§4. Нерівність Чебишова.

Нерівність Чебишова встановлює залежність між дисперсією випадкової величини та відхиленням випадкової величини від її середнього значення.

Теорема (нерівність Чебишова). *Нехай існує DX . Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання MX за абсолютною величиною менше за ε , не менше, ніж $1 - DX/\varepsilon^2$, тобто*

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (3.17)$$

Доведення. Доведемо нерівність для випадку дискретної випадкової величини.

Так як події $|X - MX| < \varepsilon$ і $|X - MX| \geq \varepsilon$ є протилежними і утворюють повну групу, то

$$P(|X - MX| < \varepsilon) = 1 - P(|X - MX| \geq \varepsilon). \quad (3.18)$$

Таким чином, задача зводиться до визначення ймовірності $P(|X - MX| \geq \varepsilon)$. Запишемо вираз для дисперсії випадкової величини X :

$$DX = (x_1 - MX)^2 p_1 + (x_2 - MX)^2 p_2 + \dots + (x_n - MX)^2 p_n.$$

Очевидно, що всі доданки цієї суми невід'ємні. Відкинемо ті з них, в яких $|x_i - MX| < \varepsilon$ (для доданків, що залишились $|x_j - MX| \geq \varepsilon$), внаслідок цього сума може тільки зменшитись. Умовно вважатимемо, що відкинули перші k доданків.

Таким чином,

$$DX \geq (x_{k+1} - MX)^2 p_{k+1} + (x_{k+2} - MX)^2 p_{k+2} + \dots + (x_n - MX)^2 p_n. \quad (3.19)$$

Так як $\varepsilon > 0$, то з

$$|x_j - MX| \geq \varepsilon, \quad (j = k+1, k+2, \dots, n)$$

маємо

$$|x_j - MX|^2 \geq \varepsilon^2.$$

В правій частині нерівності (3.19), кожний із множників $|x_j - MX|^2$ замінимо числом ε^2 (при цьому нерівність тільки підсилиться), отримаємо

$$DX \geq \varepsilon^2 \cdot (p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n). \quad (3.20)$$

Сума в (3.20) рівна ймовірності того, що випадкова величина X набуде одного, все рівно якого, із значень $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$, а при будь-якому з них відхилення задовольняє нерівності $|x_j - MX| \geq \varepsilon$. Звідки випливає, що сума $p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_n$ виражає ймовірність $P(|X - MX| \geq \varepsilon)$.

Виходячи з цих міркувань, нерівність (3.20) можна переписати у вигляді

$$DX \geq \varepsilon^2 P(|X - MX| \geq \varepsilon),$$

або

$$P(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \quad (3.21)$$

Підставивши (3.21) в (3.18), остаточно отримаємо

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

що й треба було довести. ■

Приклад. Ймовірність появи події в кожному випробовуванні рівна 0,3. Знайти ймовірність того, що в 2500 випробуваннях відхилення частоти події від ймовірності не перевищує за абсолютною величиною 0,01.

Розв'язок. ▷ Запишемо нерівність Чебишова

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - DX/\varepsilon^2.$$

Тут

$$X = \frac{m}{n}, 0 \leq m \leq n;$$

випадкова величина X має біноміальний розподіл, тому

$$MX = \frac{np}{n} = p; \quad DX = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$

Отже,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2};$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,3\right| < 0,01\right) \geq 1 - \frac{0,3 \cdot 0,7}{2500 \cdot 0,01^2} = 0,16. \blacktriangleleft$$

Зауваження. Нерівність Чебишова виконується і для неперервних випадкових величин.

§5. Нормальний розподіл.

Нормальний закон розподілу посідає в теорії ймовірностей в певному розумінні центральне місце. Нормальний розподіл часто називають *законом Гауса*.

Важлива роль цього розподілу пояснюється тим, що при досить широких припущеннях розподіл суми великої кількості випадкових величин є близьким до нормального розподілу. Нормальному закону розподілу підпорядковується більшість фізичних величин. Наприклад, швидкість теплового руху молекул, ріст людини, розмір взуття і одягу людини, поведінка людини в суспільстві, тощо.

Нормальним розподілом $N(a, \sigma^2)$ з параметрами a і σ^2 називається розподіл із щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

З'ясуємо теоретико-ймовірнісне тлумачення параметрів a і σ^2 .

Знайдемо математичне сподівання нормального розподілу. Матимемо

$$MX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a) e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a,$$

так як

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

(останній інтеграл – інтеграл Пуассона (2.4)).

Таким чином, параметр a нормального розподілу $N(a, \sigma^2)$ рівний його математичному сподіванню.

Знайдемо дисперсію нормального розподілу:

$$\begin{aligned} DX &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = z; \quad x = \sigma z + a; \\ dx = \sigma dz, \end{array} \right\} = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du \\ u = z, \quad du = dz \\ dv = ze^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad v = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{array} \right\} = \frac{-\sigma^2 z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Враховуючи (2.4) і те, що

$$\lim_{z \rightarrow \infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} = \lim_{z \rightarrow -\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} = 0,$$

отримаємо $DX = \sigma^2$, а, значить, параметр σ є *середньо квадратичним відхиленням*.

Оскільки щільність нормального розподілу повністю визначається параметрами a і σ^2 , то нормальний розподіл повністю визначається своїм математичним сподіванням та дисперсією.

Запровадимо ще деякі поняття, пов'язані з нормальним розподілом.

Легко переконатися, що множення нормальної випадкової величини на сталу та додавання до неї сталої залишає випадкову величину нормальною.

Якщо випадкова величина X має розподіл $N(0, 1)$, то вона *називається стандартною*.

Знайдемо ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал (α, β) :

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = z; \quad x = \sigma z + a; \\ dx = \sigma dz, \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.
\end{aligned}$$

або, використовуючи функцію Лапласа (2.3),

$$P(\alpha < X < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Теоретично нормальна щільність відмінна від нуля на всій числовій осі, але практично за межами інтервалу $[a - 3\sigma, a + 3\sigma]$ дуже близька до нуля. Справді:

$$P(a - 3\sigma \leq X \leq a + 3\sigma) \approx 2\hat{O}(3) = 0,9973. \quad (3.22)$$

Отже, ймовірність попасти за межі цього відрізка рівна 0,0027.

Рівність (3.22) називають „правилом трьох сигм”. Згідно з цим правилом практично вірогідно, що нормально розподілена випадкова величина може відхилятися від свого математичного сподівання не більше, ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення.

Питання для самоперевірки.

1. Які величини називають випадковими?
2. Що називають розподілом випадкової величини? Наведіть приклади розподілів дискретних випадкових величин.
3. Що називають функцією розподілу випадкової величини? Які її властивості? Наведіть приклади розподілів найбільш важливих неперервних випадкових величин.
4. Як визначаються математичне сподівання, моменти та дисперсія випадкових величин?
5. Чому рівне математичне сподівання для типових законів розподілу?
6. Чому рівна дисперсія для типових законів розподілу?
7. Запишіть нерівність Чебишова.
8. Який імовірнісний зміст параметрів нормального розподілу?

Розділ IV. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

§1. Теорема Чебишова.

Відомо, що неможливо наперед передбачити, яке значення прийме випадкова величина в результаті випробовування; це залежить від багатьох випадкових причин, врахувати які неможливо. Проте при деяких порівняно широких умовах сумарна поведінка достатньо великої кількості випадкових величин майже втрачає випадковий характер і стає закономірною.

Законами великих чисел називають твердження, за допомогою яких описується поведінка середніх арифметичних сум незалежних випадкових величин при зростанні їх кількості. Наведемо найпростіші їх форми.

Теорема Чебишова. *Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – послідовність незалежних випадкових величин з однаковим математичним сподіванням $MX_i = a$ ($i = 1, 2, \dots$) і дисперсіями, які обмежені деякою сталою:*

$$DX_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (4.1)$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

За властивостями математичного сподівання

$$MY_n = \frac{MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

Враховуючи незалежність випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, маємо

$$DY_n = D \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} (DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n) \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Застосувавши до випадкової величини Y_n нерівність Чебишова (3.17), отримаємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P \{ |Y_n - MY_n| < \varepsilon \} \geq 1 - \frac{DY_n}{\varepsilon^2},$$

тобто

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Права частина цієї рівності прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, звідки і випливає твердження теореми. ■

Зауваження. Доведена теорема дає обґрунтування використання середнього арифметичного в різноманітній практиці: при достатньо великій кількості вимірювань з імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, середнє арифметичне результатів вимірювання буде як завгодно мало відрізнятися від вимірюваної величини.

Приклад. Середньоквадратичне відхилення кожної із 2500 незалежних випадкових величин не перевищує 3. Обчислити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищує 0,3.

Розв'язок. $\triangleright$ За умовою $n = 2500$; $\varepsilon = 0,3$; $\sigma^2 \leq C = 9$.

Відповідно до теореми Чебишова

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{9}{2500 \cdot 0,09} = 1 - \frac{1}{25} = 0,96. \blacktriangleleft$$

Розглянемо застосування теореми Чебишова для схеми незалежних випробувань Бернуллі.

Теорема Бернуллі. Нехай k – кількість успіхів в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює p ($0 < p < 1$). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} = 1. \quad (4.2)$$

Доведення. Нехай $Y_i, i=1,2,\dots,n$, – незалежні випадкові величини, які набувають значення 1, якщо в i -му випробуванні випав успіх, та 0 – випала невдача. Тоді $k = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$. Було показано (див. приклади до §3 розділу III), що $MY_i = p$, $DY_i = pq$. Отже, для величин Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, виконуються умови теореми Чебишова. Звідки і випливає твердження теореми Бернуллі. ■

§2. Поняття про центральну граничну теорему.

Повернемося до інтегральної теореми Лапласа, згідно з якою для кількості успіхів в n незалежних випробуваннях Бернуллі k з імовірністю успіху p ($0 < p < 1$) виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{k - np}{\sqrt{npq}} < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Іншими словами, функції розподілу випадкових величин

$$\frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

прямують при зростанні n до функцій розподілу стандартного нормального закону. Цьому співвідношенню можна надати іншої форми. Введемо випадкові величини Y_i , які приймають значення 1, якщо в i -тому випробуванні випав успіх, та 0, якщо – невдача. Тоді

$$k = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$

Враховуючи, що $MY_i = p$, $DY_i = pq$, маємо

$$Mk = \sum_{i=1}^n MY_i = np \quad \text{та} \quad Dk = \sum_{i=1}^n DY_i = npq.$$

Тепер інтегральну теорему Лапласа можна сформулювати так:

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. *Якщо кожна з незалежних випадкових величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ може набувати лише двох значень 1 і 0 з імовірностями p та q ($p + q = 1$, $0 < p < 1$), то при нескінченному зростанні n функція розподілу випадкової величини*

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - M \sum_{i=1}^n Y_i}{\sqrt{D \sum_{i=1}^n Y_i}}$$

прямує до функції розподілу стандартного нормального закону.

Це твердження носить назву *центральної граничної теореми* для послідовності незалежних випробувань.

Центральна гранична теорема пояснює ще раз велике поширення нормального закону розподілу: якщо випадкова величина формується під впливом багатьох незалежних факторів, кожен з яких здійснює на неї незначний вплив, то розподіл цієї величини мало відрізняється від нормального.

Питання для самоперевірки.

1. Сформулюйте і виведіть теорему Чебишова.

2. Сформулюйте і виведіть теорему Бернуллі.
3. Яке твердження називають центральною граничною теоремою?

Розділ V. ФУНКЦІЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

§1. Функція одного випадкового аргументу.

Нехай задано дві випадкові величини X і Y . Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y , то Y називають *функцією випадкового аргументу* X :

$$Y = \varphi(X). \quad (5.1)$$

Розглянемо, як знайти закон розподілу ймовірностей функції за відомим розподілом дискретного і неперервного аргументу.

1. Нехай X – дискретна випадкова величина.

а) Якщо різним можливим значенням аргументу X відповідають різні можливі значення функції Y , то ймовірності відповідних значень X і Y між собою рівні.

Приклад. Дискретна випадкова величина X задана розподілом

X	2	3
P	0,6	0,4

Знайти розподіл функції $Y = X^2$.

Розв'язок. $\triangleright$ Знайдемо можливі значення Y : $y_1 = 2^2 = 4$; $y_2 = 3^2 = 9$.

Запишемо шуканий розподіл Y :

Y	4	9
P	0,6	0,4

б) Якщо різним можливим значенням аргументу X відповідають значення Y , серед яких є рівні між собою, то ймовірності значень Y , що повторюються додаються.

Приклад. Дискретна випадкова величина X задана розподілом

X	-2	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Знайти розподіл функції $Y = X^2$.

Розв'язок. $\triangleright$ Ймовірність можливого значення $y_1 = 4$ рівна сумі ймовірностей

несумісних подій $X = -2$, $X = 2$, тобто $0,4 + 0,5 = 0,9$. Ймовірність можливого значення $y_2 = 9$ рівна $0,1$.

Запишемо шуканий розподіл Y :

Y	4	9
P	0,9	0,1



2. Нехай X – неперервна випадкова величина.

Як знайти розподіл функції $Y = \varphi(X)$, знаючи щільність розподілу $p(x)$ випадкового аргументу X ? Доведено: якщо $y = \varphi(x)$ – диференційовна зростаюча або спадна функція, обернена функція якої $x = \psi(y)$, то щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини Y знаходиться за допомогою рівності

$$g(y) = p[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|. \quad (5.2)$$

Приклад. Дискретна випадкова величина X нормально розподілена з параметром $a = 0$. Знайти розподіл функції $Y = X^3$.

Розв'язок. $\triangleright$ Так як функція $y = x^3$ диференційовна і зростаюча, то можна застосувати формулу (5.2).

Знайдемо функцію, обернену до функції $y = x^3$:

$$\psi(y) = x = y^{1/3}.$$

Знайдемо $p[\psi(y)]$. За умовою,

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

тому

$$p[\psi(y)] = p(y^{1/3}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{2/3}}{2\sigma^2}}. \quad (5.3)$$

Знайдемо похідну оберненої функції по y :

$$\psi'(y) = (y^{1/3})' = \frac{1}{3y^{2/3}}. \quad (5.4)$$

Знайдемо шукану щільність розподілу, підставивши (5.3) і (5.4) в (5.2):

$$g(y) = \frac{1}{3\sigma y^{2/3} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{2/3}}{2\sigma^2}}. \quad \blacktriangleleft$$

Математичне сподівання функції одного випадкового аргументу. Нехай задана функція $Y = \varphi(X)$ випадкового аргументу X . Треба знайти математичне сподівання цієї функції, знаючи закон розподілу аргументу.

1. Нехай X – дискретна випадкова величина, задана законом розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Очевидно, що Y – теж дискретна випадкова величина з можливими значеннями $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, $\dots$, $y_n = \varphi(x_n)$, ймовірності яких рівні $p_1, p_2, \dots, p_n$, відповідно.

Отже, математичне сподівання функції

$$MY = M\varphi(X) = \sum_{i=1}^n y_i p_i = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i. \quad (5.5)$$

Приклад. Дискретна випадкова величина X задана розподілом

X	2	3
P	0,6	0,4

Знайти математичне сподівання функції $Y = X^2$.

Розв'язок. $\triangleright$ Знайдемо можливі значення Y : $y_1 = 4$; $y_2 = 9$.

Шукане математичне сподівання функції Y рівне

$$MY = 4 \cdot 0,6 + 9 \cdot 0,4 = 6. \blacktriangleleft$$

2. Нехай X – неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $p(x)$.

Для знаходження математичного сподівання функції $Y = \varphi(X)$ можна спочатку знайти щільність розподілу $g(y)$ величини Y , а потім використати формулу

$$MY = \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy.$$

Але коли відшукування функції $g(y)$ пов'язане з певними труднощами, то можна безпосередньо знайти математичне сподівання функції $\varphi(X)$ за формулою

$$M\varphi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx.$$

У випадку, коли $X \in (a, b)$,

$$M\varphi(X) = \int_a^b \varphi(x)p(x)dx. \quad (5.6)$$

Зауваження. Доведення формули (5.6) аналогічне доведенню формули (5.5), якщо суму замінити інтегруванням, а ймовірність – $p(x)\Delta x$.

Приклад. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу $p(x) = \cos x$ на інтервалі $(0; \pi/2)$, за межами цього інтервалу $p(x) = 0$. Обчислити математичне сподівання випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язок. $\triangleright$ За формулою (5.6):

$$\begin{aligned} M(Y) &= \int_0^{\pi/2} \varphi(x)p(x)dx = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ \cos x dx = dv, \quad x^2 = u \\ v = \sin x, \quad du = 2x dx \end{array} \right\} = \\ &= x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot 2x dx = \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x dx = dv_1, \quad u_1 = x \\ v_1 = -\cos x, \quad du_1 = dx \end{array} \right\} = \frac{\pi}{2} - 2 \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx \right) = \frac{\pi}{2} - 2 \left(\sin x \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi}{2} - 2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

§2. Функція двох випадкових аргументів.

Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин X і Y ставиться у відповідність одне можливе значення випадкової величини Z , то Z називається *функцією двох випадкових аргументів* X і Y :

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Визначимо закон розподілу випадкової величини Z , якщо відомі закони розподілу X і Y , а також функція зв'язку

$$Z = X + Y.$$

1. Нехай X і Y – дискретні незалежні випадкові величини. Припустимо, що відомі їх закони розподілу:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_k
P	g_1	g_2	$\dots$	g_k

Щоб встановити закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$, необхідно знайти всі значення Z :

$$z_{ij} = x_i + y_j, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k},$$

а також ймовірності їх появи.

Випадкова величина Z набуває значення z_{ij} при одночасній появі x_i і y_j . Якщо величини x_i і y_j незалежні, то ймовірність появи z_{ij} дорівнює $p_i g_j$ і закон розподілу має вигляд

Y	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$\dots$	$x_1 + y_k$	$\dots$	$x_n + y_k$
P	$p_1 g_1$	$p_1 g_2$	$\dots$	$p_1 g_k$	$\dots$	$p_n g_k$

2. Нехай X і Y – неперервні випадкові величини. Доведено: якщо X і Y незалежні, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z = X + Y$ (при умові, що щільність хоча б одного з аргументів задана на інтервалі $(-\infty, \infty)$ однією формулою) може бути знайдена за допомогою рівності

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) p_2(z - x) dx \quad (5.7)$$

або за допомогою рівносильної рівності

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(z - y) p_2(y) dy, \quad (5.8)$$

де p_1, p_2 – щільності розподілів аргументів.

Якщо можливі значення аргументів невід’ємні, то $g(z)$ знаходять за формулою

$$g(z) = \int_0^z p_1(x) p_2(z - x) dx$$

або за рівносильною формулою

$$g(z) = \int_0^z p_1(z - y) p_2(y) dy.$$

Щільність розподілу суми незалежних випадкових величин називають *композицією*.

Закон розподілу називають *стійким*, якщо композиція таких законів є тим же законом, що відрізняється параметрами. Нормальний закон має властивість стійкості.

Приклад. Незалежні випадкові величини X і Y задані щільностями розподілу

$$p_1(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3}; \quad 0 \leq x < \infty;$$

$$p_2(y) = \frac{1}{5}e^{-y/5}; \quad 0 \leq y < \infty.$$

Знайти композицію цих законів, тобто щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язок. $\triangleright$ Можливі значення аргументів невід'ємні, тому

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z p_1(x)p_2(z-x)dx = \int_0^z \frac{1}{3}e^{-x/3} \cdot \frac{1}{5}e^{-(z-x)/5}dx = \\ &= \frac{e^{-z/5}}{15} \int_0^z e^{-2x/15}dx = \frac{1}{2}e^{-z/5} \left(1 - e^{-2z/15}\right). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Питання для самоперевірки.

1. Що називають функцією одного випадкового аргументу?
2. Як знаходиться математичне сподівання функції одного випадкового аргументу?
3. Як визначається функція двох випадкових аргументів?
4. Як знаходиться математичне сподівання функції двох випадкових аргументів?

Розділ VI. ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ

§1. Функція розподілу випадкового вектора.

Випадковий вектор. Нехай X і Y – випадкові величини, задані на одному просторі елементарних подій Ω . Тоді кожній елементарній події $\omega \in \Omega$ можна

поставити у відповідність двовимірний випадковий вектор $(X(\omega), Y(\omega))$. Для довільних x, y розглянемо випадкову подію

$$\{\omega: X(\omega) < x, Y(\omega) < y\}.$$

Означення. Функцією розподілу випадкового вектора, або сумісною функцією розподілу двох випадкових величин (X, Y) називається така ймовірність

$$P\{X < x, Y < y\} = F_{X,Y}(x, y)$$

для $x \in (-\infty, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$.

Властивості функції розподілу.

1) Значення функції розподілу $F_{X,Y}(x, y)$ задовольняють нерівності:

$$0 \leq F_{X,Y}(x, y) \leq 1.$$

2) Функція $F_{X,Y}(x, y)$ – неспадна функція кожного зі своїх аргументів, тобто:

$$F_{X,Y}(x_2, y) \geq F_{X,Y}(x_1, y), \text{ якщо } x_2 \geq x_1;$$

$$F_{X,Y}(x, y_2) \geq F_{X,Y}(x, y_1), \text{ якщо } y_2 \geq y_1;$$

3) Функція $F_{X,Y}(x, y)$ – неперервна зліва по кожному зі своїх аргументів.

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x).$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{X,Y}(x, y) = 1.$$

$$7) P\{a \leq X < b, c \leq Y < d\} = F_{X,Y}(a, c) + F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) \quad (6.1)$$

– імовірність попадання випадкової точки площини з координатами (x, y) в прямокутник зі сторонами, що паралельні осям координат.

Приклад. Знайти ймовірність попадання випадкової точки (x, y) в прямокутник, обмежений прямими $x = \pi/6$, $x = \pi/2$, $y = \pi/4$, $y = \pi/3$, якщо відома функція розподілу

$$F_{X,Y}(x, y) = \sin x \sin y \quad (0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2).$$

Розв'язок. $\triangleright$ За формулою (6.1), де $a = \pi/6$, $b = \pi/2$, $c = \pi/4$, $d = \pi/3$, маємо

$$P\{\pi/6 \leq X < \pi/2, \pi/4 \leq Y < \pi/3\} =$$

$$\begin{aligned}
&= F_{X,Y}(\pi/6, \pi/4) + F_{X,Y}(\pi/2, \pi/3) - F_{X,Y}(\pi/6, \pi/3) - F_{X,Y}(\pi/2, \pi/4) = \\
&= \sin(\pi/6)\sin(\pi/4) + \sin(\pi/2)\sin(\pi/3) - \sin(\pi/6)\sin(\pi/3) - \sin(\pi/2)\sin(\pi/4) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})/4 \approx 0,08. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

§2. Дискретні випадкові вектори.

Нехай X і Y – дискретні випадкові величини. Припустимо, що відомі закони розподілу цих випадкових величин:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Y	y_1	y_2	...	y_k
P	g_1	g_2	...	g_k

Тоді можна розглянути події $\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i \geq 1, j \geq 1$, ймовірність яких будемо позначати:

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad i \geq 1, j \geq 1.$$

Означення. Набір значень випадкових величин x_i, y_j разом із ймовірностями p_{ij} , $i \geq 1, j \geq 1$, називають розподілом дискретного випадкового вектора, або сумісним розподілом двох дискретних випадкових величин.

Властивості розподілу випадкового вектора.

$$1) \quad p_{ij} \geq 0, \quad i \geq 1, j \geq 1;$$

$$2) \quad \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} p_{ij} = 1;$$

3) Для кожного фіксованого i маємо:

$$\sum_{j \geq 1} p_{ij} = \sum_{j \geq 1} P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} = p_i, \quad i \geq 1.$$

Аналогічно для фіксованого j :

$$\sum_{i \geq 1} p_{ij} = g_j, \quad j \geq 1.$$

Приклади.

1. Нехай у місті проживає 1000 дорослих мешканців та існує дві банківські установи, з яких першою користується 300 мешканців, другою – 400 і 100 – користується обома. Нехай деяка родина складається з чоловіка та жінки і X –

кількість рахунків, відкритих чоловіком, Y – дружиною. Тоді маємо двовимірний випадковий вектор (X, Y) , кожна компонента якого може приймати значення 0, 1, 2. Знайдемо розподіл цього вектора, вважаючи відкриття рахунків чоловіком та дружиною незалежними подіями.

Розв'язок. $\triangleright$ Оскільки 400 осіб не користуються банками, то

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{400}{1000} \cdot \frac{400}{1000} = \frac{4}{25} = 0,16.$$

Так як 500 осіб користуються одним банком, то

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{400}{1000} \cdot \frac{500}{1000} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Так як 100 осіб користуються двома банками, то

$$P\{X=0, Y=2\} = \frac{400}{1000} \cdot \frac{100}{1000} = \frac{1}{25} = 0,04.$$

Аналогічно обчислюються інші ймовірності. Занесемо результати в таблицю. Перший рядок та стовпчик – це значення випадкових величин, решта, крім останнього стовпчика та останнього рядка, – p_{ij} , останній стовпчик – g_i дорівнює сумі ймовірностей по рядках, останній рядок – p_j дорівнює сумі ймовірностей по стовпчиках:

$Y \backslash X$	0	1	2	g_i
0	0,16	0,2	0,04	0,4
1	0,2	0,25	0,05	0,5
2	0,04	0,05	0,01	0,1
p_j	0,4	0,5	0,1	

2. Знайти закони розподілу компонент випадкового вектора (X, Y) , заданого законом розподілу

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,30	0,20
y_2	0,06	0,18	0,16

Розв'язок. $\triangleright$ Просумувавши ймовірності по стовпчиках, отримаємо ймовірності можливих значень X :

X	x_1	x_2	x_3
P	0,16	0,48	0,36

Контроль:

$$0,16 + 0,48 + 0,36 = 1.$$

Просумувавши ймовірності по рядках, отримаємо ймовірності можливих значень Y :

Y	y_1	y_2
P	0,60	0,40

Контроль:

$$0,60 + 0,40 = 1. \blacktriangleleft$$

§3. Неперервні випадкові вектори.

Нехай X і Y – неперервні випадкові величини, які мають щільності $p_X(x)$ та $p_Y(y)$ відповідно.

Означення. Назвемо щільністю випадкового вектора, або сумісною щільністю двох випадкових величин інтегровну неперервну функцію $p_{X,Y}(x,y)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$ таку, що

$$F_{X,Y}(x,y) = \iint_{(u,v): u \leq x, v \leq y} p_{X,Y}(u,v) du dv.$$

З означення зрозуміло, що щільність у точках її неперервності можна обчислити так:

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

З означення функції розподілу та щільності випадкового вектора випливають наступні **властивості щільності**:

$$1) p_{X,Y}(x,y) \geq 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (-\infty, +\infty);$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(u,v) du dv = 1;$$

3) для прямокутної області:

$$P\{X \in [a, b]; Y \in [c, d]\} = \int_a^b \int_c^d p_{X,Y}(u, v) du dv;$$

4) для довільної області $D \subset R^2$:

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D p_{X,Y}(u, v) du dv;$$

$$5) p_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(u, v) dv, u \in (-\infty, +\infty), p_Y(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(u, v) du, v \in (-\infty, +\infty).$$

Приклад. Для виплат банк може використовувати власні ресурси. Якщо не вистачає власних, то використовуються кредитні ресурси. Власні та кредитні ресурси – випадкові величини X та Y відповідно. Сумісна щільність X та Y задається наступним чином:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C(x + y), & x, y \in [0, T]; \\ 0, & x, y \notin [0, T]. \end{cases}$$

Знайти сталу C та ймовірність того, що банк може виплатити суму T .

Розв'язок. $\triangleright$ Оскільки

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(u, v) du dv = \int_0^T \int_0^T C(u + v) du dv = C \int_0^T \left(\frac{T^2}{2} + uT \right) du = \\ &= C \left(\frac{T^3}{2} + \frac{T^3}{2} \right) = CT^3, \end{aligned}$$

то $C = \frac{1}{T^3}.$

Далі, шукана ймовірність є

$$\begin{aligned} P\{X + Y \geq T\} &= \iint_{\substack{u+v \geq T; \\ u, v \in [0, T]}} C(u + v) du dv = \frac{1}{T^3} \int_0^T \int_{T-u}^T (u + v) du dv = \\ &= \frac{1}{T^3} \int_0^T \left(u^2 + \frac{2Tu - u^2}{2} \right) du = \frac{1}{T^3} \left(\frac{T^3}{3} + \frac{T^3}{2} - \frac{T^3}{6} \right) = \frac{2}{3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Означення. Випадковий вектор (X, Y) називається рівномірно розподіленим в області $D \subset R^2$, якщо його щільність розподілу дорівнює

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Приклад. Знайти сталу C в рівномірному розподілі і ймовірність попадання точки (x,y) в область $G \subset D$.

Розв'язок. $\triangleright$ Позначимо через $S(D)$ площу області D . Згідно з властивістю 2 щільності маємо

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C dx dy = C \cdot S(D).$$

Отже,

$$C = \frac{1}{S(D)}.$$

Далі, за властивістю 4 щільності

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G C dx dy = CS(G) = \frac{S(G)}{S(D)}.$$

Таким чином, ймовірність попадання точки в область $G \subset D$ дорівнює відношенню площ областей G та D . $\blacktriangleleft$

Питання для самоперевірки.

1. Що називають випадковим вектором?
2. Як визначаються функція та щільність розподілу випадкового вектора? Які їхні властивості?

Розділ VII. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАЛЕЖНОСТІ

§1. Коваріація двох випадкових величин.

Нехай X та Y – випадкові величини, задані на одному просторі елементарних подій Ω , для яких існують MX , MY , DX , DY .

Означення. Коваріацією двох випадкових величин X та Y називається число:

$$\text{Cov}(X,Y) = M[(X - MX)(Y - MY)]. \quad (7.1)$$

Якщо розкрити дужки та обчислити математичне сподівання функції від

випадкового вектора, то побачимо, що

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= M[(XY - YMX - XMY + MXMY)] = \\ &= M(XY) - 2MXMY + MXMY = M(XY) - MXMY. \quad (7.2)\end{aligned}$$

Властивості коваріації двох випадкових величин:

Безпосередньо з властивостей математичного сподівання, отримуємо

- 1) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.
- 2) $\text{Cov}(X, X) = DX$.
- 3) $\text{Cov}(X + C_1, Y + C_2) = \text{Cov}(X, Y)$, $C_1, C_2 \in R$.
- 4) $\text{Cov}(\alpha_1 X, \alpha_2 Y) = \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(X, Y)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.
- 5) Нехай X та Y – незалежні величини. Тоді

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Дійсно, оскільки для незалежних випадкових величин $M(XY) = MXMY$, то з (7.2) отримуємо необхідне твердження.

§2. Коефіцієнт кореляції та його властивості.

Оскільки коваріація двох випадкових величин може приймати значення від $-\infty$ до $+\infty$, то використання її як міри залежності не є завжди зручним, що спонукає до запровадження коефіцієнта кореляції.

Означення. Коефіцієнт кореляції двох випадкових величин X та Y дорівнює

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}. \quad (7.3)$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) Якщо випадкові величини X та Y незалежні, то $\rho(X, Y) = 0$. Це впливає безпосередньо з означення коефіцієнта кореляції.

2) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Дійсно, оскільки математичне сподівання невід'ємної випадкової величини завжди невід'ємне, то при будь-якому дійсному t виконується нерівність

$$M[t(X - MX) - (Y - MY)]^2 \geq 0,$$

звідки, розкриваючи дужки, дістанемо:

$$t^2 DX - 2t \text{Cov}(X, Y) + DY \geq 0. \quad (7.4)$$

У лівій частині цієї нерівності стоїть квадратний тричлен відносно t , він може бути невід'ємним при всіх дійсних t тоді і тільки тоді, коли його дискримінант не є додатним, тобто

$$[\text{Cov}(X, Y)]^2 - DX DY \leq 0.$$

Звідки

$$[\text{Cov}(X, Y)]^2 \leq DX DY, \quad (7.5)$$

що доводить потрібне твердження.

3) Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X та Y дорівнює $+1$ або -1 тоді і тільки тоді, коли X та Y зв'язані лінійною залежністю: $Y = aX + b$, при цьому

$$\rho(X, Y) = \text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{ї} \text{ } \delta\text{e} \quad a > 0, \\ -1 & \text{ї} \text{ } \delta\text{e} \quad a < 0. \end{cases}$$

Доведемо це. Нехай $|\rho(X, Y)| = 1$. Це означає, що в нерівності (7.5) стоїть знак рівності, тобто дискримінант квадратного тричлена в лівій частині (7.4) рівний нулю. Тоді цей тричлен має двократний дійсний корінь:

$$t = a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{DX}, \quad (7.6)$$

тобто

$$M[a(X - MX) - (Y - MY)]^2 = 0.$$

Останню рівність можна записати так:

$$M[aX - Y - M(aX - Y)]^2 = 0,$$

або

$$D(aX - Y) = 0.$$

Але дисперсія може дорівнювати нулю тільки для випадкової величини, яка з імовірністю 1 набуває певного сталого значення b . Звідки:

$$aX - Y = b,$$

отже, $Y = aX - b$ з імовірністю 1. При цьому з рівності (7.6) випливає, що числа a і $\text{Cov}(X, Y)$ мають однакові знаки, тому $\rho(X, Y) = \text{sign}(a)$.

Навпаки, нехай X і Y зв'язані лінійною залежністю $Y = aX + b$. Покажемо, що $|\rho(X, Y)| = 1$, тобто в нерівності (7.5) стоїть знак рівності. Це можна перевірити

безпосереднім обчисленням: оскільки $Y = aX + b$, то $MY = aMX + b$, звідки $Y - MY = a(X - MX)$ і

$$\text{Cov}(X, Y) = M[(X - MX)(Y - MY)] = M[a(X - MX)]^2 = a^2 DX.$$

Крім того, за властивістю дисперсії,

$$DY = D(aX + b) = D(aX) = a^2 DX,$$

звідки дістаємо

$$[\text{Cov}(X, Y)]^2 = DX DY.$$

Отже,

$$|\rho(X, Y)| = 1.$$

Зауваження. Якщо коефіцієнт кореляції $\rho(X, Y) \neq 0$, то кажуть, що між випадковими величинами X та Y є кореляційний зв'язок; при цьому чим ближчий коефіцієнт кореляції до 1, тим „щільнішим” є лінійний зв'язок між X і Y . У випадку, коли $\rho(X, Y) = 0$, випадкові величини називають некорельованими.

Проте слід мати на увазі, що коли $\rho(X, Y)$ близький до нуля, то з цього не випливає, що зв'язок між X і Y дуже „слабкий”. Крім того, коефіцієнт кореляції може дорівнювати нулю навіть для випадкових величин зв'язаних функціональною залежністю. Наведемо приклад таких величин.

Приклад. Нехай X рівномірно розподілена на відріжку $[-1, 1]$, $Y = X^2$, тоді

$$MX = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0$$

і тому

$$\text{Cov}(X, Y) = M[(X - MX)(Y - MY)] = M[X(Y - MY)] = M(XY) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x x^2 dx = 0,$$

отже, $\rho(X, X^2) = 0$, хоча X та X^2 зв'язані функціональною залежністю.

Таким чином, з незалежності випадкових величин випливає їх некорельованість, але з некорельованості, взагалі кажучи, не випливає їх незалежність.

Приклад. Державний банк відправляє грошові банкноти на заміну внаслідок дефектів двох типів: 1) механічне пошкодження банкнот, в тому числі: розриви, порізи, зношеність тощо; 2) невідповідність зовнішнього вигляду: колір, плями, позначки тощо. Щомісяця банк відбраковує внаслідок дефектів першого типу 3 %

банкнот, другого – 4,5%. Загалом відбраковується 5 % банкнот. Знайти коефіцієнт кореляції між дефектами першого та другого типів.

Розв'язок. ▷ Введемо дві випадкові величини: X набуває значення 1, якщо банкнота вибракувана внаслідок дефекту першого типу і 0, якщо дефекту немає, і аналогічно визначається Y для дефекту другого типу. Отже,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{з ймовірністю } 0,03, \\ 0, & \text{з ймовірністю } 0,97, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{з ймовірністю } 0,045, \\ 0, & \text{з ймовірністю } 0,955. \end{cases}$$

Тому

$$MX = 0,03; DX = MX^2 - (MX)^2 = 0,03 - (0,03)^2 = 0,03 \cdot 0,97;$$

$$MY = 0,045; DY = 0,045 \cdot 0,955.$$

Оскільки зіпсовані банкноти складають всього 5 %, то

$$\begin{aligned} P\{XY = 1\} &= P\{X = 1 \cap Y = 1\} = P\{X = 1\} + P\{Y = 1\} - \\ &- P\{X = 1 \cup Y = 1\} = 0,03 + 0,045 - 0,05 = 0,025. \end{aligned}$$

Тому $M(XY) = 0,025$ і

$$\rho(X, Y) = \frac{0,025 - 0,03 \cdot 0,045}{\sqrt{0,03 \cdot 0,97} \sqrt{0,045 \cdot 0,955}} \approx 0,699. \blacktriangleleft$$

§3. Числові характеристики випадкових векторів.

Означення. Математичним сподіванням випадкового вектора $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ називають вектор із математичних сподівань його координат

$$M\bar{X} = (MX_1, \dots, MX_n).$$

Означення. Коваріаційною матрицею випадкового вектора $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ називають матрицю B , елементами якої є коваріації $b_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j); i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Властивості коваріаційної матриці:

- 1) Коваріаційна матриця симетрична: $b_{ij} = b_{ji}$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$.
- 2) На її діагоналі стоять дисперсії координат випадкового вектора

$$\bar{X} = (X_1, \dots, X_n): b_{ii} = DX_i, i = 1, \dots, n.$$

Визначник коваріаційної матриці $\det B$ називають узагальненою дисперсією.

Означення. Кореляційною матрицею випадкового вектора $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ називають матрицю R , елементами якої є коефіцієнти кореляції $r_{ij} = \rho(X_i, X_j)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Діагональні елементи дорівнюють 1, оскільки $\rho(X_i, X_i) = 1$. Так само, як і коваріаційна, кореляційна матриця є симетричною, а якщо координати вектора незалежні, то R – одинична матриця:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки.

1. Що називають коваріацією двох випадкових величин? Які її властивості?
2. Як визначається коефіцієнт кореляції? Які його властивості?
3. Що називають коваріаційною та кореляційною матрицями випадкового вектора?

Розділ VIII. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА І СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ

Основна задача математичної статистики – отримати певні висновки з експериментальних даних про масові явища і процеси. При цьому припускається, що до експериментів, які проводяться, застосовні теоретико-ймовірнісні концепції. Обмежимося розглядом деяких найбільш важливих і простих задач.

§1. Методи статистичного опису результатів спостережень.

Генеральна сукупність, вибірка. Нехай необхідно вивчити сукупність однорідних об'єктів відносно деякої ознаки X шляхом випадкового вибору окремих об'єктів з цієї сукупності.

Означення. *Генеральною сукупністю називають простір елементарних подій Ω із заданими на ньому подіями і ймовірностями та визначеною на цьому просторі випадковою величиною X . Одиницею генеральної сукупності називають елементарну подію та значення випадкової величини, що їй відповідає, тобто пару $(\omega, X(\omega))$ – випадковий об'єкт та його ознаку.*

На практиці генеральна сукупність може виявитись скінченною або нескінченною. Скінченна генеральна сукупність має місце, коли ми проводимо часткове статистичне дослідження. Проте досить часто генеральна сукупність буває фактично нескінченною. Бувають експериментальні дослідження, в яких необхідно оцінити, якими будуть результати масового застосування певного процесу.

Приклади.

5. Проводиться вибіркове дослідження сімейних бюджетів. Із скінченної генеральної сукупності – сукупності сімей, що фактично є в країні в даному році, відбирається випадковим чином сукупність, що налічує декілька тисяч сімей, а потім здійснюється спостереження над їхніми доходами і витратами. Ознака X – величина сімейного бюджету.

6. На кількох десятках дослідних ділянок висівають новий сорт пшениці для з'ясування, чи дасть цей сорт у середньому більш високі врожаї, ніж сорти, що застосовувались раніше. У даному випадку генеральна сукупність нескінченна, так як для оцінки переваг нового сорту не важливо, чи виявиться середня урожайність на дослідних ділянках більш високою, ніж урожайність на контрольних ділянках, засіяних іншими сортами, важливо дослідити, чи виявиться новий сорт більш ефективним і при масовому застосуванні. Генеральна сукупність, на яку поширюються наші висновки, є сукупність всіх ділянок, придатних для сівби пшениці, до того ж не тільки в даному році, а й на протязі наступних років. Ознака X – урожайність нового

сортів пшениці. ◀

Означення. *Випадковою вибіркою або просто вибіркою об'єму n називають випадковий вектор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, компоненти якого є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, розподіл кожної з яких співпадає з розподілом досліджуваної випадкової величини X .*

Іншими словами, випадкова вибірка – це результат n послідовних і незалежних спостережень над випадковою величиною X , що представляє генеральну сукупність.

Для скінченної генеральної сукупності випадковий рівноможливий вибір на кожному кроці без повернення приводить до залежності окремих спостережень, випадковий рівноможливий вибір з поверненням – до незалежності спостережень. Надалі мова йтиме про вибір з поверненням.

Статистичний розподіл вибірки. Конкретний набір вибірових значень $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ треба розглядати як одну з багатьох реалізацій вибірового вектора. Всі висновки про генеральну сукупність робляться тільки на основі вибірки. Вірогідність статистичних висновків визначається не по відношенню до даної конкретної вибірки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а стосовно до всього можливого набору вибірок, що характеризується розподілом випадкового вектора. Спостережні значення x_i називають *варіантами вибірки*. Послідовність упорядкованих за зростанням варіантів називають *варіаційним рядом*. Різницю між найбільшою та найменшою варіантами називають *розмахом вибірки*.

Якщо у варіаційному ряді варіанта вибірки x_i повторюється n_i разів, то n_i називають *частотою варіанти x_i* . Відношення частоти варіанти до об'єму вибірки називають *відносною частотою варіанти*:

$$W_i = \frac{n_i}{n}.$$

Статистичним розподілом або статистичним рядом називають відповідність між спостережними варіантами і їх частотами, тобто послідовність пар (x_i, n_i) .

При великому об'ємі вибірки її варіанти розбивають на k рівних інтервалів довжиною h . Щоб знайти відповідну частоту, підраховують суму частот варіантів вибірки, що потрапили до кожного з цих інтервалів.

Для наочного зображення вибірки будують полігони і гістограми частот та відносних частот.

Полігоном частот називають ламану, яка з'єднує точки з координатами (x_i, n_i) , а *полігоном відносних частот* – ламану, яка з'єднує точки з координатами $(x_i, n_i / n)$.

Гістограмою частот називають кусково-сталу функцію, яка приймає на кожному з k рівних інтервалів довжиною h значення n_i / h – *щільність частоти*, де

$$h = \frac{x_n - x_1}{k}.$$

Гістограмою відносних частот називають кусково-сталу функцію, яка приймає на кожному з k рівних інтервалів довжиною h значення W_i / h – щільність відносної частоти.

Площа фігури, обмеженої гістограмою частот і віссю абсцис, рівна сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки.

Гістограма відносних частот є статистичним аналогом щільності розподілу $p(x)$ генеральної сукупності. Площа фігури, обмеженої гістограмою відносних частот і віссю абсцис, рівна сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

Емпірична функція розподілу та її властивості. Емпіричну функцію розподілу, яка задає для кожного значення x відносну частоту події $\{X < x\}$, визначають співвідношенням

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i, \quad (8.1)$$

З означення функції $F^*(x)$ випливають наступні властивості:

- 1) значення емпіричної функції належать відрізьку $[0, 1]$;
- 2) $F^*(x)$ – неспадна функція;
- 3) $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$ та $F^*(x) = 1$ при $x > x_n$.

Приклади.

1. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним законом розподілу та побудувати її графік.

x_i	1	5	9
n_i	11	16	23

Розв'язок. $\triangleright$ Знайдемо об'єм вибірки:

$$n = \sum n_i = 11 + 16 + 23 = 50.$$

За формулою (8.1) знайдемо емпіричну функцію.

Найменша варіанта дорівнює одиниці, отже $F^*(x) = 0$ при $x \leq 1$.

Значення $X < 5$ спостерігалось 11 разів при $x_1 = 1$, отже

$$F^*(x) = \frac{11}{50} \text{ при } 1 < x \leq 5.$$

Значення $X < 9$ спостерігалось 11 разів при $x_1 = 1$ та 16 разів при $x_2 = 5$, отже

$$F^*(x) = \frac{11 + 16}{50} = \frac{27}{50} \text{ при } 5 < x \leq 9.$$

Значення $X = 9$ – найбільша варіанта. Отже $F^*(x) = 1$ при $x > 9$.

Шукана емпірична функція розподілу:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дè} & x \leq 1, \\ \frac{11}{50} & \text{ї дè} & 1 < x \leq 5, \\ \frac{27}{50} & \text{ї дè} & 5 < x \leq 9, \\ 1 & \text{ї дè} & x > 9. \end{cases}$$

Графік функції $F^*(x)$ показано на рис. 12. ◀

3. Побудувати полігон частот та полігон відносних частот за вибіркою, яка задана статистичним рядом:

x_i	1	5	9
n_i	11	16	13

Розв'язок. ▷ На осі абсцис відкладаємо значення варіант вибірки (рис. 13), на осі ординат – їх частоти. З'єднаємо точки з координатами (x_i, n_i) . Отримана ламана є полігоном частот.

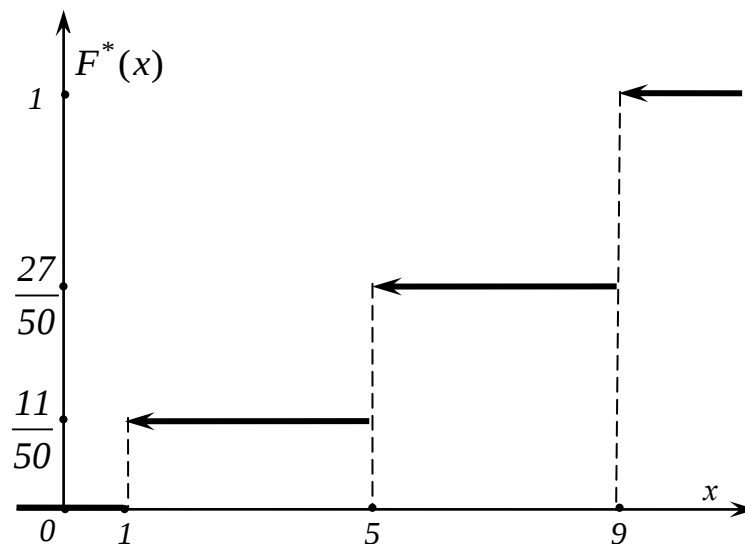


Рис. 12.

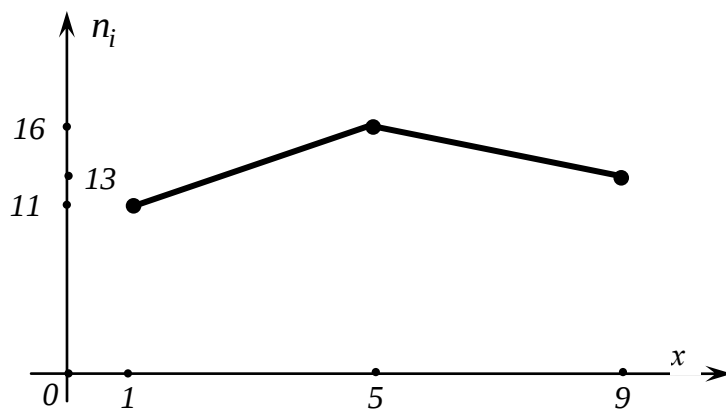


Рис. 13.

Знайдемо об'єм вибірки:

$$n = \sum n_i = 11 + 16 + 13 = 40.$$

Знайдемо відносні частоти:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{11}{40}; \quad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{16}{40}; \quad W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{13}{40}.$$

На осі абсцис відкладаємо значення варіант вибірки, а на осі ординат – їх відносні частоти.

З'єднавши точки (x_i, W_i) , отримаємо полігон відносних частот (побудувати самостійно). ◀

3. Побудувати гістограму частот за даним розподілом вибірки:

Номер інтервалу	Частковий інтервал	Частота	Щільність частот
1	3–8	5	1
2	8–13	10	2
3	13–18	15	3
4	18–23	20	4
5	23–28	15	3

Розв'язок. ▷ Кількість інтервалів $k = 5$, довжина інтервалу

$$h = \frac{28 - 3}{5} = 5.$$

На осі абсцис (рис. 14) відкладаємо часткові інтервали, на осі ординат – щільності частот:

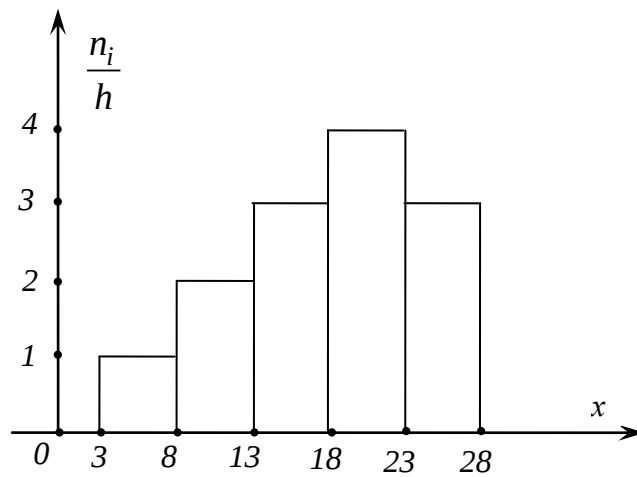


Рис. 14.

§ 2. Методи виключення грубих похибок експерименту.

При одержанні результату експерименту, суттєво відмінного від інших результатів, виникає підозра, що допущена груба похибка. В цьому випадку необхідно перевірити, чи не порушені умови експерименту.

Питання про відкидання „випадаючого” значення з наперед заданою довірчою ймовірністю вирішується на основі існуючих методик (припускається, що всі експерименти проводяться в однакових умовах і незалежні між собою).

Частіше всього застосовуються довірчі ймовірності:

$P = 0,9$ – надійність висновку рівна 90 % ,

$P = 0,95$ – надійність висновку рівна 95 % ,

$P = 0,99$ – надійність висновку рівна 99 % .

Якщо надійність висновку недостатня, то це свідчить не про відсутність грубих похибок, а про відсутність достатніх підстав для виключення „випадаючого” значення.

Перевірка вибірки на однорідність. Розглянемо одну з можливих методик перевірки вибірки на однорідність:

1) Розташувати варіанти вибірки у вигляді варіаційного ряду:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n .$$

2) Обчислити розмах вибірки

$$R = x_n - x_1 . \quad (8.2)$$

3) Обчислити

$$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{R}; \quad Q_{n-1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{R};$$

4) Якщо $Q_1 < Q_{кр}$ і $Q_{n-1} < Q_{кр}$, то вибірка однорідна. Тут $Q_{кр}(P, n)$ – значення контрольного критерію, відповідного довірчій імовірності P та об'єму вибірки n . Його значення подані в таблиці 8 додатків.

Якщо одна з нерівностей не виконується, то відповідно виключається точка x_1 або x_n , і обчислення повторюється, починаючи з п. 2 для вибірки зменшеного об'єму.

Ця методика застосовується для вибірок, об'єм яких $n \leq 9$.

Приклад. З довірчою ймовірністю $P = 0,99$ перевірити, чи нема серед одержаних результатів значень, які містять грубу похибку:

$$0,1028; 0,1017; 0,1016; 0,1018; 0,1019.$$

Розв'язок. $\triangleright$ Об'єм вибірки $n = 5$.

Розташуємо варіанти у зростаючому порядку:

$$0,1016; 0,1017; 0,1018; 0,1019; 0,1028.$$

Знайдемо розмах вибірки:

$$R = 0,1028 - 0,1016 = 0,0012.$$

Перевіримо, чи містять значення x_1 і x_5 грубу похибку з надійністю висновку 99 %:

$$Q_1 = \frac{x_2 - x_1}{R} = \frac{0,1017 - 0,1016}{0,0012} = \frac{0,0001}{0,0012} = 0,08;$$

$$Q_4 = \frac{x_5 - x_4}{R} = \frac{0,1028 - 0,1019}{0,0012} = \frac{0,0009}{0,0012} = 0,75.$$

За таблицею 8 додатків знаходимо $Q_{кр}(0,99; 5) = 0,76$. Так як

$$\begin{cases} Q_1 < Q_{кр}, \\ Q_4 < Q_{кр}, \end{cases}$$

то вибірка однорідна. $\blacktriangleleft$

§ 3. Числові характеристики вибіркового розподілу.

Нехай в результаті послідовних незалежних спостережень отримали набір вибірових значень ($x_1, x_2, \dots, x_n$) вибірки об'єму n з генеральної сукупності з функцією розподілу $F(x)$.

За даними спостережень вибірки можна обчислити її числові характеристики, які називають *параметрами вибірки*. Розглянемо деякі з них.

Вибіркове середнє. Вибірковим середнім $\bar{x}_B$ називають число, рівне

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}, \quad (8.3)$$

де k – кількість варіант вибірки; n_i – частоти варіант x_i ; n – об'єм вибірки.

У випадку, коли всі значення варіант вибірки об'єму n різні,

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Вибіркове середнє, знайдене для даної вибірки, є певним числом. Для інших вибірок того ж об'єму з генеральної сукупності, його значення може бути іншим. Таким чином, вибіркове середнє можна розглядати як випадкову величину.

Для оцінки розсіювання варіант вибірки навколо свого вибіркового середнього, вводять поняття вибіркової дисперсії.

Вибіркова дисперсія. Вибірковою дисперсією D_B називають число, рівне

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n}, \quad (8.4)$$

де k – кількість варіант вибірки; n_i – частоти варіант x_i ; n – об'єм вибірки, $\bar{x}_B$ – вибіркове середнє.

У випадку, коли всі значення варіант вибірки об'єму n різні, вибіркова дисперсія D_B обчислюється за формулою:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2.$$

Означення. Вибірковим середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь з вибіркової дисперсії:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Приклади.

1. З генеральної сукупності вилучена вибірка:

x_i	1	5	7	12
n_i	3	4	5	8

Знайти вибіркоче середнє, дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

Розв'язок. ▷ Знайдемо об'єм вибірки і вибіркоче середнє:

$$n = \sum_{i=1}^4 n_i = 20,$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^4 x_i n_i = \frac{1}{20} (1 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 12 \cdot 8) = 7,7.$$

Знайдемо D_B за формулою (8.4):

$$D_B = \frac{1}{20} [(1-7,7)^2 \cdot 3 + (5-7,7)^2 \cdot 4 + (7-7,7)^2 \cdot 5 + (12-7,7)^2 \cdot 8] = 15,71;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 3,96. \blacktriangleleft$$

2. Довести, що якщо $n_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$), то

$$D_B = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}_B^2 n \right).$$

Розв'язок. ▷

$$\begin{aligned} D_B &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x}_B + \bar{x}_B^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}_B \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \bar{x}_B^2 n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}_B^2 + \bar{x}_B^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}_B^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}_B^2 n \right). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

§4. Статистичне оцінювання параметрів розподілу генеральної сукупності за вибіркою.

Якщо вид розподілу випадкової величини відомий, то основною задачею є визначення параметрів розподілу за результатами експерименту.

Існує два способи оцінювання параметрів: точковий і інтервальний. Точкові методи вказують лише точку, біля якої знаходиться невідомий оцінюваний параметр. За допомогою інтервальних методів можна знайти інтервал, в якому з деякою ймовірністю знаходиться невідоме значення параметру.

Точкові оцінки. Нехай випадкова величина X має невідомий параметр Θ і в результаті

послідовних незалежних спостережень отримали набір вибірових значень $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вибірки об'єму n з генеральної сукупності.

Означення. Кожну однозначно визначену функцію $\Theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ результатів спостереження над випадковою величиною X , за допомогою якої роблять висновок про значення параметра Θ , називають вибірковою оцінкою параметра Θ . Конкретне числове значення $\Theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що приймає така функція від вибірки, називатимемо оцінкою або статистикою.

Означення. Точковою оцінкою $\bar{\Theta}$ невідомого параметра Θ називають наближене значення цього параметра, одержаного за вибіркою.

Найважливішими статистичними властивостями оцінки, що визначають її близькість до істинного значення параметра Θ , є незміщеність, обґрунтованість та ефективність.

Оцінку $\bar{\Theta}$ називають незміщеною, якщо її математичне сподівання як випадкової величини рівне істинному значенню параметра Θ :

$$M(\bar{\Theta}) = \Theta.$$

Оцінку $\bar{\Theta}$ називають зміщеною, якщо її математичне сподівання як випадкової величини не рівне істинному значенню параметра Θ :

$$M(\bar{\Theta}) \neq \Theta.$$

Різницю $M(\bar{\Theta}) - \Theta$ називають зміщенням.

Оцінку називають обґрунтованою, якщо при $n \rightarrow \infty$ вона збігається за ймовірністю до істинного значення параметра Θ . Іншими словами, оцінка обґрунтована, якщо вона задовольняє закон великих чисел. Наприклад, якщо для незміщеної оцінки $D(\bar{\Theta}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то така оцінка виявиться обґрунтованою.

З двох незміщених оцінок вважають більш ефективною ту, яка має меншу дисперсію.

Оцінюючи невідомі параметри розподілу ми частіше всього будемо говорити про оцінку математичного сподівання та дисперсії випадкової величини.

Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка з генеральної сукупності з математичним сподіванням a та дисперсією σ^2 . Якщо математичне сподівання генеральної сукупності невідоме, то за оцінку невідомого математичного сподівання беруть вибіркове середнє $\bar{x}_B$.

Оцінку невідомої дисперсії обчислюють за формулою:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2 \quad (8.5)$$

і S^2 називають виправленою дисперсією.

У випадку, коли математичне сподівання генеральної сукупності відоме і рівне a , за оцінку дисперсії беруть величину

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Приклади.

1. Показати, що

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

є незміщеною та обґрунтованою оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності, якщо $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка з генеральної сукупності з параметрами a та σ^2 .

Розв'язок. $\triangleright$ Розподіл кожної компоненти випадкового вектора $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ співпадає з розподілом досліджуваної випадкової величини X , тому

$$M(\bar{x}_B) = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i) = \frac{1}{n} \cdot a \cdot n = a.$$

Таким чином, оцінка незміщена.

Так як

$$D(\bar{x}_B) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sigma^2 \cdot n = \frac{\sigma^2}{n}$$

і $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\bar{x}_B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$, то незміщена оцінка обґрунтована. $\blacktriangleleft$

2. Довести, що вибіркова дисперсія D_B є зміщеною оцінкою дисперсії генеральної сукупності, якщо $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка з генеральної сукупності з параметрами a та σ^2 . Визначити величину зміщення.

Розв'язок. $\triangleright$ Знайдемо величину математичного сподівання D_B , попередньо виконавши перетворення:

$$\begin{aligned} D_B &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((x_i - a) - (\bar{x}_B - a))^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((x_i - a)^2 - 2(x_i - a)(\bar{x}_B - a) + (\bar{x}_B - a)^2) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - \frac{2}{n} (\bar{x}_B - a) \sum_{i=1}^n (x_i - a) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_B - a)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - 2(\bar{x}_B - a)^2 + \frac{1}{n} (\bar{x}_B - a)^2 n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - (\bar{x}_B - a)^2. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} MD_B &= M \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - (\bar{x}_B - a)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n} M \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 \right) - M \left((\bar{x}_B - a)^2 \right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінка зміщена і величина зміщення рівна

$$M(D_B) - \sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}. \blacktriangleleft$$

3. Показати, що оцінка

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2$$

є незміщеною оцінкою дисперсії генеральної сукупності, якщо $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка з генеральної сукупності з параметрами a та σ^2 .

Розв'язок. $\triangleright$ Знайдемо величину математичного сподівання S^2 , попередньо виконавши перетворення:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - a) - (\bar{x}_B - a))^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (\bar{x}_B - a)(x_i - a) + \sum_{i=1}^n (\bar{x}_B - a)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - 2n \cdot (\bar{x}_B - a)^2 + n \cdot (\bar{x}_B - a)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - n \cdot (\bar{x}_B - a)^2 \right]. \end{aligned}$$

Тоді

$$MS^2 = M \left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - n \cdot (\bar{x}_B - a)^2 \right) \right] = \frac{1}{n-1} \left[n\sigma^2 - n \frac{\sigma^2}{n} \right] = \sigma^2.$$

Таким чином, оцінка незміщена. $\blacktriangleleft$

4. З генеральної сукупності вилучена вибірка об'єму $n = 50$:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Знайти оцінки математичного сподівання та дисперсії генеральної сукупності.

Розв'язок. $\triangleright$ Так як незміщеною оцінкою математичного сподівання є вибіркове середнє, то

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2 \cdot 16 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 8 + 10 \cdot 14}{50} = 5,76.$$

Для оцінки дисперсії знайдемо величину виправленої дисперсії:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i = \frac{1}{49} [(2 - 5,76)^2 \cdot 16 + (5 - 5,76)^2 \cdot 12 + \\ + (7 - 5,76)^2 \cdot 8 + (10 - 5,76)^2 \cdot 14] = 10,14. \blacktriangleleft$$

Квантилі. Квантилем рівня p , $p \in (0,1)$, або p -квантилем випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$ називають таке число x_p , що ймовірність події $P(X < x_p)$ рівна заданій величині p . Іншими словами, x_p – розв'язок рівняння $F(x_p) = p$.

Приклади.

1. Квантилі нормального розподілу. Як відомо, нормальним розподілом $N(a, \sigma^2)$ з параметрами a і σ^2 називається розподіл із щільністю розподілу

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Як було показано в §5 р. III, ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал обчислюється за формулою

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

З графіка щільності розподілу $N(0, 1)$ стандартної випадкової величини X , що зображений на рис. 15,

$$P(X < x_1) = p, \quad P(X < x_2) = 1 - p,$$

де $x_2 = -x_1$, а площі заштрихованих областей рівні p .

Тоді

$$P(x_1 < X < x_2) = 1 - 2p$$

і x_1 та x_2 – квантилі нормального розподілу порядку p та $1 - p$, відповідно.

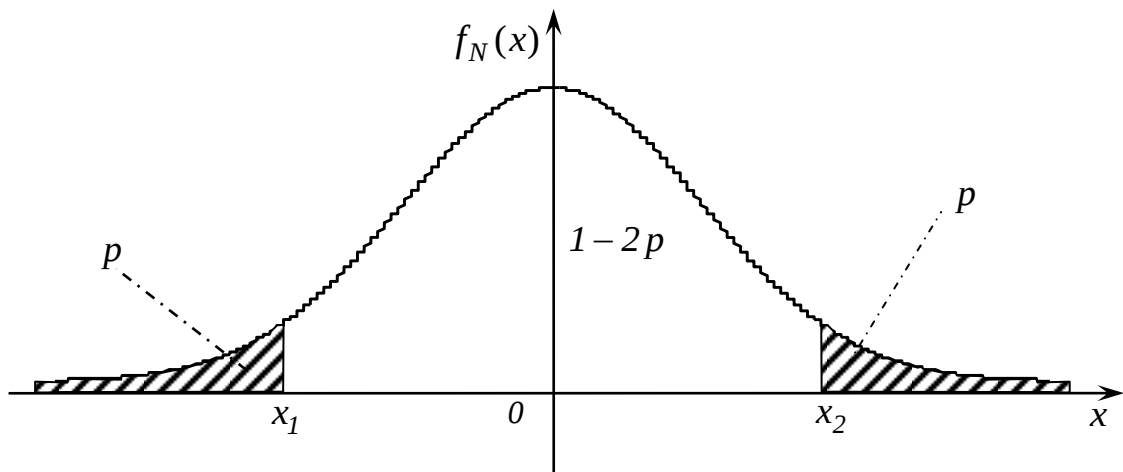


Рис. 15.

Квантилі нормального розподілу позначають U_p ($x_1 = U_p$, $x_2 = U_{1-p}$).

Очевидно, що $U_p = -U_{1-p}$.

Значення квантилів нормального розподілу наведені в таблиці 4 додатків.

2. Розподіл хі-квадрат (χ^2 -розподіл). Розподілом χ^2 з k ступенями в о б о д и називається розподіл випадкової величини

$$\chi^2(k) = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_k^2,$$

де Y_k – незалежні однаково розподілені випадкові величини, що мають нормальний $N(0, 1)$ розподіл.

Щільність χ^2 -розподілу має вигляд

$$p_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{ї дè } x \leq 0, \\ V_k e^{-x/2} x^{k/2-1} & \text{ї дè } x > 0, \end{cases}$$

де множник V_k задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_k(x) dx = 1.$$

Так

$$p_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x/2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

На рис. 16 наведено графік щільності розподілу $\chi^2(4)$:

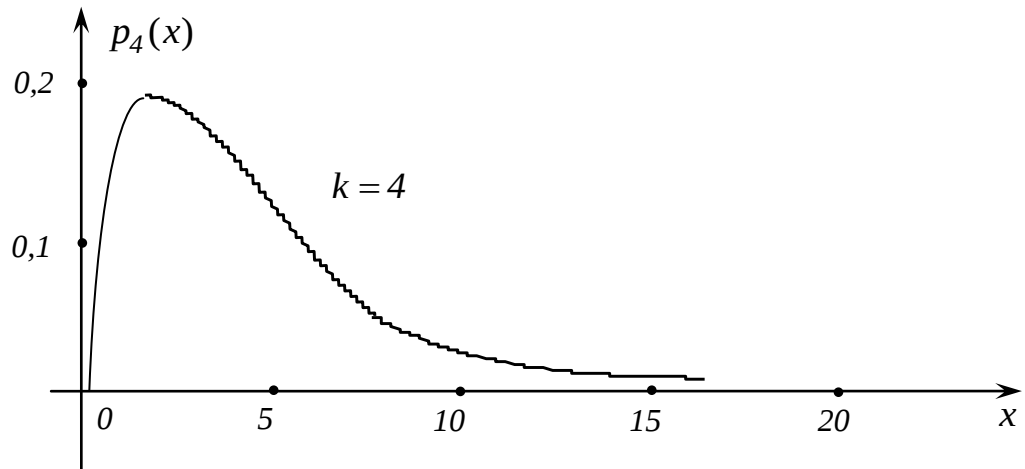


Рис. 16.

Із зростанням числа ступенів свободи розподіл $\chi^2(k)$ повільно наближається до нормального.

Розподіл χ^2 протабульований (таблиця 5 додатків).

Квантилі розподілу χ^2 .

Квантилі порядку p розподілу χ^2 з k ступенями свободи позначають $\chi_p^2(k)$.

Для наближеного знаходження квантилів $\chi_p^2(k)$ використовують формули:

$$\chi_p^2(k) = \frac{1}{2} \left(U_p + \sqrt{2k-1} \right)^2, \quad (8.6)$$

для $k \geq 30$, $p \geq 0,5$;

та

$$\chi_p^2(k) = k \left(1 - \frac{2}{9k} + U_p \sqrt{\frac{2}{9k}} \right)^3, \quad (8.7)$$

для квантилів малого порядку, де U_p – квантилі нормального розподілу $N(0, 1)$.

Значення квантилів $\chi_p^2(k)$ наведені в таблиці 5 додатків.

3. Розподіл Стьюдента (t-розподіл). Розподілом Стьюдента з k ступенями свободи називається розподіл випадкової величини

$$T(k) = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2(k)/k}},$$

де Z і $\sqrt{\chi^2(k)/k}$ – незалежні випадкові величини і Z має нормальний $N(0, 1)$ розподіл.

Щільність розподілу Стюдента має вигляд

$$p_{t_k}(x) = b_k \left(1 + \frac{x^2}{k} \right)^{-(k+1)/2}.$$

Графік щільності розподілу Стюдента наведено на рис. 17. По вигляду він нагадує графік щільності нормального розподілу, але більш „пологий”, з „обтяженими хвостами”.

Із зростанням числа ступенів свободи розподіл Стюдента швидко наближається до нормального $N(0, 1)$ розподілу.

Розподіл Стюдента протабульований (таблиця 6 додатків).

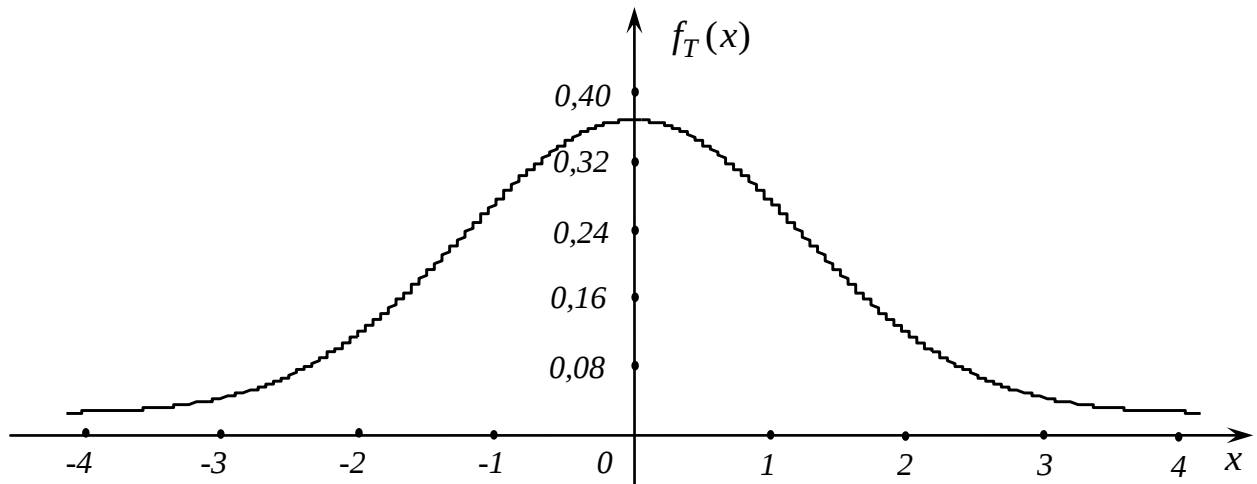


Рис. 17.

Квантилі розподілу Стюдента.

Квантилі порядку p розподілу Стюдента з k ступенями свободи позначають $t_p(k)$.

Квантилі розподілу Стюдента з k ступенями свободи пов'язані співвідношенням:

$$t_p(k) = -t_{1-p}(k).$$

При $k > 30$ для квантилів $t_p(k)$ виконується співвідношення:

$$t_p(k) = U_p.$$

Значення квантилів $t_p(k)$ наведені в таблиці 6 додатків.

4. Розподіл Фішера. Розподілом Фішера з k_1 і k_2 ступенями свободи називається розподіл випадкової величини $F(k_1, k_2)$, яка дорівнює відношенню незалежних випадкових величин $\chi^2(k_1)/k_1$ і $\chi^2(k_2)/k_2$, тобто

$$F(k_1, k_2) = \frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}.$$

Розподіл Фішера визначається тільки параметрами k_1, k_2 .

Графік щільності розподілу Фішера наведено на рис. 18.

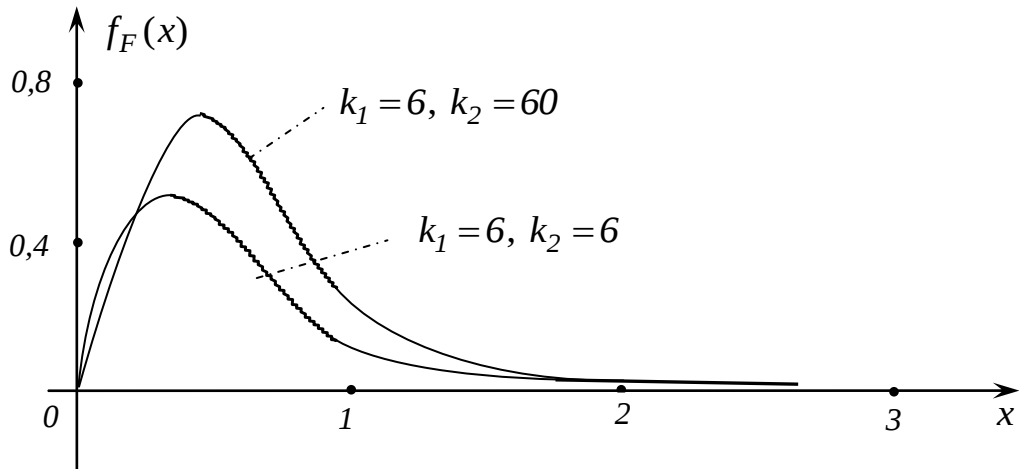


Рис. 18.

Розподіл Фішера протабульований (таблиця 7 додатків).

Квантили розподілу Фішера.

Квантили порядку p розподілу Фішера з k_1 і k_2 ступенями свободи позначають $F_p(k_1, k_2)$.

Квантили розподілу Фішера з k_1 і k_2 ступенями свободи пов'язані співвідношенням:

$$F_{1-p}(k_1, k_2) = \frac{1}{F_p(k_2, k_1)}.$$

Значення квантилів $F_p(k_1, k_2)$ наведені в таблиці 7 додатків.

Інтервальні оцінки. Так як точкова оцінка визначається одним числом і при вибірці малого об'єму може значно відрізнятись від параметра, що оцінюється, то при невеликому об'ємі вибірки слід користуватися інтервальною оцінкою. Вона базується на визначенні такого числового інтервалу, відносно якого, з наперед заданою ймовірністю правильності міркування, можна зробити висновок, що всередині цього інтервалу знаходиться істинне значення параметра, що оцінюється. При інтервальній оцінці помилкою оцінки стає той факт, що істинне значення параметра не знаходиться в межах визначеного інтервалу. Розглядаючи сутність інтервальної оцінки, будемо опиратися на теорію довірчих інтервалів.

Інтервал надійності, надійна ймовірність. *Інтервалом надійності або довірчим інтервалом для параметра Θ називають такий інтервал (Θ_1, Θ_2) , який містить істинне значення параметра Θ із наперед визначеною, близькою до одиниці*

ймовірністю $P = 1 - \alpha$, тобто

$$P(\Theta_1 < \Theta < \Theta_2) = 1 - \alpha. \quad (8.8)$$

Ймовірність $1 - \alpha$ називають *надійною або довірчою ймовірністю*, а число α – *рівнем значущості*.

Статистики $\Theta_1 = \Theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $\Theta_2 = \Theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають *нижньою та верхньою межами* інтервалу надійності.

Щоб знайти довірчий інтервал для параметра Θ , необхідно знати закон розподілу вибіркової оцінки параметра $\Theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$, значення якого є оцінкою параметра Θ .

Приклади довірчих інтервалів.

1. Нехай випадкова величина X генеральної сукупності нормально розподілена і відома дисперсія σ^2 цього розподілу. Треба оцінити невідоме математичне сподівання a за вибіркою середнім $\bar{X}_B$.

Розглядатимемо $\bar{X}_B$ як випадкову величину, що змінюється від вибірки до вибірки. Відомо, що лінійна функція від нормальних випадкових величин є нормальною, тому вибіркове середнє теж нормально розподілене з параметрами

$$M(\bar{X}_B) = a, \quad \sigma(\bar{X}_B) = \sigma / \sqrt{n}.$$

Вимагатимемо, щоб виконувалось співвідношення

$$P(|\bar{X}_B - a| < \delta) = 1 - \alpha,$$

де α – заданий рівень значущості.

З формули

$$\begin{aligned} P(a - \delta < \bar{X}_B < a + \delta) &= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(\bar{X}_B)}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma(\bar{X}_B)}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(\bar{X}_B)}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(U_{1-\alpha/2}), \end{aligned}$$

де $U_{1-\alpha/2}$ – квантиль нормального розподілу порядку $1 - \alpha/2$, отримаємо довірчий інтервал для параметра a з рівнем значущості α :

$$\bar{X}_B - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{1-\alpha/2} < a < \bar{X}_B + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{1-\alpha/2}. \quad (8.9)$$

Оцінку

$$|\bar{X}_B - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{1-\alpha/2}$$

називають класичною оцінкою, а число

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\alpha/2}$$

– точністю класичної оцінки. Очевидно, що при зростанні об'єму вибірки число δ зменшується і точність оцінки збільшується.

2. Якщо дисперсія нормально розподіленої генеральної сукупності невідома, а для її оцінки використовують статистику

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x}_B)^2,$$

то, користуючись розподілом Стюдента, можна визначити інтервал надійності для математичного сподівання a з рівнем значущості α із співвідношення:

$$\bar{x}_B - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) < a < \bar{x}_B + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \quad (8.10)$$

де $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ – квантиль розподілу Стюдента порядку $1-\alpha/2$ з $n-1$ ступенями свободи.

3. Нехай випадкова величина X генеральної сукупності нормально розподілена і відоме математичне сподівання a цього розподілу. Треба оцінити невідому дисперсію σ^2 за виправленою дисперсією S_0^2 . Тоді довірчий інтервал для параметра σ^2 з рівнем значущості α визначається із співвідношення:

$$\frac{nS_0^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \quad (8.11)$$

$$\text{де } S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2,$$

$\chi_{1-\alpha/2}^2(n)$ та $\chi_{\alpha/2}^2(n)$ – квантилі розподілу χ^2 з n ступенями свободи.

4. Якщо математичне сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності невідоме, а для його оцінки використовують вибіркове середнє $\bar{x}_B$, то інтервал надійності для дисперсії σ^2 з рівнем значущості α визначається із співвідношення:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}. \quad (8.12)$$

Зауваження. Якщо розподіл генеральної сукупності відмінний від нормального, то за вибірками великого об'єму можна побудувати довірчі інтервали для невідомих параметрів, використовуючи граничні теореми теорії ймовірностей. В цьому випадку при достатньо великих n формули (8.9)–(8.12) будуть наближеними.

Приклади.

1. Хімічна лабораторія одним і тим же методом визначала вміст деякої речовини в розчині. Були отримані щільності стандартних розчинів речовини:

$$0,824; 0,830; 0,827.$$

З надійною імовірністю $0,9$ знайти величини надійних інтервалів для статистичних параметрів вмісту речовини в розчині.

Розв'язок. $\triangleright$ Перевіримо з надійною ймовірністю $P = 0,9$ однорідність вибірки. Для цього розташуємо варіанти у зростаючому порядку

$$0,824; 0,827; 0,830,$$

знайдемо розмах вибірки

$$R = 0,830 - 0,824 = 0,006$$

і перевіримо крайні значення вибірки:

$$Q_1 = \frac{0,827 - 0,824}{0,006} = 0,5,$$

$$Q_2 = \frac{0,830 - 0,827}{0,006} = 0,5.$$

Знаходимо $Q_{кр}(0,9;3) = 0,89$ (див. таблицю 8 додатків). Так як $Q_1 < Q_{кр}$ і $Q_2 < Q_{кр}$, то вибірка однорідна.

Інтервал надійності для математичного сподівання визначатимемо за формулою (8.10).

Обчислимо вибіркове середнє

$$\bar{x}_B = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i = \frac{1}{3} (0,824 + 0,827 + 0,830) = 0,827$$

та величину виправленої дисперсії

$$S^2 = \frac{1}{3-1} \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{2} (0,003^2 + 0 + 0,003^2) = 9 \cdot 10^{-6}.$$

За умовою $P = 1 - \alpha = 0,9$, звідки $\alpha/2 = 0,05$. За таблицею 6 додатків знаходимо значення квантиля розподілу Стюдента $t_{1-\alpha/2}(n-1)$:

$$t_{0,95}(2) = 2,93.$$

Отримаємо інтервал надійності для математичного сподівання:

$$0,827 - 0,005 < a < 0,827 + 0,005.$$

Інтервал надійності для дисперсії визначатимемо за формулою (8.12).

За таблицею 5 додатків визначаємо значення квантилів розподілу χ^2 :

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,95}(2) = 5,99 \text{ і } \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,05}(2) = 0,103.$$

Отримаємо інтервал надійності для дисперсії:

$$3 \cdot 10^{-4} < \sigma^2 < 1,75 \cdot 10^{-4}. \blacktriangleleft$$

2. Оцінка величини опору для великої партії однотипних резисторів, визначена за результатами 100 випадково відібраних екземплярів, дорівнює 10 кОм. Вважаючи, що дисперсія вимірювань відома і рівна 1 кОм², знайти ймовірність того, що для резисторів всієї партії величина опору лежить в межах $10 \pm 0,1$ кОм.

Розв'язок. $\triangleright$ За умовою об'єм вибірки $n = 100$, вибіркове середнє $\bar{X}_B = 10$ кОм, дисперсія $\sigma^2 = 1$ кОм², точність оцінки $\delta = 0,1$ кОм.

Так як

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\alpha/2} = 0,1,$$

то значення квантиля нормального розподілу рівне

$$U_{1-\alpha/2} = \frac{\delta \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,1 \cdot 10}{1} = 1.$$

За таблицею 3 додатків знаходимо значення ймовірності $p = 0,3413$, що відповідає квантилю $U_{1-\alpha/2} = 1$. Так як $P = 1 - \alpha = 2\Phi(U_{1-\alpha/2})$, то шукана довірча ймовірність $P = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$. $\blacktriangleleft$

§ 5. Перевірка статистичних гіпотез.

Статистичні гіпотези. На практиці часто доводиться на основі результатів випробувань, експериментів, досліджень перевіряти різноманітні припущення про характеристики конкретного масового явища.

Приклади.

1. Захворюваність тварин, що вимірюється часткою хворих, в звичайних умовах має деякий рівень p_0 . Припускається, що в результаті вакцинації захворюваність повинна зменшитись до рівня $p < p_0$. На основі обстеження захворюваності тварин треба визначити, чи це дійсно так.

2. При заміні одного сорту пшениці з урожайністю a_0 іншим з урожайністю a_1 треба перевірити припущення, що другий сорт має більшу врожайність при районуванні його в даній області.

3. При дослідженні заробітків робітників бригад в деяких господарствах двох різних

районів може бути виявленим різнобій. Треба перевірити припущення про те, що різнобій в першому районі менший, ніж у другому. ◀

Приведені приклади показують, що припущення – гіпотези можуть бути самими різноманітними. В усіх цих прикладах припущення можуть бути перевірені на основі статистичних даних. *Перевірку гіпотез на основі статистичних даних називають статистичною перевіркою гіпотез.*

Висунута гіпотеза може бути або правильною, або неправильною, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірку проводять статистичними методами, то гіпотезу називають *статистичною*. Статистичні гіпотези використовують для перевірки припущень відносно виду розподілу та значень його параметрів.

Гіпотези, які стосуються значень параметрів розподілу, при відомому виді розподілу випадкової величини X , називаються *параметричними*.

Одну з гіпотез виділяють в якості основної і називають *нульовою гіпотезою*, а іншу – в якості конкуруючої і називають *альтернативною гіпотезою*. Нульову гіпотезу позначають H_0 , альтернативну – H_1 .

Приклад. Припустимо, що перевіряється гіпотеза $H_0: \Theta = \Theta_0$ (про рівність параметра Θ заданому (гіпотетичному) значенню Θ_0).

Альтернативні гіпотези можуть бути такими:

- 1) $H_1: \Theta > \Theta_0$;
- 2) $H_1: \Theta < \Theta_0$;
- 3) $H_1: \Theta \neq \Theta_0$;
- 4) $H_1: \Theta = \Theta_1$ ($\Theta_1 \neq \Theta_0$). ◀

Вибір альтернативної гіпотези визначається постановкою задачі.

Помилки першого і другого роду. Перевірка статистичних гіпотез ґрунтується на принципі, у відповідності з яким малоімовірні події вважають неможливими, а події, які мають велику ймовірність – вірогідними. При цьому можуть бути допущені помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що правильна нульова гіпотеза H_0 відхиляється, коли вона в дійсності вірна. Ймовірність допустити помилку першого роду називають *рівнем значущості* і позначають α .

Помилка другого роду полягає в тому, що відхиляється альтернативна гіпотеза H_1 , коли вона вірна.

Правильне рішення теж може бути прийняте в двох випадках:

- 1) гіпотеза приймається, до того ж в дійсності вона вірна;
- 2) гіпотеза відхиляється, до того ж в дійсності вона невірна.

Критерії перевірки гіпотез і їх властивості. Опишемо основний процес, який використовується при перевірці гіпотез. Вибирається деяка величина, яка характеризує

відхилення частот спостережних подій від гіпотетичних ймовірностей. Оскільки ця величина є функцією від спостережень, то вона є статистикою.

Означення. Статистики, що вибирають для перевірки гіпотез (зазвичай вони невід’ємні), називають *к р и т е р і я м и*.

Після вибору певного критерію множину всіх його можливих значень розбивають на дві підмножини, що не перетинаються: одна з них містить значення критерію, при яких нульова гіпотеза відхиляється, а друга – при яких вона приймається.

Критичною областю називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відхиляють. *Областю прийняття гіпотези* (областю допустимих значень) називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу приймають.

Оскільки всі можливі значення критерію належать деякому інтервалу, то й критична область і область прийняття рішень є інтервалами. Точки, які розділяють область прийняття основної гіпотези від критичної області, називаються *критичними точками*. Щоб знайти критичні точки треба задати рівень значущості α . Ці точки є квантилями розподілу критерію.

Введемо позначення: Z – вибраний критерій, V – множина значень критерію, $V_{\text{кр}}$ ($V_{\text{кр}} \subseteq V$) – критична область. Після вибору критерію, рівня значущості і альтернативної гіпотези критична область повинна бути визначена так, щоб імовірність того, що значення статистики Z попаде в критичну область $V_{\text{кр}}$, при умові, що вірна гіпотеза H_0 , дорівнювала α :

$$P(Z \in V_{\text{кр}} / H_0) = \alpha.$$

Якщо значення статистики Z , обчислене за вибіркою, потрапляє в критичну область $V_{\text{кр}}$, то гіпотеза H_0 відхиляється, якщо ж значення статистики потрапляє в область $V \setminus V_{\text{кр}}$, то гіпотеза H_0 приймається.

Положення критичної області визначається формулюванням альтернативної гіпотези. Розрізняють односторонню (правосторонню, або лівосторонню) і двосторонню критичні області.

Правосторонньою називають критичну область, що визначається нерівністю $Z > Z_{\text{кр}}$, де $Z_{\text{кр}} > 0$ – критична точка.

Лівосторонньою називають критичну область, що визначається нерівністю $Z < Z_{\text{кр}}$, де $Z_{\text{кр}} < 0$.

Двосторонньою називають критичну область, що визначається нерівностями $Z < Z_1$, $Z > Z_2$, де $Z_2 > Z_1$. Зокрема, якщо критичні точки симетричні відносно нуля, двостороння критична область визначається нерівностями $Z < -Z_{\text{кр}}$, $Z > Z_{\text{кр}}$, де $Z_{\text{кр}} > 0$.

На рис. 19 зображені критичні області для нормально розподіленого критерію при різних альтернативних гіпотезах.

Приклади.

1. Двома методами проведено визначення деякої речовини. Одержані наступні результати:

I метод: 99,04 %, 99,07 %, 99,23 %, 99,25 %, 99,36 %.

II метод: 99,18 %, 99,20 %, 99,23 %, 99,24 %, 99,26 %.

Оцінити відтворення цих методів при рівні значущості $\alpha = 0,1$.

Розв'язок. $\triangleright$ Припустимо, що результати експериментів нормально розподілені і вибірки незалежні. Будемо оцінювати точність методів за величинами дисперсій σ_1, σ_2 генеральних сукупностей для першого і другого методу, відповідно.

Правило (таблиця 9 додатків). Для того, щоб при заданому рівні значущості α , перевірити нульову гіпотезу $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ про рівність дисперсій нормальних генеральних сукупностей при альтернативній гіпотезі $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, треба обчислити спостережне значення критерію (відношення більшої виправленої дисперсії до меншої)

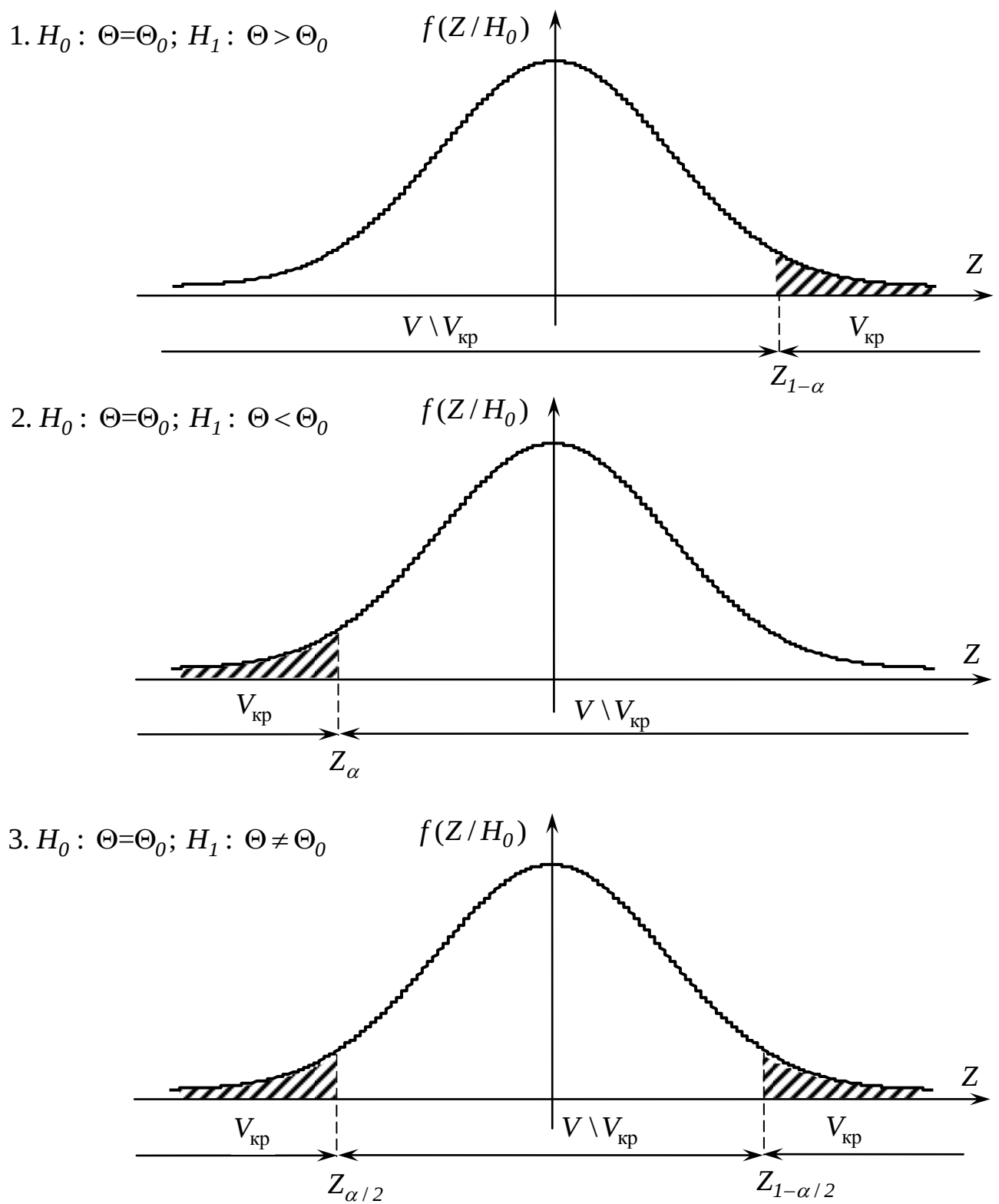


Рис. 19.

$$Z = \frac{S_6^2}{S_M^2}$$

і за таблицею квантилів розподілу Фішера, за рівнем значущості $\alpha/2$ (вдвоє меншим заданого) і числах ступенів свободи k_1, k_2 (k_1 – кількість ступенів свободи більшої дисперсії), знайти критичну точку $Z_{кр} = F_{1-\alpha/2}(k_1, k_2)$.

Якщо $Z < Z_{кр}$ – нема підстав відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $Z > Z_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Знайдемо оцінки математичних сподівань та дисперсій за вибірками:

$$\bar{x}_{B_1} = 99,19; \quad \bar{x}_{B_2} = 99,22;$$

$$S_1^2 = 1,77 \cdot 10^{-2}; \quad S_2^2 = 1,02 \cdot 10^{-3}.$$

Порівняємо виправлені вибіркові дисперсії:

$$S_1^2 > S_2^2.$$

Обчислимо значення критерію:

$$Z = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 17,35.$$

Так як альтернативна гіпотеза H_1 має вигляд $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, то критична область двостороння. Знайдемо за таблицею 7 додатків значення квантиля розподілу Фішера за рівнем значущості $\alpha = 0,1$ і ступенях свободи $k_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4$ і $k_2 = n_2 - 1 = 5 - 1 = 4$:

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0,95}(4, 4) = Z_{кр} = 6,39.$$

Так як $Z > Z_{кр}$, то гіпотеза H_0 про рівність дисперсій генеральних сукупностей відхиляється. Отже, методи мають різні відтворення. ◀

2. При застосуванні нової технології одержання деякої речовини за результатами 10 замірів була знайдена величина виправленої дисперсії маси одержаної речовини $S^2 = 100$ мг². Чи узгоджується цей результат з твердженням: „дисперсія маси, знайденої за новою технологією, не перебільшує 50 мг²”? Прийняти рівень значущості рівним $\alpha = 0,05$.

Розв'язок. ▷ Припустимо, що результати замірів нормально розподілені і вибірки незалежні.

Правило (таблиця 9 додатків). Для того, щоб при заданому рівні значущості α , перевірити нульову гіпотезу $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ про рівність невідомої дисперсії генеральної сукупності σ^2 гіпотетичному (передбачуваному) значенню σ_0^2 , при альтернативній гіпотезі $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$, треба обчислити спостережене значення критерію

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

і за таблицею квантилів розподілу χ^2 , за заданим рівнем значущості α і числу ступенів свободи $k = n - 1$, знайти критичну точку $Z_{кр} = \chi^2_{1-\alpha}(k)$.

Якщо $Z < Z_{кр}$ – нема підстав відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $Z > Z_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

За умовою $n = 10$, $S^2 = 100$, $\sigma_0 = 50$.

Знайдемо спостережане значення критерію:

$$Z = \frac{(10-1) \cdot 100}{50} = 18.$$

Так як альтернативна гіпотеза H_1 має вигляд $\sigma^2 > \sigma_0^2$, то критична область правостороння. Знайдемо за таблицею 5 додатків значення квантиля розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і ступенях свободи $k = n - 1 = 10 - 1 = 9$:

$$\chi^2_{1-\alpha}(n-1) = \chi^2_{0,95}(9) = Z_{\epsilon\delta} = 16,92.$$

Так як $Z > Z_{кр}$, то нульова гіпотеза H_0 відхиляється і приймається гіпотеза H_1 , тому можна стверджувати, що одержаний результат не узгоджується з висловленим твердженням. ◀

3. При метрологічній атестації методу аналізу було взято зразок з точно відомим вмістом деякого компоненту $m_0 = 10$. В результаті чотирьох вимірювань одержані наступні результати: 9,98; 10,06; 10,09; 10,03. Чи має метод систематичну похибку? Прийняти рівень значущості рівним $\alpha = 0,1$.

Розв'язок. ▷ Припустимо, що результати вимірювань нормально розподілені і вибірки незалежні.

Правило (таблиця 10 додатків). Для того, щоб при заданому рівні значущості α , перевірити нульову гіпотезу $H_0: m = m_0$ про рівність невідомого математичного сподівання m нормальної генеральної сукупності (з невідомою дисперсією) гіпотетичному значенню m_0 при альтернативній гіпотезі $H_1: m \neq m_0$, треба обчислити спостережане значення критерію

$$Z = \frac{(\bar{x}_B - m_0)\sqrt{n}}{S}$$

і за таблицею квантилів розподілу Стюдента, за заданим рівнем значущості α і числу ступенів свободи $k = n - 1$, знайти критичну точку $Z_{кр} = t_{1-\alpha/2}(k)$.

Якщо $|Z| < Z_{кр}$ – нема підстав відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $|Z| > Z_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

За умовою $n = 4$, $m_0 = 10$.

Знайдемо вибіркове середнє, виправлену дисперсію та виправлене середньо квадратичне відхилення за вибіркою:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i = \frac{1}{4} (9,98 + 10,03 + 10,06 + 10,09) = 10,04;$$

$$S^2 = \frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^4 (x_i - 10,04)^2 = \frac{1}{3} [(9,98 - 10,04)^2 + (10,03 - 10,04)^2 + (10,06 - 10,04)^2 + (10,09 - 10,04)^2] = 2,2 \cdot 10^{-3};$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{0,0022} \approx 0,047.$$

Знайдемо спостережене значення критерію:

$$Z = \frac{(10,04 - 10) \cdot \sqrt{4}}{0,047} = \frac{0,04 \cdot 2}{0,047} \approx 1,702.$$

Так як альтернативна гіпотеза H_1 має вигляд $H_1: m \neq m_0$, то критична область двостороння. Знайдемо за таблицею 6 додатків значення квантиля розподілу Стюдента за рівнем значущості $\alpha = 0,1$ і ступенях свободи $k = n - 1 = 4 - 1 = 3$:

$$t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{1-0,05}(3) = t_{0,95}(3) = Z_{\text{кр}} = 2,353.$$

Так як $|Z| < Z_{\text{кр}}$, то нема підстав відхиляти гіпотезу H_0 , і з надійністю висновку 90 % можна стверджувати, що метод не має систематичної похибки. ◀

4. При визначенні місткості домішок в двох пробах препарату, вироблених за різними технологіями, одержані метрологічні характеристики:

$$n_1 = 7; \bar{x}_1 = 0,12; S_1^2 = 0,01;$$

$$n_2 = 10; \bar{x}_2 = 0,18; S_2^2 = 0,03.$$

Потрібно вияснити, чи є перша проба за місткістю домішок кращою в порівнянні з другою. Прийняти рівень значущості рівним $\alpha = 0,05$.

Розв'язок. ▷ Припустимо, що результати експериментів нормально розподілені і вибірки незалежні.

Перевіримо при заданому рівні значущості α нульову гіпотезу $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ про рівність дисперсій двох нормальних генеральних сукупностей при альтернативній гіпотезі $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (таблиця 9 додатків).

Обчислимо значення критерію:

$$Z = \frac{S_2^2}{S_1^2} = 3.$$

Так як альтернативна гіпотеза H_1 має вигляд $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, то критична область двостороння. Знайдемо за таблицею 7 додатків значення квантиля розподілу Фішера за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і ступенях свободи $k_1 = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$ і $k_2 = n_1 - 1 = 7 - 1 = 6$:

$$F_{1-\alpha/2}(n_2 - 1, n_1 - 1) = F_{0,975}(9, 6) = Z_{кр} = 5,52.$$

Так як $Z < Z_{кр}$, то гіпотеза H_0 про рівність дисперсій генеральних сукупностей приймається.

Перевіримо при заданому рівні значущості α нульову гіпотезу $H_0: m_1 = m_2$ про рівність математичних сподівань двох нормальних генеральних сукупностей (з відомими дисперсіями σ_1^2 і σ_2^2 та прийнятній гіпотезі $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $\sigma_1^2 = S_1^2$, $\sigma_2^2 = S_2^2$) при альтернативній гіпотезі $H_1: m_1 \neq m_2$ (таблиця 10 додатків).

Для перевірки гіпотези візьмемо критерій

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

$$\text{де } S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Обчислюємо значення спостережного критерію:

$$S = 0,148; Z = -0,82.$$

Так як альтернативна гіпотеза H_1 має вигляд $H_1: m_1 \neq m_2$, то критична область двостороння. Знайдемо за таблицею 6 додатків значення квантиля розподілу Стюдента за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і ступенях свободи $k = n_1 + n_2 - 2 = 7 + 10 - 2 = 15$:

$$t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{1-0,05/2}(15) = t_{0,975}(3) = Z_{кр} = 2,131.$$

Так як $|Z| < Z_{кр}$, то гіпотеза H_0 про рівність математичних сподівань генеральних сукупностей приймається, і з надійністю висновку 95 % можна стверджувати, що різниця місткості домішок у пробах незначуща. ◀

§ 6. Критерій χ^2 і його застосування.

Критерій згоди. Задачі цього параграфу відносяться до задач перевірки гіпотез *непараметричного типу* (як і перевірка вибірки на однорідність). На відміну від розглянутих вище схем альтернативна гіпотеза не формулюється в явному вигляді і задача ставиться так: чи

узгоджуються результати спостережень з висунутим припущенням. За допомогою оцінок функцій розподілу і щільності можна перевірити гіпотези про те, наскільки добре вибіркові дані узгоджуються з теоретичними висновками про функції розподілу і щільності.

Перевірка гіпотези про передбачуваний закон розподілу проводиться за допомогою спеціально підібраної випадкової величини – *критерію згоди*.

Існує декілька критеріїв згоди χ^2 – Пірсона, Колмогорова, Смірнова та ін.

Критерій згоди Пірсона. Обмежимося розглядом застосування критерію Пірсона до перевірки гіпотези про розподіл генеральної сукупності.

Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка спостережень випадкової величини X з невідомою функцією розподілу $F(x)$. Перевіряється гіпотеза H_0 : закон розподілу X задається функцією розподілу $F(x)$.

Схема перевірки гіпотези:

1) Область значень величини X довільним чином розбивають на k класів, що взаємно не перетинаються (на практиці вони найчастіше вибираються як послідовні інтервали з інтервалу значень X).

2) Обчислюють імовірності p_i ($i = 1, 2, \dots, k$) попадання випадкової величини X в кожний з цих класів вважаючи, що гіпотеза H_0 вірна. При цьому невідомі параметри розподілу замінюють ефективними оцінками.

Якщо спостережні частоти в i -му класі рівні n_i , то

$$\sum_{i=1}^k n_i = n.$$

3) В якості критерію перевірки гіпотези вибирають випадкову величину

$$\chi_B^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}, \quad (8.13)$$

що задає відхилення спостережних частот від гіпотетичних (очікуваних), яка при $n \rightarrow \infty$ збігається до розподілу χ^2 незалежно від вигляду закону розподілу випадкової величини X .

4) Гіпотеза H_0 узгоджується з результатами спостережень при рівні значущості α і приймається, якщо

$$\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2(k-l-1), \quad (8.14)$$

де $\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1)$ – квантиль розподілу χ^2 ,

k – кількість класів, на які розбита область значень величини X ,

l – кількість невідомих параметрів розподілу, які знаходяться за вибіркою.

Для застосування критерію Пірсона необхідно, щоб об'єм вибірки був $n \geq 50$ і $p_i n \geq 5$, ($i = 1, 2, \dots, k$). Якщо в деяких класах остання умова не виконується, то їх треба

об'єднати з сусідніми.

Розв'язок задач перевірки гіпотези про розподіл генеральної сукупності зручно проводити, заповнюючи наступну таблицю:

Таблиця 8.1.

i	n_i	p_i	$p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
номер інтервалу	спостережені частоти	імовірність попадання в i -інтервал	очікувані частоти		
–	$\sum n_i = n$	$\sum p_i = 1$	–	–	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$

Приклади.

1. Відлік за шкалою вимірювального приладу оцінюється наближено в частинах поділу шкали. Приведено 200 результатів відліку останньої цифри між сусідніми поділками шкали. Встановити, використовуючи критерій згоди χ^2 , чи узгоджуються спостереження з законом рівномірного розподілу, при якому ймовірність появи будь-якої цифри $p = 0,1$ (рівень значущості $\alpha = 0,05$).

Цифри	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

Розв'язок. $\triangleright$ Складемо таблицю (див. табл.. 8.2).

Отже, критерій $\chi^2_B = 24,9$.

Кількість інтервалів $k = 10$; кількість невідомих параметрів розподілу $l = 0$, оскільки нема параметрів, які підлягають оцінці за вибіркою.

Знайдемо за таблицею 5 додатків значення квантиля розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і ступенях свободи $k - l - 1 = 10 - 0 - 1 = 9$:

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-l-1) = \chi^2_{1-0,05}(9) = \chi^2_{0,95}(9) = 16,92.$$

Таблиця 8.2

номер інтервалу	спостережені частоти	імовірність попадання в i -інтервал	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	35	0,1	20	15	$225/20 = 11,25$
2	16	0,1	20	-4	$16/20 = 0,8$
3	15	0,1	20	-5	$25/20 = 1,25$

4	17	0,1	20	-3	$9/20 = 0,45$
5	17	0,1	20	-3	$9/20 = 0,45$
6	19	0,1	20	-1	$1/20 = 0,05$
7	11	0,1	20	-9	$81/20 = 4,05$
8	16	0,1	20	-4	$16/20 = 0,8$
9	30	0,1	20	10	$100/20 = 5$
10	24	0,1	20	4	$16/20 = 0,8$
–	200	1	–	–	24,9

Так як $\chi_B^2 > \chi_{0.95}^2(9)$, то гіпотезу про згоду спостережень із законом рівномірного розподілу треба відхилити. ◀

2. Для визначення забрудненості партії насіння насінням бур'яну було перевірено 1000 випадково відібраних проб і одержано такий емпіричний розподіл (в першому рядку вказана кількість x_i насіння бур'яну в одній пробі, в другому – частота n_i , тобто кількість проб, які містять x_i насіння бур'яну):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	48	8	4	2

Потрібно перевірити гіпотезу про те, що кількість насіння бур'яну розподілена за законом Пуассона при рівні значущості $\alpha = 0,01$.

Розв'язок. ▷ Складемо таблицю 8.3.

Імовірності p_i знаходимо за законом Пуассона

$$p_i = P(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!},$$

де оцінка параметра розподілу λ рівна вибіркового середньому

$$\lambda = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^7 x_i n_i = \frac{1}{1000} \cdot (0 \cdot 405 + 1 \cdot 366 + 2 \cdot 175 + 3 \cdot 48 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2) = 0,9;$$

а $e^{-\lambda} = e^{-0,9} = 0,407$ знаходимо за таблицею 1 додатків.

Таблиця 8.3

i	n_i	p_i	$p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	405	0,4056	406,6	-1,6	$6 \cdot 10^{-3}$

2	366	0,3659	365,9	0,1	$2,7 \cdot 10^3$
3	175	0,1647	164,7	10,3	$6,4 \cdot 10^{-1}$
4	48	0,0494	49,4	-9,4	1,79
5	8	0,0111	11,1	0,3	$7 \cdot 10^{-3}$
6	4	0,0023	2,3		
7	2	0,0003	0,3		
-	1000	1	-	-	2,446

Так як для інтервалів $i=6, i=7$ не виконується умова $p_i n \geq 5$, то результати обчислень величини $n_i - p_i n$ цих рядків додаються до відповідної величини інтервалу $i=5$: $(4 - 2,3) + (2 - 0,3) + (8 - 11,1) = 0,3$.

Отже, критерій $\chi_B^2 = 2,446$.

Кількість інтервалів $k=5$, оскільки три останніх інтервали об'єднані в один; кількість невідомих параметрів розподілу $l=1$, так як визначався один параметр λ за вибіркою.

Знайдемо за таблицею 5 додатків значення квантиля розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і ступенях свободи $k - l - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$:

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1) = \chi_{1-0,01}^2(3) = \chi_{0,99}^2(3) = 11,34.$$

Так як $\chi_B^2 < \chi_{0,99}^2(3)$, то нема підстав відхиляти гіпотезу про те, що кількість насіння бур'яну розподілена за законом Пуассона. ◀

3. Наведені результати зважувань новонароджених дітей (в кг):

x_i	2-2,6	2,6-3,2	3,2-3,8	3,8-4,4	4,4-5,0	5,0-5,6	5,6-6,2
n_i	5	8	35	43	22	15	2

При рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити, чи має вага новонароджених нормальний закон розподілу.

Розв'язок. ▷ Об'єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^7 n_i = 130.$$

Для оцінки параметрів нормального розподілу обчислимо вибіркове середнє, приймаючи варіанти x_i рівними значенням середин інтервалів,

$$\begin{aligned} \bar{x}_B = \frac{1}{130} \sum_{i=1}^7 x_i n_i &= \frac{1}{130} (2,3 \cdot 5 + 2,9 \cdot 8 + 3,5 \cdot 35 + 4,1 \cdot 43 + 4,7 \cdot 22 + \\ &+ 5,3 \cdot 15 + 5,9 \cdot 2) = 4,06 \end{aligned}$$

та виправлену дисперсію

$$S^2 = \frac{1}{130-1} \cdot \sum_{i=1}^7 (x_i - 4,06)^2 n_i = \frac{1}{129} \cdot \sum_{i=1}^7 (x_i - 4,06)^2 n_i = 0,59, \quad S = 0,77.$$

Заповнимо таблицю 8.4.

Замінімо найменшу варіанту 2 на $-\infty$, а найбільшу варіанту 6,2 – на ∞ .

Таблиця 8.4

i	межі інтервалів	n_i	p_i	$p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	$-\infty - 2,6$	5	0,04	5,2	-0,2	$7,7 \cdot 10^{-3}$
2	2,6–3,2	8	0,119	15,5	-7,5	3,63
3	3,2–3,8	35	0,342	31,5	3,5	0,39
4	3,8–4,4	43	0,290	37,7	5,3	0,745
5	4,4–5,0	22	0,203	26,4	-4,4	0,73
6	5,0–5,6	15	0,083	10,8	3,2	0,74
7	5,6 – ∞	2	0,023	3		
		130	1	130		6,24

Імовірності p_i знаходимо за формулою

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_B}{S}\right).$$

Так як для інтервалу $i=7$ не виконується умова $p_i n \geq 5$, то два останніх інтервали об'єднані: $n_i - p_i n = (2 - 3) + (15 - 10,8) = 3,2$;

$$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n} = \frac{(3,2)^2}{10,8 + 3} = 0,74.$$

Отже, критерій $\chi_B^2 = 6,24$.

Кількість інтервалів $k=6$; кількість невідомих параметрів розподілу $l=2$, так як за вибіркою оцінювали математичне сподівання і дисперсію нормального розподілу.

Знайдемо за таблицею 5 додатків значення квантиля розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha=0,1$ і ступенях свободи $k-l-1=6-2-1=3$:

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1) = \chi_{1-0,1}^2(3) = \chi_{0,9}^2(3) = 6,25.$$

Так як $\chi_B^2 < \chi_{0,9}^2(3)$, то нема підстав відхиляти гіпотезу про те, що вага новонароджених має нормальний закон розподілу. ◀

§ 7. Однофакторний дисперсійний аналіз.

Дисперсійний аналіз. Дисперсійним аналізом називають статистичний метод аналізу результатів, що залежать від дії якісних факторів. Дисперсійний аналіз може бути використаним для виявлення сумісного впливу економічних факторів, що не піддаються кількісному вимірюванню, на економічний показник, що вивчається.

Приклад. В якості фактора може розглядатися організація виробництва на різних виробничих ділянках, оснащених наближено однаковим обладнанням. Тоді різниця у випуску продукції в розрахунку на одного робітника визначається відмінностями в способах організації виробництва на різних ділянках. ◀

Нехай $X_1, X_2, \dots, X_l$ – випадкові величини, що представляють результуючу ознаку, нормально розподілені і мають невідомі однакові дисперсії та невідомі математичні сподівання $m_1, m_2, \dots, m_l$.

Треба перевірити при заданому рівні значущості α гіпотезу $H_0: m_1 = m_2 = \dots = m_l$ про рівність всіх математичних сподівань. Іншими словами, треба встановити, суттєво чи несуттєво відрізняються вибіркові середні, які є незміщеними та обґрунтованими оцінками математичних сподівань генеральної сукупності.

Для порівняння декількох середніх користуються методом, який базується на порівнянні дисперсій і тому називається *дисперсійним аналізом*. Зокрема, при $l = 2$ можна користуватися критерієм для перевірки гіпотези про рівність середніх за таблицею 10 додатків.

Однофакторний дисперсійний аналіз. В цьому випадку досліджується присутність або відсутність впливу на результуючу ознаку одного якісного фактора.

Нехай на кількісну нормально розподілену ознаку X діє фактор F , який має l постійних рівнів $F_1, F_2, \dots, F_l$.

Приклад. Треба вияснити, який вид добрив найбільш ефективний для отримання найбільшого врожаю. Фактор F – добрива, а його рівні – види добрив. ◀

На кожному рівні проведено по n_j випробувань. Числа x_{ij} – результати спостережень записують у вигляді таблиці (див. табл. 8.5), де i – номер випробування ($i = 1, 2, \dots, n_j$), j – номер рівня фактора ($j = 1, 2, \dots, l$).

Ставиться задача: при рівні значущості α перевірити гіпотезу H_0 про рівність групових середніх при умові, що групові дисперсії генеральних сукупностей невідомі, але однакові, тобто гіпотеза H_0 : якісний фактор не впливає на результуючу ознаку.

Таблиця 8.5.

номер випробування	рівні фактора			
i	F_1	F_2	...	F_l
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}

2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...
n_j	$x_{n_l 1}$	$x_{n_l 2}$	...	$x_{n_l l}$
групове середнє $\bar{x}_j$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_l$

Для розв'язку цієї задачі вводяться:

групове середнє – вибіркове середнє j -ї вибірки

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}, (j=1, 2, \dots, l);$$

загальне вибіркове середнє

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij},$$

де $n = \sum_{j=1}^l n_j$ – загальна кількість спостережень;

загальна сума квадратів відхилень спостережних значень ознаки від загального середнього

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2;$$

загальна дисперсія – незміщена оцінка дисперсії генеральної сукупності

$$s_{\text{заг}}^2 = \frac{S_{\text{заг}}}{n-1};$$

факторна сума квадратів відхилень спостережних значень групи від свого групового середнього (характеризує розсіювання між групами, що обумовлене якісним фактором)

$$S_{\text{факт}} = \sum_{j=1}^l n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2;$$

факторна дисперсія

$$s_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{l-1};$$

залишкова сума квадратів відхилень спостережних значень групи від свого групового середнього (характеризує розсіювання всередині груп, що обумовлене випадковими причинами)

$$S_{\text{зал}} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = \sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_{\text{гр}1})^2 + \sum_{i=1}^n (x_{i2} - \bar{x}_{\text{гр}2})^2 + \dots + \sum_{i=1}^n (x_{il} - \bar{x}_{\text{гр}l})^2 ;$$

залишкова дисперсія

$$s_{\text{зал}}^2 = \frac{S_{\text{зал}}}{n-l}.$$

Практично залишкову суму знаходять за формулою

$$S_{\text{зал}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}}.$$

Якщо, згідно гіпотези H_0 , всі математичні сподівання m_j ($j=1, 2, \dots, l$) однакові, то загальне вибіркове середнє $\bar{x}$ не повинно статистично відрізнятися від групових середніх $\bar{x}_j$. В цьому випадку факторна і залишкова дисперсії є незміщеними оцінками невідомої дисперсії генеральної сукупності і, отже, відрізняються несуттєво. Якщо порівняти ці оцінки за критерієм Фішера, то очевидно, критерій вкаже, що нульову гіпотезу про рівність факторної і залишкової дисперсії треба прийняти.

Таким чином, якщо гіпотеза про рівність групових середніх вірна, то вірна і гіпотеза про рівність факторної і залишкової дисперсій. Тому для перевірки гіпотези H_0 використовують критерій

$$\frac{S_{\text{факт}}/(l-1)}{S_{\text{зал}}/(n-l)} = F_B,$$

який має закон розподілу Фішера з $l-1$ і $n-l$ ступенями свободи.

Якщо $F_B < F_{1-\alpha}(l-1, n-l)$, то немає підстав відхиляти гіпотезу H_0 (різниця групових середніх незначуща).

Якщо $F_B \geq F_{1-\alpha}(l-1, n-l)$, то гіпотеза H_0 відхиляється (серед середніх $m_1, m_2, \dots, m_l$ є не менше двох різних чисел) і приймаємо рішення, що досліджуваний якісний фактор впливає на результуючу ознаку.

Приклади.

1. Довести, що загальна сума квадратів відхилень спостережень від загального середнього $\bar{x}$ рівна

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \bar{x}^2 n.$$

Розв'язок. $\triangleright$

$$\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij}^2 - 2x_{ij}\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - 2\bar{x} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} + \bar{x}^2 n =$$

$$= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \bar{x}^2 n. \blacktriangleleft$$

2. Досліджується вплив методики на вивчення іноземної мови студентами. В кожній з трьох груп відібрано відповідно 7, 5 і 3 студентів. Результати кількості допущених помилок при їхньому тестуванні наведені в таблиці:

Методики		
I	II	III
1	2	4
3	3	5
2	2	3
1	1	
0	4	
2		
1		
$\Sigma = 10$	$\Sigma = 12$	$\Sigma = 12$

Перевірити гіпотезу про відсутність впливу методики навчання на результати тестування при рівні значущості $\alpha = 0,01$.

Розв'язок. $\triangleright$ Необхідно перевірити гіпотезу $H_0: m_1 = m_2 = m_3$, тут m_j – математичне сподівання числа помилок допущених студентами, які навчаються за j -ю методикою ($j = 1, 2, 3$).

Кількість студентів $n = 15$, кількість методик $l = 3$.

Обчислимо:

групові середні

$$\bar{x}_1 = \frac{10}{7} = 1,43; \bar{x}_2 = \frac{12}{5} = 2,4; \bar{x}_3 = \frac{12}{3} = 4;$$

загальне вибіркове середнє

$$\bar{x} = \frac{34}{15} = 2,27;$$

загальну суму

$$S_{\text{заг}} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \bar{x}^2 n = 104 - 2,27^2 \cdot 15 = 26,71;$$

факторну суму

$$S_{\text{факт}} = \sum_{j=1}^3 n_j (\bar{x}_j - 2,27)^2 = 14,02.$$

Тоді залишкову суму знайдемо за формулою

$$S_{\text{зал}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}} = 26,71 - 14,02 = 12,69.$$

Обчислимо значення критерію F_B :

$$F_B = \frac{S_{\text{факт}}/(l-1)}{S_{\text{зал}}/(n-l)} = \frac{14,02/(3-1)}{12,69/(15-3)} = 6,62.$$

За таблицею 7 додатків знаходимо значення квантиля розподілу Фішера за рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і ступенях свободи $k_1 = l - 1 = 2$, $k_2 = n - l = 12$:

$$F_{1-\alpha}(l-1, n-l) = F_{1-0,01}(2, 12) = F_{0,99}(2, 12) = 6,93.$$

Так як $F_B < F_{0,99}(2, 12)$, то гіпотеза H_0 про відсутність впливу методики навчання на результати тестування приймається. ◀

§ 8. Кореляційний і регресивний аналіз.

Кореляція і регресія. Кореляційний аналіз і регресивний аналіз є суміжними розділами математичної статистики і застосовуються для вивчення за вибірковими даними статистичної залежності ряду величин, деякі з яких є випадковими. При статистичній залежності величини не пов'язані функціонально, але як випадкові величини задані сумісним розподілом імовірностей. Дослідження взаємозалежності випадкових величин приводить до теорії кореляції як розділу теорії ймовірностей і кореляційного аналізу як розділу математичної статистики. Дослідження залежності випадкових величин від ряду не випадкових і випадкових величин приводить до моделей регресії і регресивного аналізу на базі вибірових даних.

Приклади.

1. Статистичний взаємозв'язок між окремими частинами тіла людини (довжиною руки і довжиною ноги, вагою і ростом і т.п.), обумовлений їх взаємозв'язком і впливом певних первинних факторів, пов'язаних насамперед із спадковістю, є кореляційним зв'язком.

2. Залежність між урожайністю певної сільськогосподарської культури і природними та економічними факторами, що на неї впливають, є регресивною залежністю. ◀

Парна кореляція. Кореляційна залежність двох випадкових величин задається моделлю

$$X = X(Y, Z), \quad Y = Y(X, Z),$$

де Z – набір зовнішніх випадкових факторів.

Парна кореляція вивчає характеристики взаємозв'язку двох випадкових величин.

Основні кореляційні характеристики:

коефіцієнт кореляції

$$\rho = \frac{M[(X - MX)(Y - MY)]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

де $\sigma_X = \sqrt{DX}$, $\sigma_Y = \sqrt{DY}$ ($-1 \leq \rho \leq 1$ і $\rho = 0$, якщо випадкові величини X та Y незалежні);

лінії регресії y по x і x по y (лінії умовних математичних сподівань)

$$\bar{y}(x) = M(Y / X = x); \quad \bar{x}(y) = M(X / Y = y);$$

лінії умовних дисперсій (характеризують, наскільки точно лінії регресії передають зміни однієї випадкової величини при зміні іншої)

$$\sigma_{Y/X}^2 = D(Y / X = x) = M\{[Y - \bar{y}(x)]^2 / X = x\},$$

$$\sigma_{X/Y}^2 = D(X / Y = y) = M\{[X - \bar{x}(y)]^2 / Y = y\}.$$

Лінійна регресія. Якщо обидві лінії регресії Y по X і X по Y – прямі, то кореляцію називають *лінійною*.

Розглянемо лінійну регресію Y по X .

Точна і наближена прямолінійна регресія

$$\bar{y}(x) = kx + b$$

здається наступними коефіцієнтами:

$$k = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad b = MY - k MX.$$

Аналіз парної кореляції. При вивченні по вибірці $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ кореляційної залежності двох випадкових величин загальну картину їхньої взаємної зміни можна отримати, зобразивши на координатній площині всі вибіркові точки. Це зображення називають *кореляційним полем*. При великій кількості спостережень одне і те ж значення x може зустрічатися n_x раз, одне і те ж значення y – n_y раз, одна і та ж пара (x, y) може спостерігатися n_{xy} раз. Тому результати спостережень групують і записують у вигляді таблиці, яку називають кореляційною.

Оцінки кореляційних характеристик обчислюють безпосередньо за вибірковими даними за допомогою наступних формул:

оцінки математичних сподівань (вибіркові середні ознак X та Y)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i;$$

оцінки дисперсій (вибіркові дисперсії ознак X та Y)

$$\bar{\sigma}_X^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$\bar{\sigma}_Y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2;$$

оцінка коефіцієнта кореляції (вибірковий коефіцієнт кореляції)

$$\rho_B = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \bar{\sigma}_X \bar{\sigma}_Y}; \quad (8.15)$$

оцінки коефіцієнтів рівняння регресії

$$\bar{k} = \rho_B \frac{\bar{\sigma}_Y}{\bar{\sigma}_X}, \quad \bar{b} = \bar{y} - \bar{k} \cdot \bar{x}.$$

Коефіцієнт $\bar{k}$ при розрахунках знаходять за допомогою методу найменших квадратів:

$$\bar{k} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Для перевірки статистичної значущості кореляційної залежності випадкових величин X та Y необхідно перевірити гіпотезу $H_0: \rho = 0$ при альтернативній гіпотезі $H_1: \rho \neq 0$.

Для цього обчислюють спостережне значення критерію

$$t_{\text{спост}} = \frac{|\rho_B|}{\sqrt{1 - \rho_B^2}} \sqrt{n - 2}.$$

Якщо $t_{\text{спост}} > t_{1-\alpha/2}(n-2)$, де $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ квантиль розподілу Стюдента порядку $1 - \alpha/2$ з кількістю ступенів свободи $n - 2$, то зв'язок між величинами X та Y при рівні значущості α вважається значущим.

Вище були отримані точкові оцінки невідомих параметрів регресії.

Межі надійних інтервалів для параметрів k , b лінійної регресії визначаються із співвідношень:

$$b = \bar{b} \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}}, \quad k = \bar{k} \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot S \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}},$$

де $S^2 = \frac{1}{n-2} \sum [y_i - (\bar{k} x_i + \bar{b})]^2$ – залишкова дисперсія.

Приклади.

1. Використовуючи метод найменших квадратів, одержати формули для визначення оцінок параметрів лінійної регресії.

Розв'язок. $\triangleright$ Для визначення параметрів рівняння методом найменших квадратів знаходять такі значення $\bar{k}$ і $\bar{b}$, щоб сума

$$S(\bar{k}, \bar{b}) = \sum_{i=1}^n [y_i - (\bar{k} x_i + \bar{b})]^2 \quad (8.15)$$

була мінімальною.

Необхідною умовою існування екстремуму функції двох змінних є рівність нулю її частинних похідних:

$$\left. \begin{aligned} \partial S / \partial \bar{k} &= 0, \\ \partial S / \partial \bar{b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

З (8.15) отримаємо

$$\begin{aligned} S(\bar{k}, \bar{b}) &= \sum_{i=1}^n [y_i^2 - 2y_i(\bar{k} x_i + \bar{b}) + (\bar{k} x_i + \bar{b})^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\bar{k} \sum_{i=1}^n x_i y_i - 2\bar{b} \sum_{i=1}^n y_i + \bar{k}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\bar{k} \bar{b} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{b}^2. \end{aligned}$$

Знайдемо частинні похідні $\partial S / \partial \bar{k}$, $\partial S / \partial \bar{b}$ і розв'яжемо систему рівнянь (8.16) відносно змінних $\bar{k}$ і $\bar{b}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \bar{k}} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2\bar{k} \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\bar{b} \sum_{i=1}^n x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \bar{b}} &= -2 \sum_{i=1}^n y_i + 2\bar{k} \sum_{i=1}^n x_i + 2n\bar{b}, \end{aligned} \right.$$

звідки отримаємо

$$\bar{k} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad \bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \bar{k} \sum_{i=1}^n x_i}{n}. \blacktriangleleft$$

2. Побудувати графік лінійної регресії $y = kx + b$ за вибіркою, заданою таблицею:

X	15	25	35	45
Y	8	12	21	26

Розв'язок. $\triangleright$ Об'єм вибірки $n = 4$.

Знайдемо:

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 15 + 25 + 35 + 45 = 120, \quad \sum_{i=1}^4 y_i = 8 + 12 + 21 + 26 = 67,$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 15 \cdot 8 + 25 \cdot 12 + 35 \cdot 21 + 45 \cdot 26 = 2325,$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 225 + 625 + 1225 + 2025 = 4100.$$

Обчислимо оцінки параметрів рівняння регресії:

$$\bar{k} = \frac{4 \cdot 2325 - 120 \cdot 67}{4 \cdot 4100 - (120)^2} = 0,63, \quad \bar{b} = \frac{67 - 0,63 \cdot 120}{4} = -2,15.$$

Отже, рівняння регресії матиме вигляд: $y = 0,63x - 2,15$. Побудуємо (рис. 20) відповідну пряму лінію регресії:

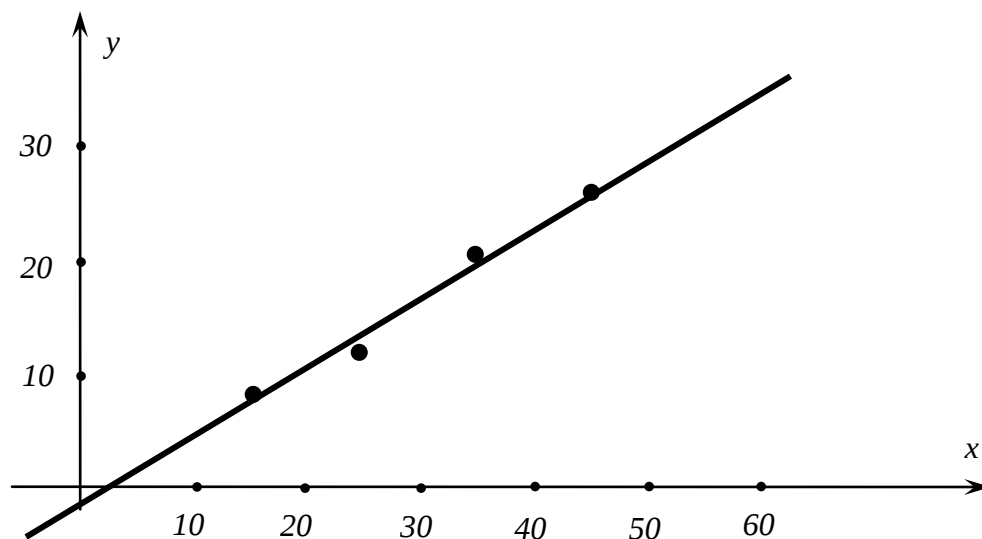


Рис. 20.

3. Визначити коефіцієнт кореляції та перевірити значущість кореляційної залежності за вибіркою, заданою таблицею:

X	15	20	25	30
Y	1,3352	1,3411	1,3486	1,3544

Прийняти рівень значущості рівним $\alpha = 0,05$.

Розв'язок. $\triangleright$ Об'єм вибірки $n = 4$.

Обчислимо:

$$\sum x_i^2 = 2150; \sum y_i^2 = 7,2344; \sum x_i = 90; \sum y_i = 5,3793; \sum x_i y_i = 121,197;$$

$$(\bar{x})^2 = \left(\frac{90}{4}\right)^2 = 506,25; (\bar{y})^2 = \left(\frac{5,3793}{4}\right)^2 = 1,808554;$$

$$\overline{x^2} = \frac{2150}{4} = 537,5; \overline{y^2} = \frac{7,2344}{4} = 1,80861.$$

Використовуючи приведені вище суми, знайдемо оцінки дисперсій:

$$\bar{\sigma}_X^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 537,5 - 506,25 = 31,25;$$

$$\bar{\sigma}_Y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 1,808607 - 1,808554 = 0,00005.$$

За формулою (8.15) обчислимо оцінку коефіцієнта кореляції:

$$\rho_B = 0,9987.$$

Перевіримо значущість кореляційної залежності випадкових величин X та Y , тобто перевіримо нульову гіпотезу $H_0: \rho = 0$ при альтернативній $H_1: \rho \neq 0$.

Обчислимо значення критерію:

$$t_{\text{спост}} = \frac{0,9987}{\sqrt{1 - (0,9987)^2}} \sqrt{4 - 2} = 27,708.$$

За таблицею 6 додатків знаходимо значення квантиля розподілу Стюдента за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і ступенях свободи $k = n - 2 = 2$:

$$t_{1-\alpha/2}(n-2) = t_{0,975}(2) = 4,303.$$

Так як $t_{\text{спост}} > t_{0,975}(2)$, то гіпотезу H_0 відхиляємо і приймаємо гіпотезу H_1 . Отже, кореляційний зв'язок статистично значущий. $\blacktriangleleft$

Питання для самоперевірки.

1. Що називають генеральною сукупністю, вибіркою?
2. Як визначають емпіричну функцію розподілу? Які її властивості?
3. Що називають параметрами вибірки? Як їх оцінюють?
4. Як визначають критерії перевірки гіпотез? Які їх властивості?
5. Сформулюйте критерій згоди Пірсона.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Класичне означення ймовірності. Геометрична ймовірність.

1. В лотереї з 100 білетів 20 виграшних. Яка ймовірність того, що серед п'яти навмання куплених білетів три виявляться виграшними?
2. З семи карток розрізної абетки “ а ”, “ д ”, “ е ”, “ к ”, “ о ”, “ с ”, “ ф ” навмання беруть 5 карток і складають їх в порядку вибирання. Знайти ймовірність отримання слова “Одеса”.
3. З 8 карток розрізної абетки “ а ”, “ в ”, “ и ”, “ ї ”, “ к ”, “ о ”, “ с ”, “ х ” навмання беруть 5 карток. Яка ймовірність того, що з вибраних карток можна скласти слово “Київ”?
4. В урні міститься 10 кульок помічених цифрами від 1 до 10. Витягують навмання 5 кульок. Яка ймовірність того, що отримали номери від 3 до 7 в порядку зростання?
5. З повного набору доміно витягають 2 кісточки. Яка ймовірність того, що сума зерен на вибраних кісточках є парною?
6. На кожній із п'яти карток написана одна із цифр 1,2,3,4,5. Картки навмання розкладають в один ряд. Знайти ймовірність того, що цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 – на останньому.
7. В урні 8 білих і 7 чорних кульок. З урни навмання витягли 4 кульки. Знайти ймовірність того, що серед них 3 білих.
8. В партії з 10 деталей 6 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання взятих деталей 3 бракованих.
9. На кожній із шести карток написана одна із цифр 1,2,3,4,5,6. Картки навмання розкладають в один ряд. Знайти ймовірність того, що цифри 1,2 стоятимуть в такій послідовності на початку ряду.
10. На складі є 15 деталей, з яких 8 зроблені в Кіровограді, а – 7 в Києві. Яка ймовірність того, що з 5 навмання взятих деталей 3 деталі зроблені в Кіровограді, а 1 – в Києві?
11. В бригаді 15 робітників, з них 6 жінок і 9 чоловіків. Знайти ймовірність того, що серед 10 навмання відібраних робітників 7 чоловіків.
12. Яка ймовірність вгадати 5 номерів в лотереї “Спортлото” 6 з 49?
13. Бібліотекар розставляє на полиці 10 книжок. Яка ймовірність того, що певні 2 книжки стоятимуть поряд?
14. При роботі механізму температура його деталей може приймати довільне значення з інтервалу $(50^{\circ}\text{C}, 80^{\circ}\text{C})$. Механізм зупиняється, якщо різниця

температур між його двома деталями менша 5^0C . Яка ймовірність того, що механізм зупиниться?

15. Яка ймовірність вгадати 3 номери в лотереї “Спортлото” 5 з 36?

16. Набираючи номер телефону, абонент забув 2 останні цифри і пам’ятаючи тільки, що цифри різні і серед них немає 0 і 5, набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що абонент набрав потрібний номер телефону?

17. При стрільбі з гвинтівки по мішені відносна частота влучення дорівнює 0,85. Знайти кількість влучень, якщо було здійснено 20 пострілів.

18. З повного набору шашок (24 шт.) навмання виймають 6 шашок. Яка ймовірність того, що 3 з них будуть білі?

19. З колоди карт (36 шт.) навмання витягують 4 карти. Яка ймовірність того, що серед них одна шістка?

20. Квадрат, сторона якого рівна 4 і дві сторони лежать на координатних осях, розташований в третій чверті. Яка ймовірність того, що навмання вибрана в цьому квадраті точка знаходитиметься в фігурі, обмеженій параболою $y = x^3$ і віссю OY ?

21. У круг радіуса R вписано рівносторонній трикутник. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана в крузі точка знаходитиметься всередині трикутника.

22. З колоди карт (52 шт.) навмання вибирають 5 карт. Знайти ймовірність того, що серед них буде 3 тузи.

23. Кинуто 2 гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума зерен, які на них випали парна.

24. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на тисячу однакових кубиків і перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик має 2 пофарбовані грані.

25. Кинуто три монети. Знайти ймовірність того, що випало два герби.

26. В групі з 20 студентів на контрольній роботі 3 студенти отримали оцінку “ 5 ”, 10 – оцінку “ 4 ”, 7 – “ 3 ”. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання викликаних до дошки студентів 2 отримали оцінку “ 4 ”.

27. У кімнаті перебувають 5 студентів, які народились в травні. Яка ймовірність того, що вони не мають спільного дня народження?

28. В цеху працюють 10 чоловіків і 3 жінки. За табельними номерами навмання відібрали 6 робітників. Знайти ймовірність того, що серед відібраних 2 жінки.

29. В урні міститься 9 кульок помічених цифрами від 1 до 9. Витягують навмання по одній 2 кульки і кладуть їх в порядку витягування. Яка ймовірність того, що число, яке отримається ділиться на 15?

30. На шахівниці довільним чином розташовані дві тури – біла і чорна. Яка ймовірність того, що вони знаходяться під ударом одна одною?

2. Теорема додавання і множення ймовірностей.

1. Три стрільці проводять по одному пострілу в ціль, ймовірність влучення в яку для першого стрільця рівна $0,5$, для другого – $0,8$, для третього – $0,9$. Знайти ймовірність двох влучень в ціль.

2. Скільки раз потрібно кинути гральний кубик, щоб ймовірність появи одного зерна хоча б один раз була більшою $0,9$?

3. Достатньою умовою здачі колоквиуму є відповідь на одне з двох поставлених питань. Студент вивчив 30 з 40 питань, що виносяться на колоквиум. Знайти ймовірність того, що студент здасть колоквиум.

4. Кинуто три гральних кубики. Яка ймовірність того, що на всіх кубиках випаде різна кількість зерен?

5. Кинуто чотири гральних кубики. Яка ймовірність того, що на двох кубиках випаде по 6 зерен, а на інших двох – по 5 зерен?

6. Для сигналізації встановлено 3 сигнальних пристрої, ймовірність спрацювання яких рівна $0,7$; $0,8$; $0,95$, відповідно. Знайти ймовірність того, що спрацює два пристрої.

7. При заповненні насінням чарунок кукурудзяної сіялки в одну чарунку може влучити 0 , 1 або 2 насінини з ймовірністю $0,01$; $0,985$; $0,005$. Знайти ймовірність того, що в диску з трьома чарунками виявиться 3 насінини.

8. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3 , а на монеті – герб?

9. В групі студентів 9 дівчат і 16 хлопців. Викладач для відповіді на 3 питання навмання викликав 3 студенти. Яка ймовірність, що серед них хоча б одна дівчина?

10. Ймовірність розпалити вогнище одним сірником рівна $0,8$. У вас в кишені коробка з трьома сірниками. Яка ймовірність того, що ви розпалите вогнище?

11. Радіолокаційна система, до якої входять дві станції, виявляє літака-порушника. Ймовірність безвідмовної роботи першої станції дорівнює $0,85$, а другої – $0,95$. Яка ймовірність того, що система працюватиме надійно, якщо для цього необхідно, щоб була справною хоча б одна із станцій.?

12. Обчислити ймовірність того, що серед 8 карт, навмання взятих з колоди (36 шт.), буде не більше 2 червових.

13. В урні знаходиться 5 червоних, 7 зелених і 3 чорних кульки. Знайти ймовірність того, що серед 4 навмання взятих кульок буде не більше 2 червоних.

14. Садівник восени посадив 5 саджанців яблуні. Кожний із них може прийнятись з ймовірністю $0,7$. Яка ймовірність, що приймуться не менше двох саджанців?

15. Три вчених проводять незалежно один від одного певне дослідження. Ймовірність помилки для кожного з них відповідно рівна $0,1$; $0,2$ і $0,3$. Знайти ймовірність того, що помилку при дослідженні допустять 2 вчених.
16. Два стрільці, для яких ймовірність влучення в ціль при одному пострілі рівна відповідно $0,8$; $0,9$; роблять по одному пострілу у спільну ціль. Знайти ймовірність того, що ціль буде вражена.
17. Кожна з 4 незалежних подій може відбутися з ймовірністю відповідно $0,06$; $0,08$; $0,25$; $0,09$. Визначити ймовірність того, що в результаті випробування відбудеться не менше 2 подій.
18. Ймовірність поліпшити свій попередній результат в одній спробі для спортсмена рівна $0,7$. Визначити ймовірність того, що на змаганнях спортсмен поліпшить свій попередній результат, якщо йому дозволено зробити 5 спроб.
19. Якщо два стрільці одночасно стріляють по мішені, то ймовірність одного влучення рівна $0,48$; ймовірність двох влучень – $0,4$. Знайти ймовірність влучення в мішені для кожного стрільця окремо.
20. В урні 5 синіх і 10 червоних кульок. Навмання витягують по черзі три кульки. Знайти ймовірність того, що перша кулька буде синя, а дві наступні – червоні.
21. Для зруйнування крижаного затору на річці досить одного влучення авіаційної бомби. Знайти ймовірність зруйнування затору при трьох бомбометаннях, якщо ймовірність влучення бомб при цьому відповідно рівні $0,4$; $0,5$; $0,6$.
22. В першій урні 10 білих і 5 чорних кульок, в другій – 7 білих і 8 чорних, в третій – 6 білих і 9 чорних. З кожної урни витягнули по одній кульці. Яка ймовірність того, що витягнули 2 білих кульки?
23. Ймовірність того, що на протязі зміни станок потребує переналаджування рівна $0,05$. Знайти ймовірність того, що на протязі трьох днів станок не переналаджуватимуть.
24. Яка ймовірність того, що при 5 киданнях монети з'явиться хоча б один герб?
25. Студент розшукує формулу в 3 довідниках. Ймовірність знаходження формули в кожному з довідників відповідно рівна $0,7$; $0,8$; $0,9$. Знайти ймовірність того, що потрібна формула виявиться в двох довідниках.
26. Кинуто 3 гральних кубики. Знайти ймовірність того, що на двох гранях випаде однакова кількість зерен, а на третій – інша.
27. Скільки раз потрібно кинути гральний кубик, щоб імовірність появи 6 зерен була не меншою $0,6$?

28. Для сигналізації про аварію встановлено 2 сигнальних пристроїв. Ймовірність їх спрацювання рівна відповідно 0,9; 0,95. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює один пристрій.

29. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб стандартний рівна 0,95. Знайти ймовірність того, що з 3 перевірених виробів 2 стандартні.

30. В групі студентів 15 хлопців і 10 дівчат. 3 групи за номерами списку навмання вибирають трьох чоловік для чергування. Знайти ймовірність того, що вибрали 3 дівчини.

3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.

1. Пасажир для придбання квитка може навмання звернутись до однієї з чотирьох кас. Ймовірності наявності квитка в касах відповідно рівні 0,6, 0,3, 0,8, 0,5. Пасажир звернувся до однієї з кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що квиток він придбав у першій касі?

2. В урні було 4 чорних і 3 білих кульки. З неї випадковим чином вийняли 3 кульки. Яка ймовірність того, що вийняті після цього 2 кульки виявляться чорними?

3. Два автомати виготовляють однакові деталі, які подаються на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата в 3 рази більша продуктивності другого. Перший автомат виготовляє в середньому 70% деталей відмінної якості, а другий – 95%. Яка ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь виготовлена першим автоматом, якщо вона має відмінну якість?

4. Робітник одержав 3 ящики деталей: в першому ящику 50 деталей, з них 20 пофарбованих; в другому – 40, з них 30 пофарбованих; в третьому – 30, з них 20 пофарбованих. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь з довільно вибраного ящика, виявиться пофарбованою.

5. Для участі в студентських відбіркових спортивних змаганнях виділено з першої групи курсу 4, з другої – 6, з третьої – 5 студентів. Ймовірності того, що студент першої, другої, третьої групи попаде в збірну інституту, відповідно рівні 0,9, 0,7, 0,8. Навмання вибраний студент в результаті змагань попав до збірної. До якої із груп найімовірніше він належав?

6. Чотири верстати виготовляють однакові деталі. За зміну перший верстат виготовив 20 деталей, другий – 30, третій – 40, а четвертий – 10 деталей. Ймовірність появи браку на першому верстаті рівна 0,1; на другому – 0,15; на третьому – 0,2; на четвертому – 0,05. Яка ймовірність того, що навмання взята

деталь виготовлена на третьому верстаті, якщо вона виявилася якісною?

7. З 20 стрільців 8 влучають у мішень з імовірністю 0,8; 7 – з імовірністю 0,6 і 5 – з імовірністю 0,5. Навмання вибраний стрілець, зробивши 1 постріл в мішень, не влучив. Знайти ймовірність того, що він належав до першої групи.

8. Для контролю з 3 партій деталей навмання взято 1 деталь. Яка ймовірність того, що деталь бракована, якщо в першій партії 10% бракованих деталей, в другій – 20% бракованих деталей, а в третій партії всі деталі стандартні?

9. Батарея з 3 гармат дала залп, при цьому дві гармати влучили в ціль. Яка ймовірність того, що перша гармата влучила в ціль, якщо ймовірність влучення в ціль першою, другою та третьою гарматами відповідно рівні 0,3, 0,5 і 0,8?

10. Ймовірності того, що під час роботи цифрової електронної машини відбудеться збій в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті, в решті пристроїв, відносяться як 3:2:5. Ймовірності виявлення збою в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті, в решті пристроїв відповідно рівні 0,9, 0,85, 0,8. Яка ймовірність того, що збій, який виник під час роботи, буде виявлений?

11. У коробці 10 чорних, 5 білих та 15 синіх кульок. Навмання витягують і відставляють в сторону 1 кульку. Потім витягують ще 1 кульку. Яка ймовірність того, що друга кулька буде синього кольору?

12. Є 2 партії деталей з 150 і 100 деталей. В кожній партії по 5 деталей бракованих. Одну деталь, навмання вибрану з першої партії, переклали в другу партію. Потім з другої партії вибрали навмання 1 деталь. Яка ймовірність того, що остання деталь не бракована?

13. Є три партії деталей по 20 деталей в кожній. Кількість стандартних деталей в першій, другій і третій партіях відповідно рівне 20, 15, 10. Витягнута з навмання вибраної партії деталь виявилась стандартною. Деталь повертають в партію і вдруге з цієї ж партії навмання витягують деталь, яка теж виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі витягували з третьої партії?

14. Спочатку в урні було 7 зелених і 8 синіх кульок. З урни навмання витягують 1 кульку, після чого в неї вкидають 2 кульки того ж кольору. Яка ймовірність після цього витягнути 2 різноколірні кульки?

15. В урні міститься 10 чорних і 5 білих кульок. Навмання витягнули 3 кульки і чорні повернули назад, а білі відклали в сторону. Знайти ймовірність того, що витягнуті після цього 2 кульки будуть білі.

16. В урні 3 білих і 7 чорних кульок. Можна або додати в урну 2 білих кульки або навмання витягнути з неї 2 кульки. В якому випадку ймовірність витягнути 1 чорну кульку буде більшою?

17. У першій урні 5 білих і 10 чорних кульок, а в другій – 7 білих і 8 чорних. В

одну з урн додають 2 білих кульки. Після чого з навання вибраної урни витягують 2 кульки. Яка ймовірність того, що ці кульки білі?

18. В урні 3 червоних і 12 білих кульок. З неї витягують навання 2, а потім ще 2 кульки. Яка ймовірність того, що 2 останні кульки будуть білого кольору?

19. В кожній з двох урн міститься по 3 синіх і 7 чорних кульок. З першої урни навання взяли кульку і переклали в другу, а потім з другої урни, навання взятую кульку, переклали в першу урну. З якої урни після цього ймовірніше витягнути 2 синіх кульки?

20. В кожній з трьох урн міститься по 6 синіх і 5 чорних кульок. З першої урни навання взяли кульку і переклали в другу, а потім з другої урни навання взяли кульку і переклали в третю урну. Знайти ймовірність того, що кулька, навання витягнута з третьої урни, виявиться синьою?

21. Три заводи поставляють на конвеєр однотипні деталі. Перший завод поставляє 20%, другий – 30%, третій – 50% деталей. Перший завод випускає 3% браку, другий – 2%, а третій – 1%. При перевірці навання вибрана деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена першим заводом?

22. Є 3 однакових урни. В першій 6 білих і 8 чорних, в другій 4 білих і 6 чорних, а в третій 2 білих і 4 чорних кульки. Знайти ймовірність того, що кулька, витягнута з навання вибраної урни, виявиться білою.

23. Прилад може працювати в двох режимах: нормальному і ненормальному. Нормальний режим спостерігається в 90% всіх випадків роботи приладу, а ненормальний – в 10%. Ймовірність виходу приладу з ладу за час t в нормальному режимі рівний 0,05, а в ненормальному – 0,6. Знайти ймовірність виходу приладу з ладу за час t .

24. При масовому виробництві деякого виробу ймовірність того, що він виявиться стандартним, рівна 0,97. Для контролю проводиться деяка спрощена перевірка стандартності виробу, яка дає позитивний результат в 99% для стандартного виробу і в 2% – для нестандартного. Яка ймовірність стандартності виробу, який пройшов спрощену перевірку?

25. В групі з 25 чоловік 5 студентів підготувались до екзамену відмінно, 10 – добре, 7 – посередньо і 3 – погано. На екзамен виноситься 25 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 25 питань, добре підготовлений – на 20, посередньо підготовлений – на 13, а погано підготовлений – на 6. Викликаний навання студент відповів на всі 3 поставлені питання. Знайти ймовірність того, що це був посередньо підготовлений студент.

26. По лінії зв'язку передаються два сигнали A і B з ймовірностями відповідно

0,3 і 0,7. Із-за перешкод 10% сигналів A спотворюються і приймаються як B -сигнали, а 5% переданих B -сигналів приймаються як A -сигнали. На прийомному пункті з'явився сигнал A . Знайти ймовірність того, що він і був переданий.

27. Кількість вантажних автомобілів, які проїжджають по деякій трасі з бензоколонкою, відноситься до кількості легкових як 3:1. Ймовірність того, що вантажний автомобіль буде запраплятися рівна 0,2, а легковий – 0,3. Знайти ймовірність того, що автомобіль, який під'їхав до бензоколонки є вантажним.

28. Два оператори набирають один і той же текст. Ймовірність помилки для першого оператора рівна 0,1, а для другого – 0,2. При перевірці одного з текстів була виявлена помилка. Яка ймовірність того, що помилку допустив перший оператор?

29. В піраміді 10 гвинтівок, з них 4 оснащені оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілок влучить в мішень при стрільбі з гвинтівки з оптичним прицілом рівна 0,95, для гвинтівки без оптичного прицілу – 0,8. Стрілок влучив у мішень з навімання взятої гвинтівки. Що ймовірніше: стрілок стріляв з гвинтівки з оптичним прицілом чи без нього?

30. На складання агрегату надходять деталі, які виготовляються трьома верстатами-автоматами. Продуктивність першого автомата в 2 рази більша продуктивності другого, а продуктивність другого автомата в 2 рази більша продуктивності третього. Перший автомат виготовляє в середньому 70% деталей відмінної якості, другий – 80%, а третій – 90%. Знайти ймовірність надходження на складання деталі відмінної якості.

4. Повторні незалежні випробування. Теорема Бернуллі.

1. Стрілець виконує 5 пострілів по мішені. Знайти ймовірність хоча б 3 влучень у мішень, якщо ймовірність влучення при одному пострілі рівна 0,7.

2. Яка ймовірність 4 влучень у мішень стрільцем при 6 пострілах, якщо ймовірність влучення при одному пострілі рівна 0,8?

3. Ймовірність того, що витрати електроенергії впродовж доби не перевищать встановленої норми, рівна 0,75. Знайти ймовірність того, що в наступні 6 діб витрати електроенергії на протязі 4 діб не перевищать норми.

4. Ймовірність влучення у мішень стрільця при одному пострілі рівна 0,9. Що ймовірніше для нього: влучити у мішень 3 рази з 5 пострілів чи – 4 з 6?

5. Два рівносильних шахісти грають в шахи. Що ймовірніше виграти: дві партії з чотирьох чи три партії з шести (нічії не приймаються до уваги)?

6. В сім'ї 5 дітей. Знайти ймовірність того, що серед них не менше двох хлопчиків, якщо ймовірність народження хлопчика рівна 0,51.

7. Знайти ймовірність появи 5 гербів при 7 киданнях монети.
8. Відділ технічного контролю перевіряє стандартність деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, рівна 0,95. Знайти ймовірність того, що з 4 перевірених деталей стандартними виявляться 3 деталі.
9. В урні 7 білих і 3 чорних кулі. Виймають з поверненням 5 раз 1 кулю. Яка ймовірність того, що вийняли 4 білих кулі?
10. В результаті багаторічних спостережень встановлено, що в червні в даній місцевості в середньому 5 днів падає дощ. Знайти ймовірність того, що за перших 5 днів червня 2 будуть дощовими.
11. Знайти ймовірність того, що при 5 киданнях монети герб з'явиться не менше 3 раз.
12. Два рівносильних шахісти грають в шахи. Що ймовірніше виграти: не менше двох партій з чотирьох чи не менше трьох партій з п'яти (нічий не приймаються до уваги)?
13. Робітник обслуговує шість верстатів - автоматів. Ймовірність того, що протягом години верстат потребує уваги робітника, рівна 0,6. Знайти ймовірність того, що за годину уваги потребуватиме принаймні один верстат.
14. За даними технічного контролю в середньому 5% виготовлених на заводі верстатів потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що з 5 виготовлених верстатів 2 потребують додаткового регулювання.
15. Знайти ймовірність того, що при 10 киданнях трьох монет 2 рази з'являться 3 герби.
16. Знайти ймовірність того, що при 5 киданнях 2 гральних кубиків 1 раз з'явиться пара з шести зерен.
17. Ймовірність появи події A в кожному з 8 проведених дослідів рівна 0,2. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться хоча б два рази.
18. Знайти ймовірність появи події A в одному досліді, якщо ймовірність її появи хоча б один раз в 5 незалежних повторних дослідів рівна 0,6.
19. Відомо, що після сівби в середньому сходять 90% насінин. Знайти ймовірність того, що з 10 посіяних насінин зійде не менше 7.
20. В середньому 60% виробів деякого підприємства мають вищий ґатунок. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання відібраних виробів не менше 4 мають вищий ґатунок.
21. В навчальній аудиторії є 15 персональних комп'ютерів. Для кожного комп'ютера ймовірність того, що в даний момент він працює рівна 0,9. Знайти ймовірність того, що аудиторія придатна для занять, якщо для цього потрібно, щоб працювало не менше 12 комп'ютерів.

22. Відомо, що після сівби в середньому сходять 80% насінин. Скільки потрібно засіяти насінин, щоб з ймовірністю не меншою 0,95 зійшло 3 насінини?
23. Зустрічаються дві рівносильні баскетбольні команди. Що ймовірніше: виграти 2 зустрічі з 5 чи 3 з 7?
24. Розрахувати залежність хоча б одного промаху стрільця при десяти пострілах по мішені від ймовірності його влучення при одному пострілі p ($p=0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$).
25. Два стрільці роблять по 3 постріли у мішень. Знайти ймовірність того, що у першого стрільця буде більше влучень, ніж у другого, якщо ймовірності влучення при одному пострілі для них відповідно рівні 0,8 і 0,9.
26. Ймовірність того, що електрична лампочка перегорить при ввімкненні в електромережу дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що з шести лампочок, увімкнених в електромережу, перегорить не більше двох.
27. Ймовірність виграшу на кожний з лотерейних білетів рівна 0,05. Розрахувати ймовірність хоча б одного виграшу купівлі n білетів ($n=2; 5; 10; 30; 50$).
28. При передачі інформації ймовірність спотворення одного знака рівна 0,05. Знайти ймовірність того, що в інформації з 7 знаків буде не більше одного спотвореного знака.
29. Скільки потрібно придбати лотерейних білетів, щоб ймовірність хоча б одного виграшу була не меншою 0,3, якщо ймовірність випадання виграшу на один білет рівна 0,003.
30. Відрізок AB , довжиною 15 см, розділений точкою C у відношенні 2:1. На цей відрізок навмання кидають чотири точки. Знайти ймовірність того, що дві з них попадуть лівіше від точки C , а дві – правіше. Припускається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розташування.

5. Граничні теореми.

1. При штампуванні автоматом цвяхів ймовірність появи бракованого цвяха рівна 0,002. Знайти ймовірність того, що в партії з 5000 цвяхів буде 5 бракованих.
2. У відділ технічного контролю надійшла партія деталей. Знайти ймовірність того, що з 200 перевірених деталей стандартних не менше 170, якщо ймовірність стандартності навмання взятої деталі рівна 0,9.
3. Знайти ймовірність того, що деяка подія відбудеться 130 раз при 200 випробуваннях, якщо ймовірність її появи в одному окремому випробуванні рівна 0,8.

4. Знайти ймовірність проростання від 1000 до 1300 насінин з 2000 висіяних, якщо ймовірність проростання однієї окремої насінини рівна 0,75.
5. Верстат-автомат штампує нестандартні деталі з ймовірністю 0,002. Яка ймовірність того, що серед 2000 відштампованих деталей буде більше 3 нестандартних?
6. Ймовірність того, що картоплина вражена хворобою рівна 0,01. Знайти ймовірність того, що з 500 картоплин вражені хворобою не більше 5.
7. Ймовірність влучення при одному пострілі рівна 0,9. Знайти ймовірність того, що при 200 пострілах буде не менше 180 влучень.
8. Ймовірність народження хлопчиків рівна 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 200 новонароджених 95 дівчат.
9. Ймовірність появи деякої події в кожному з 3000 випробувань рівна 0,75. Знайти ймовірність того, що подія з'явилась не менше 2000 і не більше 2500 раз.
10. Ймовірність появи події A в кожному з незалежних повторних випробувань рівна 0,8. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю не меншою 0,9 подія A з'явилась не менше 75 раз?
11. Із партії з 2000 деталей відібрали 100. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей 3 браковані, якщо в усій партії їх було 6?
12. В середньому 3% виготовлених приладів потребують додаткового регулювання. Яка ймовірність того, що серед 200 перевірених приладів додаткового регулювання потребує 5?
13. Ймовірність виграшу на кожний з лотерейних білетів рівна 0,03. Знайти ймовірність того, що серед 100 куплених білетів є не менше 4 виграшних.
14. Ймовірність появи позитивного результату в кожному з n експериментів рівна 0,9. Скільки треба провести експериментів, щоб з ймовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менше 150 експериментів дадуть позитивний результат?
15. Знайти ймовірність того, що серед 400 студентів є 4 лівші, якщо в середньому вони складають 1% населення.
16. Ймовірність випуску свердла підвищеної крихкості рівна 0,03. Свердла складаються в коробки по 100 шт. Знайти ймовірність того, що в партії з 10 таких коробок буде не більше 4 свердел з підвищеною крихкістю.
17. В тролейбусному парку 100 машин. Ймовірність готовності тролейбуса до виходу на лінію рівна 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи тролейбусного парку, якщо для цього потрібно не менше 70 справних машин.
18. В середньому в даній місцевості опади випадають 90 днів на рік. Знайти ймовірність того, в наступному році в даній місцевості буде від 50 до 100 днів з опадами.

19. При штампуванні автоматом деталей ймовірність появи бракованої деталі рівна $0,006$. Знайти ймовірність того, що в партії з 500 деталей буде не більше 3 бракованих.

20. Знайти ймовірність того, що з 500 перевірених деталей, які надійшли у відділ технічного контролю, стандартних не менше 230 , якщо ймовірність стандартності навмання взятої деталі рівна $0,8$.

21. Знайти ймовірність того, що з 3000 висіяних насінин проросте не менше 2500 , якщо ймовірність проростання однієї окремої насінини рівна $0,85$.

22. Візуально спостерігати в заданому пункті штучний супутник Землі можна з ймовірністю $p = 0,1$ щоразу, коли він пролітає над цим пунктом. Скільки разів має пролетіти супутник над пунктом спостереження, щоб з ймовірністю, не меншою $0,9975$, вдалося здійснити принаймні 5 спостережень?

23. Ймовірність народження дівчат рівна $0,49$. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених не менше 45 дівчат.

24. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює $0,002$. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть по телефону не більше трьох абонентів?

25. Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка розіб'ється рівна $0,003$. Знайти ймовірність того, що магазин отримає хоча б одну розбиту пляшку.

26. Скільки раз потрібно кинути монету, щоб герб з ймовірністю $0,8$ з'явився не менше 200 раз?

27. В казино за вечір гральний кубик кинули 500 раз. Знайти ймовірність того, що 6 зерен випадало від 75 до 85 раз.

28. Бібліотека налічує 3000 книжок, з них 2000 мають тверду обкладинку. Знайти ймовірність того, що з 100 навмання замовлених книжок тверду обкладинку мають не менше 60 .

29. В університеті в середньому з першого разу залік здають 90% студентів. Знайти ймовірність того, що з 125 студентів з першого разу залік здадуть не менше 100 .

30. У партії однотипних деталей стандартні становлять 82% . Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде від 355 до 400 ?

6. Випадкові величини. Закон розподілу дискретних випадкових величин.

1. На шахівницю випадковим чином ставиться кінь. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості клітин, що потрапляють під удар коня.
2. З повного набору доміно витягують одну кісточку. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості зерен на кісточці.
3. На шахівницю випадковим чином ставиться слон. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості клітин, які попадають під бій слона.
4. Кидають два гральних кубики. Знайти закон розподілу випадкової величини X – суми зерен, які випали на обох кубиках.
5. В урні 3 білих і 7 чорних куль. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості чорних куль серед навмання виїнятих чотирьох.
6. В кожній з двох урн є 3 сині і 4 червоні кулі. Спочатку з першої урни переклали навмання виїняту кулю в другу, а потім з другої – виїняли 4 кулі. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості синіх куль серед виїнятих з другої урни.
7. Кидають два гральних кубики. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості зерен, більшої з двох, які випали на кубиках.
8. В кожній з 4 урн знаходяться 1 синя, 1 зелена і 1 жовта куля. З кожної з урн витягають по одній кулі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості жовтих куль серед витягнутих.
9. З колоди карт (36 шт.) витягають навмання 4 карти. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості фігурних карт серед витягнутих.
10. В урні знаходиться 6 куль, пронумерованих номерами від 1 до 6. З урни витягають 2 кулі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – суми номерів витягнутих куль.
11. З повного набору кісточок доміно навмання витягають 4 кісточки. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості половинок з 2 зернами.
12. В урні міститься 4 зелених і 3 чорних кулі. З урни витягають по одній кулі до появи чорної. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості витягнутих куль.
13. Імовірність влучення стрільця в ціль рівна 0,7. Стрілець стріляє в ціль до першого влучення. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості зроблених пострілів, якщо стрільцеві видано 5 патронів.
14. Кидають 4 гральних кубики. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості кубиків, на яких випало 6 зерен.
15. З повного набору кісточок доміно витягають 5 кісточок. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості витягнутих дублів.
16. Верстат-автомат штампує деталі. Ймовірність виготовлення браку рівна

0,01. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед 5 виготовлених.

17. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості кидань монети до першої появи герба.

18. Імовірність виготовлення придатної деталі для кожної з 7 заготовок рівна 0,8. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості використаних заготовок до виготовлення першої придатної деталі.

19. З партії, в якій з 80 деталей 16 бракованих, навмання відібрали 5 деталей. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед відібраних.

20. Імовірність виготовлення нестандартної деталі при деякому технологічному процесі постійна і рівна 0,03. Для перевірки якості виготовлених деталей відбирається 5 деталей. При виявленні бракованої деталі вся партія затримується. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості перевірених деталей.

21. В партії з 7 деталей є 4 бракованих. Навмання відбирають 4 деталі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед відібраних.

22. В цеху є 4 однотипних верстати. Ймовірність їх використання в часі рівна 0,7. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості працюючих верстатів в деякий момент часу.

23. Однотипні прилади випробовуються в режимі підвищеного навантаження. Ймовірність пройти випробовування для кожного з приладів рівна 0,9. Випробовування закінчується при виході з ладу першого ж приладу. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості проведених випробовувань.

24. Прилад складається з 3 незалежно працюючих елементів. Імовірність виходу з ладу кожного з них при проведенні досліду рівна 0,3. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості елементів, які вийшли з ладу в одному досліді.

25. Ймовірність влучення кожного з 3 стрільців по мішені відповідно рівна 0,7, 0,8 і 0,9. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості влучень стрільців, якщо вони зробили по одному пострілу.

26. Робітник обслуговує 4 верстати. Ймовірності того, що на протязі години верстати не потребують уваги робітника рівні 0,6, 0,7, 0,8 і 0,9, відповідно. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості верстатів, які на протязі години потребують уваги робітника.

27. На шляху руху автомобіля 5 світлофорів, кожний з них дозволяє рух автомобіля з ймовірністю 0,6. Знайти закон розподілу випадкової величини X –

кількості світлофорів, які проїхав автомобіль до першої зупинки.

28. Є 6 ключів, з яких тільки один підходить до замка. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості спроб при відкриванні замка.

29. Абонент при наборі номера телефону забув останню цифру і набирає її навмання. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості наборів номера телефону до попадання на потрібного абонента.

30. Студент вивчив 30 питань з 40, які виносяться на екзамен. Екзаменатор задає 5 питань. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості питань, на які відповість студент.

7. Математичне сподівання і дисперсія дискретних випадкових величин.

В задачах завдання №6 для вказаної випадкової величини:

- 1) побудувати многокутник розподілу;
- 2) знайти:
 - а) математичне сподівання;
 - б) дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

8. Неперервні випадкові величини.

Випадкова величина X в задачах № 1–15 задана функцією розподілу $F(x)$, а в задачах 16–30 – щільністю розподілу $p(x)$.

Знайти:

- 1) множник c ;
- 2) в задачах 1–15 щільність розподілу $p(x)$, а в задачах 16–30 – функцію розподілу;
- 3) математичне сподівання випадкової величини X ;
- 4) дисперсію випадкової величини X ;
- 5) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;
- 6) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a, b) .

Побудувати графіки функції розподілу і щільності розподілу.

$$1. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ c(2x^3/3 + 3x) & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$2. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in 0, \\ c(2x^2 + x^3/3 + 3x) & \text{при } 0 < x \in 3, \\ 1 & \text{при } x > 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3. \end{matrix}$$

$$3. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ c(3x^2 + x^3/3) & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$4. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in 0, \\ c(3x^2/2 + x) & \text{при } 0 < x \in 2, \\ 1 & \text{при } x > 2, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$5. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in 0, \\ c(x^3/3 + 2x^2 + 5x) & \text{при } 0 < x \in 3, \\ 1 & \text{при } x > 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$6. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in 0, \\ c(x^3/3 + 2x^2 + 7x) & \text{при } 0 < x \in 3, \\ 1 & \text{при } x > 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$7. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in 0, \\ c(x^3/3 + 2x^2) & \text{при } 0 < x \in 4, \\ 1 & \text{при } x > 4, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3. \end{matrix}$$

$$8. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in 0, \\ c(x + x^3/3) & \text{при } 0 < x \in 4, \\ 1 & \text{при } x > 4, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 3 \\ b = 4. \end{matrix}$$

$$9. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ c \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2, \\ 1 & \text{при } x > \pi/2, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = \pi/4. \end{matrix}$$

$$10. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in p/2, \\ c \cos x & \text{при } p/2 < x \in p, \\ 1 & \text{при } x > p, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 3p/4 \\ b = p/2. \end{matrix}$$

$$11. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ c \ln(x+1) & \text{при } 0 < x \leq e-1, \\ 1 & \text{при } x > e-1, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = \sqrt{e}-1. \end{matrix}$$

$$12. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [2, 4], \\ cx - 1 & \text{при } 2 < x < 4, \\ 1 & \text{при } x > 4, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 3 \\ b = 4. \end{matrix}$$

$$13. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-1, 3], \\ c\sqrt{x+1} & \text{при } -1 < x < 3, \\ 1 & \text{при } x > 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$14. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ c(x+1)^3/3 & \text{при } -1 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$15. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ c(x^2 + 2x) & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 3. \end{matrix}$$

$$16. p(x) = \begin{cases} cx & \text{при } x \in [0, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 3], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$17. p(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{при } x \in [1, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [1, 3], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3. \end{matrix}$$

$$18. p(x) = \begin{cases} c(x+1) & \text{при } x \in [-1, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [-1, 3], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$19. p(x) = \begin{cases} cx & \text{при } x \in [0, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 3], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{при } x \in [-2, 2], \\ 0 & \text{при } x \notin [-2, 2], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -1 \\ b = 1. \end{matrix}$$

$$21. p(x) = \begin{cases} c(x+2) & \text{при } x \in [0, 5], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 5], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 3. \end{matrix}$$

$$22. p(x) = \begin{cases} c \sin x & \text{при } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \pi], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = \pi/2. \end{matrix}$$

$$23. p(x) = \begin{cases} c \cos x & \text{при } x \in [0, \pi/2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \pi/2], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = \pi/4 \\ b = \pi/2. \end{matrix}$$

$$24. p(x) = \begin{cases} c/x & \text{при } x \in [1, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [1, 3], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$25. p(x) = \begin{cases} c \ln x & \text{при } x \in [e, e^2], \\ 0 & \text{при } x \notin [e, e^2], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = e \\ b = e^{3/2}. \end{matrix}$$

$$26. p(x) = \begin{cases} c \ln(x+1) & \text{при } x \in [e-1, e^2-1], \\ 0 & \text{при } x \notin [e-1, e^2-1], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = e-1 \\ b = e^{3/2}-1. \end{matrix}$$

$$27. p(x) = \begin{cases} c(2x+1) & \text{при } x \in [1, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [1, 3], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$28. p(x) = \begin{cases} c(x^2+1) & \text{при } x \in [1, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [1, 3], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3. \end{matrix}$$

$$29. p(x) = \begin{cases} c(4x+5) & \text{при } x \in [-1, 3], \\ 0 & \text{при } x \notin [-1, 3], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 2. \end{matrix}$$

$$30. p(x) = \begin{cases} c(x^2+2) & \text{при } x \in [-1, 2], \\ 0 & \text{при } x \notin [-1, 2], \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -1 \\ b = 1. \end{matrix}$$

9. Вибрані задачі теорії ймовірностей.

1. Всі значення рівномірно розподіленої випадкової величини лежать на відрізку $[2, 10]$. Знайти ймовірність попадання даної випадкової величини в інтервал $(3, 6)$, її математичне сподівання і дисперсію.

2. Тролейбуси деякого маршруту рухаються з інтервалом 10 хв. В деякий момент часу до тролейбусної зупинки підходить пасажир. Знайти ймовірність того, що він підійшов через 2 хв. після відходу попереднього тролейбуса і за 5 хв. до приходу наступного.

3. Імовірність влучення стрільця в ціль рівна 0,6. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X – кількості влучень стрільця в ціль при 10 пострілах.

4. Імовірність безвідмовної роботи деякого елемента розподілена за показниковим законом: $p(t) = 0,03e^{-0,03t}$ при $t \geq 0$ і $p(t) = 0$ при $t < 0$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини T – часу безвідмовної роботи елемента і ймовірність того, що елемент пропрацює безвідмовно 40 год.

5. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом $p(x) = 1,5e^{-1,5x}$ при $x \geq 0$ і $p(x) = 0$ при $x < 0$. Знайти її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

6. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X , розподіленої за показниковим законом, якщо її функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-0,35x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

7. Рукопис об'ємом в 2000 сторінок містить 2000 помилок. Знайти ймовірність того, що навмання взята сторінка містить: а) не менше однієї помилки; б) 2 помилки. Припускається, що кількість помилок розподілена за законом Пуассона.

8. Середня кількість викликів, які поступають на АТС за 1 хв., рівна 6. Знайти ймовірність того, що за 3 хв. на АТС поступить не менше 2 викликів.

9. Випадкова величина X може приймати два можливих значення: x_1 з імовірністю 0,4 і x_2 з імовірністю 0,6. Знайти x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$), якщо $M(X) = 12$ і $D(X) = 6$.

10. Припускається, що при стрільбі випадкова величина X – дальність польоту снарядів – розподілена за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $s = 20$ м. Знайти, який процент випущених снарядів дає переліт від 120 до 160 м. Середня дальність польоту рівна 150 м.

11. Випадкова величина X – маса вагона – розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 65 т і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,9$ т. Знайти ймовірність того, що черговий вагон матиме масу не меншу 60 т і не більшу 70 т.

12. Поїзд складається з 100 вагонів. Випадкова величина X – маса вагона – розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 65 т і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,8$ т. Локомотив може везти потяг масою не більшою 6600 т. Знайти ймовірність того, що локомотив зможе везти даний потяг.

13. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 2,2 і середнім квадратичним відхиленням 0,5. Знайти ймовірність того, що при першому випробуванні випадкова величина прийме значення з відрізка $[3,4]$, а при другому – з відрізка $[1,2]$.

14. Імовірність того, що виріб не витримає випробування рівна 0,0005. Знайти ймовірність того, що з 1000 виробів випробування не витримають не більше 3 виробів.

15. У результаті проведення досліду подія A з'являється з імовірністю 0,002. Дослід повторюється 3000 раз. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться не менше 3 і не більше 5 раз.

16. Середня кількість літаків, які прибувають в аеропорт за 1 год., рівна 3. Знайти ймовірність того, що за 3 год. в аеропорт прибуде: а) 4 літаки; б) не менше 4 літаків.

17. Середня кількість кораблів, які прибувають в порт за 1 год., рівна 4. Знайти

ймовірність того, що за 4 год. в порт прибуде: а) 5 кораблів; б) не більше 5 кораблів.

18. Середня кількість заявок, які поступають на підприємство побутового обслуговування за 1 год., рівна 5. Знайти ймовірність того, що за 2 год. на підприємство поступить: а) 6 заявок; б) менше 6 заявок.

19. Інтенсивність найпростішого потоку подій $\lambda = 5$. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини T – часу між появою двох послідовних подій потоку.

20. Випадкова величина X задається законом рівномірного розподілу на інтервалі $[2,5]$. Записати її функцію і щільність розподілу. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(3,5;4,5)$.

21. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , рівномірно розподіленої на інтервалі $[4,8]$.

22. Знайти функцію розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини X , якщо її математичне сподівання рівне 5, а дисперсія – $4/3$.

23. Довжини діаметрів отвору втулок розподілені за нормальним законом. Частка втулок з діаметром, відхиленням від середнього не більше, ніж на $0,02$ мм (за абсолютною величиною), рівна $0,4$. Знайти ймовірність того, що діаметр втулки буде відрізнятися від середнього не більше на $0,01$ мм (за абсолютною величиною).

24. Автомат штампує деталі, висота яких a . 60% всіх деталей відхиляються по висоті від a не більше, ніж на $0,2$ см (в обидві сторони). Який процент деталей відхилиться по висоті від a не більше, ніж на $0,3$ см (в обидві сторони)?

25. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 10 . Знайти дисперсію випадкової величини X , якщо відомо, що ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(8;10)$ рівна $0,03$.

26. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=0$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=4$. Знайти інтервал $(-\alpha, \alpha)$, в якому дана випадкова величина приймає всі свої можливі значення з ймовірністю $0,7$.

27. Випадкова величина X може приймати два можливих значення: x_1 з ймовірністю $0,2$ і x_2 з ймовірністю $0,8$. Знайти x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$), якщо $M(X)=7$ і $D(X)=4$.

28. Автобуси деякого маршруту рухаються з інтервалом 7 хв. В деякий момент часу до автобусної зупинки підходить студент. Знайти ймовірність того, що він підійшов через 3 хв. після відходу попереднього автобуса і за 2 хв. до приходу наступного.

29. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X ,

розподіленої за показниковим законом, якщо її функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-0,15x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

30. Імовірність того, що виріб не витримає випробування рівна 0,0008. Знайти ймовірність того, що з 3000 виробів випробування не витримає не більше 2 виробів.

10. Нормально розподілена випадкова величина.

Задано математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X .

Знайти:

- ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу (α, β) ;
- ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $X - a$ виявиться меншою за δ .

Варіант	a	σ	α	β	δ
1	1	8	1	5	3
2	2	6	-1	5	5
3	3	4	2	6	7
4	4	2	4	8	9
5	5	2	6	10	11
6	6	3	5	12	10
7	7	5	4	7	8
8	8	7	7	10	6
9	9	9	8	12	4
10	10	1	9	15	2
11	11	2	10	13	1
12	12	3	5	8	3
13	13	4	4	7	5
14	14	5	7	15	7
15	15	6	8	16	9
16	13	7	10	20	11
17	11	8	12	15	10
18	9	7	10	13	8
19	7	6	5	12	6
20	5	5	5	15	4
21	3	4	3	8	2
22	1	3	0	5	1
23	2	2	4	10	3
24	4	1	3	8	5

25	6	2	5	7	7
26	8	3	8	13	9
27	10	4	10	17	11
28	12	5	12	20	10
29	14	6	10	17	8
30	16	7	8	14	6

11. Закон великих чисел.

1. Гральний кубик кидають 700 раз. Оцінити ймовірність того, що середнє арифметичне кількості зерен, які при цьому випадуть, відхилиться від математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,1.

2. Оцінити ймовірність того, що в результаті кидання грального кубика 500 раз відносна частота появи 5 зерен відхилиться від ймовірності цієї події в одному окремо взятому досліді за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02.

3. Ймовірність надходження нестандартних деталей рівна 0,05. Оцінити ймовірність того, що в партії з 2000 деталей відхилення кількості нестандартних деталей від 100 не перевищує 5%.

4. Ймовірність того, що деталь нестандартна, рівна 0,02. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 400 деталей частота появи нестандартної деталі відхиляється від ймовірності не більше, ніж на 0,01.

5. Ймовірність появи деякої події в кожному з незалежних експериментів рівна 0,3. Знайти кількість експериментів n , при якій з ймовірністю 0,9782 можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04.

6. В освітлювальну мережу підключено 50 лампочок. Ймовірність того, що за час T лампочка буде включена, рівна 0,7. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю включених лампочок і середньою кількістю (математичним сподіванням) включених лампочок за час T виявиться меншою 5.

7. Відомо, що 90% продукції, яка випускається заводом, є вищої якості. Оцінити ймовірність того, що серед 300000 виробів заводу кількість виробів, що матимуть вищу якість, відрізнятиметься від математичного сподівання цієї кількості не більше, ніж на 500 шт.

8. Скільки раз потрібно виміряти дану величину, істинне значення якої рівне a , щоб з ймовірністю не меншою, ніж 0,985 можна було стверджувати, що середнє арифметичне значення цих вимірів відрізняється від a за абсолютною величиною менше, ніж на 2, якщо середнє квадратичне відхилення кожного виміру рівне 5.

9. Ймовірність появи події в кожному експерименті рівна $1/4$.

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що кількість X появ події знаходиться в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 експериментів.

10. За значення деякої величини приймають середнє арифметичне достатньо великої кількості результатів її вимірювань. Припускаючи, що середнє квадратичне відхилення можливих результатів від кожного вимірювання не перевищує 3 мм, оцінити ймовірність того, що при 2000 вимірюваннях невідомої величини відхилення прийнятого значення від істинного за абсолютною величиною не перевищить 0,3 мм.

11. Середня температура в квартирі, підключеній до теплоцентралі, в період опалювального сезону складає 20°C , а середнє квадратичне відхилення рівне 3°C . Оцінити ймовірність того, що температура в квартирі відхилиться від середньої за абсолютною величиною не більше, ніж на 6°C .

12. Гральний кубик кидають 240 раз. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що 6 зерен з'являться від 35 до 45 раз. Порівняти цей результат з імовірністю, отриманою за допомогою теореми Лапласа.

13. Імовірність виходу з конвеєра виробу вищої якості рівна 0,8. Використовуючи нерівність Чебишова і інтегральну теорему Лапласа, оцінити ймовірність наявності серед 1000 виробів від 750 до 850 виробів вищої якості. Порівняти отримані результати.

14. Імовірність отримання з конвеєра виробу вищої якості рівна 0,9. Перевіряють 2000 виробів. Вказати проміжок, в якому значення випадкової величини X – кількості виробів вищої якості – можна очікувати з імовірністю, не меншою від 0,7.

15. Дисперсія кожної з незалежних випадкових величин X_i – часу горіння електричної лампочки за добу – не перевищує 15 год. Скільки потрібно взяти лампочок для випробування, щоб імовірність того, що абсолютне відхилення часу горіння лампочок від середнього арифметичного їх математичного сподівання не перевищувало 1 години, була не меншою 0,95?

16. Кожна з 2500 незалежних випадкових величин X_i має дисперсію рівну 5. Математичні сподівання кожної з цих величин однакові. Оцінити ймовірність того, що середнє арифметичне випадкових величин відхилиться від математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,05.

17. Чи можна до послідовності незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, які мають рівномірний розподіл на проміжку (a, b) , застосовувати теорему Чебишова?

18. Оцінити ймовірність того, що при 300 киданнях монети частота появи герба

відхилиться за абсолютною величиною від імовірності появи герба при одному киданні не більше, ніж на $0,05$.

19. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання менше, ніж на три середніх квадратичних відхилення.

20. Імовірність виготовлення стандартної деталі рівна $0,95$. Оцінити ймовірність того, що в результаті перевірки 2000 деталей частота появи нестандартних деталей відхилиться за абсолютною величиною від імовірності виготовлення нестандартної деталі не менше, ніж на $0,03$.

21. Для визначення якості продукції, яка виготовляється заводом, навмання вибрано 3000 деталей. Серед них виявилось 40 деталей з дефектами. Частота виготовлення бракованої деталі прийнята за наближене значення ймовірності виготовлення бракованої деталі. Оцінити, з якою ймовірністю можна гарантувати, що допущена при цьому абсолютна похибка не перевищить $0,01$.

22. Кількість води, яка витрачається в населеному пункті за добу є випадковою величиною, середнє квадратичне відхилення якої рівне 50000 л. Оцінити ймовірність того, що витрата води в цьому населеному пункті на протязі доби відхилиться за абсолютною величиною від математичного сподівання не більше, ніж на 3000 л.

23. Середня кількість сонячних днів на рік для даної місцевості рівна 100 . Оцінити ймовірність того, що на протязі року в даній місцевості буде не більше, ніж 150 сонячних днів.

24. Середньодобове використання електроенергії в населеному пункті рівне 25000 кВт/ год. Оцінити ймовірність того, що використання електроенергії в цьому населеному пункті на протязі даної доби перевищить 70000 кВт/ год.

25. Імовірність появи події A в одному досліді рівна $0,9$. Визначити кількість дослідів, яку потрібно провести, щоб відхилення частоти появи події A від імовірності її появи в окремому досліді, не перевищило за абсолютною величиною $0,03$ з імовірністю $0,97$.

26. Середня кількість дощових днів на рік в даній місцевості рівна 60 . Оцінити ймовірність того, що на протязі року в даній місцевості буде не більше, ніж 40 дощових днів.

27. Середня кількість кораблів, які заходять в порт на протязі доби, рівна 30 , а середнє квадратичне відхилення рівне 2 кораблям. Оцінити ймовірність того, що кількість кораблів, які прийдуть в порт за добу відхилиться за абсолютною величиною від середнього не більше, ніж на 3 .

28. В середньому в деякому навчальному закладі оцінка “ 5 ” складає 20%

екзаменаційних оцінок студентів. Оцінити ймовірність того, що в екзаменаційну сесію з 1000 оцінок отриманих студентами, оцінок “ 5 ” буде від 150 до 250.

29. Скільки раз потрібно кинути монету, щоб відхилення відносної частоти появи герба від імовірності його появи в одному окремо взятому досліді не перевищило за абсолютною величиною 0,07 з імовірністю 0,98?

30. Імовірність влучення стрільця в ціль при одному пострілі рівна 0,9. Оцінити ймовірність того, що при 1000 пострілах кількість влучень у ціль буде не меншою 870 і не більшою 930.

12. Функція одного випадкового дискретного аргументу.

Дискретна випадкова величина задана розподілом

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Знайти:

- розподіл функції $Y = A \cdot X^2 + B$;
- математичне сподівання і дисперсію функції Y .

Варіант	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	A	B
1	-1	0	1	2	3	4	0,05	0,10	0,15	0,20	0,35	0,15	1	2
2	-2	-1	0	1	2	3	0,04	0,08	0,12	0,25	0,40	0,11	2	1
3	-3	-2	-1	0	1	2	0,03	0,06	0,10	0,20	0,35	0,26	-1	2
4	-4	-3	-2	-1	0	1	0,02	0,04	0,07	0,22	0,30	0,35	1	-2
5	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,01	0,05	0,13	0,27	0,33	0,21	-2	1
6	-5	-3	-1	0	1	3	0,03	0,07	0,15	0,25	0,33	0,17	2	-1
7	-4	-2	0	1	2	3	0,04	0,09	0,17	0,28	0,31	0,11	1	3
8	-3	-1	0	1	2	3	0,07	0,12	0,18	0,29	0,25	0,09	-1	3
9	-2	-1	0	1	3	4	0,09	0,15	0,21	0,32	0,18	0,05	-1	-3
10	-5	-3	-2	-1	1	3	0,12	0,17	0,23	0,29	0,15	0,04	-1	-2
11	-5	-2	-1	0	2	4	0,14	0,19	0,25	0,26	0,13	0,03	-2	-1
12	-4	-3	-1	0	1	3	0,17	0,21	0,26	0,22	0,12	0,02	3	1
13	-4	-1	0	2	3	4	0,18	0,23	0,24	0,19	0,13	0,03	-3	1
14	-4	-3	0	1	2	3	0,21	0,25	0,21	0,18	0,14	0,01	3	-1
15	-3	-2	1	2	3	4	0,22	0,24	0,19	0,16	0,13	0,06	-3	-1
16	-3	-2	0	1	3	4	0,24	0,22	0,18	0,15	0,14	0,07	2	3
17	-3	-2	-1	0	1	2	0,25	0,21	0,15	0,14	0,15	0,10	-2	3
18	-1	0	1	2	3	4	0,27	0,20	0,16	0,13	0,13	0,11	2	-3
19	-2	-1	0	1	2	3	0,15	0,15	0,15	0,15	0,20	0,20	-2	-3
20	-3	-2	-1	0	1	2	0,29	0,18	0,13	0,12	0,10	0,18	3	2
21	-4	-3	-2	-1	0	1	0,31	0,19	0,15	0,10	0,12	0,13	-3	2
22	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,33	0,21	0,16	0,08	0,14	0,08	3	-2
23	-5	-3	-2	-1	1	3	0,35	0,25	0,15	0,11	0,08	0,06	-3	-2

24	-5	-2	-1	0	2	4	0,40	0,27	0,17	0,13	0,02	0,01	1	-3
25	-4	-3	-1	0	1	3	0,02	0,08	0,14	0,16	0,25	0,35	1	4
26	-4	-1	0	2	3	4	0,01	0,07	0,12	0,19	0,23	0,38	-1	4
27	-4	-3	0	1	2	3	0,05	0,08	0,15	0,21	0,24	0,27	1	-4
28	-3	-2	1	2	3	4	0,06	0,09	0,16	0,25	0,20	0,24	4	1
29	-3	-1	0	1	3	4	0,10	0,13	0,16	0,20	0,18	0,23	-4	1
30	-4	-1	0	1	2	3	0,11	0,12	0,14	0,16	0,19	0,28	4	-1

13. Функція одного випадкового неперервного аргументу.

Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot g(x) & \text{при } x \in (a, b) \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b). \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт c ;

б) функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X ;

в) математичне сподівання і дисперсію функції $Y = \varphi(X) = A \cdot X + B$.

Варіант	$g(x)$	a	b	A	B
1	x^2	0	6	-1	3
2	x^2	0	7	-2	4
3	x^2	0	8	-3	5
4	x^2	0	9	-4	1
5	x^2	0	10	1	-1
6	x^2	-6	0	2	-2
7	x^2	-7	0	3	-3
8	x^2	-8	0	4	-1
9	x^2	-9	0	-2	3
10	x^2	-10	0	-1	4
11	x	-1	1	-1	2
12	x	-2	1	-2	3
13	x	-3	1	-3	4
14	x	-4	1	-4	1
15	x	-5	1	-5	3

Варіант	$g(x)$	a	b	A	B
16	x^3	0	1	1	2
17	x^3	0	2	2	3
18	x^3	0	3	3	4
19	x^3	0	4	-1	3
20	x^3	0	5	-2	2
21	x^3	-1	0	-3	1
22	x^3	-2	0	-4	2
23	x^3	-3	0	-2	3
24	x^3	-4	0	-1	2
25	x^3	-5	0	1	4
26	x	-1	1	2	-3
27	x	-1	2	3	-2
28	x	-1	3	1	-1
29	x	-1	4	4	-3
30	x	-1	5	3	-4

14. Випадкові вектори.

Розподіл випадкового вектора (X, Y) заданий таблицею:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}

Знайти:

- а) закони розподілу випадкових величин X та Y ;
- б) математичні сподівання випадкових величин X та Y ;
- в) дисперсію випадкових величин X та Y ;
- г) коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y .

Варіант						Варіант					
1		-4	-3	-2	-1	16		-4	-1	0	1
	1	0,02	0,03	0,08	0,09		-3	0,02	0,10	0,08	0,07
	2	0,03	0,06	0,11	0,12		1	0,07	0,11	0,06	0,05
	3	0,13	0,12	0,13	0,08		2	0,09	0,12	0,04	0,19
2		-3	-2	-1	0	17		-4	0	1	2
	2	0,03	0,05	0,07	0,10		-3	0,01	0,07	0,12	0,15
	3	0,02	0,04	0,13	0,15		2	0,03	0,09	0,10	0,13
	4	0,15	0,14	0,07	0,05		3	0,05	0,11	0,08	0,06
3		-2	-1	0	1	18		-4	1	2	3
	0	0,01	0,02	0,09	0,13		-3	0,13	0,08	0,16	0,07
	1	0,05	0,07	0,13	0,15		1	0,11	0,06	0,08	0,09
	2	0,11	0,10	0,11	0,03		3	0,09	0,02	0,04	0,07
4		-1	0	1	2	19		-3	-1	0	1
	-1	0,06	0,05	0,07	0,09		-2	0,16	0,03	0,09	0,10
	0	0,04	0,08	0,11	0,12		0	0,08	0,09	0,03	0,08
	1	0,13	0,12	0,10	0,04		1	0,04	0,27	0,01	0,02
5		0	1	2	3	20		-3	0	1	2
	-2	0,07	0,06	0,07	0,09		-2	0,02	0,15	0,07	0,06
	-1	0,05	0,08	0,10	0,12		1	0,05	0,13	0,11	0,03
	0	0,11	0,09	0,13	0,03		2	0,08	0,11	0,15	0,04
6		1	2	3	4	21		-3	1	2	3
	-3	0,12	0,13	0,08	0,07		-2	0,03	0,06	0,12	0,06
	-2	0,05	0,06	0,07	0,10		2	0,08	0,09	0,08	0,10
	-1	0,03	0,08	0,12	0,09		3	0,13	0,12	0,04	0,09
7		-4	-2	-1	0	22		-3	2	3	4
	-4	0,13	0,12	0,07	0,06		-2	0,01	0,05	0,09	0,13
	-3	0,13	0,04	0,10	0,11		1	0,08	0,09	0,15	0,14
	-2	0,04	0,07	0,07	0,06		3	0,12	0,08	0,04	0,02
8		-2	0	1	2	23		-4	-3	1	2
	-3	0,01	0,03	0,12	0,14		-1	0,13	0,04	0,12	0,05
	-2	0,10	0,06	0,07	0,09		1	0,02	0,17	0,05	0,11

	1	0,09	0,13	0,11	0,05		2	0,15	0,03	0,11	0,02
9		-2	1	2	3	24		-4	-3	2	3
	-3	0,13	0,10	0,07	0,04		-1	0,04	0,11	0,04	0,16
	-2	0,12	0,09	0,08	0,02		2	0,13	0,02	0,10	0,12
	0	0,03	0,12	0,11	0,09		3	0,07	0,12	0,01	0,08
10		-2	2	3	4	25		-3	-2	0	1
	-3	0,22	0,13	0,08	0,03		-1	0,15	0,02	0,11	0,13
	-1	0,08	0,06	0,05	0,02		1	0,08	0,09	0,07	0,12
	1	0,08	0,12	0,08	0,05		3	0,01	0,14	0,03	0,05
11		-1	1	2	3	26		-3	-2	1	2
	-3	0,08	0,05	0,09	0,04		0	0,19	0,04	0,07	0,08
	0	0,13	0,06	0,11	0,07		2	0,11	0,09	0,05	0,06
	2	0,06	0,12	0,10	0,09		3	0,03	0,14	0,10	0,04
12		-1	2	3	4	27		-3	-2	2	3
	-3	0,09	0,08	0,05	0,13		-1	0,01	0,11	0,13	0,10
	1	0,08	0,16	0,01	0,11		1	0,03	0,09	0,15	0,06
	3	0,03	0,12	0,08	0,04		3	0,05	0,07	0,17	0,03
13		0	2	3	4	28		-3	-2	3	4
	-3	0,13	0,10	0,07	0,04		1	0,18	0,08	0,06	0,05
	2	0,02	0,06	0,10	0,16		3	0,16	0,10	0,04	0,03
	3	0,13	0,02	0,04	0,03		4	0,14	0,12	0,02	0,02
14		-4	-3	-1	0	29		-2	-1	1	2
	-3	0,05	0,10	0,06	0,11		0	0,11	0,07	0,04	0,09
	-1	0,13	0,06	0,12	0,07		1	0,09	0,13	0,06	0,01
	0	0,03	0,09	0,14	0,04		3	0,12	0,08	0,15	0,05
15		-4	-3	0	1	30		-2	-1	2	3
	-3	0,01	0,11	0,21	0,03		-1	0,01	0,16	0,22	0,05
	0	0,02	0,04	0,08	0,16		0	0,02	0,11	0,15	0,07
	1	0,01	0,09	0,03	0,11		3	0,04	0,07	0,07	0,03

15. Функція двох дискретних випадкових величин.

Задано розподіл випадкового вектора (X, Y) (задача 14) і випадкову величини $Z = A \cdot X + B \cdot Y$, де A і B задані в задачі 13.

Знайти:

- закон розподілу випадкової величини Z ;
- математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Z .

16. Неперервні випадкові вектори.

Випадковий вектор (X, Y) заданий щільністю розподілу

$$p(x) = \begin{cases} C \cdot (mx + ny) & \text{якщо } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{якщо } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Область D – прямокутник, обмежений прямими $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$.

Знайти:

а) коефіцієнт C ;

б) імовірність попадання випадкової точки (X,Y) в квадрат G , обмежений прямими $x=1$, $x=d$, $y=1$, $y=l$.

Варіант	m	n	a	b	d	l
1	1	2	4	4	2	2
2	2	1	4	5	2	3
3	1	1	5	4	3	2
4	2	2	5	5	2	4
5	1	3	4	6	4	2
6	3	1	6	4	3	4
7	3	3	5	6	4	3
8	2	3	6	5	4	4
9	3	2	6	6	2	5
10	1	4	7	4	5	2
11	4	1	4	7	3	5
12	2	4	5	7	5	3
13	4	2	7	5	4	5
14	3	4	6	7	5	4
15	4	3	7	6	5	5

Варіант	m	n	a	b	d	l
16	1	5	7	7	2	6
17	5	1	8	4	6	2
18	2	5	4	8	3	6
19	5	2	8	5	6	3
20	3	5	5	8	4	6
21	5	3	6	8	6	4
22	4	5	8	6	5	6
23	5	4	7	8	6	5
24	5	5	8	7	6	6
25	1	6	8	8	2	7
26	6	1	9	4	7	2
27	2	6	4	9	3	7
28	6	2	9	5	7	3
29	3	6	5	9	4	7
30	6	3	9	6	7	4

17. Генеральна сукупність, вибірка. Числові характеристики вибіркового розподілу.

Отримано статистичний розподіл вибірки.

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Частковий інтервал	1–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6

Побудувати:

а) гістограму частот;

б) емпіричну функцію розподілу.

Знайти:

а) вибіркове середнє;

б) вибіркиму дисперсію.

Варіант	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
---------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Варіант	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
---------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1	5	10	15	20	20	30
2	2	4	6	25	35	28
3	3	8	15	25	30	19
4	5	15	25	35	15	5
5	7	13	21	30	17	12
6	8	12	23	34	15	8
7	8	15	23	31	20	3
8	10	16	22	28	22	2
9	15	19	23	27	10	6
10	16	23	30	25	4	2
11	20	25	30	15	8	2
12	25	30	20	13	7	5
13	30	25	15	13	11	6
14	35	25	20	11	6	3
15	5	20	30	26	15	4

16	13	17	20	20	13	17
17	10	11	12	15	20	32
18	8	15	22	25	17	13
19	1	10	28	30	21	10
20	2	9	23	28	23	15
21	3	8	21	25	24	19
22	4	8	16	32	25	15
23	5	10	20	35	22	8
24	6	12	24	30	18	10
25	7	14	28	35	14	2
26	8	16	32	24	17	3
27	9	18	36	27	9	1
28	10	20	40	15	9	6
29	11	22	33	25	6	3
30	12	24	35	21	15	3

18. Критерії згоди.

Використовуючи критерій згоди Пірсона, за статистичними даними попередньої задачі встановити, чи узгоджуються спостереження з законом:

- рівномірного розподілу;
- Пуассона;
- Гауса.

За рівень значущості прийняти відповідно $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$; $\alpha = 0,1$.

19. Кореляційний і регресивний аналіз.

За вибіркою, заданою таблицею:

- визначити коефіцієнт кореляції;
- при $\alpha = 0,05$, перевірити значущість кореляційної залежності;
- знайти рівняння лінійної регресії $y = kx + b$ і побудувати графік.

Варіант									Варіант								
1	X	5	10	15	20	25	30	35	16	X	2	11	20	29	38	47	56
	Y	-2	1	7	8	10	15	19		Y	25	18	13	2	0	-1	-4
2	X	6	10	14	18	22	26	30	17	X	1	5	9	13	17	21	25
	Y	6	7	5	8	14	13	20		Y	1	4	5	8	14	25	27
3	X	2	5	8	11	14	17	20	18	X	0	6	12	18	24	30	36
	Y	-1	4	2	6	11	10	17		Y	7	3	5	14	10	15	17
4	X	1	8	15	22	29	36	43	19	X	5	25	45	65	85	105	125
	Y	7	4	6	10	11	9	14		Y	16	12	3	8	7	-1	-8
5	X	3	5	7	9	11	13	15	20	X	7	10	15	—	—	—	—
	Y	-6	-2	5	8	4	5	10		Y	20	14	5	8	4	2	5

6	X	4	9	14	19	24	29	34	21	X	10	15	20	25	30	35	40
	Y	1	-3	0	4	6	11	10		Y	-3	-5	-1	7	10	15	12
7	X	7	10	13	16	19	22	25	22	X	9	12	15	18	21	24	27
	Y	7	1	3	8	9	15	17		Y	2	10	12	17	16	23	24
8	X	8	16	24	32	40	48	56	23	X	8	10	12	14	16	18	20
	Y	13	8	5	0	1	-3	-9		Y	4	0	5	8	4	12	19
9	X	9	15	21	27	33	39	45	24	X	7	10	13	16	19	21	24
	Y	16	10	12	5	3	-1	0		Y	-5	1	-1	4	13	15	10
10	X	10	15	20	25	30	35	40	25	X	6	10	14	18	22	26	30
	Y	2	1	9	5	7	11	13		Y	-6	1	9	7	5	12	9
11	X	11	15	19	23	27	31	35	26	X	5	10	15	20	25	30	35
	Y	10	3	5	8	4	-1	1		Y	18	11	5	8	4	-4	-3
12	X	12	18	24	30	36	42	48	27	X	4	9	14	19	24	29	34
	Y	18	8	11	3	-2	5	0		Y	0	9	11	7	10	15	16
13	X	13	20	27	34	41	48	55	28	X	3	9	15	21	27	33	39
	Y	2	1	7	10	9	13	8		Y	2	1	7	-1	3	5	13
14	X	14	19	24	29	34	39	44	29	X	2	9	16	23	30	37	44
	Y	-5	-6	2	0	4	9	6		Y	-3	-5	0	8	4	6	10
15	X	15	20	25	30	35	40	45	30	X	1	9	17	25	33	41	49
	Y	12	4	6	2	-3	1	-4		Y	10	17	8	13	14	7	10

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,01	0,990	0,41	0,664	0,81	0,445	3,10	0,045
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,20	0,041
0,03	0,970	0,43	0,650	0,83	0,436	3,30	0,037
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,40	0,033
0,05	0,951	0,45	0,638	0,85	0,427	3,50	0,030
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,60	0,027
0,07	0,932	0,47	0,625	0,87	0,419	3,70	0,025
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,80	0,022
0,09	0,914	0,49	0,613	0,89	0,411	3,90	0,020
0,10	0,905	0,50	0,606	0,90	0,407	4,00	0,0183
0,11	0,896	0,51	0,600	0,91	0,403	4,10	0,0166
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,20	0,0150
0,13	0,878	0,53	0,589	0,93	0,395	4,30	0,0136
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,40	0,0123
0,15	0,861	0,55	0,577	0,95	0,387	4,50	0,0111
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,60	0,0101
0,17	0,844	0,57	0,565	0,97	0,379	4,70	0,0091
0,18	0,835	0,53	0,560	0,98	0,375	4,80	0,0082
0,19	0,827	0,55	0,554	0,99	0,372	4,90	0,0074
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,00	0,0067
0,21	0,811	0,61	0,543	1,10	0,333	5,10	0,0061
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,302	5,20	0,0055
0,23	0,795	0,63	0,533	1,30	0,273	5,30	0,0050
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,40	0,0045
0,25	0,779	0,65	0,522	1,50	0,223	5,50	0,0041
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,60	0,0037
0,27	0,763	0,67	0,512	1,70	0,183	5,70	0,0033
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,80	0,0030
0,29	0,748	0,69	0,502	1,90	0,150	5,90	0,0027
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,00	0,0025
0,31	0,733	0,71	0,492	2,10	0,122	6,10	0,0022
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,20	0,0020
0,33	0,719	0,73	0,482	2,30	0,100	6,30	0,0018
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,40	0,0017
0,35	0,705	0,75	0,472	2,50	0,082	6,50	0,0015
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,60	0,0014
0,37	0,691	0,77	0,463	2,70	0,067	6,70	0,0012
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,80	0,0011
0,39	0,677	0,79	0,454	2,90	0,055	6,90	0,0010

$$\text{Значення функції } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Таблиця 2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3445	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3075	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0503	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\text{Значення функції } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Таблиця 3.

x	0	1	2	3	4	3	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14310	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42384	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46582	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48923	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49873	49877	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49982	49982	49983	49984
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49993
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49998	49998	49998	49998

Квантилі U_p нормального розподілу $N(0,1)$.

Таблиця 4.

p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
---	------	------	-------	------	-------	-------	--------

U_p	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Квантилі розподілу $\chi_p^2(k)$.

Таблиця 5.

k/p	0,005	0,010	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
1	0,04393	0,03157	0,03982	0,02393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,3
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3	66,6
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	118,5	124,3	129,6	135,6	140,2	149,4

Квантилі розподілу Ст'юдента $t_p(k)$.

Таблиця 6.

$k \setminus p$	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,2
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160

Квантилі розподілу Фішера $F_p(k_1, k_2)$:

$p = 0,9$

Таблиця 7.

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	30	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	62,26	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,46	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,17	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,82	3,73
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,17	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,80	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,56	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,38	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,25	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,16	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,08	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,01	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	1,96	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	1,91	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	1,87	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,84	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,81	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,78	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,76	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,74	1,64
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,66	1,56
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,41	1,26

$p = 0,95$

$k_2 \setminus k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	30	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	2,368	238,9	240,5	241,9	250,1	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,46	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,62	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,75	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,35	4,88	4,82	4,77	4,74	4,50	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,81	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,38	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,08	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,86	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,70	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,57	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,30	2,75	2,47	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,38	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,31	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,25	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,19	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,15	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,11	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,07	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,04	1,90
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	1,92	1,77
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,55	1,35

$$p = 0,975$$

Продовження табл. 7

$k_2 \setminus k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	30	120
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	1001	1014
2	38,51	39,00	34,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,46	39,49
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,08	13,95
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,46/	8,31
5	10,01	8,43	7,76	7,39,	7,15	6,98	6,35	6,76	6,68	6,62	6,23	6,07
6	8,71	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,07	4,90
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,87	4,76	4,36	4,20
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	3,89	3,73
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,56	3,39
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,31	3,14
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,12	2,94
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	2,96	2,79
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	2,84	2,66
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,73	2,55
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,64	2,46
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,57	2,38
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,50	2,32
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,44	2,26
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,39	2,20
20	5,37	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,35	2,16
25	5,67	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,18	1,93
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	1,69	1,43

$$p = 0,990$$

Продовження табл. 7

$k_2 \setminus k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	30	120
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6261	6339
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,47	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	26,50	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	13,84	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,38	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,23	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	5,99	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,20	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,65	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,25	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	3,94	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	3,70	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,51	3,25
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,35	3,09
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,21	2,96
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,10	2,84
17	8,40	6,11	5,13	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,00	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	2,92	2,66
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	2,84	2,58
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	2,78	2,52
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,54	2,27
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	1,86	1,53

$$p = 0,995$$

Продовження табл. 7

$k_2 \setminus k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	30	120
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	25044	25359
2	198,5	199,0	199,2	199,2	199,3	199,3	199,4	199,4	199,4	199,4	199,5	199,5
3	55,55	49,80	47,47	46,19	45,39	44,84	44,43	44,13	43,88	43,69	42,47	41,99
4	31,13	26,28	24,26	23,15	22,46	21,97	21,62	21,35	21,14	20,97	19,89	19,47
5	22,78	18,31	16,53	15,56	14,94	14,51	14,20	13,96	13,77	13,62	12,66	12,27
6	18,63	14,54	12,92	12,03	11,46	11,07	10,79	10,57	10,39	10,25	9,36	9,00
7	16,24	12,40	10,88	10,05	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51	8,38	7,53	7,19
8	14,69	11,04	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34	7,21	6,40	6,06
9	13,61	10,11	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	5,62	5,30
10	12,83	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5,85	5,07	4,75
11	12,23	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	4,65	4,34
12	11,75	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,33	4,01
13	11,37	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,07	3,76
14	11,06	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	3,86	3,55
15	10,80	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	3,69	3,37
16	10,58	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	3,54	3,22
17	10,38	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25	4,14	3,41	3,10
18	10,22	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,30	2,99
19	10,07	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04	3,93	3,21	2,89
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,12	2,81
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64	3,54	2,82	2,50
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81	2,71	1,98	1,61

$$p = 0,999$$

Закінчення табл. 7

$k_2 \setminus k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	30	120
1	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6023*	6056*	6261*	6340*
2	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5
3	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6	129,9	129,2	125,4	124,0
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00	48,47	48,05	45,43	44,40
5	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,54	28,16	27,64	27,24	26,92	24,87	24,06
6	35,51	27,00	23,70	21,92	20,81	20,03	19,46	19,03	18,69	18,41	16,67	15,99
7	29,25	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	15,02	14,63	14,33	14,08	12,53	11,91
8	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,40	12,04	11,77	11,54	10,11	9,53
9	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37	10,11	9,89	9,55	8,00
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,52	9,20	8,96	8,75	7,47	6,94
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35	8,12	7,92	6,68	6,17
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71	7,48	7,29	6,09	5,59
13	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21	6,98	6,80	5,63	5,14
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	7,08	6,80	6,58	6,40	5,25	4,77
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47	6,26	6,08	4,95	4,47
16	16,12	10,97	9,00	7,94	7,27	6,81	6,46	6,19	5,98	5,81	4,70	4,23
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	6,56	6,22	5,96	5,75	5,58	4,48	4,02
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76	5,56	5,39	4,30	3,84
19	15,08	10,16	8,28	7,26	6,62	6,18	5,85	5,59	5,39	5,22	4,14	3,68
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44	5,24	5,08	4,00)	3,54
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,88	5,46	5,15	4,91	4,71	4,56	3,52	3,06
120	11,38	7,32	5,79	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55	3,38	3,24	2,56	1,76

4053* дорівнює $4053 \cdot 10^{-2}$

Таблиця 8.

Числові значення контрольного критерію $Q(P, n)$

n	Q		
	$P = 90 \%$	$P = 95 \%$	$P = 99 \%$
3	0,89	0,94	0,99
4	0,68	0,77	0,89
5	0,56	0,64	0,76
6	0,48	0,56	0,70
7	0,43	0,51	0,64
8	0,40	0,48	0,58
9	0,38	0,46	0,55

Таблиця 9.

Критерії значущості для перевірки гіпотез щодо дисперсії
нормально розподіленої генеральної сукупності

Гіпотеза H_0 , яку перевіряють	Припущення відносно m	Статистика Z критерію ^{*)}	Розподіл Z : $f(z/H_0)$	Область прийняття гіпотези H_0 для двостороннього критерію	Альтернативна гіпотеза і область прийняття гіпотези H_0 для правостороннього критерію
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	m відоме	$\frac{nS_0^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n)$	$\chi_{\alpha/2}^2(n) < \frac{nS_0^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2}^2(n)$	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\frac{nS_0^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	m невідоме $m = \bar{X}$	$\frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi_{\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\frac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	m_1 і m_2 відомі	$\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2},$ $S_{01}^2 > S_{02}^2$	$F(n_1, n_2)$	$\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} < F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2)$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} < F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	m_1 і m_2 невідомі $m_1 = \bar{X}_1, m_2 = \bar{X}_2$	$\frac{S_1^2}{S_2^2},$ $S_1^2 > S_2^2$	$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

^{*)}Значення статистики Z наведені при умові, що гіпотеза H_0 вірна.

Таблиця 10.

Критерії значущості для перевірки гіпотез щодо математичного сподівання
нормально розподіленої генеральної сукупності

Гіпотеза H_0 , яку перевіряють	Припущення відносно σ^2	Статистика Z критерію ^{*)}	Розподіл Z : $f(z/H_0)$	Область прийняття гіпотези H_0 для двостороннього критерію	Альтернативна гіпотеза і область прийняття гіпотези H_0 для правостороннього критерію
$m = m_0$	σ^2 відома	$\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\frac{ \bar{x} - m_0 }{\sigma / \sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}$	$H_1: m > m_0;$ $\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} < u_{1-\alpha}$
$m = m_0$	σ^2 невідома	$\frac{\bar{x} - m_0}{S / \sqrt{n}}$	$T(n-1)$	$\frac{ \bar{x} - m_0 }{s / \sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}(n-1)$	$H_1: m > m_0;$ $\frac{\bar{x} - m_0}{s / \sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1)$
$m_1 = m_2$	σ_1^2 і σ_2^2 відомі	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{12}}, \text{ де}$ $\sigma_{12} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$N(0,1)$	$\frac{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 }{\sigma_{12}} < u_{1-\alpha/2}$	$H_1: m_1 > m_2;$ $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{12}} < u_{1-\alpha}$

Гіпотеза H_0 , яку перевіря ють	Припущення відносно σ^2	Статистика Z критерію ^{*)}	Розподіл Z : $f(z/H_0)$	Область прийняття гіпотези H_0 для двостороннього критерію	Альтернативна гіпотеза і область прийняття гіпотези H_0 для правостороннього критерію
$m_1 = m_2$	σ_1^2 і σ_2^2 відомі та гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ приймається, $\sigma_1^2 = S_1^2, \sigma_2^2 = S_2^2$	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$, де $S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$	$T(n_1 + n_2 - 2)$	$\frac{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 }{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} < t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$	$H_1 : m_1 > m_2;$ $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} < t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
$m_1 = m_2$	σ_1^2 і σ_2^2 відомі та гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ відкидається, $\sigma_1^2 = S_1^2, \sigma_2^2 = S_2^2$	$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{12}}$, де $S_{12} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$T(k)$, де $k = \frac{S_{12}^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$	$\frac{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 }{S_{12}} < t_{1-\alpha/2}(k)$	$H_1 : m_1 > m_2;$ $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_{12}} < t_{1-\alpha}(k)$

^{*)}Значення статистики Z наведені при умові, що гіпотеза H_0 вірна

ЛІТЕРАТУРА

1. Булдигін В.В., Буценко Ю.П., Диховичний О.О. Теорія ймовірностей. – К.: ТІМС. – 1999.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа. – 1998.
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука. – 1969.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа – 1988.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа. – 1977.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа. – 1975.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука. – 1977.
8. Горбуненко Б.Ф., Дягілева Ф.Г., Жиронкіна Г.В. та ін. Теорія ймовірностей і статистичні методи обробки результатів спостережень. – Х.: Вид-во НФАУ „Золоті сторінки”. – 2002.
- Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука. – 1987.