

УДК 531.36:534.1:62-755

Геннадій Б. Філімоніхін*, д-р техн. наук,
професор,
Володимир В. Пирогов**, асистент,
Ірина І. Філімоніхіна***, асистент

Рівняння руху обертового тіла із маятниковими автобалансирами*

Виведені рівняння руху ізольованої системи, що здійснює просторовий рух і складається з абсолютно твердого обертового несучого тіла, матеріальних точок, що створюють його незрівноваженість та маятників, які можуть обертатися навколо поперечної осі несучого тіла.

Ключові слова: ізольована система, кут нутації, демпфер, автобалансир, маятник.

H.B. Filimonikhin, doctor engineering science,
professor,
H.B. Filimonikhin, doctor engineering science,
professor,
V.V. Pirogov, assistant professor,
I.I. Filimonikhina, assistant professor

Equations of motion of the rotated body with pendulum autobalancers

Is obtained the equations of motion of the isolated system which makes space motion and consists of rotated absolutely rigid body, material points that create its misbalance and pendulums which can revolve around of the longitudinal axis of body.

Keywords: isolated system, corner of notation, damper, autobalanser, pendulum.

*E-mail: fgb@online.ua, **E-mail: pirogovvv@rambler.ru, ***E-mail: fii@online.ua.

Представлено д.ф.-м.н., проф. В.В.Мелешко

Вступ

Положення у просторі переважної більшості супутників зв'язку і наносупутників стабілізується обертанням [1-4,7,12-14]. Через неточне надання початкового обертання супутнику і через його незрівноваженість виникають нутаційні коливання поперечної осі супутника. Це, зокрема, призводить до пульсації сигналу зв'язку, чим значно погіршується його якість. Для зменшення кута нутації використовуються демпфери. В роботах [1,2,5,14], з використанням енергетичного підходу було встановлено, що у разі сплюсненого обертового тіла демпфери зменшують кут нутації, а у разі витягнутого – збільшують. Недоліком демпферів є те, що вони не усувають кут нутації від незрівноваженості обертового тіла. В роботі [8], із використанням енергетичного підходу, досліджувалася можливість повного усунення кута нутації незрівноваженого обертового тіла (надалі – просто тіла) за рахунок його динамічного зрівноваження двома двома маятниковими автобалансирами (АБ). При цьому виділялися основні (в яких кут нутації усунутий) і побічні (в яких кут нутації не усунутий) рухи системи, і оцінювалася їх стійкість. В результаті було встановлено, що сплюснуті тіла зрівноважити маятниками динамічно неможливо, а випадок

витягнутого тіла потребує додаткових досліджень. В роботах [9, 10], із використанням, відповідно, емпіричного [11] і енергетичного підходів було встановлено, що:

- у разі сплюсненого тіла АБ будь-якого типу завжди працюватимуть демпферами кута нутації, але тільки у випадку статичної незрівноваженості, коли площина зрівноваження АБ знаходиться поблизу центра мас тіла, один АБ працюватиме і як АБ, і як демпфер, чим буде повністю усувати кут нутації;
- у разі витягнутого статично або динамічно незрівноваженого тіла АБ можуть зменшувати кут нутації від незрівноваженості тіла за рахунок приходу тіл АБ в окіл положення, в якому вони зрівноважують тіло, але чи зможуть АБ повністю усунути кут нутації – не з'ясовано.

У даній роботі виводяться диференціальні рівняння руху ізольованої системи, складеної із незрівноваженого обертового несучого тіла і маятників, насаджених на його поперечну вісь. Одержання цих рівнянь потрібно для подальшого дослідження стійкості основного руху системи і для оптимального вибору її параметрів, наприклад, методами застосованими для подібних задач у роботах [3,4,7,12,13].

§1. Модель системи

Нехай тіло має масу M . Його головні осьові моменти інерції відносно головних центральних осей X, Y, Z , які виходять з центра мас тіла – точки O (рис. 1, а), відповідно рівні A, B, C . Незрівноваженість тіла відносно осі Z створюється k матеріальними точками M_i , розташованими в площинах $X_i D_i Y_i$, паралельних площині XOY (рис. 1, б). Положення цих площин задають координати d_i , які відраховуються по осі Z . Матеріальні точки мають масу μ_i , і їх положення задається ексцентриситетом e_i та кутом γ_i $/i=\overline{1,k}/$.

На вісь Z насаджені n математичних маятників довжини l_j і маси m_j . Будемо вважати, що маятники не заважають руху один одного. Маятник j насаджений на вісь Z на відстані h_j від точки O . Положення маятника визначає кут повороту ϕ_j , який відраховується

від осі X_j , паралельної осі X , причому вісь X_j виходить із точки O_j , навколо якої обертається маятник (рис. 1, б). При русі маятника відносно тіла на нього діє момент сил в'язкого опору $-H_j \dot{\phi}_j$, де H_j – коефіцієнт сил в'язкого опору, $\dot{\phi}_j$ – відносна кутова швидкість обертання маятника.

Так як система ізолювана, то центр мас системи – точка G рухається рівномірно, прямолінійно. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що точка G нерухома. За законом збереження моменту кількості руху системи $\mathbf{K}_G = \text{const}$.

Рух системи будемо розглядати наступним чином [9, 10]. Введемо у розглядання нерухомі осі $G\xi\eta\zeta$, причому вісь ζ направимо вздовж вектора $\mathbf{K}_G$ (на схемі осі $G\xi\eta\zeta$ – не показані). Рух тіла – осей $OXYZ$ відносно нерухомих осей $G\xi\eta\zeta$ будемо уявляти наступним чином (рис. 2).

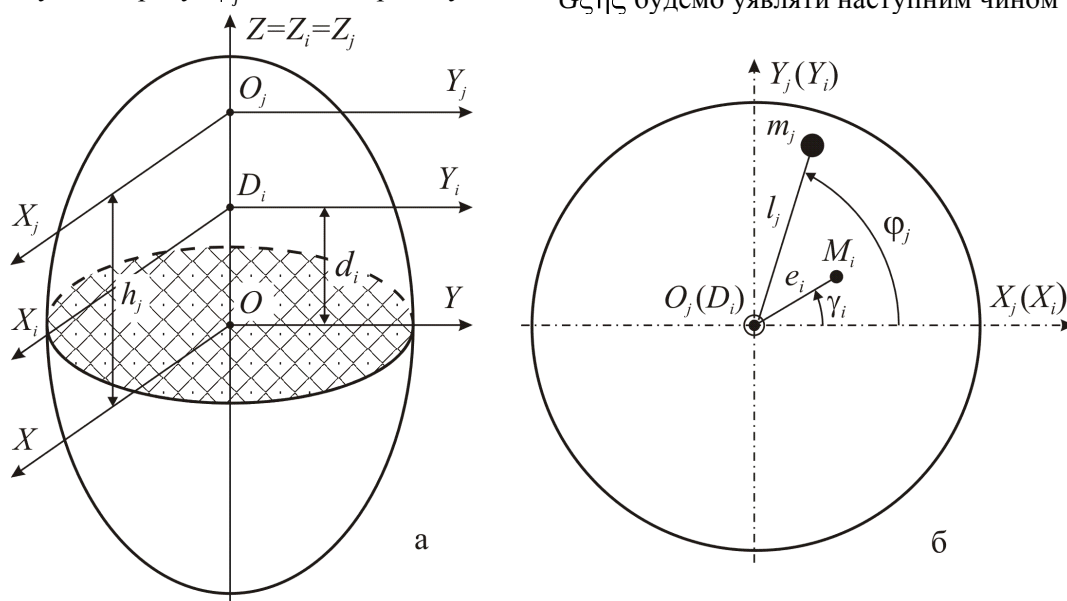


Рис. 1. Модель ізолюваної системи

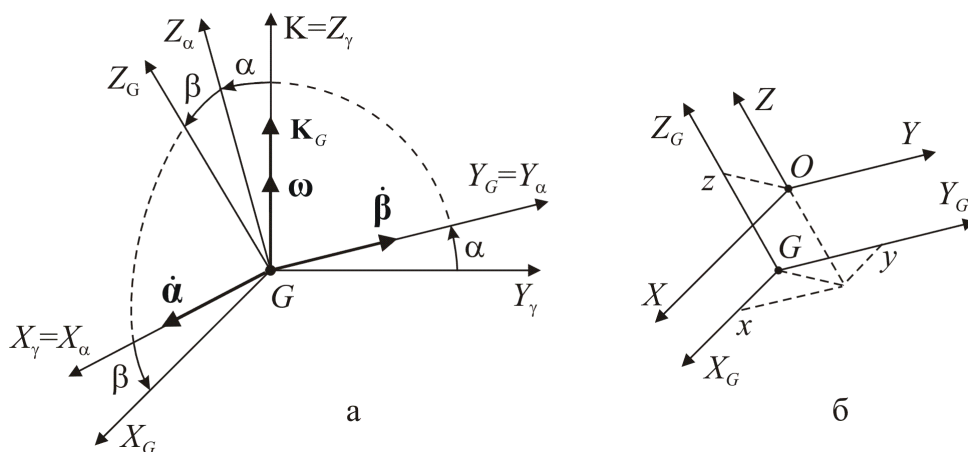


Рис. 2. Схема руху несучого тіла

При першому повороті осей $G\xi\eta\zeta$ навколо осі ζ на кут γ , що відповідає першому куту повороту Ейлера-Крилова, осі $G\xi\eta\zeta$ переходять в осі $GX_\gamma Y_\gamma Z_\gamma$, $Z_\gamma = \zeta$. Зауважимо, що кут γ – циклічна координата. Після другого повороту на кут α навколо осі X_γ осі $GX_\gamma Y_\gamma Z_\gamma$ переходять у осі $GX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$, $X_\alpha = X_\gamma$. Після третього повороту на кут β навколо осі Y_α осі $GX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ переходять у осі $GX_G Y_G Z_G$, $Y_\alpha = Y_G$, які визначають кінцеву кутову орієнтацію АТТ, бо паралельні осям $OXYZ$. Осі $GX_G Y_G Z_G$ переходять в осі $OXYZ$ після поступальних переміщень на x, y, z вздовж відповідних координатних осей. Координати x, y, z задають положення точки O відносно осей $GX_G Y_G Z_G$, а координати $-x, -y, -z$ – положення центра мас системи відносно осей $OXYZ$.

Параметри $\varphi_j, / j = \overline{1, n}, \gamma, \alpha, \beta, x, y, z$ повністю визначають рух системи. Для їх визначення треба скласти $n+6$ алгебро-диференціальних рівнянь руху системи.

§2. Вивід рівнянь руху системи з використанням загальних теорем динаміки

1. Перша група – диференціальні рівняння руху маятників. Першу групу n диференціальних рівнянь руху знайдемо з використанням теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної системи при застосуванні її до маятників. Для j -го маятника теорема в обертальній системі координат $O_j X_j Y_j Z_j$ має вигляд [6, 11]:

$$\left(\frac{d\mathbf{K}_{O_j}}{dt} + \Omega \times \mathbf{K}_{O_j} + m_j \rho_j \times \mathbf{a}_{O_j} \right) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{M}_{O_j}^e \cdot \mathbf{k}, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (2.1)$$

де: $\mathbf{K}_{O_j}$ – момент кількості руху j -го маятника, знайдений відносно точки O_j ; $d\mathbf{K}_{O_j}/dt$ – його локальна похідна за часом в рухомій системі координат $O_j X_j Y_j Z_j$; Ω – кутова швидкість обертання осей $O_j X_j Y_j Z_j$; ρ_j – радіус вектор j -го маятника, який виходить з точки O_j і закінчується у зосередженій масі маятника, визначений відносно осей $O_j X_j Y_j Z_j$; $\mathbf{a}_{O_j}$ – абсолютне прискорення точки O_j ; $\mathbf{k}$ – одиничний вектор, спрямований вздовж осі Z_j ; $\mathbf{M}_{O_j}^e$ – головний момент зовнішніх сил, діючих на j -ий маятник, знайдений відносно точки O_j .

У свою чергу

$$\mathbf{K}_{O_j} = \mathbf{J}_j \Omega_j, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (2.2)$$

де: Ω_j – абсолютна кутова швидкість обертання j -го маятника; $\mathbf{J}_j$ – тензор інерції маятника, знайдений відносно точки O_j .

З рис. 1, 2, та за формулою (2.2) визначаємо:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta - \omega \cos \alpha \sin \beta \\ \dot{\beta} + \omega \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \omega \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix};$$

$$\Omega_j = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z + \dot{\varphi}_j \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}_j = m_j l_j^2 \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi_j & -\cos \varphi_j \sin \varphi_j & 0 \\ -\cos \varphi_j \sin \varphi_j & \cos^2 \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{O_j}^e = \begin{bmatrix} M_{x_j}^e \\ M_{y_j}^e \\ -H_l \dot{\varphi}_j \end{bmatrix}; \quad \rho_j = l_j \begin{bmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{O_j} = m_j l_j^2 \begin{bmatrix} \Omega_x \sin^2 \varphi_j - \Omega_y \sin \varphi_j \cos \varphi_j \\ \Omega_y \cos^2 \varphi_j - \Omega_x \sin \varphi_j \cos \varphi_j \\ \Omega_z + \dot{\varphi}_j \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Шукаємо абсолютне прискорення точки O_j , як при складному русі. За переносний рух візьмемо її обертальний рух з осями $GX_G Y_G Z_G$ навколо точки G , за відносний – рух відносно осей $GX_G Y_G Z_G$. Тоді за теоремою Коріоліса прискорення точки O_j має вигляд [6]:

$$\mathbf{a}_{O_j} = \mathbf{a}_{O_j}^r + \mathbf{a}_{O_j}^e + \mathbf{a}_{O_j}^c, \quad (2.4)$$

де: $\mathbf{a}_{O_j}^r$ – відносне, $\mathbf{a}_{O_j}^e$ – переносне, $\mathbf{a}_{O_j}^c$ – Коріолісове прискорення точки O_j . З рис. 1 визначаємо в проекціях на осі $GX_G Y_G Z_G$ радіус-вектор точки O_j , її відносні швидкість і прискорення:

$$\mathbf{r}_{O_j} = (x, y, z + h_j)^T, \quad \mathbf{v}_{O_j}^r = (\dot{x}, \dot{y}, 0)^T, \quad \mathbf{a}_{O_j}^r = (\ddot{x}, \ddot{y}, 0)^T. \quad (2.5)$$

Оскільки переносний рух точки O_j є обертальним, то її прискорення дорівнює:

$$\mathbf{a}_{O_j}^e = \mathbf{a}_{O_j}^{ob} + \mathbf{a}_{O_j}^{dou}, \quad (2.6)$$

де $\mathbf{a}_{O_j}^{ob}$ – обертальне, $\mathbf{a}_{O_j}^{dou}$ – доцентрове прискорення точки O_j . У свою чергу

$$\mathbf{a}_{O_j}^{ob} = \varepsilon \times \mathbf{r}_{O_j}, \quad \mathbf{a}_{O_j}^{dou} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{O_j}), \quad (2.7)$$

де ε – кутове прискорення обертання осей $GX_G Y_G Z_G$. Зауважимо, що

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d'\Omega}{dt} + \Omega \times \Omega = \\ &= \frac{d'\Omega}{dt} = (\dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\Omega}_z)^T. \quad (2.8)\end{aligned}$$

З врахуванням виразів (2.5) та (2.8) прискорення $\mathbf{a}_{O_j}^{ob}$, $\mathbf{a}_{O_j}^{dou}$ та $\mathbf{a}_{O_j}^c$ матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{O_j}^{ob} &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_y(z+h_j) - \dot{\Omega}_z y \\ \dot{\Omega}_z x - \dot{\Omega}_x(z+h_j) \\ \dot{\Omega}_x y - \dot{\Omega}_y x \end{bmatrix}; \\ \mathbf{a}_{O_j}^{dou} &= \begin{bmatrix} -(\Omega_y^2 + \Omega_z^2)x + \Omega_x[\Omega_y y + \Omega_z(z+h_j)] \\ -(\Omega_x^2 + \Omega_z^2)y + \Omega_y[\Omega_x x + \Omega_z(z+h_j)] \\ -(\Omega_x^2 + \Omega_y^2)(z+h_j) + \Omega_z(\Omega_x x + \Omega_y y) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{a}_{O_j}^c &= 2\Omega \times \mathbf{v}_{O_j}^r = \\ &= 2(-\dot{y}\Omega_z, \dot{x}\Omega_z, \dot{y}\Omega_x - \dot{x}\Omega_y)^T. \quad (2.9)\end{aligned}$$

З врахуванням виразів (2.9), проекції абсолютного прискорення точки O_j на осі X_j та Y_j мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}a_{O_j, x} &= \ddot{x} + \dot{\Omega}_y(z+h_j) - \dot{\Omega}_z y - (\Omega_y^2 + \Omega_z^2)x + \\ &+ \Omega_x[\Omega_y y + \Omega_z(z+h_j)] - 2\Omega_z \dot{y}; \\ a_{O_j, y} &= \ddot{y} + \dot{\Omega}_z x - \dot{\Omega}_x(z+h_j) - (\Omega_x^2 + \Omega_z^2)y + \\ &+ \Omega_y[\Omega_x x + \Omega_z(z+h_j)] + 2\Omega_z \dot{x}. \quad (2.10)\end{aligned}$$

Остаточно, з врахуванням виразів (2.3) та (2.10), диференціальне рівняння руху маятника j має вигляд:

$$\begin{aligned}H_j \ddot{\phi}_j + m_j l_j [\ddot{\phi}_j l_j + \ddot{y} \cos \phi_j - \ddot{x} \sin \phi_j + \\ + \dot{\Omega}_z(l_j + x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) - (z+h_j) \times \\ \times (\dot{\Omega}_y \sin \phi_j + \dot{\Omega}_x \cos \phi_j) + 2\Omega_z(\dot{x} \cos \phi_j + \\ + \dot{y} \sin \phi_j) - \Omega_x^2(y + l_j \sin \phi_j) \cos \phi_j + \\ + \Omega_y^2(x + l_j \cos \phi_j) \sin \phi_j - \Omega_z^2(y \cos \phi_j - \\ - x \sin \phi_j) - \Omega_x \Omega_y(y \sin \phi_j - x \cos \phi_j - l_j \cos 2\phi_j) - \\ - \Omega_z(z+h_j)(\Omega_x \sin \phi_j - \Omega_y \cos \phi_j)] = 0, \\ / j = \overline{1, n} /. \quad (2.11)\end{aligned}$$

У явному вигляді рівняння (2.11) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} m_j l_j \{l_j \sin \beta + y \sin \beta \sin \phi_j + [x \sin \beta - (z+h_j) \times \\ \times \cos \beta] \cos \phi_j\} - \ddot{\beta} m_j l_j (z+h_j) \sin \phi_j + \\ + \dot{\omega} m_j l_j \{l_j \cos \alpha \cos \beta + [y \cos \alpha \cos \beta - (z+h_j) \times \\ \times \sin \alpha] \sin \phi_j + [x \cos \beta + (z+h_j) \sin \beta] \times \\ \times \cos \alpha \cos \phi_j\} - m_j l_j (\ddot{x} \sin \phi_j - \ddot{y} \cos \phi_j) + \\ + \ddot{\phi}_j m l_j^2 + H_j \ddot{\phi}_j + m_j l_j \{ \dot{\alpha} \dot{\beta} [2l_j \cos \beta \cos^2 \phi_j + \\ + 2[x \cos \beta + (z+h_j) \sin \beta] \cos \phi_j \} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+ 2\dot{\alpha} \dot{\omega} [x \cos \alpha \sin \beta - y \sin \alpha - (z+h_j) \cos \alpha \cos \beta - \\ - l_j \sin \alpha \sin \phi_j + l_j \cos \alpha \sin \beta \cos \phi_j] \cos \beta \sin \phi_j + \\ + 2\dot{\beta} \dot{\omega} \{x \sin \alpha \sin \phi_j + [(z+h_j) \cos \beta - x \sin \beta] \times \\ \times \cos \alpha \cos \phi_j + l_j (\sin \alpha \sin \phi_j - \cos \alpha \sin \beta \cos \phi_j) \times \\ \times \cos \phi_j\} + \dot{\alpha}^2 \{ [x \sin \beta - (z+h_j) \cos \beta] \sin \beta \sin \phi_j - \\ - y \cos \phi_j - l_j \cos^2 \beta \cos \phi_j \sin \phi_j \} + \\ + \dot{\beta}^2 (x + l_j \cos \phi_j) \sin \phi_j + \omega^2 \{ [(z+h_j) \sin \alpha \cos \beta - \\ - y \cos \alpha - x \sin \alpha \sin \beta] \cos \phi_j - l_j \sin \alpha \sin \beta \times \\ \times \cos 2\phi_j \} \cos \alpha + \omega^2 \{ x (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta) + \\ + [y \sin \alpha + (z+h_j) \cos \alpha \cos \beta] \cos \alpha \sin \beta + \\ + l_j (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos 2\alpha) \cos \phi_j \} \sin \phi_j + \\ + 2\dot{\alpha} \sin \beta (\dot{x} \cos \phi_j + \dot{y} \sin \phi_j) + 2\omega \cos \alpha \cos \beta \times \\ \times (\dot{x} \cos \phi_j + \dot{y} \sin \phi_j) \} = 0, \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (2.12)\end{aligned}$$

2. Друга група – рівняння поступального руху системи. Другу групу рівнянь руху отримаємо з закону збереження руху центра мас ізольованої системи. У векторному вигляді він має вигляд

$$M_\Sigma \mathbf{r}_G = M \mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^2 \mu_i \mathbf{r}_{\mu i} + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{r}_j = 0, \quad (2.13)$$

де: $M_\Sigma = M + \sum_{i=1}^2 \mu_i + \sum_{j=1}^n m_j$ - сумарна маса системи; $\mathbf{r}_G$ - радіус-вектор точки G відносно самої точки G ; $\mathbf{r}_O$, $\mathbf{r}_{\mu i}$, $\mathbf{r}_j$ - відповідно радіус-вектори точки O , i -ої матеріальної точки, що створює незрівноваженість, та j -ої зосередженої маси маятника, знайдені відносно точки G .

У свою чергу

$$\mathbf{r}_{\mu i} = \mathbf{r}_O + \rho_{\mu i}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_O + \rho_j, \quad (2.14)$$

де $\rho_{\mu i}$, ρ_j - відповідно радіус-вектор i -ої матеріальної точки, що створює незрівноваженість, та j -го маятника, які проведені з точки O . Підставляючи (2.14) в (2.13), одержуємо закон збереження (2.13) у такому вигляді

$$M_\Sigma \mathbf{r}_G = M_\Sigma \mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^2 \mu_i \rho_{\mu i} + \sum_{j=1}^n m_j \rho_{\phi j} = 0. \quad (2.15)$$

В проекціях на осі $GX_G Y_G Z_G$:

$$\mathbf{r}_O = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \rho_{\mu i} = \begin{bmatrix} e_i \cos \gamma_i \\ e_i \sin \gamma_i \\ d_i \end{bmatrix}, \quad \rho_j = \begin{bmatrix} l_j \cos \phi_j \\ l_j \sin \phi_j \\ h_j \end{bmatrix}, \\ / i = \overline{1, k}; j = \overline{1, n} /. \quad (2.16)$$

Підставляючи (2.16) в (2.15), одержимо такі три алгебраїчні рівняння руху системи

$$\begin{aligned} M_{\Sigma}x + \sum_{i=1}^k \mu_i e_i \cos \gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j \cos \varphi_j &= 0, \\ M_{\Sigma}y + \sum_{i=1}^k \mu_i e_i \sin \gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j \sin \varphi_j &= 0, \\ M_{\Sigma}z + \sum_{i=1}^k \mu_i d_i + \sum_{j=1}^n m_j h_j &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

З рівнянь (2.17) видно, що $z = \text{const}$.

3. Третя група – рівняння обертального руху системи. Третю групу рівнянь руху отримаємо за допомогою закону збереження моменту кількості руху ізольованої системи

$$\mathbf{K}_G = \text{const} = \mathbf{K}. \quad (2.18)$$

Прийнявши за переносний рух обертання системи навколо центра мас системи – точки G разом з осями $GX_G Y_G Z_G$, а за відносний – рух системи відносно осей $GX_G Y_G Z_G$, момент кількості руху системи в довільний момент часу можна подати так:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G^e + \mathbf{K}_G^r, \quad (2.19)$$

де $\mathbf{K}_G^e$ – момент кількості переносного руху системи; $\mathbf{K}_G^r$ – момент кількості відносного руху системи.

Момент кількості переносного руху системи має вигляд:

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{J}_G \Omega, \quad (2.20)$$

де $\mathbf{J}_G$ – тензор інерції системи відносно точки G в осях $GX_G Y_G Z_G$. Тоді

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_{\Sigma} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

де $\mathbf{J}_O$ – тензор інерції системи відносно точки O в осях $OXYZ$. З рис. 1, 2 знаходимо

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

де:

$$\begin{aligned} J_x &= A + \sum_{i=1}^k \mu_i (d_i^2 + e_i^2 \sin^2 \gamma_i) + \sum_{j=1}^n m_j (h_j^2 + l_j^2 \sin^2 \varphi_j); \\ J_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \mu_i e_i^2 \sin 2\gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j^2 \sin 2\varphi_j \right); \\ J_{xz} &= \sum_{i=1}^k \mu_i e_i d_i \cos \gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j h_j \cos \varphi_j; \\ J_y &= B + \sum_{i=1}^k \mu_i (d_i^2 + e_i^2 \cos^2 \gamma_i) + \\ &+ \sum_{j=1}^n m_j (h_j^2 + l_j^2 \cos^2 \varphi_j); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \sum_{i=1}^k \mu_i e_i d_i \sin \gamma_i + \sum_{j=1}^n m_j l_j h_j \sin \varphi_j; \\ J_z &= \sum_{i=1}^k \mu_i e_i^2 + \sum_{j=1}^n m_j l_j^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Враховуючи вирази (2.20-2.23), момент кількості переносного руху системи в проекціях на осі $GX_G Y_G Z_G$ матиме вигляд:

$$\mathbf{K}_G^e = (K_{x_G}^e, K_{y_G}^e, K_{z_G}^e)^T, \quad (2.24)$$

де:

$$\begin{aligned} K_{x_G}^e &= [J_x - M_{\Sigma}(y^2 + z^2)]\Omega_x - \\ &- (J_{xy} - M_{\Sigma}xy)\Omega_y - (J_{xz} - M_{\Sigma}xz)\Omega_z; \\ K_{y_G}^e &= -(J_{xy} - M_{\Sigma}xy)\Omega_x + \\ &+ [J_y - M_{\Sigma}(x^2 + z^2)]\Omega_y - (J_{yz} - M_{\Sigma}yz)\Omega_z; \\ K_{z_G}^e &= -(J_{xz} - M_{\Sigma}xz)\Omega_x - (J_{yz} - M_{\Sigma}yz)\Omega_y + \\ &+ [J_z - M_{\Sigma}(x^2 + y^2)]\Omega_z. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Момент кількості відносного руху системи має вигляд:

$$\mathbf{K}_G^r = \mathbf{r}_O \times M \mathbf{v}_O^r + \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_{\mu i} \times \mu_i \mathbf{v}_{\mu i}^r + \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j^r, \quad (2.26)$$

де: $\mathbf{v}_O^r, \mathbf{v}_{\mu i}^r, \mathbf{v}_j^r$ – відповідно відносні швидкості точки O , i -ої матеріальної точки, що створює незрівноваженість, та зосередженої маси j -го маятника. З рис. 1, 2 знаходимо

$$\mathbf{v}_{\mu i}^r = \mathbf{v}_O^r, \quad \mathbf{v}_j^r = \mathbf{v}_O^r + \mathbf{u}_j, \quad / i = \overline{1, k}; j = \overline{1, n} / , \quad (2.27)$$

де $\mathbf{u}_j$ – складова відносної швидкості j -го маятника, викликана зміною відповідного кута повороту маятника. Підставляючи (2.27) в (2.26) і перетворюючи, враховуючи рівність (2.13), одержимо

$$\mathbf{K}_G^r = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{u}_j. \quad (2.28)$$

В проекціях на осі $GX_G Y_G Z_G$:

$$\mathbf{u}_j = \dot{\phi}_j l_j \begin{bmatrix} -\sin \phi_j \\ \cos \phi_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (2.29)$$

Підставивши рівності (2.29) у (2.28), отримаємо момент кількості відносного руху системи у вигляді:

$$\mathbf{K}_G^r = (K_{x_G}^r, K_{y_G}^r, K_{z_G}^r)^T, \quad (2.30)$$

де:

$$\begin{aligned} K_{x_G}^r &= - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\phi}_j \cos \phi_j; \\ K_{y_G}^r &= - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\phi}_j \sin \phi_j; \\ K_{z_G}^r &= \sum_{j=1}^n m_j l_j^2 \dot{\phi}_j + x \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\phi}_j \cos \phi_j + \end{aligned}$$

$$+ y \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\phi}_j \sin \varphi_j . \quad (2.31)$$

З іншого боку, вектор $\mathbf{K}_G$ спрямований вздовж осі Z_y і має модуль K . Тому в проекціях на осі $G X_G Y_G Z_G$:

$$\mathbf{K}_G = K(-\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha, \cos \alpha \cos \beta)^T. \quad (2.32)$$

З врахуванням рівностей (2.25), (2.31), (2.32) закон збереження (2.18) в проекціях на осі $G X_G Y_G Z_G$ прийме вигляд:

$$\begin{aligned} & [J_x - M_\Sigma(y^2 + z^2)]\Omega_x - (J_{xy} - M_\Sigma xy)\Omega_y - \\ & - (J_{xz} - M_\Sigma xz)\Omega_z - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\phi}_j \cos \varphi_j = \\ & = -K \cos \alpha \sin \beta ; \\ & - (J_{xy} - M_\Sigma xy)\Omega_x + [J_y - M_\Sigma(x^2 + z^2)]\Omega_y - \\ & - (J_{yz} - M_\Sigma yz)\Omega_z - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\phi}_j \sin \varphi_j = \\ & = K \sin \alpha ; \\ & - (J_{xz} - M_\Sigma xz)\Omega_x - (J_{xy} - M_\Sigma xy)\Omega_y + \\ & + [J_z - M_\Sigma(x^2 + y^2)]\Omega_z + \sum_{j=1}^n m_j l_j^2 \dot{\phi}_j + \\ & + x \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\phi}_j \cos \varphi_j + y \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\phi}_j \sin \varphi_j = \\ & = K \cos \alpha \cos \beta . \end{aligned} \quad (2.33)$$

У явному вигляді рівняння (2.33) мають вигляд:

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}(J_x \cos \beta - J_{xz} \sin \beta) - \dot{\beta} J_{xy} - \omega(J_x \cos \alpha \sin \beta + \\ & + J_{xy} \sin \alpha + J_{xz} \cos \alpha \cos \beta) - \dot{\alpha} M_\Sigma[(y^2 + z^2) \cos \beta - \\ & - xz \sin \beta] + \dot{\beta} M_\Sigma xy + \omega M_\Sigma[(y^2 + z^2) \cos \alpha \cos \beta + \\ & + xy \sin \alpha + xz \cos \alpha \cos \beta] - \\ & - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\phi}_j \cos \varphi_j = -K \cos \alpha \sin \beta ; \\ & - \dot{\alpha}(J_{xy} \cos \beta + J_{yz} \sin \beta) + \dot{\beta} J_y + \\ & + \omega(J_{xy} \cos \alpha \sin \beta + J_y \sin \alpha - J_{yz} \cos \alpha \cos \beta) + \\ & + \dot{\alpha} M_\Sigma(xy \cos \beta + yz \sin \beta) - \dot{\beta} M_\Sigma(x^2 + z^2) - \\ & - \omega M_\Sigma[xy \cos \alpha \sin \beta + (x^2 + z^2) \sin \alpha - yz \cos \alpha \cos \beta] - \\ & - \sum_{j=1}^n m_j l_j (z + h_j) \dot{\phi}_j \sin \varphi_j = K \sin \alpha ; \\ & \dot{\alpha}(-J_{xz} \cos \beta + J_z \sin \beta) - \dot{\beta} J_{yz} + \\ & + \omega(J_{xz} \cos \alpha \sin \beta - J_{yz} \sin \alpha + J_z \cos \alpha \cos \beta) + \\ & + \dot{\alpha} M_\Sigma[xz \cos \beta - (x^2 + y^2) \sin \beta] + \dot{\beta} M_\Sigma yz - \\ & - \omega M_\Sigma[xz \cos \alpha \sin \beta - yz \sin \alpha + (x^2 + y^2) \cos \alpha \cos \beta] + \\ & + \sum_{j=1}^n m_j l_j^2 \dot{\phi}_j + x \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\phi}_j \cos \varphi_j + \\ & + y \sum_{j=1}^n m_j l_j \dot{\phi}_j \sin \varphi_j = K \cos \alpha \cos \beta . \end{aligned} \quad (2.34)$$

§3. Кінетична енергія системи

Кінетична енергія системи може бути використана як для складання диференціальних рівнянь руху системи із застосуванням рівнянь Лагранжа II-го роду, так і для оцінки стійкості різних усталених рухів системи. Вона є сумою кінетичних енергій окремих елементів, які входять до її складу:

$$T = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} \Omega^T \mathbf{J}_{ATT_0} \Omega + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \mu_i v_{\mu_i}^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j v_j^2, \quad (3.1)$$

де $\mathbf{J}_{ATT_0}$ - тензор інерції тіла відносно власних головних центральних осей інерції $OXYZ$, і зміст решти позначень розкритий вище.

Будемо розглядати рух системи як складний. За переносний рух - візьмемо її обертальний рух навколо точки G разом з осями $G X_G Y_G Z_G$, а за відносний - рух відносно осей $G X_G Y_G Z_G$. Тоді швидкості можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_O &= \mathbf{v}_O^e + \mathbf{v}_O^r, \quad \mathbf{v}_{\mu i} = \mathbf{v}_{\mu i}^e + \mathbf{v}_{\mu i}^r, \\ \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_j^e + \mathbf{v}_j^r, \quad / i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, n} /. \end{aligned} \quad (3.2)$$

де з верхнім індексом „e” - переносні, а „r” - відносні швидкості відповідно центра мас тіла, точок, що створюють незрівноваженість, та зосереджених мас маятників. У свою чергу

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mu i}^r &= \mathbf{v}_O^r, \quad \mathbf{v}_O^e = \Omega \times \mathbf{r}_O, \quad \mathbf{v}_{\mu i}^e = \Omega \times \mathbf{r}_{\mu i}, \\ \mathbf{v}_j^e &= \Omega \times \mathbf{r}_j, \quad / i = \overline{1, k}; \quad j = \overline{1, n} /. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Підставивши вирази (3.2), (3.3) у вираз (3.1), після перетворень, враховуючи рівність (2.13), отримаємо наступний вигляд кінетичної енергії системи:

$$T = T^e + T^{re} + T^r, \quad (3.4)$$

де

$$\begin{aligned} T^e &= \frac{1}{2} \Omega^T \mathbf{J}_G \Omega, \quad T_j^{re} = \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{v}_j^e \cdot \mathbf{u}_j, \\ T^r &= \frac{1}{2} \left[M_\Sigma (v_O^r)^2 + \sum_{j=1}^n m_j (u_j^2 + 2 \mathbf{v}_O^r \cdot \mathbf{u}_j) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Підставляючи в (3.5) відповідні швидкості, після перетворень, одержимо:

$$\begin{aligned} T^r &= \frac{1}{2} M_\Sigma (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \\ & + \sum_{j=1}^n m_j l_j [l_j \dot{\phi}_j^2 - 2 \dot{\phi}_j (\dot{x} \sin \varphi_j - \dot{y} \cos \varphi_j)] ; \\ T^{re} &= \sum_{j=1}^n m_j l_j \left\{ \dot{\phi}_j [\Omega_z l_j + [\Omega_z x - \Omega_x (z + h_j)] \cos \varphi_j + \right. \\ & \left. + [\Omega_z y - \Omega_y (z + h_j)] \sin \varphi_j \right\} ; \\ T^e &= \frac{1}{2} [J_{x_G} \Omega_x^2 + J_{y_G} \Omega_y^2 + J_{z_G} \Omega_z^2 - \\ & - J_{x_G y_G} \Omega_x \Omega_y - J_{x_G z_G} \Omega_x \Omega_z - J_{y_G z_G} \Omega_y \Omega_z]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Можна перевірити, що рівняння Лагранжа II-го роду, складені щодо кутів φ_j , дають першу групу диференціальних рівнянь – (2.11).

Висновки. Рух ізольованої системи, складеної з незрівноваженого обертового несучого тіла і маятників, насаджених на його повздовжню вісь описує система нелінійних автономних алгебро-диференціальних рівнянь (2.12), (2.17) та (2.34). Рівняння (2.12) це – звичайні диференціальні рівняння другого порядку, (2.17) – другі інтеграли, що мають вигляд алгебраїчних рівнянь, (2.34) – перші інтеграли, що мають вигляд звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Отримані рівняння дозволяють визначити усталені рухи системи, досліджувати їх стійкість методами теорії стійкості стаціонарних рухів нелінійних автономних систем, чисельно інтегрувати рівняння руху системи для моделювання її руху тощо.

Список використаних джерел

1. Алпер Дж. Р. Теория маятникового демпфера нутационных колебаний спутника // Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 3, – С. 170-176.
2. Докучаев Л.В. Влияние диссипативных моментов, обусловленных вязкостью жидкого тела, на устойчивость вращения космического объекта // Космические исследования, 2002, том 40, № 1, С. 42-53.
3. Ильин А.А., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Обеспечение ориентации малого спутника, стабилизируемого собственным вращением // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 83, -М.: ИПМ, 2004. – 28 с.
4. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – т.35. №6. – С. 651-658.
5. Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью // ПММ, т. XXVII, вып. 1, 1963. - С. 16-26.
6. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
7. Сарычев В.А., Мирер С.А., Исаков А.В. Оптимальное демпфирование нутационных колебаний спутника, стабилизированного вращением. Маятниковый демпфер // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, № 88, -М.: ИПМ, 1988. – 28 с.
8. Филимонихин Г.Б., Пирогов В.В., Филимонихина И.И. Стабилизация маятниковыми демпферами пространственного положения оси вращения несущего тела // Прикладная механика. – 2007. – 43, №10. – С. 122 – 128.
9. Филимонихина И.И., Филимонихин Г.Б. Условия уравнивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе // Прикладная механика, т.43, №11, 2007. – С.113-120.
10. Філімоніхіна І.І. Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2007. - №3. - С.
11. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
12. Chang, C. O., Liu, L. Z., Alfriend, K. T. Dynamics and Stability of a Freely Precessing Spacecraft Containing a Nutation Damper, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 19, No. 2, 1996, pp. 297–305.
13. Chinnery A.E., Hall C.D. The Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass-Damper // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 18, No. 6, 1995, pp. 1404-1409.
14. Likins P.W. Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft // Technical Report No. 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966, p. 70.

Надійшла до редколегії 19.12.07

*Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Рівняння руху ізольованої системи, яка здійснює просторовий рух // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2007. - №4. –С. 94-100.