

УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Л. М. Кривоблоцька, к.ф.-м.н., доц.

Кіровоградський національний технічний університет

пр. Університетський, 8, м. Кіровоград, 25006, Україна. E-mail: larisa.krivoblotsky@list.ru

Методами розв'язування задач деформівного твердого тіла є аналітичні та чисельні методи. Аналогічні задачі математичної фізики розв'язуються як в лінійній постановці, так і в нелінійній. При розв'язанні тестових нелінійних задач підтверджена ефективність і достовірність спеціального метода підсумовування, сформульована схема метода введення фіктивного параметра.

Ключові слова: спеціальні методи, нелінійна задача, сингулярні ітерації, фіктивні параметри.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л. Н. Кривоблоцкая, к.ф.-м.н., доц.

Кировоградский национальный технический университет

пр. Университетский, 8, г. Кировоград, 25006, Украина. E-mail: larisa.krivoblotsky@list.ru

Методами решения задач деформируемого твердого тела являются аналитические и численные методы. Аналогичные задачи математической физики решаются как в линейной постановке, так и в нелинейной. При решении тестовых нелинейных задач подтверждена эффективность и достоверность специального метода суммирования, сформулирована схема метода введения фиктивного параметра

Ключевые слова: специальные методы, нелинейная задача, сингулярные итерации, фиктивные параметры.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. В багатьох задачах математичної фізики, при розв'язуванні їх різними ітераційними методами (малого параметру, методом Ньютона, простих ітерацій) зустрічаються сингулярні ітерації, що необмежено зростають на "нескінченності" або в околі особливих точок. Порядок цих ітерацій невинно збільшується з ростом номера наближення. В роботах [1], [2]), [3] було запропоновано і математично обґрунтовано метод узагальненого підсумовування розкладів по параметру. На основі цього метода розв'язаний ряд задач механіки деформівного твердого тіла. В статті пропонуються деякі спеціальні методи регуляризації одержаних сингулярних ітерацій.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Ці методи демонструються на розв'язанні нелінійних задач, для яких в наявності малий параметр та край області, який віддалено на "нескінченність". Сформулюємо метод розв'язку нелінійних задач, який умовно назовемо методом введення фіктивного параметру.

Викладаємо формальну сторону методу. Нехай задано деяке нелінійне операторне рівняння типу

$$Lu + L_1u + L_2u + A(u) = q, \quad (1)$$

де L, L_1, L_2 – лінійні диференціальні оператори, причому L має найвищий порядок, u – шукана функція, $A(u)$ – нелінійна частина.

Припускаємо, що до рівняння (1) мають місце граничні умови.

Тоді суть запропонованого метода в наступному:

а) вводимо фіктивний безрозмірний параметр ε як співмножник при одному з доданків

$L_1u, L_2u, A(u), q$ (але не при Lu !), наприклад, при L_1u ; замість рівняння (1) маємо друге $Lu + \varepsilon L_1u + L_2u + A(u) = q$ (2)
б) формальний розв'язок рівняння (2) знаходимо у стандартній формі

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k \quad (3)$$

в) підставляємо (3) в рівняння (2), знаходимо відомим методом послідовність рівнянь для визначення функцій u_k ;

г) в кінцевому рахунку знаходимо формальний розв'язок типу

$$\tilde{u} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (4)$$

Звідси розв'язок рівняння (1) одержимо, коли покладемо $\varepsilon = 1$.

Але ряд

$$\tilde{u}|_{\varepsilon=1} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

може бути повільно збіжний або розбіжний. Тому до ряду (4) застосовуємо викладені в статтях [1], [2] методи підсумовування, а потім покладемо $\varepsilon = 1$. Цілком зрозуміло, що необхідно перевіряти, чи задовольняють нові ряди граничним умовам і рівнянням рівноваги.

Розглянемо дві задачі.

Першу граничну задачу розглянемо в області $0 \leq \rho \leq \infty$ для диференціального рівняння

$$u(\rho, \varepsilon) = -\frac{3}{4} \varepsilon \quad (5)$$

при граничній умові

$$u(\rho, \varepsilon)|_{\rho=0} = 1 \quad (6)$$

і умові обмеженості розв'язку при $\rho \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \geq 0$ – параметр).

Точний розв'язок поставленої задачі має вигляд

$$u(\rho, \varepsilon) = \sqrt{1 - \frac{3 \varepsilon \rho}{2(1+2\rho)}} \quad (7)$$

Бачимо, що

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, \varepsilon) = \sqrt{1 - \frac{3\varepsilon}{4}} \quad (8)$$

і звідси випливає, що параметр ε повинен змінюватись в таких межах $0 \leq \varepsilon \leq \frac{4}{3}$.

Як і раніше вважаємо, що точний розв'язок в скінченному виді неможливо знайти; застосовуємо метод розкладу по параметру ε .

Одержуємо

$$u_1(\rho, \varepsilon) = 1 - \frac{3}{4} \frac{\rho}{1+2\rho} \varepsilon - \frac{9}{32} \left(\frac{\rho}{1+2\rho} \right)^2 \varepsilon^2 - \frac{27}{128} \left(\frac{\rho}{1+2\rho} \right)^3 \varepsilon^3 - \dots \quad (9)$$

Цей розклад, як відомо справедливий в околі $\varepsilon = 0$. Елементарними перетвореннями встановлюємо, що

$$u(\rho, \varepsilon) = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon v - \frac{1}{8} \varepsilon^2 v^2 - \frac{1}{16} \varepsilon^3 v^3 - \dots, \quad (10)$$

$$\text{де } v = \frac{3\rho}{2(1+2\rho)}.$$

Бачимо, що наближений розв'язок (10) задовольняє умові (6) і умові на “нескінченності” (з певною похибкою).

Тепер необхідно звернути увагу на таку обставину. В монографії [4] автори розглядають частинний варіант функції (7), тобто для випадку $\varepsilon = 1$:

$$u(\rho, 1) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\rho}{1+2\rho}}, \quad (11)$$

$$\text{для якої } \lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, 1) = \frac{1}{2}.$$

Потім функцію (10) розкладають у степеневий ряд

$$u(\rho, 1) = (1 + z_1)^{-\frac{1}{2}} (1 + z_2)^{-\frac{1}{2}}; \quad z_1 = \frac{1}{2}\rho, \quad z_2 = 2\rho,$$

маємо

$$u(\rho, 1) = 1 - \frac{3}{4}\rho + \frac{39}{32}\rho^2 - \frac{131}{64}\rho^3 + \dots \quad (12)$$

Бачимо, що цей ряд задовольняє лише умові $u(\rho, 1)|_{\rho=0} = 1$. Щоб перевірити ефективність Пад-

перетворення певного типу, автори [4] застосовують до цього майже розбіжного ряду вказане перетворення. Дані наближених обчислень порівнюють з точними даними, які одержують на основі формули (11).

В результаті показано ефективність Пад-перетворення для $\rho \in [0, \rho^*]$, де ρ^* – достатньо “далеке” значення змінної ρ^* , $\rho \in [0, \infty)$.

Покладемо в (9) $\varepsilon = 1$; одержуємо ряд виду

$$u_1(\rho, 1) = 1 - \frac{3}{4} \frac{\rho}{1+2\rho} - \frac{9}{32} \left(\frac{\rho}{1+2\rho} \right)^2 - \frac{27}{128} \left(\frac{\rho}{1+2\rho} \right)^3 - \dots \quad (13)$$

Бачимо, що цей вираз задовольняє умові при $\rho = 0$; при $\rho \rightarrow \infty$ він обмежений і вже на основі лише трьох членів встановлюємо, що $\lim_{\rho \rightarrow \infty} u_1(\rho, 1) = 0,51$.

Отже, випадковим розміщенням параметра ε в рівнянні (5) вдалося зразу представити розв'язок у формі (13), на основі якого можна вже на основі лише трьох наближень проводити обчислення $\forall \rho \in [0, \infty)$.

Виявилось, що вираз (12) є не що інше, як перетворений степеневий ряд, згідно певного типу підсумовуючої функції.

Розглянемо другу елементарну задачу.

Необхідно знайти розв'язок $u(\rho, \varepsilon)$ в області $1 \leq \rho < \infty$ нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{du}{d\rho} = -\varepsilon \ln \rho (1 + \rho)^{m-1} u^2, \quad (14)$$

який повинен бути на “нескінченності” обмеженим, тобто

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon \geq 0, \quad (15)$$

а при $\rho = 1$ задовольняти граничній умові

$$u(\rho, \varepsilon)|_{\rho=1} = 1, \quad \forall \varepsilon \geq 0. \quad (16)$$

У вказаних співвідношеннях: $\varepsilon \geq 0$ – параметр, значення якого може бути як малим, так і великим; $m \in N$; всі параметри і величини безрозмірні!

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$u = u(\rho, \varepsilon) = \frac{1}{1 + \varepsilon \rho^m \ln \rho} \quad (17)$$

Вважаємо, що точний розв'язок “неможливо знайти” і застосовуємо для розв'язування задачі метод розкладу по параметру ε . В результаті одержуємо розв'язок (в трьох – чотирьох наближеннях):

$$u(\rho, \varepsilon) \approx 1 - \varepsilon \rho^m \ln \rho + \varepsilon^2 \rho^{2m} \ln^2 \rho - \varepsilon^3 \rho^{3m} \ln^3 \rho \quad (18)$$

Бачимо, що на основі цього наближення можна проводити обчислення лише при таких ε, ρ , які

задовольняють нерівності $|\varepsilon \rho^m \ln \rho| < 1$. Однак, апроксимація (18) не задовольняє умові (15).

Замість апроксимації (18) розглядаємо згідно запропонованого методу нову апроксимацію

$$u = u^*(\rho, \lambda, \sigma, \varepsilon) = S_4^* = 1 \cdot \delta_1(\rho, \lambda, \sigma) - \varepsilon \rho^m \ln \rho \cdot \delta_2(\rho, \lambda, \sigma) + \varepsilon^2 \rho^{2m} \ln^2 \rho \cdot \delta_3(\rho, \lambda, \sigma) - \varepsilon^3 \rho^{3m} \ln^3 \rho \cdot \delta_4(\rho, \lambda, \sigma) \quad (19)$$

де, нагадаємо, що

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\beta}{p} \left(1 + \frac{\sigma}{p} + \frac{\sigma^2}{p^2} + \frac{\sigma^3}{p^3} \right); \\ \delta_2 &= \frac{\beta^2}{p^2} \left(1 + 2 \frac{\sigma}{p} + 3 \frac{\sigma^2}{p^2} \right); \\ \delta_3 &= \frac{\beta^3}{p^3} \left(1 + 3 \frac{\sigma}{p} \right); \quad \delta_4 = \frac{\beta^4}{p^4}; \\ \beta &= 2\lambda; \quad p = 2\lambda + \sigma \end{aligned} \quad (20)$$

Задамо функцію σ , наприклад, такого виду: $\sigma = 2a \rho^m \ln \rho$, де $a > 0$ – довільний параметр.

Бачимо, що $u|_{\rho=1} = 1$ і $u \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ для довільних ε, a і m !

Покладемо $\sigma_0 = \sigma|_{\rho=\rho_0} = a \rho_0^m \ln \rho_0$, де $\rho_0 \in [1, \infty)$.

Тоді замість апроксимації (4.5.6) будемо остаточно розглядати наступну:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho, \rho_0, \lambda, \varepsilon) = u^*(\rho, \lambda, \varepsilon)|_{\sigma=\sigma_0} &= \delta_1(4, \rho, \lambda, \sigma_0) - \varepsilon \rho^m \ln \rho \cdot \delta_2(4, \rho, \lambda, \sigma_0) + \\ &+ \varepsilon^2 \rho^{2m} \ln^2 \rho \cdot \delta_3(4, \rho, \lambda, \sigma_0) - \\ &- \varepsilon^3 \rho^{3m} \ln^3 \rho \cdot \delta_4(4, \rho, \lambda, \sigma_0) \end{aligned} \quad (21)$$

Згідно запропонованого методу будемо вимагати, щоб

$$\varepsilon^3 f_m^3(\rho) \left[\frac{\zeta}{\zeta + f_m(\rho)} \right]^4 < \mu, \quad (22)$$

де $f_m(\rho) = \rho^m \ln \rho$, $\zeta = \frac{\lambda}{a}$, μ – достатньо мале, наперед задане число.

Зауважимо, що в цій нерівності $\rho \in [1, \rho^*]$, де ρ^* бажано встановлювати максимально великим з напівінтервалу $[1, \infty)$; при практичних дослідженнях доцільно ототожнювати $\rho^* = \rho_0$.

Наводимо конкретні обчислення. Покладемо $\mu = 0,002$, $\varepsilon = 1$, $m = 1$, $\rho^* = \rho_0 = 10$; тоді з нерівності (22) встановлюємо, що достатньо покласти $\zeta = 0.5$.

При вказаних вхідних значеннях параметрів обчислено значення функції (21) для $\rho \in [1, 10]$.

Значення відповідних сум, що обчислені на основі формул (21), позначено, відповідно, через S_3^* , S_4^* .

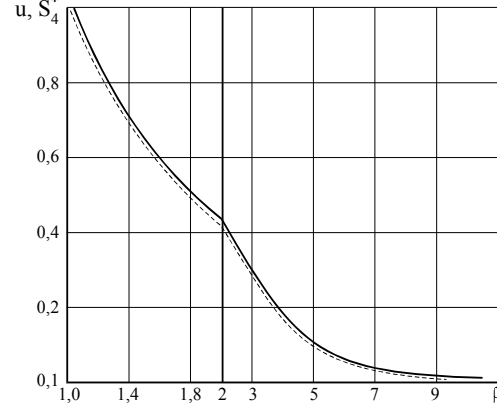


Рис1. Графічне зображення точного u і наближеного S_4^* розв'язків тестової задачі 1.

На рис. 1 побудовані графіки точного і наближених розв'язків; тут вертикальна (жирна) лінія розділяє графіки для $1 \leq \rho \leq 2$ і $1 \leq \rho \leq 10$, на яких вибрано різні масштаби. З рис 1 бачимо, що точний і наближений розв'язки майже співпадають (в межах графічної точності). Більш того, тут представлено результат такого дослідження – вплив вибраного навання порівняно “великого” значення $\rho_0 = 10$ на обчислення значень шуканого розв'язку в околі початкової точки $\rho = 1$. Як бачимо, цей вплив майже незначний в практичному сенсі. Зауважимо, що при розв'язуванні задачі вибиралися і інші значення ρ_0 ($\rho_0 = 20, 100$); виявилось, що результати обчислень відрізняються не істотно.

ВИСНОВКИ. Сформульовано, на основі проведених досліджень, метод розв'язування нелінійних задач. Задачі підбирались з таким розрахунком, щоб вони відображали характерні риси основного класу задач: наявність нелінійності, нескінченної області для шуканого розв'язку, затухання його на “нескінченності” тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. – Киев : Наукова думка, 1980.-С. 118, 144-151.
2. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Метод регуляризации сингулярных итераций в нелинейных задачах изгиба пластин с отверстием // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 83-90.

3. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Сингулярные итерации в нелинейных задачах концентрации напряжений // Теорет. и прикладная механика. – 2002.- Вып. 36. – С. 98-108.

Бейкер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П. Аппроксимация Паде. Пер. с англ., М., 1986. – 502 с.

APPLICATION OF SPECIAL METHODS OF SUMMATION BY THE SOLUTION OF NONLINEAR PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

L. Kryvoblotska

Kirovohrad National Technical University

pr. Universytetskyi, 8, Kirovohrad, 25006, Ukraine. E-mail: larisa.krivoblotsky@list.ru

In many problems of mathematical physics, by solving their various iterative methods (small parameter, Newton's method, simple iterations) are singular iteration that increases indefinitely at "infinity" or in the vicinity of singular points. The order of these iterations increases steadily with increasing number approximation. In this article was proposed and mathematically justified method of generalized summation of expansions in the parameter. Based on this method resolved a number of problems in the mechanics of deformable bodies. In the article offers some special regularization methods from singular iterations.

Key words: special methods, nonlinear problem, singular iterations, fictitious parameters.

REFERENCES

1. Kayouk Y. Some Questions of the Methods of Expansion in the Parameter. – Kyiv: Naukova Dumka, 1980.-PP. 118, 144-151. [in Russian]
2. Kayouk Y, Kryvoblotska L. The Method of Regularization of Singular Iterations in Nonlinear Problems of Bending of Plates with a Hole // Transactions of Donetsk University: Ser. A: Natural Sciences. - 2002. - # 1. - PP. 83-90. [in Russian]
3. Kayouk Y, Kryvoblotska L. Singular iterations in nonlinear problems of stress concentration // Theoretical. and Applied Mechanics. - 2002. - Vol. 36. - PP. 98-108.
4. George A. Baker, Jr., Peter Graves-Morris. Padé Approximants. - Addison-Wesley Publishing Co., 1981.