

Lubov Olijnichenko, Gennady Filimonikhin

Kirovograd national technical university

Computer model of process of an automatic dynamic balancing by two auto-balancer of impeller of axial fan

We study the process of dynamic balancing of the axial fan impeller by two ball auto-balancers whis using SolidWorks CAD software and its module Cosmos Motion.

For this were upgraded computer model of an axial fan with ball auto-balancer in the radome of fan by installing a second auto-balancer on a shaft of the engine. Thus with the help of CAD SolidWorks were created the parts of second auto-balancer and added to the assembly. With the module Cosmos Motion were set kinematic relations and interaction force between the parts of the new auto-balance.

Debugging and testing of a computer model was conducted of elementary problems whose solutions are known and the simulation results are easily interpreted. As a result the resulting model is the computer analog of the full-scale stand with the same characteristics. It is suitable for the virtual multi- factorial and full- factorial experiments to select the optimal parameter values of fan and auto-balancers.

With using of the created model were investigated the effect of gravity and the parameters of an imbalance in the auto-balancing process.

auto-balancer, axial fan, dynamic imbalance, auto-balancing, computer modeling

Одержано 31.10.13

УДК 534.1

В.П. Ольшанский, проф., д-р физ.-мат. наук, С.В. Ольшанский, кан. физ.-мат. наук

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко

ВБК-метод в расчётах колебаний механизмов с переменной массой звеньев

Показано, что при определённых ограничениях ВБК-метод позволяет с высокой точностью провести расчёт в элементарных функциях затухающих колебаний системы с одной степенью свободы, когда точное решение задачи динамики выражается через функции Бесселя нецелого индекса.

колебания, осцилятор переменной массы, ВБК-метод, функции Бесселя

В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський

Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка

ВБК-метод в розрахунках коливань механізмів зі змінною масою ланок

Показано, що за певних обмежень ВБК – метод дозволяє з високою точністю провести розрахунок в елементарних функціях затухаючих коливань системи с одним ступенем свободи, коли точний розв'язок задачі динаміки виражається через функції Бесселя нецілого індексу.

коливання, осцилятор змінної маси, ВБК-метод, функції Бесселя

Введение. В земледелии используют сельскохозяйственные машины и механизмы с переменной массой или упругостью звеньев. Исследование динамических свойств таких элементов конструкций относится к актуальным научно-прикладным задачам. Это, в своё время подчёркивал основоположник земледельческой механики академик В.П. Горячкин. Вот, что писал по этому поводу его лучший ученик академик

И.И. Артоболевский в предисловии к монографии [1]. “Вопрос о динамическом исследовании механизмов с учётом переменности масс звеньев и обрабатываемого продукта в общей постановке возникал ещё в 20-х годах прошлого столетия, когда выдающийся русский учёный академик В.П. Горячкин, развивая вопросы теории сельскохозяйственных машин, рассматривал взаимодействие исполнительного органа – орудия и обрабатываемого объекта – среды. Уже тогда В.П. Горячкин формулировал механику рабочих сред, как механику тел и сред переменной массы”. Но В.П. Горячкин не успел разработать математический аппарат для решения задач в теории механических систем с переменной массой. Позже эту проблему в значительной мере решили учёные, работавшие в области ракетодинамики и машиноведения. Но некоторые вопросы динамики механизмов с переменной массой ещё ждут своего решения. Оно становится возможным благодаря развитию эффективных аналитических и численных (компьютерных) методов.

При исследовании динамики механизмов с переменной массой звеньев приходится решать дифференциальные уравнения с монотонно переменными коэффициентами [1]. Решения таких уравнений, в отдельных случаях, удаётся выразить в функциях Бесселя вещественного индекса и аргумента [2,3,4,5]. Чтобы получить приближённые решения в элементарных функциях в монографии [1] уравнение движения с переменными коэффициентами на малых промежутках времени заменяют уравнениями с постоянными коэффициентами и применяют полученные решения. Физически это означает замену непрерывного изменения массы или жёсткости звеньев на кусочно-постоянное изменение, со скачками значений параметров на краях промежутков разбиения. Но в отдельных случаях, более просто, приближённый расчёт колебаний системы переменных параметров можно провести в элементарных функциях с помощью ВБК-метода. Этот метод приводит к компактным решениям при наличии в уравнении колебаний большого параметра. Обычно такой безразмерный большой параметр есть в уравнениях движения при медленном изменении массы или жёсткости за один период колебаний.

Основные зависимости метода ВБК [6]. Метод позволяет построить приближённые фундаментальные решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ дифференциального уравнения с переменными коэффициентами:

$$\ddot{y} - [\rho^2 f(t) + \varphi(t)]y = 0, \quad (1)$$

в котором ρ – безразмерный большой параметр; точкой обозначены производные по времени t . Фундаментальные решения выражаются интегралами:

$$y_j(t) = \exp\left(\int v_j(t) dt\right), \quad j = \overline{1;2}, \quad (2)$$

где

$$v_{1,2} = \pm \rho u_0 + u_1 \pm \frac{1}{\rho} u_2 + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right); \quad u_0 = \sqrt{f(t)}; \quad (3)$$

$$u_1 = -\frac{\dot{u}_0}{2u_0}; \quad u_2 = \frac{\varphi(t) - \dot{u}_1 - u_1^2}{2u_0}.$$

Предполагаем, что в рассматриваемой области изменения t функция $f(t) \neq 0$.

Моделирование затухающих колебаний осциллятора линейно-переменной массы. Движение осциллятора описываем уравнением:

$$m_0(1 + \gamma t)\ddot{x} + (m_0\gamma\epsilon + \mu)\dot{x} + cx = m_0\gamma gt. \quad (4)$$

Здесь m_0 – начальная масса осциллятора; $m_0\gamma$ – скорость изменения массы во времени; $0 \leq \varepsilon \leq 1$ – коэффициент, определяющий какая часть массы идёт на создание реактивной силы; μ – коэффициент вязкого линейного сопротивления среды; c – коэффициент жёсткости пружины; g – ускорение свободного падения; $x = x(t)$ – вертикальное перемещение осциллятора по оси ox , направленной вниз; отсчёт перемещения ведём от положения статического равновесия системы под действием начального веса m_0g .

Уравнение (4) решаем при начальных условиях:

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (5)$$

Заметим, что эта задача Коши, при $g = 0$, решена в [2] с помощью функций Бесселя нецелого индекса.

Введением новой переменной $\xi = 1 + \gamma t$ уравнение (4) и начальные условия (5) преобразуем к виду:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{\xi} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\omega_0^2 x}{\gamma^2 \xi} = \frac{g}{\gamma^2} \frac{\xi - 1}{\xi}; \quad (6)$$

$$x|_{\xi=1} = x_0; \quad \dot{x}|_{\xi=1} = \dot{x}_0. \quad (7)$$

$$\text{Здесь } \lambda = \frac{m_0\gamma\varepsilon + \mu}{m_0\gamma}; \quad \omega_0 = \sqrt{c/m_0}.$$

Решение уравнения (6) представляем суммой

$$x(\xi) = z(\xi) + \frac{gm_0}{c} \left(\xi - 1 - \frac{\lambda m_0 \gamma^2}{c} \right). \quad (8)$$

Для определения функции $z(\xi)$ получаем однородное уравнение

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{\xi} \frac{dz}{d\xi} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \frac{z}{\xi} = 0. \quad (9)$$

Полагая в (9)

$$z = y \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{\lambda}{\xi} d\xi\right) = y \xi^{-\lambda/2},$$

приходим к уравнению (1), в котором:

$$\rho = \frac{\omega_0}{|\gamma|}; \quad f(t) = -\frac{1}{\xi}; \quad \varphi(t) = \frac{\lambda}{2\xi^2} \left(\frac{\lambda}{2} - 1 \right).$$

Тогда, согласно (2) и (3):

$$u_0 = \frac{i}{\sqrt{\xi}}; \quad u_1 = \frac{1}{4\xi}; \quad u_2 = \frac{i}{4\xi^{3/2}} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{8} \right), \quad i = \sqrt{-1};$$

$$v_{1,2} = \frac{1}{4\xi} \pm i \left[\frac{\rho}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{4\rho\xi^{3/2}} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{8} \right) \right];$$

$$y_{1,2} = \xi^{1/4} \exp \left[\pm i \left(2\rho\sqrt{\xi} - \frac{1}{2\rho\sqrt{\xi}} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{8} \right) \right) \right].$$

В результате фундаментальные решения уравнения (9), в рассмотренном приближении, принимают вид:

$$z_1 = \eta^\beta \cos \left(\eta - \frac{1}{\eta} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{8} \right) \right); \quad z_2 = \eta^\beta \sin \left(\eta - \frac{1}{\eta} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3}{8} \right) \right). \quad (10)$$

$$\text{Здесь } \beta = \frac{1}{2} - \lambda; \eta = 2\rho\sqrt{\xi} = \frac{2\omega_0}{|\gamma|}\sqrt{\xi}.$$

Упростим (10) для случаев, когда $\rho \gg 1$. Отбрасывая слагаемые высшего порядка малости, получаем:

$$z_1 = \eta^\beta \cos(\eta - \eta_0); z_2 = \eta^\beta \sin(\eta - \eta_0); \eta_0 = \frac{2\omega_0}{|\gamma|}. \quad (11)$$

Разности $\eta - \eta_0$ в аргументы тригонометрических функций ввели вместо η для удобства определения произвольных постоянных в общем решении, поскольку теперь при $\eta = \eta_0$: $z_1 = \eta_0^\beta$, $z_2 = 0$.

Учитывая (8) и (11), записываем приближённое общее решение уравнения (6) в элементарных функциях:

$$x(\eta) = \eta^\beta \left[c_1 \cos(\eta - \eta_0) + c_2 \sin(\eta - \eta_0) \right] + \frac{gm_0}{c} \left(\frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 - \frac{\lambda m_0 \gamma^2}{c} \right). \quad (12)$$

Постоянные c_1 и c_2 определяем из начальных условий (7). Находим, что

$$c_1 = \frac{1}{\eta_0^\beta} \left[x_0 + \lambda g \left(\frac{m_0 \gamma}{c} \right)^2 \right]; c_2 = \frac{2}{\eta_0^{\beta+1}} \left[\frac{\dot{x}_0}{\gamma} - \frac{m_0 g}{c} \right] - \frac{\beta c_1}{\eta_0}; \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) позволяют вычислить перемещения осциллятора для любого времени t . Амплитуды колебаний пропорциональны множителю

$$\eta^\beta = \left[\frac{2\omega_0}{|\gamma|} \sqrt{1 + \gamma t} \right]^\beta. \quad (14)$$

Выясним, как влияет на изменение амплитуды колебаний реактивная сила без учёта вязкого сопротивления, когда $\mu = 0$, $\beta = \frac{1}{2} - \varepsilon$. В случае отсутствия реактивной силы: $\varepsilon = 0$, $\beta = 1/2$. Из (14) следует, что в этом случае возрастание массы сопровождается увеличением амплитуд колебаний, а убывание массы – их уменьшением. При учёте реактивной силы, когда $\varepsilon = 1$, $\beta = -1/2$ происходит обратное, т.е. увеличение массы сопровождается убыванием амплитуд колебаний, а уменьшение массы – их возрастанием. Выводы аналогичного характера также получены в [1] и [7], в результате анализа нестационарных колебаний асимптотическим методом Ю.А. Митропольского. Отдельного внимания заслуживает случай, когда коэффициент реактивности $\varepsilon = 1/2$. Для него $\beta = 0$ и колебания происходят с постоянной амплитудой. В среде с вязким сопротивлением такие колебания имеют место, когда

$$\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{m_0 \gamma}.$$

Таким образом, изменение амплитуд колебаний во времени зависит от соотношения между реактивной силой и силой вязкого сопротивления среды.

Результаты расчётов и их анализ. С целью проверки точности приближённых решений (12), (13) сопоставим результаты, полученные по указанным формулам и численным интегрированием дифференциального уравнения (4) при начальных условиях (5). Для проведения расчётов принимаем $m_0 = 100$ кг; $c = 4 \cdot 10^4$ Н/м; $\varepsilon = 0,5$; $x_0 = 0,005$ м; $\dot{x}_0 = 0,005$ м/с; $\gamma = -0,1$ с⁻¹ и $\mu = 100$ кг/с.

В таблице представлено результаты численного интегрирования уравнения (4) (числители) и результаты, полученные при помощи приближённой формулы (12) (знаменатели).

Таблица – Сравнение результатов численного и аналитического решений

$t, \text{с}$	0,25	0,50	1,00	1,50	2,0	2,5	3,0
$x, \text{м}$	$\frac{0,0003}{0,0007}$	$\frac{-0,0044}{-0,0041}$	$\frac{-0,0024}{-0,0024}$	$\frac{-0,0016}{-0,0014}$	$\frac{-0,0053}{-0,0051}$	$\frac{-0,0073}{-0,0071}$	$\frac{-0,0080}{-0,0078}$

Результаты из таблицы соответствуют о высокой точности приближённого решения.

Рассмотрим, как влияет величина коэффициента изменения массы γ на перемещения осциллятора. На рис. 1 нанесены зависимости перемещения x от времени t при $\gamma = -0,1; -0,2; -0,3 \text{ с}^{-1}$, что соответствует цифрам 1,2,3. С возрастанием скорости убывания массы, смещения центра масс осциллятора вверх увеличиваются.

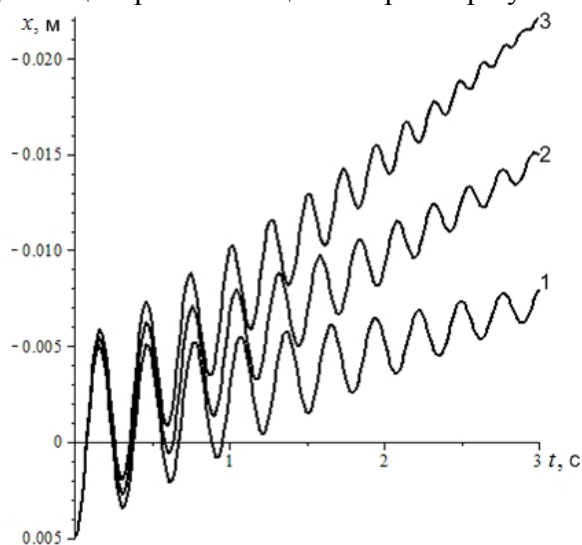


Рисунок 1 – Зависимость перемещения x от времени t при $\gamma < 0$

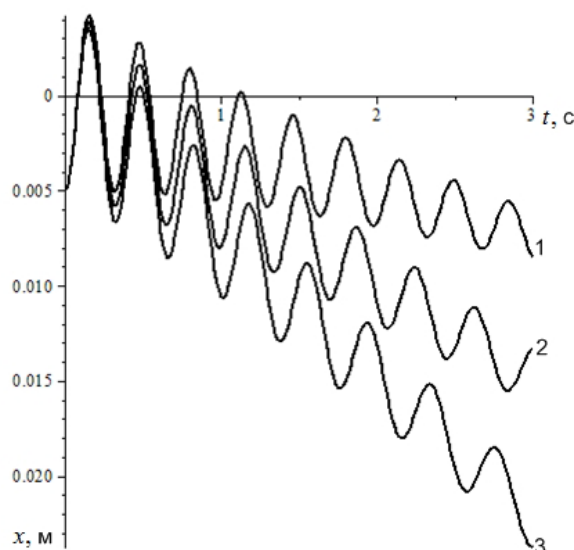


Рисунок 2 – Зависимость перемещения x от времени t при $\gamma > 0$

На рис. 2 нанесены графики перемещения x во времени t при $\gamma = 0,1; 0,2; 0,3 \text{ c}^{-1}$, что соответствует цифрам 1,2,3. Поскольку в расчётах $\mu = \text{const}$, то при $\gamma > 0$ колебания затухают более медленно.

Выводы. Проведенный анализ приводит к следующим выводам:

1. ВБК-метод с хорошей точностью описывает затухающие колебания осциллятора без привлечения к расчёту функций Бесселя;
2. Вследствие изменения веса осциллятора вертикальные колебания приходится отсчитывать от подвижного уровня.
3. При постоянном коэффициенте вязкого сопротивления колебания в осциляторе убывающей массы затухают более быстро, чем в осциляторе возрастающей массы.

Список литературы

1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. / А.П. Бессонов – М.: Наука, 1967. – 280с.
2. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable mass / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd. – 1998. – 300р.
3. Светлицкий В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с.
4. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси. / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукр. наук. техн. журнал. – Вінниця. – Вип. 2 (70), 2013. – С. 57-59.
5. Ольшанський В.П. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вісник НТУ “ХПІ”: Математичне моделювання в техніці та технологіях, – 2013, № 37 (1010). – С. 125-130.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке – М.: Наука, 1976. – 576 с.
7. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с.

Vasily Olshanskii, S. Olshanskii

Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture

WBK-method in the calculation of vibration machines with variable mass units

The purpose of this paper is the construction of solutions of linear oscillator with variable mass by WBK, as well as the analysis of the results to which it leads.

It is shown that under certain restrictions WBK-method with high accuracy in a calculation of the elementary functions of damped oscillations of a system with one degree of freedom, when the exact solution of the problem of the dynamics is expressed in terms of Bessel functions of non-integer index.

WBK - method with good accuracy the damped oscillations of the oscillator without involving the calculation of Bessel functions. Due to changes in the weight of the oscillator, the vertical oscillations have to be measured from the level of rolling stock. At a constant ratio of viscous resistance, the fluctuations in the oscillator decreasing weight decay more quickly than in the growing mass of the oscillator.

oscillations, oscillator with variable mass, WBK-method, Bessel functions

Получено 16.09.13