УДК 681.513.5

О.П. Лобок, канд. фіз.-мат. наук, Б.М. Гончаренко, д-р техн. наук
Національний університет харчових технологій
Л.Г. Віхрова, проф., канд. техн. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Синтез оптимальних матричних регуляторів з мінімальною чутливістю до зовнішніх збурень

В даній роботі розглядається задача побудови оптимального матричного ПІД-регулятора відносно спостережуваних параметрів об'єкта керування, що функціонує в умовах невизначеності. Оптимальний регулятор знаходиться з умови мінімізації інтегрального квадратичного критерію якості при забезпеченні мінімальної чутливості керування і стану системи щодо зовнішніх збурень.
оптимальне мінімаксне керування, матричні регулятори, чутливість керування і стану, нерівність Релея, фундаментальна матриця розв'язків, інтегрально-квадратичний критерій, еліпсоїд зовнішніх збурень

Проблеми побудови оптимальних регуляторів для скінченновимірних лінійних динамічних систем з інтегрально-квадратичним критерієм якості при детермінованих та стохастичних збуреннях вивчались зокрема в роботах [1-3]. Для об'єктів, що функціонують в умовах невизначеності, одним з перспективних підходів до побудови оптимального керування є мінімаксний [4]. В даній роботі пропонується подальший розвиток теорії мінімаксного керування, а саме, розглядається задача знаходження оптимального матричного ПІД регулятора, який за найнесприятливіших зовнішніх збурень забезпечує мінімум квадратичного критерію якості при мінімальній чутливості регулятора та стану системи керування до невідомих зовнішніх збурень.

Розглянемо об'єкт, який описується лінійною динамічною системою рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lf, & t_0 < t \le T, \\ x(t_0) = Mx^0, \end{cases} \tag{1}$$

де $x(t) = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – n - вимірний вектор стану;

$u(t) = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$ – m - вимірний вектор керування;

$f = (f_1, f_2, ..., f_l)^T$ – l - вимірний вектор зовнішніх збурень об'єкта, що діють на протязі всього періоду керування $[t_0, T]$ об'єктом;

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_r^0)^T$ – r - вимірний вектор збурень, що діють на об'єкт в початковий момент часу t_0;

A, B, L, M – відомі (задані) матриці розмірностей відповідно $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$, $n \times r$, "T" – операція транспонування.

Збурення x^0, f – невідомі (f не залежить від часової змінної t), але вони належать до області, що являє собою еліпсоїд в $l + r$ вимірному просторі

$$\Omega_{x^0,f} = \left\{ (x^0, f) : \ (x^0)^T W_0 x^0 + f^T W_f f \le 1 \right\}, \tag{2}$$

де $W_0 = W_0^T > 0$, $W_f = W_f^T > 0$ – відомі симетричні додатно визначені вагові матриці розмірностей $r \times r$ та $l \times l$ відповідно.

Нехай спостереження за параметрами вектора стану $x(t)$ або його виміри описуються рівнянням

$$y(t) = Cx(t), \tag{3}$$

де $y(t) = (y_1, y_2, ..., y_p)^T$ – p- вимірний вектор результатів спостереження, C – відома матриця спостереження розмірності $p \times n$.

Задамо клас матричних ПІД-регуляторів, серед яких будемо шукати оптимальне керування $u(t)$

$$u(t) = R(t)y(t) + P(t)\int_{t_0}^{t} Q(\tau)y(\tau)d\tau + H(t)\dot{y}(t), \tag{4}$$

де $y(t)$ – вектор результатів вимірів (3);

$R(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $H(t)$ – невідомі шукані матриці відповідних розмірностей $m \times p$, $m \times q$, $q \times p$, $m \times p$.

Розглянемо інтегрально-квадратичний критерій оптимальності (критерій якості функціонування об'єкта)

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} \left(x^T(t)D_x x(t) + u^T(t)D_u u(t) \right) dt + x^T(T)D_T x(T), \tag{5}$$

де $D_x = D_x^T \geq 0$, $D_u = D_u^T > 0$, $D_T = D_T^T \geq 0$ – відомі матриці розмірностей $n \times n$, $m \times m$, $n \times n$.

Задача полягає в тому, щоб знайти оптимальне керування $u(t)$ в класі матричних ПІД-регуляторів (4), яке за найнесприятливіших зовнішніх збуреннях $(x^0, f) \in \Omega_{x^0, f}$, що можуть діяти на об'єкт, мінімізує критерій (5) і при цьому забезпечує мінімальну чутливість параметрів вектора стану $x(t)$ і вектора керування $u(t)$ до цих збурень (x^0, f).

Для того, щоб регулятор (4) враховував чутливість векторів $x(t)$ і $u(t)$ до зовнішніх збурень $(x^0, f) \in \Omega_{x^0, f}$ формалізуємо поняття чутливості. Під чутливістю елемента $x_i(t)$ вектора $x(t)$ до деякого параметра α будемо розуміти похідну $\dfrac{\partial x_i(t)}{\partial \alpha}$. Тоді чутливість вектора стану $x(t)$ відносно зовнішніх збурень x^0 і f буде визначатись матрицями

$$\Theta_{x^0}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial x^0} = \left\{ \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j^0} \right\}_{i=1, j=1}^{n,r}, \quad \Theta_f(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial f} = \left\{ \frac{\partial x_i(t)}{\partial f_j} \right\}_{i=1, j=1}^{n,l}, \tag{6}$$

де $(\Theta_{x^0})_{ij} = \dfrac{\partial x_i(t)}{\partial x_j^0}$ $\left((\Theta_f)_{ij} = \dfrac{\partial x_i(t)}{\partial f_j} \right)$ визначає чутливість координати $x_i(t)$ до зміни j-ї координати x_j^0 (f_j) вектора збурень x^0 (f).

Для того, щоб точніше описати вплив, наприклад, вектора зовнішніх збурень f на вектор стану $x(t)$ (чутливість) розглянемо наступну функцію чутливості

$$\varphi_f(t) = tr\left[\Theta_f(t) S_f \Theta_f^T(t) C_f \right], \tag{7}$$

де $tr[\bullet]$ – слід матриці, тобто сума її діагональних елементів, $S_f = diag(s_1, s_2, ..., s_l)$;

$C_f = diag(c_1, c_2, ..., c_n)$ – задані діагональні вагові матриці з невід'ємними елементами.

Неважко переконатись, що

$$\varphi_f(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} c_i s_j \left(\Theta_f(t) \right)_{ij}^2, \tag{8}$$

і, отже, функціонал

$$J_f = \int_{t_0}^{T} \varphi_f(t) dt = \int_{t_0}^{T} tr\left[\Theta_f(t) S_f \Theta_f^T(t) C_f \right] dt \tag{9}$$

описує узагальнену чутливість вектора стану $x(t)$ до зовнішніх збурень f на протязі всього періоду керування.

Очевидно, що за рахунок вибору вагових множників c_i і s_j можна одержати такі часткові функції чутливості:

- якщо $c_k = 1$, $c_i = 0$, $i = 1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n$, то функція $\rho_k(t) = \sum_{j=1}^{l} s_j \left(\Theta_f(t) \right)_{kj}^2$, одержана з (8), описує чутливість координати $x_k(t)$ до всіх координат вектора збурень f;
- якщо $s_k = 1$, $s_i = 0$, $i = 1, 2, ..., k-1, k+1, ..., l$, то функція $\sigma_k(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\Theta_f(t) \right)_{ik}^2$, одержана з (8), описує залежність чутливості одразу всіх координат вектора стану $x(t)$ відносно зміни значень координати f_k вектора збурень f;
- нарешті, якщо $c_k = 1$, $c_i = 0$, $i = 1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n$, $s_m = 1$, $s_i = 0$, $i = 1, 2, ..., m-1, m+1, ..., l$, то функція $\mu_{km}(t) = \left(\left(\Theta_f(t) \right)_{km} \right)^2$ очевидно, описує чутливість координати $x_k(t)$ до збурювальної координати f_m.

Аналогічно до (9) введемо в розгляд функціонал

$$J_{x^0} = \int_{t_0}^{T} \varphi_{x^0}(t) dt = \int_{t_0}^{T} tr\left[\Theta_{x^0}(t) S_0 \Theta_{x^0}^T(t) C_0 \right] dt, \tag{10}$$

який описує узагальнену чутливість вектора стану $x(t)$ до зовнішніх збурень x^0 в початковий момент часу t_0. В виразі (10) позначено $S_0 = diag(s_1^0, s_2^0, ..., s_r^0)$, $C_0 = diag(c_1^0, c_2^0, ..., c_n^0)$, $s_i^0 \ge 0$, $c_i^0 \ge 0$ – задані вагові множники, а матриця $\Theta_{x^0}(t)$ визначається співвідношенням (6).

На основі (9) і (10) введемо загальний функціонал чутливості вектора стану x вигляду

$$J^x = J_{x^0}^x + J_f^x = \int_{t_0}^{T} \left(tr\left[\Theta_{x^0}(t) S_0 \Theta_{x^0}^T(t) C_0 \right] + tr\left[\Theta_f(t) S_f \Theta_f^T(t) C_f \right] \right) dt. \tag{11}$$

Подібним чином введемо функціонал чутливості вектора керування u вигляду

$$J^u = J_{x^0}^u + J_f^u = \int_{t_0}^{T} \left(tr\left[\Psi_{x^0}(t) G_0 \Psi_{x^0}^T(t) H_0 \right] + tr\left[\Psi_f(t) G_f \Psi_f^T(t) H_f \right] \right) dt, \tag{12}$$

де

$$\Psi_{x^0}(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial x^0} = \left\{ \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j^0} \right\}_{i=1, j=1}^{m, r}, \quad \Psi_f(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial f} = \left\{ \frac{\partial u_i(t)}{\partial f_j} \right\}_{i=1, j=1}^{m, l}, \tag{13}$$

$G_0 = diag(g_1^0, g_2^0, ..., g_r^0)$, $H_0 = diag(h_1^0, h_2^0, ..., h_m^0)$, $G_f = diag(g_1^f, g_2^f, ..., g_l^f)$, $H_f = diag(h_1^f, h_2^f, ..., h_m^f)$, $g_i^0 \ge 0$, $h_i^0 \ge 0$, $g_i^f \ge 0$, $h_i^f \ge 0$ – задані діагональні вагові матриці з невід'ємними діагональними елементами.

Таким чином, маємо три функціонали – (5), (11) і (12), які об'єднаємо (згорнемо) в один, в результаті чого, одержимо критерій

$$\Phi(R,P,Q,H,f,x^0) = I(u) + J, \quad J = J^x + J^u, \tag{14}$$

в якому підкреслена залежність критерію $\Phi(R,P,Q,H,f,x^0)$ від матриць зворотного зв'язку R,P,Q,H регулятора (4) і від зовнішніх збурень x^0, f.

Для того, щоб регулятор враховував найнесприятливіші зовнішні збурення $(x^0, f) \in \Omega_{x^0,f}$, що можуть діяти на об'єкт, розглянемо мінімаксний критерій

$$\Im(R,P,Q,H) = \max_{(x^0,f)\in\Omega_{x^0,f}} \Phi(R,P,Q,H,f,x^0).$$

З врахуванням співвідношень (4) і (14), цей критерій запишемо так

$$\Im(R,P,Q,H) = \max_{(x^0,f)\in\Omega_{x^0,f}} \left\{ \int_{t_0}^{T} \left(x^T(t) D_x x(t) + u^T(t) D_u u(t) \right) dt + x^T(T) D_T x(T) + J \right\}, \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned} J = \int_{t_0}^{T} tr\Big[& \Theta_{x^0}(t) S_0 \Theta_{x^0}^T(t) C_0 + \Theta_f(t) S_f \Theta_f^T(t) C_f + \Psi_{x^0}(t) G_0 \Psi_{x^0}^T(t) H_0 + \\ & + \Psi_f(t) G_f \Psi_f^T(t) H_f \Big] dt. \end{aligned}, \tag{16}$$

Тоді остаточна формалізована постановка задачі синтезу оптимального матричного регулятора буде такою. Треба знайти матриці R,P,Q,H, що визначають структуру матричного ПІД регулятора (4), які мінімізують критерій (15).

Для розв'язання цієї задачі зробимо заміну змінних

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} Q(\tau) y(\tau) d\tau.$$

Тоді керування (4) можна записати так

$$u(t) = R(t)Cx(t) + P(t)z(t) + H(t)C\dot{x}(t), \tag{17}$$

причому $z(t)$ задовольняє рівняння

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Q(t)Cx(t), \\ z(t_0) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Використовуючи (17), з рівняння (1) знайдемо

$$\dot{x}(t) = (E_n - BHC)^{-1}(A + BRC)x(t) + (E_n - BHC)^{-1} BPz, \tag{19}$$

де E_n – одинична матриця розмірності $n \times n$.

Підставляючи (19) в (17), одержимо

$$u(t) = \left(RC + HC(E_n - BHC)^{-1}(A + BRC) \right) x(t) + \left(P + HC(E_n - BHC)^{-1} BP \right) z(t). \tag{20}$$

Тоді рівняння (1) з врахуванням (20) можна записати так

$$\dot{x}(t) = (E_n + BHC(E_n - BHC)^{-1})(A + BRC)x(t) + (E_n + BHC(E_n - BHC)^{-1})BPz(t) + Lf \tag{21}$$

Об'єднуючи рівняння (18) і (21) в систему, одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} = A_w w(t) + L_w f, \\ w(t_0) = M_w x^0, \end{cases} \tag{22}$$

де

$$w(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ - \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad L_w=\begin{pmatrix} L \\ - \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M_w=\begin{pmatrix} M \\ - \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_w=\begin{pmatrix} (E_n+BHC(E_n-BHC)^{-1})(A+BRC) & | & (E_n+BHC(E_n-BHC)^{-1})BP \\ ------------------ & + & -------------- \\ QC & | & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

Розв'язок останньої системи можна представити у вигляді

$$w(t)=G(t,t_0)M_w x^0+\int_{t_0}^{t} G(t,\tau)L_w d\tau f ,$$

де $G(t,\tau)$ – фундаментальна матриця, що задовольняє рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}=A_w G(t,\tau), \\ G(\tau,\tau)=E_{n+q}. \end{cases}$$

Нехай всі матриці, з яких складається матриця A_w не залежить від часу t. Тоді $G(t,\tau)$ можна представити у вигляді $G(t,\tau)=e^{A_w(t-\tau)}$ і отже, $w(t)$ після інтегрування фундаментальної матриці, прийме вигляд

$$w(t)=e^{A_w(t-t_0)}M_w x^0+A_w^{-1}(e^{A_w(t-t_0)}-E_{n+q})L_w f ., \tag{24}$$

Для подальших перетворень введемо позначення

$$\xi=\begin{pmatrix} x^0 \\ - \\ f \end{pmatrix},\ V_x=\begin{pmatrix} D_x & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix},\ V_T=\begin{pmatrix} D_T & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix},\ W=\begin{pmatrix} W_0 & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & W_f \end{pmatrix},$$

$$F=\left(RC+HC(E_n-BHC)^{-1}(A+BRC) \quad | \quad P+HC(E_n-BHC)^{-1}BP\right),$$

$$Z(t)=\left(e^{A_w(t-t_0)}M_w \quad | \quad A_w^{-1}(e^{A_w(t-t_0)}-E_{n+q})L_w\right).$$

Тоді співвідношення (24) і (20) можна перетворити таким чином

$$w(t)=Z(t)\xi, \quad u(t)=Fw(t)=FZ(t)\xi , \tag{25}$$

а область допустимих зовнішніх збурень набуде вигляду

$$\Omega_{x^0,f}\equiv\Omega_\xi=\left\{\xi:\ \xi^T W\xi\le 1\right\}.$$

Приймаючи до уваги вирази (25), можна одержати наступне

$$x^T(t)D_x x(t)+u^T(t)D_u u(t)=\xi^T Z^T(t)\left(V_x+F^T D_u F\right)Z(t)\xi ,$$

$$x^T(T)D_T x(T)=\xi^T Z^T(T)V_T Z(T)\xi .$$

Тоді інтегрально-квадратичний критерій $I(u)$ набуває вигляду

$$I(u)=\int_{t_0}^{T}\left(x^T(t)D_x x(t)+u^T(t)D_u u(t)\right)dt+x^T(T)D_T x(T)=\xi^T K\xi , \tag{26}$$

де

$$K=\int_{t_0}^{T} Z^T(t)\left(V_x+F^T D_u F\right)Z(t)dt+Z^T(T)V_T Z(T). \tag{27}$$

Тепер можна знайти аналітичні вирази для матриць чутливості вектора стану $\Theta_{x^0}(t)=\dfrac{\partial x(t)}{\partial x^0}$ і $\Theta_f(t)=\dfrac{\partial x(t)}{\partial f}$. З першого співвідношення (25) одержимо

$$x(t) = Nw(t) = Ne^{A_w(t-t_0)}M_w x^0 + NA_w^{-1}(e^{A_w(t-t_0)} - E_{n+q})L_w f\,,$$

де $N = \begin{pmatrix} E_n & | & 0 \end{pmatrix}$ і отже

$$\Theta_{x^0}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial x^0} = Ne^{A_w(t-t_0)}M_w,\ \Theta_f(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial f} = NA_w^{-1}(e^{A_w(t-t_0)} - E_{n+q})L_w\,. \qquad (28)$$

Матриці чутливості вектора керування $\Psi_{x^0}(t) = \dfrac{\partial u(t)}{\partial x^0}$ і $\Psi_f(t) = \dfrac{\partial u(t)}{\partial f}$ знайдемо з другої рівності (25)

$$\Psi_{x^0}(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial x^0} = Fe^{A_w(t-t_0)}M_w, \quad \Psi_f(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial f} = FA_w^{-1}(e^{A_w(t-t_0)} - E_{n+q})L_w\,, \qquad (29)$$

Очевидно, що матриці чутливості (28), (29), а отже і функціонал чутливості J (16), не залежать від збурень x_0, f. Тоді, враховуючи співвідношення (26), і використовуючи наступну формулу

$$\max_{\xi \in \left\{\xi:\ \xi^T W \xi \le 1\right\}} \xi^T K \xi = \lambda_{\max}(W^{-1}K)\,,$$

яка випливає з нерівності Релея [5], де $\lambda_{\max}(W^{-1}K)$ – максимальне власне значення матриці $W^{-1}K$, критерій (15) можна перетворити таким чином

$$\Im(R,P,Q,H) = \max_{(x^0,f) \in \Omega_{x^0,f}} \Phi(R,P,Q,H,f,x^0) = \max_{\xi \in \left\{\xi:\ \xi^T W \xi \le 1\right\}} \left\{\xi^T K \xi + J\right\} =$$

$$= \max_{\xi \in \left\{\xi:\ \xi^T W \xi \le 1\right\}} \left\{\xi^T K \xi\right\} + J = \lambda_{\max}(W^{-1}K) + J,$$

або з врахуванням (16) звести до виразу, що формалізує функцію мети керування

$$\Im(R,P,Q,H) = \lambda_{\max}(W^{-1}K) + \int_{t_0}^{T} tr\Big[\Theta_{x^0}(t) S_0 \Theta_{x^0}^T(t) C_0 + \Theta_f(t) S_f \Theta_f^T(t) C_f +$$
$$+ \Psi_{x^0}(t) G_0 \Psi_{x^0}^T(t) H_0 + \Psi_f(t) G_f \Psi_f^T(t) H_f\Big]dt, \qquad (30)$$

де матриці K, $\Theta_{x^0}(t)$, $\Theta_f(t)$, $\Psi_{x^0}(t)$, $\Psi_f(t)$ визначаються співвідношеннями (27), (28) і (29), а інші матриці є ваговими.

Таким чином, для визначення оптимального матричного ПІД-регулятора, який забезпечує мінімальну чутливість векторів стану і керування до зовнішніх збурень, необхідно знайти мінімальне значення функції мети (30) по матрицях R,P,Q,H, тобто розв'язати багатовимірну задачу нелінійного програмування.

Якщо замість матричного ПІД-регулятора (4) використати матричний пропорційний П-регулятор виду

$$u(t) = Ry(t)\,, \qquad (31)$$

тоді критерій (15) в цьому випадку теж набуває вигляду (30), де матриці K, $\Theta_{x^0}(t)$, $\Theta_f(t)$, $\Psi_{x^0}(t)$, $\Psi_f(t)$ тепер визначаються такими співвідношеннями

$$K = \int_{t_0}^{T} Z^T(t)\left(D_x + C^T R^T D_u RC\right)Z(t)dt + Z^T(T) D_T Z(T)\,,$$
$$\Theta_{x^0}(t) = e^{A_R(t-t_0)}M\,, \quad \Theta_f(t) = A_R^{-1}(e^{A_R(t-t_0)} - E_n)L\,, \qquad (32)$$
$$\Psi_{x^0}(t) = RCe^{A_R(t-t_0)}M\,, \quad \Psi_f(t) = RCA_R^{-1}(e^{A_R(t-t_0)} - E_n)L\,,$$

де $Z(t) = \left(e^{A_R(t-t_0)}M \quad | \quad A_R^{-1}(e^{A_R(t-t_0)} - E_n)L\right)$, $A_R = A + BRC$.

Для модельного об’єкта нижче наводяться результати числових розрахунків. Обчислювальні експерименти проводились з використанням математичного пакету MatLab при наступних початкових даних:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ W_0 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix},\ W_f = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матриці $L, M, C, D_x, D_u, D_T, S_0, C_0, S_f, C_f$ покладались одиничними, тобто дорівнювали $diag(1,1)$, а матриці G_0, H_0, G_f, H_f задавались нульовими, тобто критерій якості (30) враховував тільки чутливість вектора стану x до зовнішніх збурень x_0, f. Динаміка об’єкта розглядалась на часовому проміжку $t_0 = 0$, $T = 2$.

В числових експериментах знаходився оптимальний матричний П-регулятор виду (31), в якому вектор $R = (r_1,\ r_2)$ знаходився з умови мінімізації цільової функції (30), (32), графік якої подано на рис. 1.

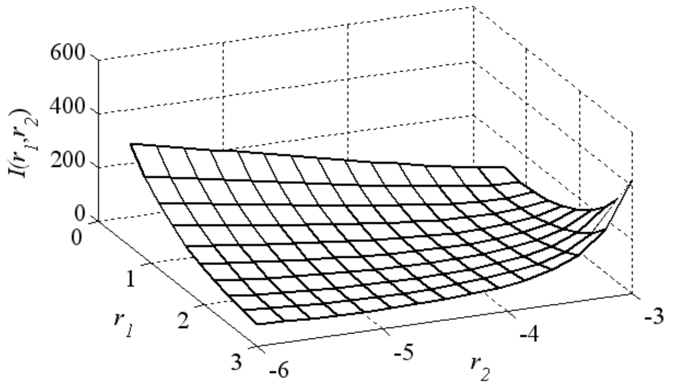

Рисунок 1 - Залежність критерію $I(r_1, r_2)$ від коефіцієнтів r_1, r_2 матриці зворотного зв’язку R

Початковий вектор зворотного зв’язку (коефіцієнт підсилення П-регулятора) вибраний таким $R_0 = (1,\ -2)$.

В результаті розв’язання оптимізаційної задачі оптимальний вектор зворотного зв’язку виявився рівним $R_{opt} = (2.9927,\ -5.0251)$. Значення цільової функції (30) при цьому зменшилось з $I_0 = 630.587$ до $I_{\min} = 73.144$.

Для оцінки ефективності оптимального матричного П- регулятора (31) на рис. 2 – рис. 5 наведено графіки керування $u(t)$ при початковому векторі зворотного зв’язку $R_0 = (1,\ -2)$ (R_0 – вектор початкового наближення) (рис. 2), графіки відповідного стану системи (“початковий” стан) (рис. 3) і чутливості (“початкова” чутливість) стану системи до збурень x^0 (рис. 4) та збурень f (рис. 5).

Як видно з цих графіків оптимальне керування $u_{opt}(t)$ швидко прямує до нуля при $t > 1$ на відміну від “початкового” керування $u(t)$, що має осцилюючий (коливальний) незатухаючий характер.

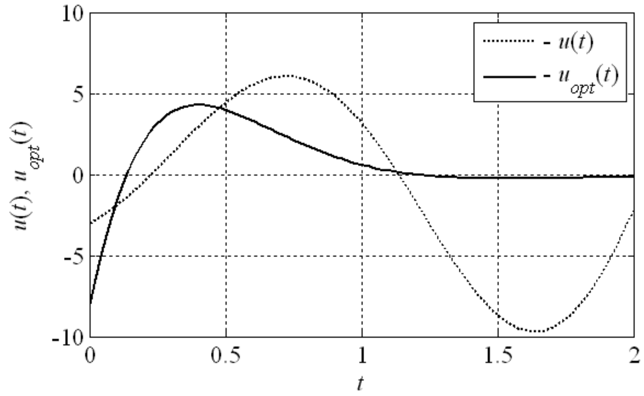

Рисунок 2 - Графіки початкового ($u(t)$) та оптимального ($u_{opt}(t)$) керування, що відповідають матриці зворотного зв'язку $R = R_0$ та $R = R_{opt}$

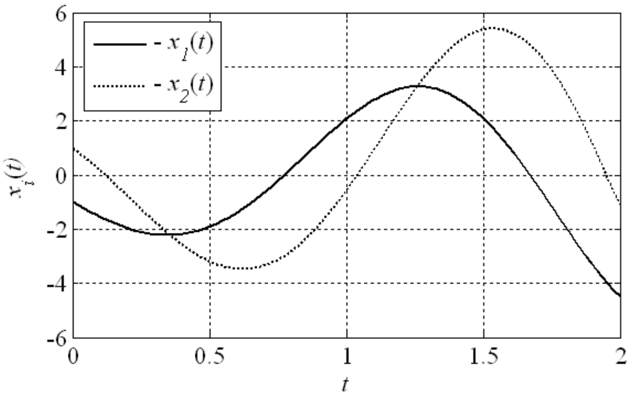

Рисунок 3 - Графіки стану системи, що відповідають "початковому" керуванню

На цьому графіку видно, що з плином часу параметри "початкового" вектора стану змінюються за деяким коливальним законом. Це означає, що "початкове" керування не стабілізує стану об'єкта.

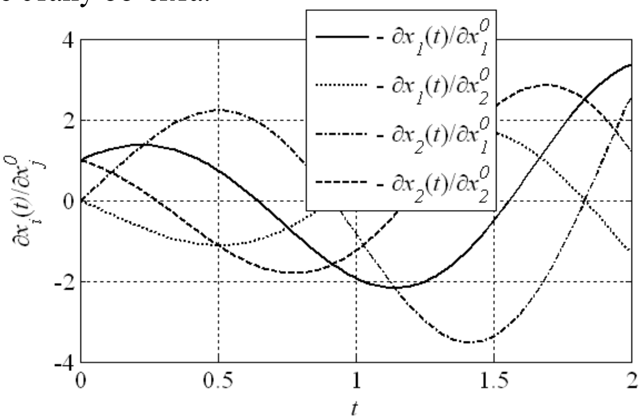

Рисунок 4 – Чутливість компонентів "початкового" вектора стану до кожної координати вектора зовнішніх збурень x^0 в початковий момент часу

Рис. 4 показує високу чутливість "початкового" вектора стану до збурення x^0, причому профіль чутливості теж має коливальний характер, схожий на коливання координат вектора стану.

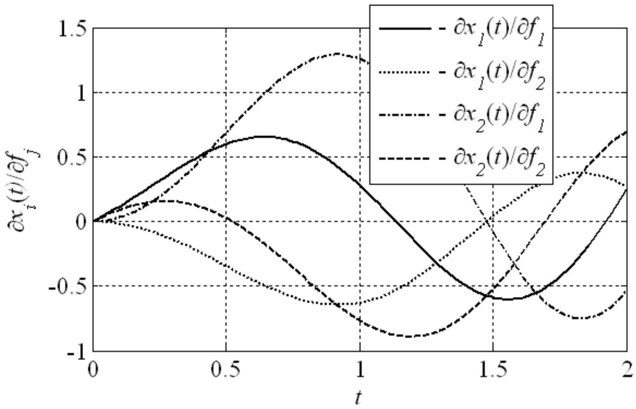

Рисунок 5 – Чутливість компонентів “початкового” вектора стану до кожної координати вектора зовнішніх збурень f

Як видно з рис. 5 чутливість “початкового” стану до зовнішніх збурень f майже в два рази менша, ніж до збурень x^0 і теж має незатухаючий коливальний характер.

Далі на рис. 6 – рис. 8 представлені графіки параметрів вектора стану (“оптимальний” стан) об’єкта (рис. 6), що відповідають оптимальному керуванню $u_{opt}(t) = R_{opt}y(t)$ та графіки матриць чутливості (“оптимальна” чутливість) вектора стану $x(t)$ до початкових збурень x_0 (рис. 7) та до зовнішніх збурень f (рис. 8).

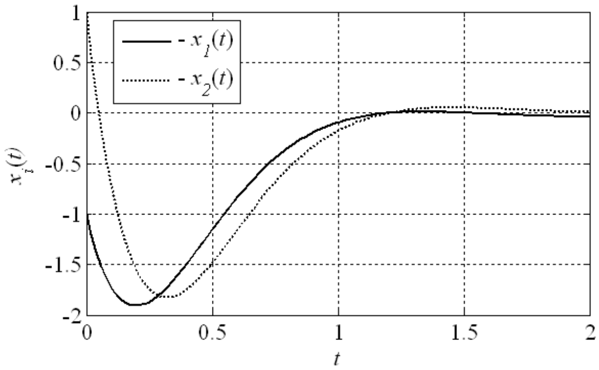

Рисунок 6 – Графіки стану системи, що відповідають оптимальному керуванню

Графіки на рис. 6 свідчать, що “оптимальний” стан системи є асимптотично стабілізованим.

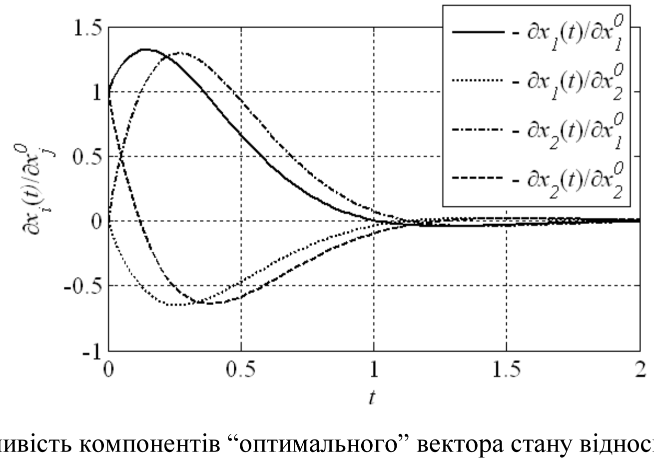

Рисунок 7 – Чутливість компонентів “оптимального” вектора стану відносно кожної координати вектора зовнішніх збурень x^0 в початковий момент часу

Як видно з графіків на рис. 7 чутливість “оптимального” вектора стану до збурень x^0 асимптотично згасає з плином часу при $t > 1$ після деякого перехідного періоду.

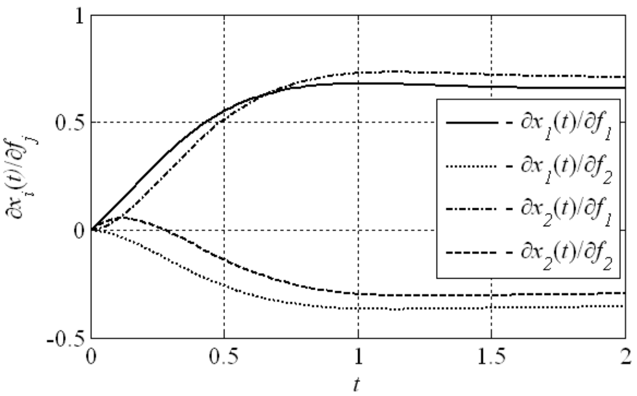

Рисунок - 8. Чутливість компонентів “оптимального” вектора стану відносно кожної координати вектора зовнішніх збурень f

З графіків на рис. 8 видно, що чутливість “оптимального” вектора стану до зовнішніх збурень f з плином часу асимптотично не зменшується, але прямує до деяких постійних (усталених) значень.

Висновок. Аналіз одержаних результатів показує високу ефективність побудованого оптимального матричного регулятора, який дозволяє швидко стабілізувати стан системи, що функціонує в умовах невизначеності і при цьому суттєво зменшує чутливість параметрів вектора стану та керування до невідомих зовнішніх збурень.

Список літератури

1. Рей У. Методы управления технологическими процессами. – М.: Мир, 1983. – 368 с.
2. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
3. Филипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с.
4. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К.: Выща школа, 1978. – 184 с.
5. Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.

В данной работе рассматривается задача построения оптимального матричного ПИД-регулятора относительно наблюдаемых параметров объекта управления, функционирующего в условиях неопределенности. Оптимальный регулятор находится из условия минимизации интегрального квадратичного критерия качества с обеспечением минимальной чувствительности управления и состояния системы относительно внешних возмущений.

In the given work the problem of construction optimum matrix PID-regulator concerning observable parameters of object of the management functioning in conditions of uncertainty is considered. The optimum regulator is from a condition of minimization of integrated square-law criterion of quality with maintenance of the minimal sensitivity of management and a condition of system concerning external indignations.