УДК 519.1

В.А.Настоящий, доц., канд. техн. наук, А.Я. Петренюк, проф., д-р фіз.-мат. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Чарівна сила графів-стрічок

У статті вивчаються графи, які одержали назву стрічки, з точки зору існування чарівних нумерацій та обчислення чарівної сили цих графів.

нумерація графу, чарівна нумерація, чарівний граф, чарівна сила графу, стрічка, поворотний 4-цикл

Реберною нумерацією, або просто *нумерацією* графу G називають функцію φ, яка кожному ребру графа G ставить у відповідність натуральне число – *номер* цього ребра. При наявності нумерації графу G кожна його вершина x характеризується *стяжкою* $m(x)$, що визначається формулою $m(x)=\Sigma\ \varphi(e)$, де сума береться по всіх ребрах e графу G, інцидентних з вершиною x. Нумерацію φ графу G називають *чарівною* зі стяжкою m, якщо при цій нумерації всі вершини графу G мають стяжку m, тобто якщо $m(x)=m(G)=const$. Граф G називають *чарівним*, якщо він допускає деяку чарівну нумерацію.

Позначимо через $s(\varphi)$ *н*айбільший з номерів, що зустрічаються у ребер нумерації φ. *Чарівною силою* графу G називають найменше із значень $s(\varphi)$ по всіх чарівних нумераціях φ графу G. Цю характеристику графу позначають $\mu(G)$. У випадку, коли граф G не чарівний, за означенням покладають $\mu(G)=0$.

В поданих вище означеннях виникають такі задачі: 1) чи магічний заданий граф G? та 2) обчислити $\mu(G)$. Ми розв'язуємо ці задачі для класу графів, які носять назву стрічок.

Нехай $P_0, P_1,\ldots, P_n$ – послідовність 4-циклів, кожні два сусідні з яких суміжні по ребру, а кожні два не сусідні не мають спільних вершин. Об'єднання 4-циклів $P_0, P_1,\ldots, P_n$ називатимемо *стрічкою* довжини n.

Розглянемо у стрічці три послідовні 4-цикли P_{i-1}, P_i, P_{i+1}.

4-Цикл P_i називається *звичайним*, якщо ребра $P_{i-1}\cap P_i$ та $P_i\cap P_{i+1}$ паралельні в P_i, і *поворотним*, якщо ці ребра суміжні (див. рис.1). 4-цикл назвемо *кінцевим*, якщо у нього немає точно двох сусідніх, і *проміжним* – в іншому випадку.

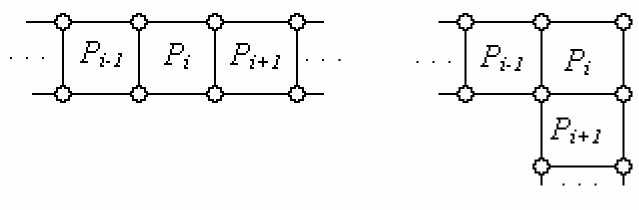


Рисунок1 – Звичайний та поворотний 4-цикли

Стрічку називатимемо *звичайною*, якщо у ній немає жодного поворотного 4-цикла.

Теорема 1. Звичайна стрічка довжини n при $n\geq 1$ – чарівний граф чарівної сили 2; при $n=0$ це – чарівний граф чарівної сили 1.

На рис.2 показані нумерації стрічок, які дають повне обґрунтування цієї теореми.

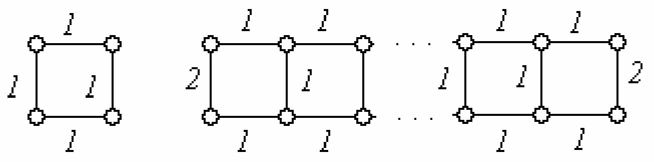


Рисунок 2– Чарівні нумерації стрічок довжини n=1 та $n \geq 2$

Більш складний випадок являє собою стрічка з поворотами.

Теорема 2. Стрічка з єдиним поворотом являє собою чарівний граф чарівної сили 2, якщо поворотний 4-цикл не другий від одного з кінців стрічки. В іншому випадку така стрічка – чарівний граф чарівної сили 3.

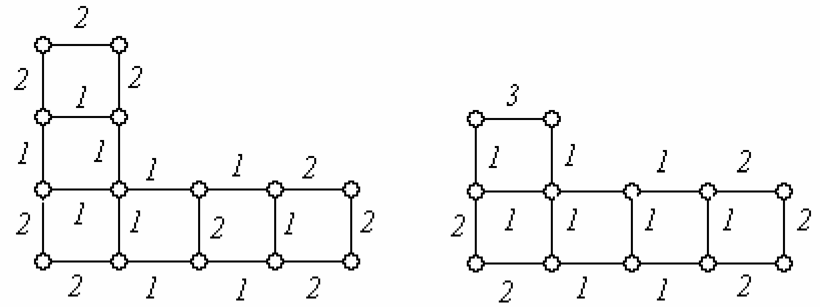


Рисунок 3

Рис.3 показує принцип побудови чарівної нумерації у першому та другому випадках. Неважко розібратися, що в другому випадку неможливо обійтися номерами 1 та 2.

У випадку, коли стрічка має більше, ніж один поворотний 4-цикл, розглянемо два послідовних поворотних 4-цикли P_i та P_{i+m} та назвемо *прольотом* між ними сукупність 4-циклів $P_i, P_{i+1}, \ldots, P_{i+m}$. Число m назвемо *довжиною* прольоту між P_i та P_{i+m}. Сукупність 4-циклів між нульовим та першим поворотним та сукупність 4-циклів між останнім поворотним та останнім у стрічці теж назвемо прольотами, і присвоїмо їм назву *кінцевих* прольотів.

Теорема 3. Якщо у стрічці відсутні прольоти довжини 1, то ця стрічка – чарівний граф чарівної сили 2.

Рис.4 показує нумерування прольоту довжини $n \geq 2$ та кінцевого прольоту довжини $n \geq 2$.

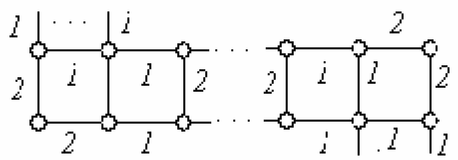
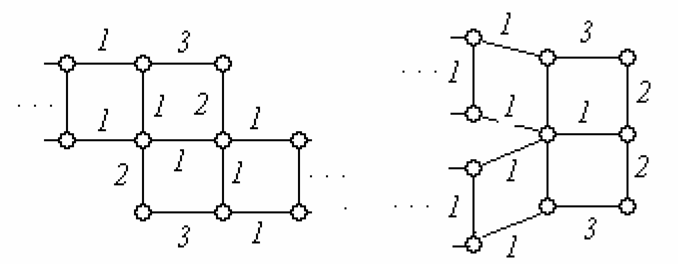


Рисунок 4 – Нумерація прольотів довжини $n \geq 2$

Прольот довжини 1 назвемо *ізольованим* у стрічці, якщо 4-цикли, один з яких передує першому, а інший слідує за другим поворотним 4-циклом цього прольоту, самі не є поворотними 4-циклами на стрічці.

Теорема 4. Якщо стрічка містить єдиний прольот (або кілька ізольованих прольотів) довжини 1, то вона являє собою чарівний граф чарівної сили 3.

На рис.5 показано спосіб чарівної нумерації прольоту довжини 1 у двох випадках: коли в результаті двох поворотів стрічка продовжується у початковому напрямі (а) та в протилежному напрямі (б).



5 – Чарівна нумерація ізольованого прольоту довжини n=1

В обох випадках нумерація не може обійтися без номера 3. Всі інші прольоти нумеруються з використанням тільки номерів 1 та 2. Можливість нумерації стрічки з використанням номерів 1, 2, 3 доводить теорему.

Для повного розв’язання задачі про чарівність стрічок треба ще розглянути стрічки з “вузлами” – сукупностями з трьох або більшого числа поворотних 4-циклів, розміщених підряд.

Список літератури

1. Kong M.C., Sin-min Lee, Sun H.S.A. On the magic strength of graphs. Ars Combinatoria, 1997, 45, 193–200.
2. Сапроненко Т. Про магічну силу графу. “Студентська наука: проблеми і перспективи XXI століття”. У зб. матеріалів Четвертої Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції (14–15 травня 2004 року), Кіровоград, 2004, 113–114.

В статье доказано, что графы, называемые лентами, во многих случаях являются магическими, и в этих случаях определена магическая сила этих графов.

Investigating the magicity of graphs called ribbons, we establish that they are magical in many cases, and in those cases we determine the magical strength of the graphs.