

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

**Варіанти індивідуальних завдань та приклади розв'язання з курсу
вищої математики за фаховим спрямуванням.**

Методичні вказівки для студентів ФСТМ

КРОПІВНИЦЬКИЙ

2018

Варіанти контрольних робіт та приклади розв'язання завдань з курсу вищої математики за фаховим спрямуванням. / Укл.: Кривоблоцька Л.М., Гончаров В.В., Гончарова С.Я. – Кропивницький: ЦНТУ, – 88 с.

Дані методичні вказівки складені для студентів, які навчаються за спеціальністю “ Агрономія”,. Вказівки містять програму з вищої математики, індивідуальні завдання , приклади розв'язання завдань, основні формули. Надано список літератури для самостійного вивчення предмета.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики та
фізики.
Протокол №
від.2018 р.

Теоретичні питання.

I. Лінійна алгебра.

1. Матриці. Основні поняття. Види матриць.
2. Лінійні операції з матрицями.
3. Транспонування матриць.
4. Множення матриць.
5. Визначники. Основні поняття. Властивості визначників.
6. Обернена матриця.
7. Ранг матриці.
8. Системи лінійних рівнянь. Основні поняття.
9. Матричний метод рішення систем.
10. Метод Крамера.
11. Метод Гауса.
12. Рішення довільних систем. Теорема Кронекера – Капеллі.

II. Границі.

1. Границя функції.
2. Нескінченно малі величини, нескінченно великі величини та їх властивості.
3. Перша чудова границя.
4. Друга чудова границя.
5. Неперервні функції.
6. Порівняння нескінченно малих величин.

III. Похідна функції.

1. Визначення похідної функції.
2. Геометричний та фізичний зміст похідної.
3. Правила диференціювання.

4. Таблиця похідних.
5. Похідна складної функції.
6. Повторне диференціювання.
7. Диференціал функції.
8. Використання диференціала до наближених обчислень.
9. Правило Лопітала.
13. Умови монотонності функції.
14. Екстремуми функцій.
15. Найменше та найбільше значення функції.
16. Опуклість, вгнутість, точки перегину.
17. Асимптоти.
18. Повне дослідження функції.

IV. Невизначений інтеграл.

1. Основні поняття.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиці інтегралів.
4. Інтегрування по частинам.
5. Заміна змінної.
6. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен у знаменнику.

V. Визначений інтеграл.

1. Поняття визначеного інтеграла, його геометричний зміст.
2. Формула Ньютона – Лейбніца.
3. Інтегрування частинами.
4. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
5. Невласні інтеграли.
6. Геометричне застосування визначених інтегралів.

VI. Функції декількох змінних.

1. Основні означення.
2. Частинні похідні першого і другого порядку.
3. Диференціал та його застосування у наближених обчисленнях.
4. Локальні екстремуми функції двох змінних.
5. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.
6. Метод найменших квадратів.

VII. Диференціальні рівняння.

1. Диференціальні рівняння 1-го порядку.
2. Рівняння з відокремлюваними змінними.
3. Однорідні та лінійні рівняння 1-го порядку.
4. Лінійні однорідні рівняння.
5. Лінійні однорідні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.
6. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку. Рівняння із сталими коефіцієнтами.

VIII. Теорія ймовірностей.

1. Основні поняття комбінаторики.
2. Імовірність.
3. Геометричні ймовірності.
4. Незалежні випадкові події.
5. Умовні ймовірності.
6. Послідовні незалежні випробування. Схема Бернуллі.
7. Теореми Лапласа, Пуассона.
8. Випадкові величини.
9. Розподіли випадкових величин.
10. Числові характеристики випадкової величини.

12. Нормальний розподіл.

11. Закон великих чисел.

13. Функція випадкової величини.

IX. Математична статистика.

1. Методи статистичного опису результатів спостережень.

2. Методи виключення грубих похибок експерименту.

3. Числові характеристики вибіркового розподілу.

4. Кореляційний і регресивний аналіз.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Лінійна алгебра

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

трьома способами:

- а) за означенням (правило трикутника);
- б) розклавши за елементами рядка або стовпчика;
- в) звівши за допомогою властивостей до трикутного вигляду.

Розв'язок: ▷

а) за означенням. Обчислимо визначник використовуючи схему показану на рис.1.

Маємо,

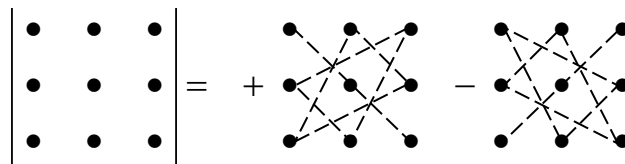


Рис. 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 7 + (-2) \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 5 \cdot 6 \cdot 0 -$$

$$-3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot 7 = 126 + 20 + 18 + 56 = 220;$$

б) розкладемо визначник за елементами першого рядка.

Так як,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

,

то

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (42 + 6) + 2 \cdot (28 + 10) = 3 \cdot 48 + 2 \cdot 38 = 144 + 72 = 220;$$

в) приводимо визначник до трикутного вигляду застосовуючи властивості визначників (в пояснювальних дужках $\langle \rangle$ вказані відповідні перетворення, де p_i – позначення i -го рядка):

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \langle p_2 - p_1 \rangle = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \langle p_1 \leftrightarrow p_2 \rangle = - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \langle p_2 - 3p_1 \rangle = - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \langle p_3 - 5p_1 \rangle = - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 0 & -37 & 17 \end{vmatrix} = \langle p_3 - p_2 \rangle =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 0 & -11 & 11 \end{vmatrix} = \left\langle p_3 \times \frac{1}{11} \right\rangle = -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \langle p_2 - 26p_3 \rangle =$$

$$= -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \langle p_1 \leftrightarrow p_2 \rangle = 11 \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \cdot (-1) \cdot (-20) = 220.$$

Приклад 2. Знайти:

$$3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T + 2 \cdot E,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок: Обчислення розіб'ємо на окремі дії

$$2.1) B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 6 \cdot 3 - 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 15 \\ 26 & 3 & 27 \\ 24 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

;

$$2.2) 3 \cdot A \cdot B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 14 & 1 & 15 \\ 26 & 3 & 27 \\ 24 & -7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 3 & 45 \\ 78 & 9 & 81 \\ 72 & -21 & 36 \end{pmatrix};$$

$$2.3) A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2.4) (A + B)^T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2.5) 2 \cdot E = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2.6) 3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T = \begin{pmatrix} 42 & 3 & 45 \\ 78 & 9 & 81 \\ 72 & -21 & 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 & 42 \\ 74 & 5 & 73 \\ 71 & -26 & 31 \end{pmatrix};$$

2.7)

$$3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T + 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 36 & -3 & 42 \\ 74 & 5 & 73 \\ 71 & -26 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -3 & 42 \\ 74 & 7 & 73 \\ 71 & -26 & 31 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

двома способами:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гауса.

Розв'язок.

3.1) Формули Крамера.

Випишемо матрицю системи та матрицю складену з правих частин рівнянь:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Формули Крамера мають вигляд:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta = \det A$, а $\Delta_i, (i = 1, 3)$, визначники матриць отриманих з матриці A заміною в ній відповідного стовпчика матрицею B .

Знаходимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(-6 + 1) - 3(-9 + 2) - 2(3 - 4) = 5 + 21 + 2 = 28,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(-6 + 1) - 3(-12 + 3) - 2(4 - 6) = 25 + 27 + 4 = 56,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-12 + 3) + 5(-9 + 2) - 2(9 - 8) = 9 - 35 - 2 = -28,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(6 - 4) - 3(9 - 8) - 5(3 - 4) = -2 - 3 + 5 = 0.$$

Отже,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{56}{28} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-28}{28} = -1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{28} = 0.$$

Перевірка.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 0 = 6 - 2 = 4 \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 0 = 2 + 3 = 5 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 0 = 4 - 1 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 2, \quad y = -1, \quad z = 0.$

3.2) метод Гауса.

Випишемо розширену матрицю системи і зведемо її до трапецевидного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{array} \right) \xleftrightarrow{p_1 \leftrightarrow p_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{array} \right) \xleftrightarrow{p_2 - 3p_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & -7 & -11 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \xleftarrow{p_3 - 2p_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & -7 & -11 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array} \right) \xleftarrow{p_3 \times \frac{1}{7}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xleftarrow{p_2 \leftrightarrow p_3} \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 11 & -7 & -11 \end{array} \right) \xleftarrow{p_3 - 11p_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \xleftarrow{p_3 \times \frac{1}{4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Перепишемо останню систему в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ y - z = -1 \\ z = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння $z = 0$.

Підставляємо $z = 0$ в друге рівняння

$$y - 0 = -1 \text{ або } y = -1.$$

Значення z і y підставляємо в перше рівняння

$$x - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 5 \text{ або } x = 2.$$

Відповідь: $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$.

Контрольні завдання

- I. Обчислити визначник трьома способами (правило трикутників; розклад в ряд по елементам рядка або стовпця; використовуючи властивості):**

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 8 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 5 & -7 & 8 \\ 9 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 8 & 9 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 10 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 10 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 5 \\ -6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

II. Виконати дії з матрицями: $3BA - (A + B)^T + 2E$

$$1. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

III. Розв'язати систему рівнянь (метод Крамера, метод Гаусса.):

$$1. \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + 2y + 3z = 8 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + 4z = 6 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 4x + 4y - 3z = -5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ 4x + 3y - 4z = 7 \\ 4x + 8y - 12z = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21 \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + 2y - x = -3 \\ 3x + 4y + z = 1 \\ 5x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - 2y + 3z = -5 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 3y + 5z = -9 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - y + 2z = -7 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ x + 9y - 11z = 11 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x + 2y + 2z = -7 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ 3x + 4y - 2z = 6 \\ 2x - y - z = -9 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4 \\ x + y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -5 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 4x + y - 3z = 9 \\ x + y - z = -2 \\ 8x + 3y - 6z = 12 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33 \\ 7x - 5y = 24 \\ 4x + 1z = 39 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12 \\ 7x - 5y + z = -33 \\ 4x + z = -7 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 5y + 4z = -20 \\ 3x - 2y + 5z = -22 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \\ 2x - y - z = 10 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 12 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Границі. Диференціальне числення функції однієї змінної.

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 4. Знайти границі:

$$4.1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x^2 + 3x};$$

$$4.2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$4.3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5};$$

$$4.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x}; \quad 4.5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 5}{x} \right)^{3x}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} 4.1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x^2 + 3x} &= \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^3} \right)}{x^3 \left(6 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^3}}{6 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = \\ &= \frac{2 + 0 - 0}{6 - 0 + 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$4.2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3 - 4 + 1}{1 - 3 + 2} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle.$$

Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники. Для цього спочатку знаходимо їх корені:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 3 \cdot 4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \quad \text{або} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{3};$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \text{або} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1) \left(x - \frac{1}{3} \right)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{3-1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2;$$

$$4.3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5} = \frac{2 - \sqrt{4}}{\sqrt{6 \cdot 4 + 1} - 5} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}.$$

Помножимо чисельник і знаменник на спряжені вирази:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{6x+1} + 5}{(\sqrt{6x+1} - 5)(\sqrt{6x+1} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{6x+1} + 5}{6x + 1 - 25} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(\sqrt{6x+1} + 5)}{(2 + \sqrt{x})(6x - 24)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(\sqrt{6x+1} + 5)}{(2 + \sqrt{x})6(x - 4)} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{6 \cdot 4 + 1} + 5}{2 + \sqrt{4}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{5 + 5}{2 + 2} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{10}{4} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12};$$

4.4) Застосуємо еквівалентність нескінченно малих

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x}{2 \sin^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4}.$$

4.5) Застосуємо наслідок з другої „чудової” границі:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x} = \left\langle 1^\infty \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5} \cdot 5 \cdot 3} = e^{15}.$$

Приклад 5. Знайти першу похідну функції $y = y(x)$:

$$5.1) y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}; \quad 5.2) y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x; \quad 5.3) y = \operatorname{arccctg} 5x \cdot \ln(x-4);$$

$$5.4) y = e^{\arccos x}; \quad 5.5) x^2 y - y^2 x + (x-y)^3 = 0; \quad 5.6) y = (\operatorname{ctg} x)^{\arcsin x}.$$

Розв'язок.

5.1) З таблиці похідних та властивостей похідної маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \left(2x^5 - 4x^{-3} + x^{-1} + 3x^{\frac{1}{2}} \right)' = 2 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3)x^{-3-1} + (-x)^{-1-1} + 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 10x^4 + 12x^{-4} - x^{-2} + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 10x^4 + \frac{12}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

5.2) Застосовуємо властивості похідної та правило обчислення похідної від складної функції:

Функції $\sin^3 2x$, $\cos 8x$ є складними функціями, які складаються з елементарних функцій $y_1 = u^3$, $y_2 = \sin u$, $y_3 = 2x$ та $y_1 = \cos u$, $y_2 = 8x$ відповідно, тому

$$\begin{aligned} y' &= (\sin^3 2x)' \cdot \cos 8x + \sin^3 2x \cdot (\cos 8x)' = 3\sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' \cdot \cos 8x + \\ &+ \sin^3 2x \cdot (-\sin 8x) \cdot 8 = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 \cdot \cos 8x - \sin^3 2x \cdot \sin 8x \cdot 8 = \\ &= 6 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x - 8\sin^3 2x \cdot \sin 8x. \end{aligned}$$

$$5.3) y' = (\operatorname{arccctg} 5x)' \cdot \ln(x-5) + \operatorname{arccctg} 5x \cdot (\ln(x-5))' =$$

$$= -\frac{1}{1+(5x)^2} (5x)' \cdot \ln(x-5) + \operatorname{arccctg} 5x \cdot \frac{1}{x-5} = -\frac{5}{1+25x^2} \ln(x-5) + \frac{\operatorname{arccctg} 5x}{x-5}.$$

$$5.4) y' = e^{\arccos x} \cdot (\arccos x)' = e^{\arccos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Контрольні завдання.

III. Знайти границі функцій:

$$1.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x^2 + 3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x}.$$

$$2.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

$$3.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{4x}.$$

$$4.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{3x-2}.$$

$$5.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}.$$

$$6.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{5x}.$$

$$7.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}.$$

$$8.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}.$$

$$9.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}; \partial) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}; \varepsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}.$$

$$10.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}; \partial) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}; \varepsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x - \operatorname{tg} x};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}.$$

$$11.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}; \partial) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}; \varepsilon) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$12.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}; \partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}; \varepsilon) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$13.a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}; \partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}; \varepsilon) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}.$$

$$14.a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 2}; \partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}; \varepsilon) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{3x};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

$$15.a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 1} - 1}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x - 3} \right)^{3x};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$16.a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x + 2}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}.$$

$$17.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7} \cdot x}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \cdot \sin x}.$$

$$18.a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}.$$

$$19.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$20.a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - x - 35}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$21.a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}.$$

$$22.a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3+2x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}.$$

$$23.a) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}; \bar{o}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - 3x}{5 - 3x} \right)^x;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \cdot \arcsin x}.$$

$$24.a) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}; \bar{o}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5 + x}}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - x}{2 - x} \right)^{3x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \cos x}.$$

$$25.a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}; \bar{o}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x + 7} - 5}{3 - \sqrt{x}}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x + 1} \right)^{2x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}.$$

$$26.a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}; \bar{o}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x} \right)^{2x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}.$$

$$27.a) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}; \bar{o}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x + 20} - 4}{x^3 + 64}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2x}{3 + 2x} \right)^{-x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \arcsin x}.$$

$$28.a) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}; \bar{o}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{8 + x} - 3}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x + 2} \right)^{x-2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\pi/2 - x \right) \lg x.$$

$$29.a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}; \bar{o}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x^2 + x}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x - 1} \right)^{3-2x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}.$$

$$30.a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}; \bar{o}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x^3 - 8}; \bar{e}) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 2x}{1 - 2x} \right)^{x+1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$$

IV. Знайти першу похідну функцій:

$$1.a) y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}; \quad б) y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x;$$

$$в) y = \operatorname{arctg} 5x \cdot \ln(x-4); \quad г) y = e^{\arccos x};$$

$$2.a) y = \frac{3}{x} + \sqrt[3]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}; \quad б) y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1); \quad в) y = \operatorname{arctg}^3 2x \cdot \ln(x+5);$$

$$г) y = \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{x+5}};$$

$$3.a) y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}; \quad б) y = \operatorname{tg}^4 x \cdot \arcsin 4x; \quad в) y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1);$$

$$г) y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 + 5x - 1}};$$

$$4.a) y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^3 + \frac{4}{x}; \quad б) y = \arcsin^3 2x \cdot \operatorname{ctg} 7x; \quad в) y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x};$$

$$г) y = \frac{e^{-5x}}{3x^2 - 4x + 2};$$

$$5.a) y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \frac{6}{x}; \quad б) y = \cos^5 3x \cdot \sin^3 5x; \quad в) y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x+2);$$

$$г) y = \frac{\sqrt{7x^3 - 5x + 2}}{e^{\cos x}};$$

$$6.a) y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}; \quad б) y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \cos(x+2); \quad в) y = \arccos^2 4x \cdot \ln(x-3);$$

$$г) y = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{3x^2 - 4x + 4}};$$

$$7.a) y = 3x^5 - \frac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}; \quad б) y = \ln^5 x \cdot \operatorname{arctg} 7x; \quad в) y = 5^{-x^2} \cdot \log_2(x-3);$$

$$г) y = \frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7};$$

$$8.a) y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}; \quad б) y = \operatorname{arctg}^3 4x \cdot 3^{\sin x}; \quad в) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$г) y = \frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{e^{-x}};$$

$$9.a) y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}; \quad \delta) y = \cos^2 3x \cdot \operatorname{tg}^3 2x; \quad \epsilon) y = \lg(x-3) \cdot \arcsin^3 5x;$$

$$z) y = \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(x+4)^3};$$

$$10.a) y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}; \quad \delta) y = \operatorname{ctg}^5 3x \cdot \operatorname{tg}^3 5x; \quad \epsilon) y = \log_5(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^3;$$

$$z) y = \frac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}};$$

$$11.a) y = 2x^5 - \frac{7}{x} + \sqrt[6]{x^{10}} + 5; \quad \delta) y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{tg} x; \quad \epsilon) y = \lg^3 x^2;$$

$$z) y = \frac{e^{\cos x}}{3 \operatorname{tg} x};$$

$$12.a) y = (3+4x+5x^2)^3; \quad \delta) y = 2 \operatorname{tg}^3 \frac{1}{x}; \quad \epsilon) y = x \arcsin \sqrt{x};$$

$$z) y = \ln \frac{e^x}{1+e^x};$$

$$13.a) y = \frac{1}{(4+x^2)^5}; \quad \delta) y = \sin^3(\sqrt{x}+1); \quad \epsilon) y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} \cdot \ln x;$$

$$z) y = \frac{\ln(4-5x)}{5^x};$$

$$14.a) y = x\sqrt{x+3}; \quad \delta) y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}; \quad \epsilon) y = x \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{9-x^2};$$

$$z) y = \ln(\sin x) \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$15.a) y = \frac{x^2+5}{2x-3}; \quad \delta) y = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x; \quad \epsilon) y = 6 \arcsin(3-x^2) \cdot \ln 2x;$$

$$z) y = \frac{3 \sin x}{\ln(x^2+4)};$$

$$16.a) y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2} \right) \sqrt{3x+x^2}; \quad \delta) y = 3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}; \quad \epsilon) y = \sin^4 3x \cdot \cos 7x;$$

$$z) y = \lg(x+9) \cdot \arcsin^2 x;$$

$$17.a) y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}; \quad \delta) y = \ln \left(\frac{5+x}{x} \right); \quad \epsilon) y = \cos \sqrt[5]{x} \cdot \arcsin x;$$

$$z) y = \frac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5};$$

$$18.a) y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}; \quad \delta) y = 2^{\arcsin(2x+1)/3}; \quad \epsilon) y = \cos^4 x \cdot \operatorname{arctg} x;$$

$$z) y = \ln(x-3) \cdot \cos 2x;$$

$$19.a) y = 1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad \delta) y = (1 + \operatorname{ctg}^2 3x) \cdot e^{-x}; \quad \epsilon) y = \operatorname{arctg} 2x \cdot \ln(x+5);$$

$$z) y = \frac{e^{4x}}{(3x+5)^3};$$

$$20.a) \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}; \quad \delta) y = (e^{-x^2}) \cdot \cos^3(2x+3); \quad \epsilon) y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x};$$

$$z) y = \frac{5x^2 + 4x - 2}{2^{-x}};$$

$$21.a) y = \sqrt{x+\sqrt{x}}; \quad \delta) y = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+e^{2x}}; \quad \epsilon) y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3;$$

$$z) y = \ln(x + \sqrt{x^2+9});$$

$$22.a) y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}; \quad \delta) y = 3x^2 - \operatorname{tg}^4 2x; \quad \epsilon) y = \ln^4(x^5 - \sin^5 2x);$$

$$z) y = \arccos^3 x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$$

$$23.a) y = 8x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}; \quad \delta) y = x \cdot \sin^2 x \cdot 2^{x^2}; \quad \epsilon) y = \arcsin 2x \cdot \operatorname{tg}^3 5x;$$

$$z) y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}};$$

$$24.a) y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}; \quad \delta) y = 2^{-\cos^4 5x}; \quad \epsilon) y = \sin^3 5x \cdot \cos^5 3x;$$

$$z) y = \ln(x^2+1) \cdot 2^{3x};$$

$$25.a) y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}; \quad \delta) y = (\sin^3 x + \cos^3 2x)^2; \quad \epsilon) y = \operatorname{arctg}^3 5x;$$

$$z) y = 3^{\operatorname{tg}^3 5x};$$

$$26.a) y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6; \quad \delta) y = \sin^3 x \cdot \arcsin(x^2-1); \quad \epsilon) y = \ln^5(x-2^{-x});$$

$$z) y = x \cdot \cos^2 x \cdot e^{x^2};$$

$$27.a) y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}; \quad \delta) y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \arccos 2x; \quad \epsilon) y = (x+1) \ln(x^2-4);$$

$$z) y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3};$$

$$28.a) y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}; \quad б) y = 2^{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{arctg} x; \quad в) y = \log_3(x+5) \cdot e^{-x};$$

$$г) y = \frac{\arccos 3x}{(x+1)^2};$$

$$29.a) y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6; \quad б) y = \sin^5 3x \cdot \cos \sqrt{x}; \quad в) y = \ln^2 x \cdot 4^{-\sin x};$$

$$г) y = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\arcsin x};$$

$$30.a) y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}; \quad б) y = \cos^4 3x \cdot \frac{1}{x}; \quad в) y = \log_5(x+1) \cdot 2^{\cos x};$$

$$г) y = \frac{\cos 2x}{\operatorname{arctg} x};$$

Інтегральне числення функції однієї змінної.

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 6. Знайти невизначені інтеграли:

$$a) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5-2\cos x}}; \quad б) \int \frac{(3x-1)dx}{x^2-6x+10}; \quad в) \int x \ln x dx;$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} a) \int \frac{\sin x}{\sqrt{5-2\cos x}} dx &= -\int \frac{d \cos x}{\sqrt{5-2\cos x}} = -\int (5-2\cos x)^{-\frac{1}{2}} d \cos x = \\ &= -\frac{(5-2\cos x)^{-\frac{1}{2}+1}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right) \cdot (-2)} + C = \frac{-2}{-2} (5-2\cos x)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{5-2\cos x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} б) \int \frac{3x-1}{x^2-6x+10} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-6)+9-1}{x^2-6x+10} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} dx + \\ &+ 8 \int \frac{dx}{x^2-2 \cdot 3x+9+1} = \frac{3}{2} \cdot I_1 + 8 \cdot I_2, \end{aligned}$$

де

$$I_1 = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+10} dx = \left\langle \frac{x^2-6x+10=t}{(2x-6)dx=dt} \right\rangle = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln|x^2-6x+10| + C_1$$

,

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x-3)^2+1} = \operatorname{arctg}(x-3) + C_2.$$

Отже,

$$\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-6x+10} = \frac{3}{2} \ln|x^2-6x+10| + 8 \operatorname{arctg}(x-3) + C.$$

в)

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left\langle \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln x, \quad dv = x dx \\ du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\rangle = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C. \end{aligned}$$

Приклад 7. Обчислити визначений інтеграл:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx &= \left\langle \begin{array}{l} x=t^2, \sqrt{x}=t, dx=2t dt \\ x_1=4, t_1=2; x_2=9, t_2=3 \end{array} \right\rangle = \int_2^3 \frac{t}{t-1} 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt = \\ &= 2 \int_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \left(t+1+\frac{1}{t-1} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) \Big|_2^3 = \\ &= 2 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) \Big|_2^3 = 2 \left(\frac{9}{2} + 3 + \ln 2 - \frac{4}{2} - 2 - \ln 1 \right) = \\ &= 2 \left(\frac{5}{2} + 1 + \ln 2 \right) = 7 + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти площу фігури, обмежену лініями

$$y = x^3, y = 4x.$$

Розв'язок. Знайдемо точки перетину графіків функцій:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x, \end{cases}$$

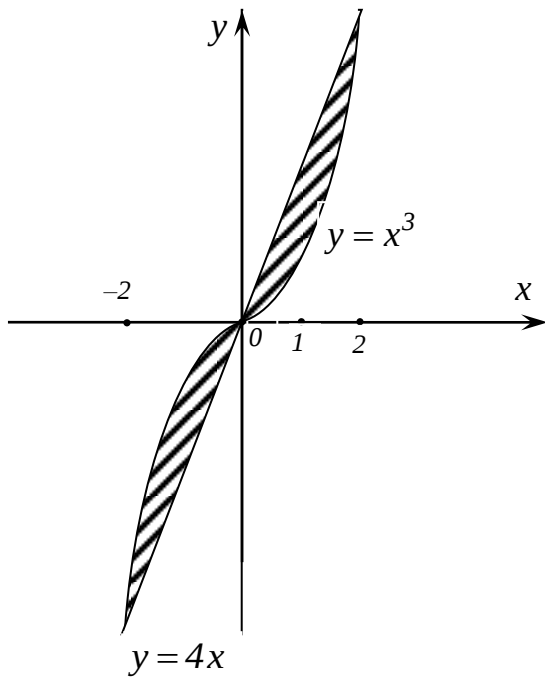


Рис. 5.

$$x^3 = 4x,$$

$$x(x^2 - 4) = 0.$$

Отже, точки перетину графіків

$$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2.$$

Будуємо графіки функцій (рис. 5).

Потрібно знайти площу заштрихованої області:

$$S = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left(4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= 2 \left(2 \cdot 4 - \frac{16}{4} \right) = 2(8 - 4) = 8 \text{ од. кв.}$$

Приклад 9. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією, яка задана в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

Розв'язок. Фігура, площу якої потрібно знайти зображено на рис. 6. Точки А та В отримуються при $t_1 = 0$ і $t_2 = \pi/2$, відповідно.

Отже,

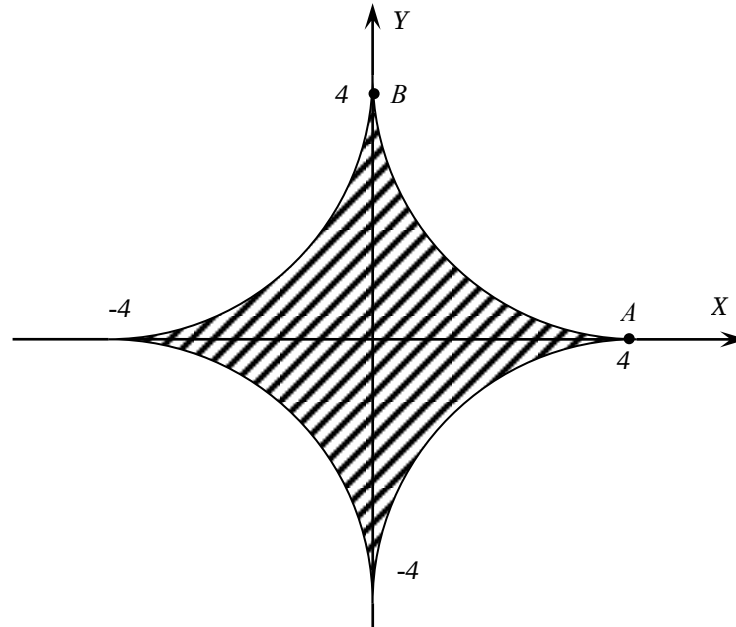


Рис. 6.

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_{t_A}^{t_B} y(t)x'(t)dt = 4 \int_0^{\pi/2} 4 \sin^3 t \cdot (4 \cos^3 t)' dt = 64 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t \sin t dt = \\
 &= 192 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)^2 \cos^2 t dt = 192 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
 &= 24 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2t)(1 - \cos 2t) dt = 24 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 2t - \sin^2 2t \cos 2t) dt = \\
 &= 24 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt - 4 \sin^3 2t \Big|_0^{\pi/2} = 12 \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} - 0 = 6\pi \text{ од. кв.}
 \end{aligned}$$

Приклад 10. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність.

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$$

Розв'язок.

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{x}{16x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx^2}{16x^4 + 1} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx^2}{(4x^2)^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 4x^2}{4} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{8}(\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{16}.$$

$$\begin{aligned} 6) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{2-4x}} dx &= \int_0^1 (2-4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \left\langle \begin{array}{l} 2-4x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} (2-4x)^{-\frac{1}{3}} dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (2-4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(2-4x)^{-\frac{1}{3}+1}}{\left(-\frac{1}{3}+1\right)(-4)} \bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{(2-4x)^{-\frac{1}{3}+1}}{\left(-\frac{1}{3}+1\right)(-4)} \bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= -\frac{3}{8} \left[(2-4x)^{\frac{2}{3}} \bigg|_0^{\frac{1}{2}} + (2-4x)^{\frac{2}{3}} \bigg|_{\frac{1}{2}}^1 \right] = -\frac{3}{8} \left(0 - 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} - 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Контрольні завдання

V. Знайти невизначені інтеграли:

$$1.a) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5-2\cos x}};$$

$$б) \int \frac{(3x-1)dx}{x^2-6x+10};$$

$$в) \int x \ln x dx;$$

$$2.a) \int \frac{x^3-5x^2+1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$б) \int x \cos 2x dx;$$

$$в) \int \frac{\sin x dx}{1-\cos x};$$

$$3.a) \int \sqrt{x^3} (5\sqrt[3]{x^2}-1) dx;$$

$$б) \int \ln x dx;$$

$$в) \int \frac{dx}{1-\operatorname{ctg} x};$$

$$4.a) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}};$$

$$б) \int x^3 \operatorname{arctg} x dx;$$

$$в) \int \frac{\cos x dx}{1+\cos x};$$

$$5.a) \int \frac{2^{x-2}+3^{x-1}}{6^x} dx;$$

$$б) \int \arcsin 2x dx;$$

$$в) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx;$$

$$6.a) \int (3^x - 2)(3^{-x} + 2) dx; \quad \bar{o}) \int \ln(x^2 + 1) dx; \quad \wp) \int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)^2};$$

$$7.a) \int \left(\sqrt{t^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \right) dt; \quad \bar{o}) \int x^2 5^x dx; \quad \wp) \int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x};$$

$$8.a) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx; \quad \bar{o}) \int (x - 2) \arcsin x dx; \quad \wp) \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x};$$

$$9.a) \int e^{-x}(e^x + 5) dx; \quad \bar{o}) \int (1 + x) \sin x dx; \quad \wp) \int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin x)};$$

$$10.a) \int 5^{x-1} e^x dx; \quad \bar{o}) \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad \wp) \int \frac{\sin x}{6 \cos^2 x + \sin^2 x} dx;$$

$$11.a) \int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}; \quad \bar{o}) \int x \cdot e^x dx; \quad \wp) \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$12.a) \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}; \quad \bar{o}) \int (x + 2) \cos(3x + 7) dx; \quad \wp) \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx;$$

$$13.a) \int \frac{dx}{16x^2 - 9}; \quad \bar{o}) \int \operatorname{arctg} x dx; \quad \wp) \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x};$$

$$14.a) \int \frac{5 - \cos x}{\cos x} dx; \quad \bar{o}) \int x \cos x dx; \quad \wp) \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x};$$

$$15.a) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx; \quad \bar{o}) \int x \ln^2 x dx; \quad \wp) \int \frac{dx}{4 + 3 \operatorname{tg} x};$$

$$16.a) \int \frac{x^3 - 1}{x + 1} dx; \quad \text{б)} \int x 6^x dx; \quad \text{в)} \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x};$$

$$17.a) \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}; \quad \text{б)} \int (x - 3) \ln x dx; \quad \text{в)} \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin x} dx;$$

$$18.a) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx; \quad \text{б)} \int x^3 e^{-x^2} dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x};$$

$$19.a) \int \operatorname{tg}^2 7x dx; \quad \text{б)} \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{8 \sin^2 x - 16 \sin x \cos x};$$

$$20.a) \int \cos 2x \cdot \sin 10x dx; \quad \text{б)} \int x e^{-7x} dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{16 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x};$$

$$21.a) \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx; \quad \text{б)} \int \arccos x dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x};$$

$$\text{г)} \int \frac{x dx}{2 + \sqrt{x + 4}}.$$

$$22.a) \int \frac{3x + 2}{x^2 + 9} dx; \quad \text{б)} \int \ln^2 x dx; \quad \text{в)} \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx;$$

$$23.a) \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx; \quad \text{б)} \int x \cos \left(\frac{x}{2} + 1 \right) dx; \quad \text{в)} \int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx;$$

$$24.a) \int \frac{x + 3}{x + 1} dx; \quad \text{б)} \int x \cdot 2^{3x} dx; \quad \text{в)} \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$$

$$25.a) \int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6 \right) dx; \quad \text{б)} \int \sin x \cdot 2x dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x};$$

$$26.a) \int \frac{x - 3}{1 - 4x^2} dx; \quad \text{б)} \int \ln(x - 7) dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x};$$

$$27.a) \int \frac{x^2 + \sin x}{x^2 \sin x} dx; \quad б) \int x \sin^2 x dx; \quad в) \int \sin^4 x \cdot \sin^2 x dx;$$

$$28.a) \int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6 \right) dx; \quad б) \int \arctg(x+5) dx; \quad в) \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx;$$

$$29.a) \int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} - \frac{7}{x^3} + 5 \right) dx; \quad б) \int x^2 \cos \frac{x}{3} dx; \quad в) \int \frac{3 \cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$$

$$30.a) \int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx; \quad б) \int x^2 e^{-x} dx; \quad в) \int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx;$$

VI. Обчислити визначений інтеграл:

$$1. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1};$$

$$2. \int_0^{0.5} \arcsin x dx;$$

$$3. \int_1^3 \frac{dx}{1+x};$$

$$4. \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}};$$

$$5. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x+1};$$

$$6. \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^3 x dx;$$

$$7. \int_0^1 x e^{-2x} dx;$$

$$8. \int_0^3 \ln(x+3) dx;$$

$$9. \int_0^{\pi} x \sin x dx;$$

$$10. \int_{-1}^0 \sqrt{2-3x} dx;$$

$$11. \int_{-2}^2 e^{3x+4} dx;$$

$$12. \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx;$$

$$13. \int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}};$$

$$14. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1};$$

$$15. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx;$$

$$16. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\cos x};$$

$$17. \int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2+1};$$

$$18. \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}};$$

$$19. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}};$$

$$20. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx;$$

$$21. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x};$$

$$22. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$$

$$23. \int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx;$$

$$24. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$25. \int_0^1 3(x^2 + x^2 e^{x^3}) dx;$$

$$26. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6};$$

$$27. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx;$$

$$28. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$$

$$29. \int_0^1 x \sqrt{3+4x^2} dx;$$

$$30. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\sin^2 x}.$$

VII. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$1. y = x^3, y = 4x$$

$$2. y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2$$

$$3. xy = 4, x + y - 5 = 0$$

$$4. y^2 = 16 - 8x, y^2 = 24x + 48$$

$$5. y^2 = x, y = \frac{1}{2}x$$

$$6. y = \sqrt{6x}, y = \sqrt{16-x^2}$$

$$7. y = x^2, x = y^2$$

$$8. x^2 + y^2 = 16$$

$$9. y = x^2, y = 1$$

$$10. y = -x^2, y + x + 2 = 0$$

$$11. y^2 = x + 1, y^2 = 9 - x, y = 0$$

$$12. x^2 = 4y, y = \frac{8}{x^2 + 4}$$

$$13. y = x + 1, y = \cos x, y = 0$$

$$14. y = \sin x, y = \cos x, x = 0$$

$$15. y = x^2 \text{ Ю } y = 3 - x$$

$$16. y = \sqrt{x}, y = x^3$$

$$17. y^2 = x + 1, y = 9 - x$$

$$18. y^2 = 9x, y = 3x$$

$$19. y = x^2, y = 2 - x^2$$

$$20. y = x^3, y = 1, x = 0$$

$$21. xy = 6, x + y - 7 = 0$$

$$22. y = x + 1, y = \cos x, y = 0$$

$$23. y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$$

$$24. y = x^3, y = 0, x = 2$$

$$25. y^2 = 4x, x^2 = 4y$$

$$26. y = x^3, y = 1, x = 0$$

$$27. y^2 = x^3, x = 2$$

$$28. y = \sqrt{x}, y = x^2$$

$$29. y^2 = 9x, x^2 = 9y$$

$$30. y^2 = (x+1)^3, x = 4.$$

VIII. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1.a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1};$$

$$2.a) \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1};$$

$$3.a) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}};$$

$$4.a) \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}};$$

$$5.a) \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}};$$

$$6.a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}};$$

$$7.a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16 + x^2)^5}};$$

$$8.a) \int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}};$$

$$9.a) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)};$$

$$10.a) \int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$11.a) \int_0^{\infty} \frac{\arctg 2x}{\pi(1 + 4x^2)} dx;$$

$$12.a) \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16 dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)};$$

$$13.a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5};$$

$$14.a) \int_0^{\infty} \frac{(x + 2) dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 4x + 1)^4}};$$

$$15.a) \int_0^{\infty} \frac{3 - x^2}{x^2 + 4} dx;$$

$$b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 4x}}.$$

$$b) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

$$b) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^3 + \frac{1}{x}}{x^2}.$$

$$b) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - x)^5}}.$$

$$b) \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x - 1)}{3x - 1} dx.$$

$$b) \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

$$b) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1 - x) \ln^2(1 - x)}.$$

$$b) \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2 - 3x)}}{2 - 3x} dx.$$

$$b) \int_0^1 \frac{x dx}{1 - x^4}.$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1 - \sin 3x)^5}} dx.$$

$$b) \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$b) \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 3x}}.$$

$$b) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 4x}}.$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x} dx.$$

$$b) \int_0^1 \frac{2e^{\frac{1 - 2 \arcsin x}{\pi}}}{\pi \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$16.a) \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx;$$

$$17.a) \int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)};$$

$$18.a) \int_0^{\infty} x \sin x dx;$$

$$19.a) \int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5};$$

$$20.a) \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x};$$

$$21.a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}};$$

$$22.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln 3};$$

$$23.a) \int_0^{\infty} e^{-3x} x dx;$$

$$24.a) \int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx;$$

$$25.a) \int_0^1 \frac{dx}{2x^2-2x+1};$$

$$26.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)};$$

$$27.a) \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2};$$

$$28.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln \frac{3}{4}};$$

$$29.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2};$$

$$30.a) \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2};$$

$$b) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}.$$

$$b) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$$

$$b) \int_{\frac{3}{4}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$$

$$b) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3 \ln 2}}.$$

$$b) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2}.$$

$$b) \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$b) \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

$$b) \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

$$b) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$$

$$b) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$$

$$b) \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}.$$

$$b) \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$$

$$b) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}.$$

$$b) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}.$$

$$b) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}.$$

Диференціальне числення функції декількох змінних.

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 11. Знайти частинні похідні першого порядку:

$$z = \ln(y^2 - e^{-x}).$$

Розв'язок.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2 - e^{-x}} \cdot (-e^{-x}) \cdot (-1) = \frac{e^{-x}}{y^2 - e^{-x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2 - e^{-x}} \cdot 2y = \frac{2y}{y^2 - e^{-x}}.$$

Приклад 12. Дослідити на екстремум функцію:

$$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

Розв'язок.

Знайдемо частинні похідні першого та другого порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} - 4y + 14,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{y}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{y}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{y}{4} x^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Знайдемо критичні точки, для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - 4y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{y-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=0 \\ \sqrt{x}=4y-14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2\sqrt{x}, & x \neq 0 \\ \sqrt{x}=4 \cdot 2\sqrt{x}-14 \end{cases}.$$

З останньої системи маємо

$$-7\sqrt{x} = -14 \quad \text{або} \quad x = 4,$$

$$y = 2 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Дослідимо критичну точку $x_0 = 4$ і $y_0 = 4$ на екстремум. Для цього складаємо визначник

$$\Delta(x_0; y_0) = \begin{vmatrix} z_{xx}''(x_0; y_0) & z_{xy}''(x_0; y_0) \\ z_{xy}''(x_0; y_0) & z_{yy}''(x_0; y_0) \end{vmatrix},$$

де

$$z_{xx}''(x_0; y_0) = -\frac{y}{4} x^{-\frac{3}{2}} \bigg|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = -\frac{4}{4} 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{8}, \quad z_{yy}''(x_0; y_0) = -4 \bigg|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = -4,$$

$$z_{xy}''(x_0; y_0) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \bigg|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Отже,

$$\Delta(x_0; y_0) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -4 \end{vmatrix} = \frac{4}{8} - \frac{1}{16} = \frac{8-1}{16} = \frac{7}{16} > 0$$

і $z_{xx}''(x_0; y_0) = -\frac{1}{8} < 0$, тому в точці $(4; 4)$ функція досягає максимуму:

$$\begin{aligned} z_{\max} &= z(4; 4) = 4 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot 4^2 - 4 + 14 \cdot 4 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 16 - 4 + 56 = \\ &= 8 - 32 - 4 + 56 = 28 \end{aligned}$$

Відповідь: $z_{\max} = z(4; 4) = 28$.

Приклад 13. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 3x + y - xy \quad \text{в області} \quad D: y = x, y = 4, x = 0.$$

Розв'язок. Найбільше та найменше значення функція може приймати або в критичних точках або на границі області D .

1) Знаходимо критичні точки функції $z(x; y)$:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases},$$

$$\text{де } z'_x = 3 - y, \quad z'_y = 1 - x.$$

Отже,

$$\begin{cases} 3 - y = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

тобто точка $(1; 3)$ – критична. Обчислимо значення функції в цій точці

$$z(x; y) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=3}} = 3 \cdot 1 + 3 - 1 \cdot 3 = 3.$$

2) Дослідимо поведінку функції на границі області.

а) Відрізок OA . Він задається рівнянням $x = 0$ при $y \in [0; 4]$. Тоді

$$z(x; y) \Big|_{x=0} = 3 \cdot 0 + y - 0 \quad \text{або} \quad z(0; y) = y$$

і

$$z(0; y)_y' = 1 > 0$$

тобто на відрізку OA функція $z(x, y)$ монотонна:

$$z(0; y) \Big|_{y=0} = 0, \quad z(0; y) \Big|_{y=4} = 4.$$

б) Відрізок AB : йому відповідає рівняння $y = 4$ при $x \in [0; 4]$. Маємо

$$z(x; y) \Big|_{y=4} = 3x + 4 - 4x = -x + 4 \quad \text{або} \quad z(x; 4) = -x + 4$$

і

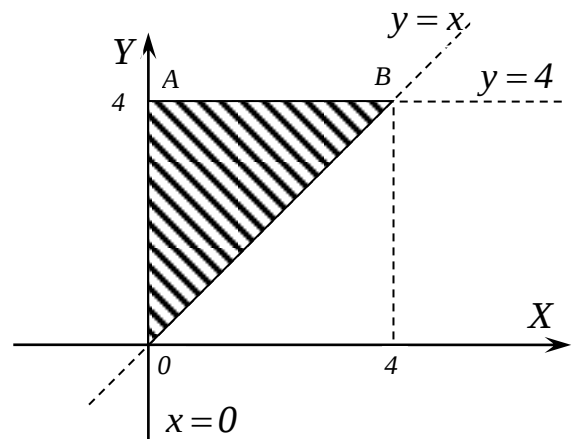


Рис.

$$z(x;4)'_x = -1 < 0$$

тобто на відрізку OA функція $z(x, y)$ теж монотонна:

$$z(x;4)\Big|_{x=0} = 4, \quad z(x;4)\Big|_{x=4} = -4 + 4 = 0.$$

в) Відрізок OB : йому відповідає рівняння $y = x$ при $x \in [0;4]$. Тоді

$$z(x; y)\Big|_{y=x} = 3x + x - x^2 = 4x - x^2 \quad \text{або} \quad z(x; x) = 4x - x^2$$

$$z(x; x)'_x = 4 - 2x,$$

$$z(x; x)'_x = 0 \Leftrightarrow 2x = 4, \quad x = 2$$

$$z(x; x)\Big|_{x=2} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$$

Отже,

$$z_{\text{найм}} = z(0;4) = 0,$$

$$z_{\text{найб}} = z(2;2) = 4.$$

Контрольні завдання

IX. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = f(x, y)$:

$$1. z = \ln(y^2 - e^{-x});$$

$$2. z = \arcsin \sqrt{xy};$$

$$3. z = \arctg(x^2 + y^2);$$

$$4. z = \cos(x^3 - 2xy);$$

$$5. z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}};$$

$$6. z = \tg(x^3 + y^2);$$

$$7. z = \ctg \sqrt{xy^3};$$

$$8. z = e^{-x^2+y^2};$$

$$9. z = \ln(3x^2 - y^4);$$

$$10. z = \arccos\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$11. z = \arctg(xy^2);$$

$$12. z = \cos \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$13. z = \sin \sqrt{x - y^3};$$

$$14. z = \tg(x^3 y^4);$$

$$15. z = \ctg(3x - 2y);$$

$$16. z = e^{2x^2 - y^5};$$

$$17. z = \ln(\sqrt{xy} - 1);$$

$$18. z = \arcsin(2x^3 y);$$

$$19. z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y^3}\right);$$

$$20. z = \cos(x - \sqrt{xy^3});$$

$$21. z = \sin \frac{x+y}{x-y};$$

$$22. z = \operatorname{tg} \frac{2x-y^2}{x};$$

$$23. z = \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{x}{xy}};$$

$$24. z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$25. z = \ln(3x^2 - y^2);$$

$$26. z = \arccos(x - y^2);$$

$$27. z = \operatorname{arcctg}\left(\frac{x^3}{y}\right);$$

$$28. z = \cos \frac{x-y}{x^2+y^2};$$

$$29. z = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}};$$

$$30. z = e^{-(x^3+y^3)}.$$

Х. Дослідити на екстремум функції:

$$1. z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

$$2. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

$$3. z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

$$4. z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

$$5. z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

$$6. z = x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$$

$$7. z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$$

$$8. z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$$

$$9. z = 4(x-y) - x^2 - y^2.$$

$$10. z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2.$$

$$11. z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$$

$$12. z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$$

$$13. z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$$

$$14. z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$15. z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$$

$$16. z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$$

$$17. z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$$

$$18. z = xy(12 - x - y).$$

$$19. z = xy - x^2 - y^2 + 9.$$

$$20. z = 2y - 3x^2 - 2y^2 + 10.$$

$$21. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

$$22. z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

$$23. z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

$$24. z = xy(6 - x - y).$$

$$25. z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$

$$26. z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

$$27. z = (x-1)^2 + 2y^2.$$

$$28. z = xy - 3x^2 - 2y^2.$$

$$29. z = x^2 3(y+2)^2.$$

$$30. z = 2(x+y) - x^2 - y^2.$$

XI. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області

$\bar{D}$, обмеженої заданими лініями:

1. $z = 3x + y - xy$, $\bar{D} : y = x, y = 4, x = 0$.
2. $z = xy - x - 2y$, $\bar{D} : x = 3, y = x, y = 0$.
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.
4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\bar{D} : x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$.
6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.
8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.
9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.
10. $z = x^2 + 2xy - 10$, $\bar{D} : y = 0, y = x^2 - 4$.
11. $z = xy - 2x - y$, $\bar{D} : x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$.
12. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $\bar{D} : y = 8, y = 2x^2$.
13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$, $\bar{D} : y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, y = 0$.
15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $\bar{D} : x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$.
16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $\bar{D} : x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$.
17. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $\bar{D} : y = 2x, y = 2, x = 0$.
18. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$, $\bar{D} : x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$.
19. $z = xy - 3x - 2y$, $\bar{D} : x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$.
20. $z = x^2 + xy - 2$, $\bar{D} : y = 4x^2 - 4, y = 0$.
21. $z = x^2y(4 - x - y)$, $\bar{D} : x = 0, y = 0, y = 6 - x$.
22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $\bar{D} : x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.
23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $\bar{D} : x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0$.

$$24. z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,$$

$$\bar{D} : x = 3, y = 0, y = x + 1.$$

$$25. z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y,$$

$$\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$$

$$26. z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y,$$

$$\bar{D} : y = x + 2, y = 0, x = 2.$$

$$27. z = 4 - 2x^2 - y^2,$$

$$\bar{D} : y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$28. z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4,$$

$$\bar{D} : x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$$

$$29. z = x^2 + 2xy + 4x - y^2,$$

$$\bar{D} : x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0.$$

$$30. z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2,$$

$$\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y = 6.$$

Диференціальні рівняння.

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 y^2 y' = 1 - x^3.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними

$$а) \quad x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - x^3; \quad б) \quad x^2 y^2 dy = (1 - x^3) dx; \quad в) \quad y^2 dy = \frac{1 - x^3}{x^2} dx; \quad г)$$

$$\int y^2 dy = \int \left(\frac{1}{x^2} - x \right) dx;$$

$$\text{Розв'язок} \quad \frac{y^3}{3} = -\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + C.$$

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}.$$

Це лінійне рівняння I порядку. Заміна $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$,

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{e^x}{x}, \quad u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{e^x}{x}, \quad v' + \frac{v}{x} = 0. \quad \text{Розв'язуємо} \quad v' = -\frac{v}{x},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x| = \ln \frac{1}{|x|}, \quad v = \frac{1}{x}. \quad \text{Підставляємо} \quad u'v = \frac{e^x}{x}, \quad \text{т.е.}$$

$$u' \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}, \quad u' = e^x; \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad du = e^x dx \quad \int du = \int e^x dx, \quad u = e^x + C, \quad \text{тоді}$$

$$\text{розв'язок} \quad y = u \cdot v = (e^x + C) \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Приклад 16. Знайти частинний розв'язок дифференціального рівняння II порядку $y'' - 3y' - 4y = 50 \sin 2x$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді $y = \bar{y} + y^*$

а) Однорідне рівняння $y'' - 3y' - 4y = 0$). Характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k - 4 = 0, \quad D = 9 + 16 = 25 > 0, \quad k_1 = -1; \quad k_2 = 4 \Rightarrow \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

б) Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y^* = M \sin 2x + N \cos 2x;$$

Знаходимо $y^* = M \cos 2x + N \sin 2x$; $(y^*)' = -2M \sin 2x + 2N \cos 2x$;

$(y^*)'' = -4M \cos 2x - 4N \sin 2x$. Підставимо в неоднорідне рівняння:

$$\begin{aligned} y^{*''} - 3y^{*'} - 4y^* &= 50 \sin 2x + 0 \cos 2x \\ -4M \cos 2x - 4N \sin 2x + 6M \sin 2x - 6N \cos 2x - 4M \cos 2x - 4N \sin 2x &= 50 \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x \end{aligned}$$

$$\cos 2x(-4M - 6N - 4M) + \sin 2x(-4N + 6M - 4N) = 50 \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в лівій и правій частині тотожності

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos 2x | -8M - 6N = 0 \\ \sin 2x | 6M - 8N = 50 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} N = -\frac{4}{3}M \\ 6M - 8 \cdot \left(-\frac{4}{3}M\right) = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = -4 \\ M = 3 \end{cases}. \text{Таким чином,} \end{aligned}$$

$$y^* = 3 \cos 2x - 4 \sin 2x.$$

в) Загальний розв'язок: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} + 3 \cos 2x - 4 \sin 2x$.

г) Знайдемо частинний розв'язок при початкових умовах:

$$y' = -c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{4x} - 6 \sin 2x - 8 \cos 2x.$$

Підставимо початкові умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

$$\begin{cases} 0 = c_1 e^{-0} + c_2 e^{4 \cdot 0} + 3 \cos(2 \cdot 0) - 4 \sin(2 \cdot 0) \\ -1 = -c_1 e^{-0} + 4c_2 e^{4 \cdot 0} - 6 \sin(2 \cdot 0) - 8 \cos(2 \cdot 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 = c_1 + c_2 \\ 7 = -c_1 + 4c_2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = -3 - c_2 \\ 4 = 5c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -3 - \frac{4}{5} = -\frac{19}{5} \\ c_2 = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Частинний розв'язок: при $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$; $y = -\frac{19}{5} e^{-x} + \frac{4}{5} e^{4x} + 3 \cos 2x - 4 \sin 2x$.

Контрольні завдання

ХІІ завдання:

1) Знайти загальний розв'язок дифференціального рівняння I порядку.

2) Знайти частинний розв'язок дифференціального рівняння II порядку

$y'' + py' + qy = f(x)$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

1. 1) $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$; 2) $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$

2. 1) $y' - 2y = e^{2x}$; 2) $y'' - 6y' = 12x + 10$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$

3. 1) $y' - \frac{2y}{1-x^2} = 1+x$; 2) $y'' + 4y = e^{-2x}$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$

4. 1) $y' + \frac{4x}{x^2+1} = \frac{3}{x^2+1}$; 2) $y'' - 2y' + 5y = 2 \cos 2x$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

5. 1) $y' - 2xy = x$; 2) $y'' + 5y' + 6y = 12 \sin 2x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$

6. 1) $y' + y = 2e^x$; 2) $y'' - 5y' = 12x - 7$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

7. 1) $y' + \frac{y}{x} = \ln x$; 2) $y'' - 4y' - \frac{9}{4}y = 2 \sin x + \cos x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$

8. 1) $y' + \frac{y}{x} = 1+x$; 2) $y'' - 4y' = 6x + 5$, $y_0 = 2$, $y_1 = 3$

9. 1) $y' - 2y = -x$; 2) $y'' - 2y' + y = 16e^x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$

10.1) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; 2) $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$, $y_0 = 3$, $y_1 = 2$

11.1) $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$; 2) $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$

12.1) $y' - 2y = e^{2x}$; 2) $y'' - 6y' = 12x + 10$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$

13.1) $y' - \frac{2y}{1-x^2} = 1+x$; 2) $y'' + 4y = e^{-2x}$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$

14.1) $y' + \frac{4x}{x^2+1} = \frac{3}{x^2+1}$; 2) $y'' - 2y' + 5y = 2 \cos 2x$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

15.1) $y' - 2xy = x$; 2) $y'' + 5y' + 6y = 12 \sin 2x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$

16.1) $y' + y = 2e^x$; 2) $y'' - 5y' = 12x - 7$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$

17.1) $y' + \frac{y}{x} = \ln x$; 2) $y'' - 4y' - \frac{9}{4}y = 2 \sin x + \cos x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$

18.1) $y' + \frac{y}{x} = 1+x$; 2) $y'' - 4y' = 6x + 5$, $y_0 = 2$, $y_1 = 3$

19.1) $y' - 2y = -x$; 2) $y'' - 2y' + y = 16e^x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$

20.1) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; 2) $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$, $y_0 = 3$, $y_1 = 2$

21.1) $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$; 2) $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$

22.1) $y' - 2y = e^{2x};$

2) $y'' - 6y' = 12x + 10, y_0 = 1, y_1 = 1$

23.1) $y' - \frac{2y}{1-x^2} = 1+x;$

2) $y'' + 4y = e^{-2x}, y_0 = 0, y_1 = 0$

24.1) $y' + \frac{4x}{x^2+1} = \frac{3}{x^2+1};$

2) $y'' - 2y' + 5y = 2\cos 2x, y_0 = 0, y_1 = 1$

25.1) $y' - 2xy = x;$

2) $y'' + 5y' + 6y = 12\sin 2x, y_0 = 1, y_1 = 2$

26.1) $y' + y = 2e^x;$

2) $y'' - 5y' = 12x - 7, y_0 = 0, y_1 = 1$

27.1) $y' + \frac{y}{x} = \ln x;$

2) $y'' - 4y' - \frac{9}{4}y = 2\sin x + \cos x, y_0 = 1, y_1 = 0$

28.1) $y' + \frac{y}{x} = 1+x;$

2) $y'' - 4y' = 6x + 5, y_0 = 2, y_1 = 3$

29.1) $y' - 2y = -x;$

2) $y'' - 2y' + y = 16e^x, y_0 = 1, y_1 = 2$

30.1) $y' + y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x};$

2) $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}, y_0 = 3, y_1 = 2$

Теорія ймовірностей.**Випадкові події.****Приклади розв'язання задач.****Приклад 17.**

В лотереї з 100 білетів 10 виграшних. Яка ймовірність того, що серед 5 навання куплених білетів 2 виявляться виграшними?

Розв'язок. Запишемо коротку умову задачі за допомогою наступної схеми:

Всього	Виграшних	Невиграшних
100	10	90
Купили		
5	2	3

Нехай A – випадкова подія “серед 5 навання куплених білетів 2 виявляться виграшними”.

За класичним означенням імовірності

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування,

m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів намання вибрати 5 білетів із 100, тобто кількості сполучень із 100 по 5, а саме $n = C_{100}^5$.

Визначимо кількість сприятливих події A результатів випробування – 2 білети серед 5 намання куплених виявляться виграшними. 2 виграшних білети можна вибрати з 10 виграшних C_{10}^2 способами, при цьому ті, що залишилися $5 - 2 = 3$ білети повинні бути невиграшними, і взяти їх можна з $100 - 10 = 90$ невиграшних білетів C_{90}^3 способами. Таким чином, за основним принципом комбінаторики (правилом добутку) $m = C_{10}^2 \cdot C_{90}^3$.

Отримаємо:

$$P(A) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{90}^3}{C_{100}^5} = \frac{\frac{10!}{2!(10-2)!} \cdot \frac{90!}{3!(90-3)!}}{\frac{100!}{5!(100-5)!}} = \frac{\frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{90!}{3! \cdot 87!}}{\frac{100!}{5! \cdot 95!}} = \frac{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 9 \cdot 30 \cdot 89 \cdot 44}{5 \cdot 33 \cdot 49 \cdot 97 \cdot 86} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 89 \cdot 22}{11 \cdot 49 \cdot 97 \cdot 43} = \frac{176220}{2248169} \approx 0,0784.$$

Відповідь: $P(A) \approx 0,0784$.

Приклад 18.

З семи карток розрізної абетки “а”, “і”, “о”, “з”, “к”, “н”, “ч” намання беруть 4 картки. Яка ймовірність, що з вибраних карток можна скласти слово “ніч”?

Розв’язок. Нехай A – випадкова подія з “вибраних карток можна скласти слово “ніч”.

За класичним означенням імовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування,

m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів навмання вибрати 4 картки із 7, тобто кількості сполучень із 7 по 4, а саме $n = C_7^4$.

Кількість сприятливих події A результатів випробування m рівна 4, так як сприятливими будуть набори з чотирьох букв:

“н”, “і”, “ч”, “а”;

“н”, “і”, “ч”, “о”;

“н”, “і”, “ч”, “з”;

“н”, “і”, “ч”, “к”.

Отримаємо:

$$P(A) = \frac{4}{C_7^4} = \frac{4}{\frac{7!}{4!(7-4)!}} = \frac{4}{\frac{7!}{4!3!}} = \frac{4}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}} = \frac{4}{7 \cdot 5} = \frac{4}{35}.$$

Відповідь: $P(A) = \frac{4}{35}.$

Приклад 19.

З восьми карток розрізної абетки “а”, “о”, “і”, “г”, “н”, “р”, “с”, “б” навмання беруть 5 карток і складають їх в порядку вибирання. Яка ймовірність отримання слова ”осінь”?

Розв’язок. Нехай A – випадкова подія “отримаємо слово ”осінь””.

За класичним означенням імовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування,
 m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів навмання вибрати 5 карток із 8 і скласти їх в порядку вибирання, тобто, кількості впорядкованих 5-елементних підмножин з 8-елементної множини карток – кількості розміщень з 8 по 5, а саме $n = A_8^5$.

Кількість сприятливих події A результатів випробування m рівна 1.

Отримаємо:

$$P(A) = \frac{1}{A_8^5} = \frac{1}{\frac{8!}{(8-5)!}} = \frac{1}{\frac{8!}{3!}} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{6720} \approx 0,00015.$$

Відповідь: $P(A) \approx 0,00015$.

Приклад 20.

Три стрільці проводять по одному пострілу в ціль, імовірність влучення в яку для першого стрільця рівна 0,6, для другого – 0,7, для третього – 0,8. Знайти ймовірність того, що:

- 1) всі стрільці влучать в ціль;
- 2) всі стрільці не влучать в ціль;
- 3) один стрілець влучить в ціль;
- 4) два стрільці влучать в ціль;
- 5) хоча б один стрілець влучить в ціль.

Розв'язок. Нехай випадкові події:

A – “перший стрілець влучить в ціль”,

B – “другий стрілець влучить в ціль”,

C – “третій стрілець влучить в ціль”.

Протилежні до цих подій:

$\bar{A}$ – “перший стрілець не влучить в ціль”,

$\bar{B}$ – “другий стрілець не влучить в ціль”,

$\bar{C}$ – “третій стрілець не влучить в ціль”.

За умовою задачі $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$, $P(C) = 0,8$.

Тоді

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4,$$

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3,$$

$$P(\bar{C}) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

При розв'язанні задачі скористаємось знаками:

$\cap$ – означає добуток або суміщення чи перетин подій, тобто, що події відбудуться одночасно;

$\cup$ – означає суму або об'єднання подій, тобто, що відбудеться принаймні одна з цих подій.

1) Випадкова подія “всі стрільці влучать в ціль” полягає в тому, що відбудуться одночасно події A, B, C , тобто $A \cap B \cap C$.

З умови задачі події A, B, C незалежні, тому ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

Відповідь: $P = 0,336$.

2) Випадкова подія “всі стрільці не влучать в ціль” полягає в тому, що відбудуться одночасно події $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, тобто $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

З умови задачі події $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ незалежні, тому ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

Відповідь: $P = 0,024$.

3) Випадкова подія “один стрілець влучить в ціль” полягає в тому, що відбудуться несумісні між собою події “перший стрілець влучить в ціль і другий – не влучить, і третій – не влучить” або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – влучить, і третій не влучить”, або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – не влучить, і третій влучить”, що можна записати за допомогою знаків суміщення та об'єднання подій у вигляді

$$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C).$$

Знайдемо шукану ймовірність, використовуючи аксіому ймовірності суми несумісних подій:

$$P = P((A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)) = P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C).$$

З умови задачі події $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ незалежні в сукупності, тому за означенням ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей.

Отримаємо:

$$P = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,036 + 0,056 + 0,096 = 0,188.$$

Відповідь: $P = 0,188$.

4) Випадкова подія “два стрільці влучать в ціль” полягає в тому, що відбудуться несумісні між собою події “перший стрілець влучить в ціль і другий – влучить, і третій не влучить” або “перший стрілець влучить в ціль і другий – не влучить, і третій – влучить”, або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – влучить, і третій – влучить”, що можна записати у вигляді

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C).$$

Знайдемо шукану ймовірність, використовуючи аксіому ймовірності суми несумісних подій:

$$P = P((A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)) = P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C).$$

Отримаємо:

$$P = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,084 + 0,144 + 0,224 = 0,452.$$

Відповідь: $P = 0,452$.

5) *1 спосіб.*

Випадкова подія “хоча б один стрілець влучить в ціль” полягає в тому, що відбудуться несумісні між собою події “один стрілець влучить в ціль” або “два стрільці влучать в ціль”, або “три стрільці влучать в ціль”.

З пунктів 3), 4), 1) знайдемо шукану ймовірність:

$$P = 0,188 + 0,452 + 0,336 = 0,976.$$

2 спосіб.

Нехай G – випадкова подія “хоча б один стрілець влучить в ціль”, тоді $\bar{G}$ – протилежна до неї подія “всі стрільці не влучать в ціль”.

Ймовірність події G рівна

$$P(G) = 1 - P(\bar{G}).$$

Використавши пункт 2), знайдемо шукану ймовірність:

$$P(G) = 1 - 0,024 = 0,976.$$

Відповідь: $P = 0,976$.

Зауваження. Очевидно, другий спосіб розв'язання коротший. Цей спосіб називають способом розв'язання від протилежної події.

Приклад 21.

Кинуто три гральних кубики. Яка ймовірність того, що на всіх кубиках випаде різна кількість зерен?

Розв'язок. Нехай випадкові події

A – “кількість зерен, що випали на першому кубіку”,

B – “кількість зерен, що випали на другому кубіку”,

C – “кількість зерен, що випали на третьому кубіку”.

За умовою задачі події A, B, C залежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/(A \cap B)).$$

На першому кубіку може випасти довільна кількість зерен, тому за класичним означенням ймовірності $P(A) = \frac{6}{6} = 1$.

На другому кубіку не може випасти та кількість зерен, що випала на першому кубіку, тому за класичним означенням ймовірності $P(B/A) = \frac{5}{6}$.

На третьому кубіку не може випасти та кількість зерен, що випала на першому кубіку і та – що випала на другому, тому за класичним означенням ймовірності $P(C/(A \cap B)) = \frac{4}{6}$.

Отримаємо:

$$P(A \cap B \cap C) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}.$$

Відповідь: $P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{9}$.

Приклад 22.

В урні містяться 5 однакових кульок з номерами від 1 до 5. Навмання витягають по одній 3 кульки. Знайти ймовірність того, що послідовно з'являться кульки з номерами 1, 2, 3, якщо кульки витягають:

- а) без повернення;
- б) з поверненням.

Розв'язок. Нехай випадкові події

A – “з'явиться кулька з номером 1”,

B – “з'явиться кулька з номером 2”,

C – “з'явиться кулька з номером 3”.

- а) За умовою задачі події A, B, C залежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/(A \cap B)).$$

За класичним означенням імовірності першою з'явиться кулька з номером 1 з ймовірністю $P(A) = \frac{1}{5}$.

Умовна ймовірність того, що другою з'явиться кулька з номером 2, при умові що вже витягли першу кульку з номером 1, рівна $P(B/A) = \frac{1}{4}$, так як в урні залишилось чотири кульки і одна з них з номером 2.

Третьою з'явиться кулька з номером 3, при умові, що першою з'явиться кулька з номером 1 і другою з'явиться кулька з номером 2, з умовною ймовірністю $P(C/(A \cap B)) = \frac{1}{3}$, так як в урні залишилось три кульки і одна з них з номером 3.

Отримаємо:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}.$$

Відповідь: $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{60}$.

б) За умовою задачі події A, B, C незалежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

За класичним означенням імовірності першою з'явиться кулька з номером 1 з ймовірністю $P(A) = \frac{1}{5}$.

Другою з'явиться кулька з номером 2 з ймовірністю $P(B) = \frac{1}{5}$, так як в урну повернули першу кульку і серед п'яти кульок – одна з номером 2.

Третьою з'явиться кулька з номером 3 з ймовірністю $P(C) = \frac{1}{5}$, так як в урну повернули другу кульку і серед п'яти кульок – одна з номером 3.

Отримаємо:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}.$$

$$\text{Відповідь: } P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{125}.$$

Приклад 23.

Пасажир для придбання квитка може навмання звернутись до однієї з трьох кас. Ймовірності наявності квитка в касах відповідно рівні 0,6, 0,7, 0,8. Яка ймовірність того, що придбаний квиток буде з першої каси?

Розв'язок. Нехай випадкові події:

A – “пасажир придбає квиток”,

H_1 – “пасажир вибере для купівлі квитка першу касу”,

H_2 – “пасажир вибере для купівлі квитка другу касу”,

H_3 – “пасажир вибере для купівлі квитка третю касу”.

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже,

$$\sum_{i=1}^3 P(H_i) = 1.$$

Також, за умовою задачі події H_1, H_2, H_3 рівноможливі, тобто, жодна з подій не має переваг появи при випробуванні, тому вони мають однакові ймовірності:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

За умовою задачі умовні ймовірності

$P(A/H_1) = 0,6$ – “пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі першу касу”,

$P(A/H_2) = 0,7$ – “пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі другу касу”,

$P(A/H_3) = 0,8$ – “пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі третю касу”.

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,7 + \frac{1}{3} \cdot 0,8 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (0,6 + 0,7 + 0,8) = \frac{2,1}{3} = 0,7. \end{aligned}$$

Ймовірність події “придбаний квиток буде з першої каси” знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,6}{0,7} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2}{7}.$$

$$\text{Відповідь: } P(H_1/A) = \frac{2}{7}.$$

Приклад 24.

Три автомати виготовляють однакові деталі, які подаються на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата в 2 рази більша продуктивності другого, а продуктивність другого автомата в 3 рази більша продуктивності третього. Перший автомат виготовляє в середньому 90 % деталей відмінної якості, другий – 95 %, а третій – 99 %, Яка ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь виготовлена другим автоматом, якщо вона має відмінну якість

?

Розв'язок. Нехай випадкові події

A – “взяли деталь відмінної якості”,

H_1 – “деталь виготовлена першим автоматом”,

H_2 – “деталь виготовлена другим автоматом”,

H_3 – “деталь виготовлена третім автоматом”.

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3 – гіпотези – утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже,

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Позначивши через N продуктивність третього автомата, запишемо кількість деталей, що подаються на конвеєр, за допомогою наступної схеми:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I автомат - } 6N \text{ деталей} \\ \text{II автомат - } 3N \text{ деталей} \\ \text{III автомат - } N \text{ деталей} \end{array} \right\} 10N \text{ деталей.}$$

За класичним означенням імовірності гіпотез рівні

$$P(H_1) = \frac{6N}{10N} = \frac{6}{10} = 0,6,$$

$$P(H_2) = \frac{3N}{10N} = \frac{3}{10} = 0,3,$$

$$P(H_3) = \frac{N}{10N} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Перевірка. $0,6 + 0,3 + 0,1 = 1$.

За умовою задачі умовні ймовірності рівні

$$P(A/H_1) = \frac{90}{100} = 0,9,$$

$$P(A/H_2) = \frac{95}{100} = 0,95,$$

$$P(A/H_3) = \frac{99}{100} = 0,99.$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,1 \cdot 0,99 = 0,54 + 0,285 + 0,099 = 0,924.$$

Імовірність події “взята з конвеєра деталь відмінної якості виготовлена другим автоматом” знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,95}{0,924} = \frac{3 \cdot 95}{924} = \frac{95}{308}.$$

Відповідь: $P(H_2 / A) = \frac{95}{308}.$

Приклад 25.

В урні було 6 чорних і 4 білих кульки. З неї випадковим чином вийняли 3 кульки. Яка ймовірність того, що вийняті після цього 2 кульки виявляться білими?

Розв’язок. Введемо позначення “Б” – вийняли білу кульку, “Ч” – вийняли чорну кульку.

Нехай випадкові події

A – “вийняті в кінці 2 кульки виявляться білими”,

H_1 – “БББ”,

H_2 – “ЧББ” або “БЧБ”, або “ББЧ”,

H_3 – “ЧЧБ” або “ЧБЧ”, або “БЧЧ”

H_4 – “ЧЧЧ”.

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3, H_4 – гіпотези – утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже,

$$\sum_{i=1}^4 P(H_i) = 1.$$

Знайдемо ймовірності гіпотез за формулою множення:

$$P(H_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{24}{720},$$

$$P(H_2) = 3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{216}{720},$$

$$P(H_3) = 3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{360}{720},$$

$$P(H_4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}.$$

Перевірка. $\frac{24}{720} + \frac{216}{720} + \frac{360}{720} + \frac{120}{720} = \frac{720}{720} = 1.$

Аналогічно, знайдемо умовні ймовірності:

$$P(A/H_1) = \frac{1}{7} \cdot 0 = 0,$$

$$P(A/H_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42},$$

$$P(A/H_3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42},$$

$$P(A/H_4) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}.$$

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^4 P(H_i) P(A/H_i) = \frac{24}{720} \cdot 0 + \frac{216}{720} \cdot \frac{2}{42} + \frac{360}{720} \cdot \frac{6}{42} + \frac{120}{720} \cdot \frac{12}{42} = \\ &= \frac{9}{30} \cdot \frac{1}{21} + \frac{15}{30} \cdot \frac{3}{21} + \frac{5}{30} \cdot \frac{6}{21} = \frac{84}{30 \cdot 21} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Відповідь: $P(A) = \frac{2}{15}.$

Контрольні завдання.

ХІІІ, ХІV завдання.

Завдання 1. В урні знаходиться a білих і b чорних куль. З урни послідовно виймають 2 кулі. Знайти ймовірність, що обидва різних кольорів. Розглянути 2 ситуації:

- а) перший шар повертають в урну,
- б) перший шар не повертають в урну.

Завдання 2. У двох ящиках знаходяться деталі. У першому ящику a_1 стандартних і b_1 нестандартних деталей. У другому ящику a_2 стандартних і b_2 нестандартних деталей. З першого ящика випадково вийняли деталь і перенесли

у другий ящик. Після цього для контролю з другого ящика вийняли деталь.
Знайти ймовірність, що ця деталь – стандартна.

Варіанти значень параметрів контрольних завдань

$\begin{matrix} \text{№ вар.} \\ \text{значень} \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	2	4	5	5	4	5	6	7	5	4	2	4	5	5	4
b	4	3	6	4	6	3	7	8	9	9	4	3	6	4	6
a_1	2	3	2	4	3	4	5	4	4	5	2	3	2	4	3
b_1	3	2	4	2	4	3	4	5	2	2	3	2	4	2	4
a_2	3	2	3	2	2	3	2	2	3	4	3	2	3	2	2
b_2	4	4	1	3	4	2	3	4	4	5	4	4	1	3	4

$\begin{matrix} \text{№ вар.} \\ \text{значень} \end{matrix}$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	2	3	5	5	4	4	6	7	5	4	2	4	5	5	4
b	4	3	6	4	5	3	7	9	9	9	3	3	5	4	5
a_1	2	3	2	4	3	5	5	4	4	3	2	1	2	4	3
b_1	3	5	4	2	2	3	4	4	2	2	1	2	4	2	2
a_2	1	2	2	2	2	2	2	2	3	4	2	2	5	2	2
b_2	4	4	1	3	3	2	3	3	4	5	3	4	1	3	1

Випадкові величини.

Приклади розв'язання задач.

Задача 26. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x_i	2	3	4	6	8
P_i	$\frac{4}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{16}{64}$	$\frac{16}{64}$

Для випадкової величини X :

- 1) побудувати многокутник розподілу;
- 2) знайти:
 - а) математичне сподівання;
 - б) дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок.

- 1) Побудуємо многокутник розподілу на рис. :

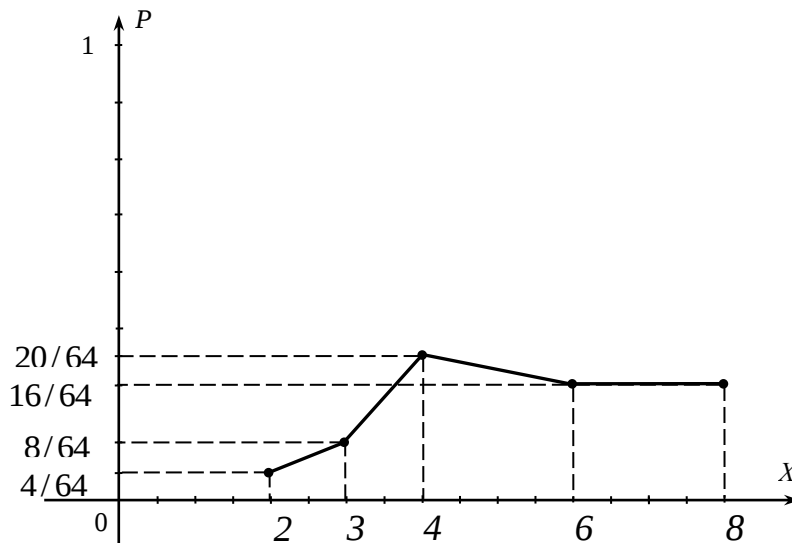


Рис.

2) а) математичне сподівання випадкової величини X будемо шукати за формулою:

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i .$$

Отримаємо:

$$MX = 2 \cdot \frac{4}{64} + 3 \cdot \frac{8}{64} + 4 \cdot \frac{20}{64} + 6 \cdot \frac{16}{64} + 8 \cdot \frac{16}{64} = \frac{336}{64} = \frac{21}{4} = 5,25 .$$

б) Дисперсію випадкової величини X шукатимемо за формулою:

$$DX = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (MX)^2 .$$

Отримаємо:

$$DX = 2^2 \cdot \frac{4}{64} + 3^2 \cdot \frac{8}{64} + 4^2 \cdot \frac{20}{64} + 6^2 \cdot \frac{16}{64} + 8^2 \cdot \frac{16}{64} - \left(\frac{21}{4} \right)^2 =$$

$$= \frac{2008}{64} - \frac{441}{16} = \frac{61}{16} = 3,8125.$$

Середнє квадратичне відхилення рівне $\sigma X = \sqrt{DX}$.

Отже, $\sigma X = \sqrt{3,8125} \approx 1,95$.

Задача 27.

Приклад 1.

Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ k \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Знайти:

- 1) множник k ;
- 2) щільність розподілу $p(x)$;
- 3) математичне сподівання випадкової величини X ;
- 4) дисперсію випадкової величини X ;
- 5) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;
- 6) імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a, b) при $a = 1, b = 2$.
- 7) Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Розв'язок. 1), 2) Щільність розподілу рівна першій похідній від функції розподілу:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ c \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + 3 \right) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ c(2x^2 + 3) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Множник k шукатимемо, скориставшись властивістю щільності розподілу випадкової величини X :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x) dx = 1.$$

За межами відрізка $[0,3]$ функція $p(x) = 0$, тому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= \int_0^3 k(2x^2 + 3) dx = \\ &= k \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_0^3 = k \left(\left(\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot 0 \right) \right) = k \cdot 27 = 1. \end{aligned}$$

Знайдемо $k = \frac{1}{27}$.

Тоді щільність розподілу рівна

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{27} \cdot (2x^2 + 3) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases} \triangleleft$$

3) Математичне сподівання випадкової величини X шукатимемо за формулою

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} MX &= \int_0^3 x \cdot \frac{1}{27} \cdot (2x^2 + 3) dx = \frac{1}{27} \int_0^3 (2x^3 + 3x) dx = \frac{1}{27} \cdot \left(2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(\left(\frac{2 \cdot 3^4}{4} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) - \left(\frac{2 \cdot 0^4}{4} + \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{3^3} \cdot \frac{3^4 + 3^3}{2} = \frac{3^3(3+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2. \triangleleft \end{aligned}$$

4) Дисперсію випадкової величини X шукатимемо за формулою

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - (MX)^2.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} DX &= \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{27} \cdot (2x^2 + 3) dx - 2^2 = \frac{1}{27} \int_0^3 (2x^4 + 3x^2) dx - 4 = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(2 \cdot \frac{x^5}{5} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 - 4 = \frac{1}{27} \cdot \left(\left(\frac{2 \cdot 3^5}{5} + 3^3 \right) - \left(\frac{2 \cdot 0^5}{5} + 0^3 \right) \right) - 4 = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{2 \cdot 3^5}{5} + 3^3 \right) - 4 = \frac{1}{3^3} \left(\frac{2 \cdot 3^3 \cdot 3^2}{5} + 3^3 \right) - 4 = \frac{3^3}{3^3} \left(\frac{2 \cdot 3^2}{5} + 1 \right) - 4 = \frac{18}{5} + 1 - 4 = \frac{3}{5}. \triangleleft \end{aligned}$$

5) Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X шукатимемо за

формулою $\sigma X = \sqrt{DX}$.

Отримаємо

$$\sigma X = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,7746.$$

6) Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a, b) знайдемо за формулою

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

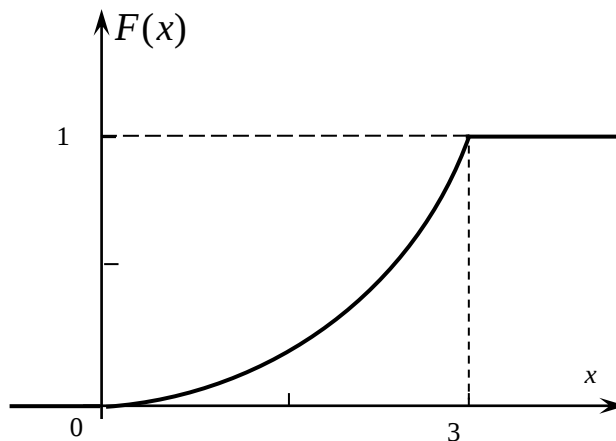
При $a=1, b=2$ отримаємо

$$\begin{aligned} P\{1 < X < 2\} &= F(2) - F(1) = \frac{1}{27} \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{27} \left(\left(\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 3 \cdot 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{16}{3} + 6 - \frac{2}{3} - 3 \right) = \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{14}{3} + 3 \right) = \frac{1}{27} \cdot \frac{23}{3} = \frac{23}{81}. \end{aligned}$$

7) Знайдемо значення функції розподілу при $x=0$ і при $x=3$:

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{27} \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{27} \left(\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot 0 \right) = 0, \\ F(3) &= \frac{1}{27} \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_{x=3} = \frac{1}{27} \left(\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right) = \frac{1}{3} (2+1) = 1. \end{aligned}$$

Побудуємо графік функції розподілу $F(x)$:

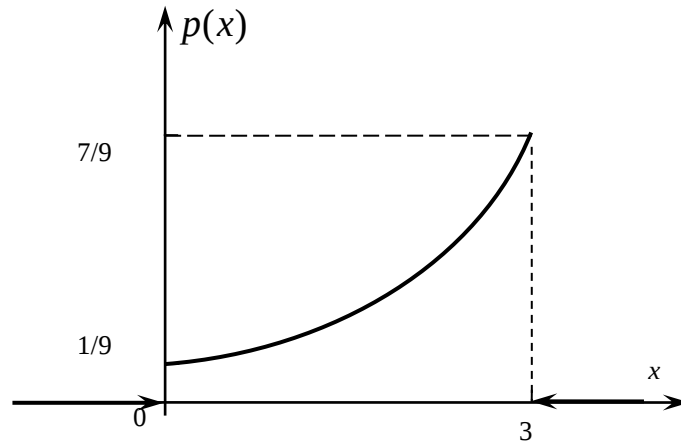


Знайдемо значення щільності розподілу при $x=0$ і при $x=3$:

$$p(0) = \frac{1}{27} (2x^2 + 3) \Big|_{x=0} = \frac{1}{27} (2 \cdot 0^2 + 3) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9},$$

$$p(3) = \frac{1}{27} (2x^2 + 3) \Big|_{x=3} = \frac{1}{27} (2 \cdot 3^2 + 3) = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}.$$

Побудуємо графік щільності розподілу $p(x)$:



Задача 28. Для нормально розподіленої випадкової величини X з математичним сподіванням a , середнім квадратичним відхиленням σ знайти:

- 1) ймовірність попадання в інтервал (α, β) ;
- 2) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $X - a$ буде меншою за δ ,

якщо $a = 3, \sigma = 4, \alpha = 2, \beta = 6, \delta = 7$.

Розв'язок. 1) Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал (α, β) знайдемо за формулою

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Отримаємо

$$P\{2 < X < 6\} = \Phi\left(\frac{6-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{4}\right) = \Phi\left(\frac{3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{4}\right) = \Phi(0,75) + \Phi(0,25).$$

Значення функції $\Phi(x)$ знайдемо за таблицею 3 додатків:

$$\Phi(0,75)=0,27337, \Phi(0,25)=0,09871.$$

Отримаємо

$$P\{2 < X < 6\} = 0,27337 + 0,09871 = 0,37208. \triangleleft$$

2) Знайдемо ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $X - a$ буде меншою за δ , скориставшись формулою ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал (α, β) :

$$\begin{aligned} P\{|X - a| < \delta\} &= P\{-\delta < X - a < \delta\} = P\{a - \delta < X < a + \delta\} = \\ &= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Так як функція Лапласа непарна, отримаємо

$$P\{|X - a| < \delta\} = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Для даної випадкової величини матимемо

$$P\{|X - 3| < 7\} = 2\Phi\left(\frac{7}{4}\right) = 2\Phi(1,75) = 2 \cdot 0,45994 = 0,91988. \blacktriangleleft$$

Контрольні завдання.

Завдання XV. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x_i	-1	0	1	2
P_i	P_1	P_2	P_3	P_4

- 1) побудувати багатокутник розподілу;
- 2) знайти:
 - а) математичне сподівання;
 - б) дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Завдання XVI. Неперервна випадкова величина X задана функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{k}, & 0 < x \leq R. \\ 0, & x > R \end{cases}$$

Знайти:

- 1) множник k ;
- 2) щільність розподілу $p(x)$;
- 3) математичне сподівання випадкової величини X ;
- 4) дисперсію випадкової величини X ;
- 5) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;
- 6) імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (c, d) .
- 7) Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Завдання XVII. Для нормально розподіленої випадкової величини X з математичним сподіванням a , середнім квадратичним відхиленням σ знайти: ймовірність потрапляння в інтервал (α, β) ;

Варіанти значень параметрів контрольних завдань.

№ вар. значень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,2	0,15	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
p_2	0,3	0,25	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,25	0,3	0,5
p_3	0,3	0,3	0,3	0,15	0,1	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3
p_4	0,2	0,3	0,2	0,25	0,2	0,2	0,1	0,35	0,1	0,1
c	-0,5	-0,2	-0,8	-0,3	-0,4	0,2	0,1	-0,1	0,2	-0,1
d	0,4	1,2	1,8	0,7	1,2	1,2	1,5	0,5	1,3	1,1
R	2	1	3	1/2	1/4	1/3	1/5	2/5	3/4	2/3
a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	2
σ	4	5	1	2	3	1	5	2	5	4
α	2	5	4	3	2	1	2	3	4	6
β	13	14	9	10	11	12	11	10	9	10

№ вар. значень	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_1	0,1	0,25	0,15	0,21	0,4	0,15	0,23	0,15	0,25	0,15
p_2	0,3	0,25	0,35	0,39	0,4	0,3	0,3	0,25	0,3	0,45
p_3	0,4	0,3	0,3	0,15	0,1	0,35	0,4	0,3	0,35	0,3
p_4	0,2	0,2	0,2	0,25	0,1	0,2	0,07	0,3	0,1	0,1
c	-0,5	-0,2	-0,8	-0,3	-0,4	0,2	0,1	-0,1	0,2	-0,1
d	0,4	1,2	1,8	0,7	1,2	1,2	1,5	0,5	1,3	1,1
R	2	1	3	1/2	1/4	1/3	1/5	2/5	3/4	2/3

a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	2
σ	4	5	1	2	3	1	5	2	5	4
α	2	5	4	3	2	1	2	3	4	6
β	10	12	19	11	10	11	10	15	19	8

$\begin{matrix} \text{№ вар.} \\ \text{значень} \end{matrix}$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p_1	0,24	0,15	0,1	0,2	0,3	0,15	0,1	0,1	0,25	0,2
p_2	0,3	0,25	0,45	0,4	0,35	0,3	0,2	0,25	0,3	0,4
p_3	0,26	0,3	0,3	0,1	0,15	0,4	0,5	0,35	0,4	0,3
p_4	0,2	0,3	0,15	0,3	0,2	0,15	0,2	0,3	0,05	0,1
c	-0,6	-0,2	-0,4	-0,1	-0,5	0,3	0,15	-0,15	0,1	0,1
d	0,4	1,2	1,8	0,7	1,2	1,2	1,5	0,5	1,3	1,1
R	2	1	3	1/2	1/4	1/3	1/5	2/5	3/4	2/3
a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	2
σ	4	5	1	2	3	1	5	2	5	4
α	2	5	4	3	2	1	2	3	4	6
β	16	17	9	8	9	6	8	7	19	30

Математична статистика.

Приклад 29. Отримано статистичний розподіл:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Частковий інтервал	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
Частота	4	12	20	28	24	22

Побудувати:

- 1) гістограму частот;
- 2) емпіричну функцію розподілу.

Знайти:

- а) вибіркове середнє;
- б) вибірккову дисперсію;
- в) вибірккове середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок. 1) Побудуємо гістограму частот – кусково-сталу функцію, яка приймає на кожному з k рівних інтервалів довжиною h значення $\frac{n_i}{h}$,

де $h = \frac{x_n - x_1}{k}$,

$x_i, i = 1, \dots, n$, – спостережені значення – варіанта вибірки;

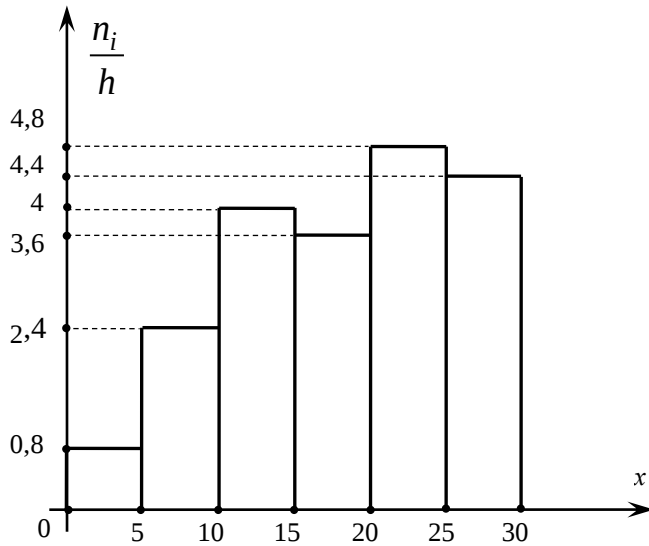
n_i – частота варіанти x_i .

За умовою задачі кількість інтервалів $k = 6$, довжина інтервалу $h = 5$.

Знайдемо значення $\frac{n_i}{h}$ – щільності частот:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Частковий інтервал	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
Частота	4	12	20	18	24	22
Щільність частоти	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{20}{5}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{22}{5}$

На осі абсцис відкладемо часткові інтервали, а на осі ординат – щільності частот:



Зауваження. Площа фігури, обмеженої гістограмою частот і віссю абсцис, рівна сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки. $\triangleleft$

2) Знайдемо емпіричну функцію розподілу.

Емпіричну функцію розподілу; яка задає для кожного значення x відносну частоту події $\{X < x\}$, визначають співвідношенням:

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x} n_i.$$

Знайдемо об'єм вибірки:

$$n = \sum n_i = 4 + 12 + 20 + 18 + 24 + 22 = 100.$$

Так як об'єм вибірки великий і її варіанти розбиті на інтервали, то при знаходженні емпіричної функції розподілу вважатимемо, що на кожному інтервалі значення варіанти рівне середньому арифметичному кінців інтервалу, а саме:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
-----------------	---	---	---	---	---	---

Варіанта x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Частота n_i	4	12	20	18	24	22

Найменша варіанта дорівнює $x_1 = 2,5$, отже

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x \leq 2,5.$$

Значення $X < 7,5$ спостерігалось 4 рази при $x_1 = 2,5$, отже

$$F^*(x) = \frac{4}{100} \text{ при } 2,5 < x \leq 7,5.$$

Значення $X < 12,5$ спостерігалось 4 рази при $x_1 = 2,5$ та 12 разів при $x_2 = 7,5$, отже

$$F^*(x) = \frac{4+12}{100} = \frac{16}{100} \text{ при } 7,5 < x \leq 12,5.$$

Значення $X < 17,5$ спостерігалось:

4 рази при $x_1 = 2,5$,

12 разів при $x_2 = 7,5$,

20 разів при $x_3 = 12,5$,

отже

$$F^*(x) = \frac{4+12+20}{100} = \frac{36}{100} \text{ при } 12,5 < x \leq 17,5.$$

Значення $X < 22,5$ спостерігалось:

4 рази при $x_1 = 2,5$,

12 разів при $x_2 = 7,5$,

20 разів при $x_3 = 12,5$,

18 разів при $x_4 = 17,5$,

отже

$$F^*(x) = \frac{4+12+20+18}{100} = \frac{54}{100} \text{ при } 17,5 < x \leq 22,5.$$

Значення $X < 27,5$ спостерігалось:

4 рази при $x_1 = 2,5$,

12 разів при $x_2 = 7,5$,

20 разів при $x_3 = 12,5$,

18 разів при $x_4 = 17,5$,

24 рази при $x_5 = 22,5$,

отже

$$F^*(x) = \frac{4+12+20+18+24}{100} = \frac{78}{100} \text{ при } 22,5 < x \leq 27,5.$$

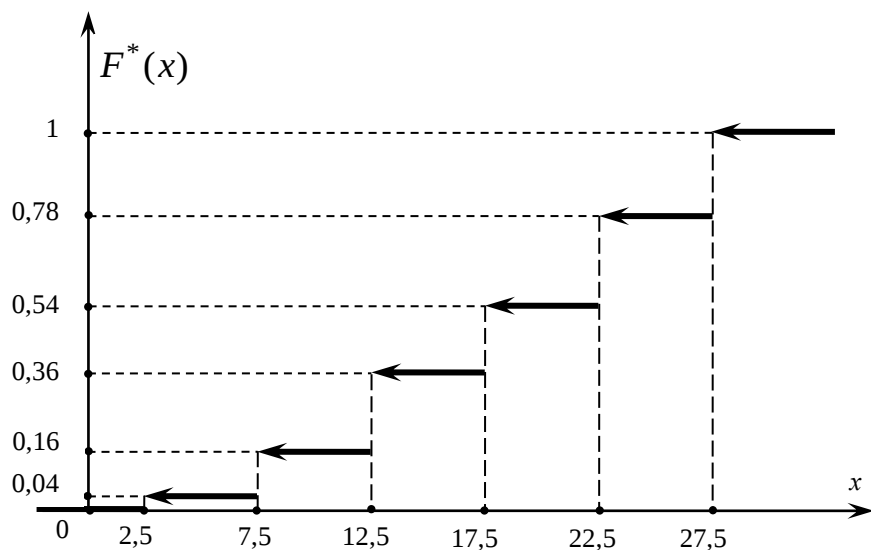
Значення $X = 27,5$ – найбільша варіанта, отже

$$F^*(x) = 1 \text{ при } x > 27,5.$$

Таким чином, шукана емпірична функція розподілу матиме вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2,5, \\ 0,04, & \text{при } 2,5 < x \leq 7,5, \\ 0,16, & \text{при } 7,5 < x \leq 12,5, \\ 0,36, & \text{при } 12,5 < x \leq 17,5, \\ 0,54, & \text{при } 17,5 < x \leq 22,5, \\ 0,78, & \text{при } 22,5 < x \leq 27,5, \\ 1, & \text{при } x > 27,5. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $F^*(x)$:



а) Знайдемо вибіркове середнє.

Вибіркове середнє $\bar{x}_B$ – число, яке рівне

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}.$$

Для даної вибірки матимемо:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{100} \cdot (2,5 \cdot 4 + 7,5 \cdot 12 + 12,5 \cdot 20 + 17,5 \cdot 18 + 22,5 \cdot 24 + 27,5 \cdot 22) = 18,1. \triangleleft$$

б) Знайдемо вибірккову дисперсію.

Вибіркова дисперсія D_B – число, рівне

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n}.$$

Для даної вибірки матимемо:

$$D_B = \frac{1}{100} \cdot ((2,5 - 18,1)^2 \cdot 4 + (7,5 - 18,1)^2 \cdot 12 + (12,5 - 18,1)^2 \cdot 20 + (17,5 - 18,1)^2 \cdot 18 + (22,5 - 18,1)^2 \cdot 24 + (27,5 - 18,1)^2 \cdot 22) = 53,64. \triangleleft$$

в) Знайдемо вибірккове середнє квадратичне відхилення за формулою:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Отримаємо:

$$\sigma_B = \sqrt{53,64} \approx 7,32. \blacktriangleleft$$

Приклад 30. Використовуючи критерій згоди Пірсона, за статистичними даними

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Частковий інтервал	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
Частота	6	10	33	32	11	8

встановити, чи узгоджуються спостереження із законом:

а) рівномірного розподілу;

б) Пуассона;

в) Гауса.

За рівень значущості прийняти $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$, $\alpha = 0,1$ відповідно.

Розв'язок. а) Застосуємо критерій Пірсона до перевірки гіпотези H_0 про рівномірний розподіл генеральної сукупності.

1) Так як варіанти вибірки розбиті на інтервали, прийнемо на кожному інтервалі значення варіанти рівним середньому арифметичному кінців інтервалу, а саме:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Варіанта x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Частота n_i	6	10	33	32	11	8

2) Обчислимо імовірності p_i , $i = \overline{1,6}$, попадання випадкової величини X в кожний з інтервалів, вважаючи, що гіпотеза H_0 вірна:

$$p_i = \frac{1}{6}.$$

3) В якості критерію перевірки гіпотези вибирають випадкову величину

$$\chi_B^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n},$$

що задає відхилення спостережних частот від гіпотетичних (очікуваних), яка при $n \rightarrow \infty$ збігається до розподілу χ^2 незалежно від вигляду закону розподілу випадкової величини X .

Для застосування критерію Пірсона необхідно, щоб об'єм вибірки був $n \geq 50$ і $p_i n \geq 5$, ($i = 1, 2, \dots, k$). Якщо в деяких інтервалах остання умова не виконується, то їх треба об'єднати із сусідніми.

Розв'язок задачі зручно проводити, заповнюючи наступну таблицю:

номер інтервалу	спостережні частоти n_i	імовірність попадання p_i в i - інтервал	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$-\frac{64}{6}$	6,827
2	10	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$-\frac{40}{6}$	2,667
3	33	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$\frac{98}{6}$	16,007
4	32	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$\frac{92}{6}$	14,107
5	11	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$-\frac{34}{6}$	19,267
6	8	$\frac{1}{6}$	$\frac{100}{6}$	$-\frac{52}{6}$	4,507

–	$\sum n_i = 100$	$\sum p_i = 1$	–	–	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$ =63,382
---	------------------	----------------	---	---	---

Отже, критерій $\chi_B^2 = 63,382$.

4) Гіпотеза H_0 узгоджується з результатами спостережень при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і приймається, якщо

$$\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2(k-l-1),$$

де $\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1)$ – квантиль розподілу χ^2 ;

$k = 6$ – число інтервалів;

$l = 0$ – число невідомих параметрів розподілу, які знаходяться за вибіркою, оскільки нема параметрів, які підлягають оцінці за вибіркою.

Знайдемо за таблицею 5 додатків значення квантиля розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і степенях свободи $k-l-1 = 6-0-1 = 5$:

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1) = \chi_{1-0,05}^2(5) = \chi_{0,95}^2(5) = 11,1.$$

Так як

$$\chi_B^2 > \chi_{0,95}^2(5),$$

то гіпотезу H_0 про згоду спостережень із законом рівномірного розподілу треба відхилити. $\triangleleft$

б) Застосуємо критерій Пірсона до перевірки гіпотези H_0 про розподіл Пуассона генеральної сукупності.

1) Варіанти вибірки розбиті на інтервали.

2) Обчислимо імовірності p_i , $i = \overline{1,6}$, попадання випадкової величини X в кожний з інтервалів, вважаючи, що гіпотеза H_0 вірна.

Імовірності p_i знаходимо за законом Пуассона

$$p_i = P(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!},$$

де оцінка параметра розподілу λ рівна вибіркового середньому даної вибірки

$$\lambda = \bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}.$$

За умовою задачі $k = 6$, об'єм вибірки $n = \sum n_i = 100$.

Обчислимо λ , приймаючи на кожному інтервалі значення варіанти рівним середньому арифметичному кінців інтервалу:

$$\lambda = \frac{2,5 \cdot 6 + 7,5 \cdot 10 + 12,5 \cdot 33 + 17,5 \cdot 32 + 22,5 \cdot 11 + 27,5 \cdot 8}{100} = 15,3 \approx 15.$$

Знайдемо $e^{-\lambda}$ при $\lambda = 15$.

За таблицею 1 додатків $e^{-5} = 0,0067$, тоді

$$e^{-15} = (e^{-5})^3 = 0,0067^3 = 3 \cdot 10^{-7}.$$

Так як в формулі Пуассона треба, щоб значення варіант були цілими числами, заокруглимо їх до цілих чисел, отримаємо:

Номер інтервалу	1	2	3	4	5	6
Варіанта x_i	3	8	13	18	23	28

Обчислимо імовірності p_i , $i = \overline{1,6}$:

$$p_1 = P(X = 3) = \frac{e^{-15} \cdot 15^3}{3!} = 0,0001687,$$

$$p_2 = P(X = 8) = \frac{e^{-15} \cdot 15^8}{8!} = 0,019,$$

$$p_3 = P(X = 13) = \frac{e^{-15} \cdot 15^{13}}{13!} = 0,094,$$

$$p_4 = P(X = 18) = \frac{e^{-15} \cdot 15^{18}}{18!} = 0,069,$$

$$p_5 = P(X = 23) = \frac{e^{-15} \cdot 15^{23}}{23!} = 0,013,$$

$$p_6 = P(X = 28) = \frac{e^{-16} \cdot 16^{28}}{28!} = 0,0008386.$$

Зауваження. Так як зроблені вище обчислення досить трудомісткі, зручно скористатись, наприклад, програмою Mathcad.

3) Заповнимо таблицю:

номер інтервалу	спостережені частоти n_i	імовірність попадання p_i в i - інтервал	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	6	0,0001687	0,01687		
2	10	0,019	1,9		
3	33	0,094	9,4		
4	32	0,069	6,9		
5	11	0,013	1,3		
6	8	0,0008386	0,08386		
—	$\sum n_i = 100$	$\sum p_i = 0,196 \neq 1$	—	—	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$

Так як для інтервалів $i=1$, $i=2$ не виконується умова $p_i n \geq 5$, то результати обчислень величин цих рядків додаються до відповідних величин інтервалу $i=3$.

Аналогічно, так як для інтервалів $i = 5$, $i = 6$ не виконується умова $p_i n \geq 5$, то результати обчислень величин цих рядків додаються до відповідних величин інтервалу $i = 4$.

Тоді число інтервалів $k = 2$, так як вказані інтервали треба об'єднати.

Число невідомих параметрів розподілу Пуассона $l = 1$, так як визначався один параметр λ за вибіркою.

Число степенів свободи $k - l - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$ – не може бути нульовим.

Так як сума обчислених за формулою Пуассона ймовірностей p_i набагато менша від 1 та число степенів свободи рівне 0, то гіпотезу H_0 про розподіл генеральної сукупності за законом Пуассона відхиляємо. $\triangleleft$

в) Застосуємо критерій Пірсона до перевірки гіпотези H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності.

1) Варіанти вибірки розбиті на інтервали за умовою задачі.

2) Обчислимо імовірності p_i , $i = \overline{1,6}$, попадання випадкової величини X в кожний з інтервалів, вважаючи, що гіпотеза H_0 вірна.

Для оцінки параметрів a і σ^2 нормального розподілу обчислимо вибіркове середнє та виправлену дисперсію, приймаючи на кожному інтервалі значення варіанти рівним середньому арифметичному кінців інтервалу:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n} = \frac{2,5 \cdot 6 + 7,5 \cdot 10 + 12,5 \cdot 33 + 17,5 \cdot 32 + 22,5 \cdot 11 + 27,5 \cdot 8}{100} = 15,3;$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i = \frac{1}{100-1} \cdot [(2,5-15,3)^2 \cdot 6 + (7,5-15,3)^2 \cdot 10 + \\ &+ (12,5-15,3)^2 \cdot 33 + (17,5-15,3)^2 \cdot 32 + (22,5-15,3)^2 \cdot 11 + (27,5-15,3)^2 \cdot 8] = \\ &= \frac{3766}{99} = 38, (04) \approx 38,04. \end{aligned}$$

Знайдемо виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{38,04} \approx 6,17.$$

Замінімо найменшу варіанту 0 даної вибірки на $-\infty$, а найбільшу варіанту 30 – на ∞ .

Імовірності p_i знаходимо за формулою:

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_B}{S}\right).$$

Скориставшись таблицею 3 додатків для обчислення значень функції $\Phi(x)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} p_1 = P(-\infty < X < 5) &= \Phi\left(\frac{5 - 15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 15,3}{6,17}\right) = \Phi(-1,67) - \Phi(-\infty) = \\ &= -\Phi(1,67) - (-0,5) = -0,45254 + 0,5 = 0,04746; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 = P(5 < X < 10) &= \Phi\left(\frac{10 - 15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 15,3}{6,17}\right) = \Phi(-0,86) - \Phi(-1,67) = \\ &= -\Phi(0,86) + \Phi(1,67) = -0,30511 + 0,45254 = 0,14743; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 = P(10 < X < 15) &= \Phi\left(\frac{15 - 15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 15,3}{6,17}\right) = \Phi(-0,05) - \Phi(-0,86) = \\ &= -\Phi(0,05) + \Phi(0,86) = -0,01994 + 0,30511 = 0,28517; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4 = P(15 < X < 20) &= \Phi\left(\frac{20 - 15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{15 - 15,3}{6,17}\right) = \Phi(0,76) - \Phi(-0,05) = \\ &= \Phi(0,76) + \Phi(0,05) = 0,27637 + 0,01994 = 0,29631; \end{aligned}$$

$$p_5 = P(20 < X < 25) = \Phi\left(\frac{25 - 15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 15,3}{6,17}\right) = \Phi(1,57) - \Phi(0,76) =$$

$$= 0,44179 - 0,27637 = 0,1221;$$

$$p_6 = P(25 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 15,3}{6,17}\right) - \Phi\left(\frac{25 - 15,3}{6,17}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(1,57) =$$

$$= 0,5 - 0,44179 = 0,05821.$$

3) Заповнимо таблицю:

номер інтервалу	спостережені частоти n_i	імовірність попадання p_i в i - інтервал	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	6	0,04746	4,746	1,254	
2	10	0,14743	14,743	-4,743	
3	33	0,28517	28,517	4,418	
4	32	0,29631	29,631	2,369	
5	11	0,1221	12,21	-1,21	
6	8	0,05821	5,821	2,179	
—	$\sum n_i = 100$	$\sum p_i = 0,84679$	—	—	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$

Так як для інтервалу $i=1$ не виконується умова $p_i n \geq 5$, то результати обчислень величин $p_i n$ та $n_i - p_i n$ цього рядка додаються до відповідних величин інтервалу $i=2$:

$$p_i n = 4,746 + 14,743 = 19,489,$$

$$n_i - p_i n = 1,254 - 4,743 = -3,489.$$

Отримаємо:

номер інтервалу	очікувані частоти $p_i n$	$n_i - p_i n$	$\frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	19,489	-3,489	0,625
2	28,517	4,418	0,684
3	29,631	2,369	0,189
4	12,21	-1,21	0,12
5	5,821	2,179	0,816
—	—	—	$\sum \frac{(n_i - p_i n)^2}{p_i n}$ =2,434

Отже, критерій $\chi_B^2 = 2,434$.

4) Число інтервалів $k = 5$; число невідомих параметрів розподілу $l = 2$, так як за вибіркою оцінювали математичне сподівання і дисперсію нормального розподілу.

Знайдемо за таблицею 5 додатків значення квантиля розподілу χ^2 за рівнем значущості $\alpha = 0,1$ і степенях свободи $k - l - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$:

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1) = \chi_{1-0,1}^2(2) = \chi_{0,9}^2(2) = 4,61.$$

Так як

$$\chi_B^2 < \chi_{0,9}^2(2),$$

то гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності приймається.



Приклад 31. За вибіркою, заданою таблицею

X	0	3	6	10	11	15	19
Y	12	11	7	6	2	0	-4

- а) визначити коефіцієнт кореляції;
 б) при $\alpha = 0,05$ перевірити значущість кореляційної залежності;
 в) знайти рівняння лінійної регресії $y = kx + b$ і побудувати графік.

Розв'язок. а) Вибірковий коефіцієнт кореляції обчислимо за формулою:

$$\rho_B = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \bar{\sigma}_X \bar{\sigma}_Y},$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i$ – вибіркове середнє ознаки X ,

$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k y_i$ – вибіркове середнє ознаки Y ,

n – об'єм вибірки,

$\bar{\sigma}_X^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ – вибіркова дисперсія ознаки X ,

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$\bar{\sigma}_Y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2$ – вибіркова дисперсія ознаки Y ,

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Об'єм вибірки $n = 7$.

Обчислимо:

$$\sum_{i=1}^7 x_i = 0 + 3 + 6 + 10 + 11 + 15 + 19 = 64,$$

$$\sum_{i=1}^7 y_i = 12 + 11 + 7 + 6 + 2 + 0 - 4 = 34,$$

$$\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 0^2 + 3^2 + 6^2 + 10^2 + 11^2 + 15^2 + 19^2 = 852,$$

$$\sum_{i=1}^7 y_i^2 = 12^2 + 11^2 + 7^2 + 6^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2 = 370.$$

Знайдемо:

$$\bar{x} = \frac{64}{7}, \quad \bar{y} = \frac{34}{7},$$

$$(\bar{x})^2 = \left(\frac{64}{7}\right)^2 = \frac{4096}{49}, \quad (\bar{y})^2 = \left(\frac{34}{7}\right)^2 = \frac{1156}{49},$$

$$\overline{x^2} = \frac{852}{7}, \quad \overline{y^2} = \frac{370}{7},$$

$$\bar{\sigma}_X^2 = \frac{852}{7} - \frac{4096}{49} = \frac{1868}{49}, \quad \bar{\sigma}_X = \sqrt{\bar{\sigma}_X^2} = \sqrt{\frac{1868}{49}} = \frac{\sqrt{1868}}{7},$$

$$\bar{\sigma}_Y^2 = \frac{370}{7} - \frac{1156}{49} = \frac{1434}{49}, \quad \bar{\sigma}_Y = \sqrt{\bar{\sigma}_Y^2} = \sqrt{\frac{1434}{49}} = \frac{\sqrt{1434}}{7},$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= \left(0 - \frac{64}{7}\right) \cdot \left(12 - \frac{34}{7}\right) + \left(3 - \frac{64}{7}\right) \cdot \left(11 - \frac{34}{7}\right) + \\ &+ \left(6 - \frac{64}{7}\right) \cdot \left(7 - \frac{34}{7}\right) + \left(10 - \frac{64}{7}\right) \cdot \left(6 - \frac{34}{7}\right) + \left(11 - \frac{64}{7}\right) \cdot \left(2 - \frac{34}{7}\right) + \\ &+ \left(15 - \frac{64}{7}\right) \cdot \left(0 - \frac{34}{7}\right) + \left(19 - \frac{64}{7}\right) \cdot \left(-4 - \frac{34}{7}\right) = -\frac{3200}{49} - \frac{1849}{49} - \frac{330}{49} + \\ &+ \frac{48}{49} - \frac{260}{49} - \frac{1394}{49} - \frac{4278}{49} = -\frac{11263}{49}, \end{aligned}$$

$$\rho_B = \frac{-\frac{11263}{49}}{7 \cdot \frac{\sqrt{1868}}{7} \cdot \frac{\sqrt{1434}}{7}} \approx -\frac{11263}{7 \cdot 43,220 \cdot 37,868} \approx -0,983.$$

Зауваження. Вибірковий коефіцієнт кореляції за своїми властивостями

$-1 \leq \rho_B \leq 1$ і $\rho = 0$, якщо випадкові величини X та Y незалежні. $\triangleleft$

б) При $\alpha = 0,05$ перевіримо значущість кореляційної залежності випадкових величин X та Y , тобто перевіримо нульову гіпотезу $H_0: \rho = 0$ при альтернативній $H_1: \rho \neq 0$.

Для цього треба обчислити спостережне значення критерію

$$t_{\text{спост}} = \frac{|\rho_B|}{\sqrt{1 - \rho_B^2}} \cdot \sqrt{n - 2}.$$

Якщо

$$t_{\text{спост}} > t_{1-\alpha/2}(n-2),$$

де $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ – квантиль розподілу Стюдента порядку $1-\alpha/2$ з числом степенів свободи $k = n - 2$,

то зв'язок між величинами X та Y при рівні значущості α вважається значущим.

Обчислимо значення критерію:

$$t_{\text{спост}} = \frac{|-0,983|}{\sqrt{1 - (-0,983)^2}} \cdot \sqrt{7 - 2} = \frac{0,983}{\sqrt{1 - 0,983^2}} \cdot \sqrt{5} \approx 11,972.$$

За таблицею 6 додатків знаходимо значення квантиля розподілу Стюдента за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і степенях свободи $k = 7 - 2 = 5$:

$$t_{1-\alpha/2}(n-2) = t_{1-0,05/2}(5) = t_{0,975}(5) = 2,571.$$

Так як

$$t_{\text{спост}} > t_{0,975}(5),$$

то гіпотезу H_0 відхиляємо і приймаємо гіпотезу H_1 .

Отже, кореляційний зв'язок статистично значущий. $\triangleleft$

в) Знайдемо рівняння лінійної регресії $y = kx + b$.

Для визначення оцінок параметрів лінійної регресії скористаємось формулами:

$$\bar{k} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \bar{k} \sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Обчислимо:

$$\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 0 \cdot 12 + 3 \cdot 11 + 6 \cdot 7 + 10 \cdot 6 + 11 \cdot 2 + 15 \cdot 0 + 19 \cdot (-4) = 81.$$

Отримаємо:

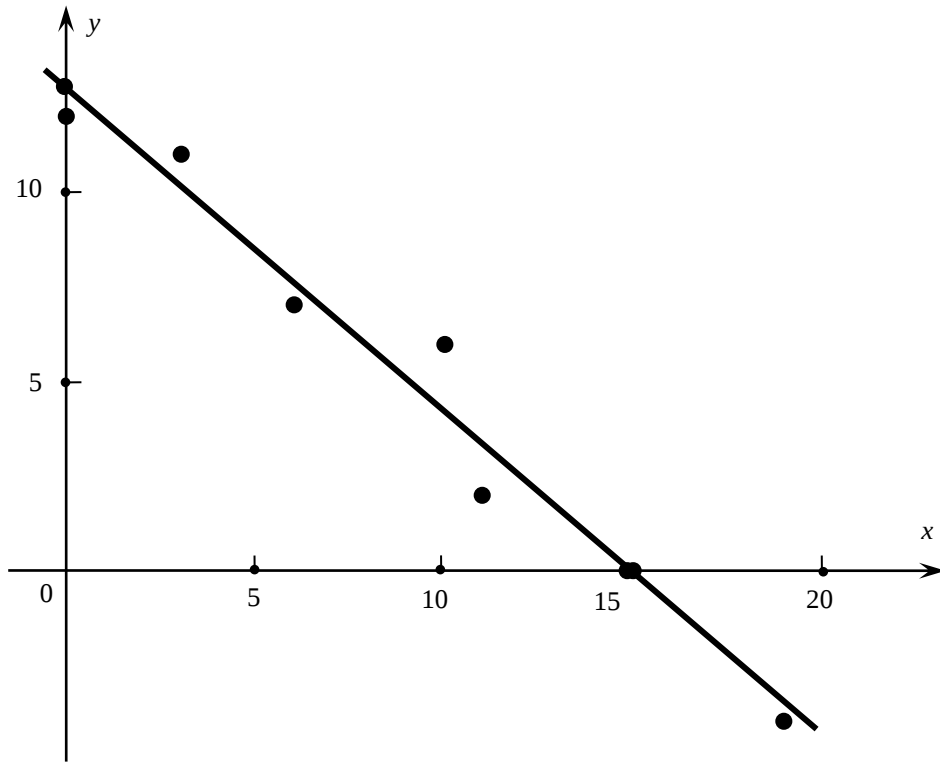
$$\bar{k} = \frac{7 \cdot 81 - 64 \cdot 34}{7 \cdot 852 - 64^2} \approx -0,86,$$

$$\bar{b} = \frac{34 - (-0,86) \cdot 64}{7} = 12,72.$$

Отже, рівняння регресії матиме вигляд:

$$y = -0,86x + 12,72.$$

На координатній площині зобразимо кореляційне поле – позначимо дані за умовою вибіркою точки (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 7$, і побудуємо відповідну пряму регресії:



1.

П о х і д н а***Правила диференціювання:***

1) $y = \text{const};$	$y' = 0.$
2) $y = cu; \quad c = \text{const}.$	$y' = cu'$
3) $y = u \pm v;$	$y' = u' \pm v'$
4) $y = u \cdot v;$	$y' = u'v + uv'$
5) $y = \frac{u}{v};$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6) $y = f(u), \quad u = \varphi(x)$	$y' = f'_u \varphi'_x$

Таблиця основних похідних елементарних функцій:

1) $y = x^\alpha;$	2) $y' = \alpha x^{\alpha-1}.$
3) $y = \sin x;$	4) $y' = \cos x.$
5) $y = \cos x;$	6) $y' = -\sin x.$
7) $y = \operatorname{tg} x;$	8) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
9) $y = \operatorname{ctg} x;$	10) $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
11) $y = \arcsin x;$	12) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
13) $y = \arccos x;$	14) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15) $y = \operatorname{arctg} x;$	16) $y' = \frac{1}{1+x^2}.$
17) $y = \operatorname{arcctg} x;$	18) $y' = -\frac{1}{1+x^2}.$
19) $y = a^x;$	20) $y' = a^x \ln a .$
21) $y = e^x;$	22) $y' = e^x;$
23) $y = \log_a x;$	24) $y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}.$
25) $y = \ln x;$	26) $y' = \frac{1}{x}.$

Додаток

2.

Основні правила інтегрування:

$$1) \int f'(x) dx = \int df(x) = f(x) + C;$$

$$d \int f(x) dx = d(F(x) + C) = f(x) dx.$$

$$2) \int (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx.$$

$$3) \int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad (a = \text{const}).$$

$$4) \text{ якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \text{ при умові, що } a, b - \text{ постійні числа, } a \neq 0.$$

$$5) \text{ якщо } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ та } u = \varphi(x) - \text{ будь-яка диференційована функція, то } \int f(u) du = F(u) + C.$$

Таблиця інтегралів від елементарних функцій:

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$	2) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$
3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	4) $\int e^x dx = e^x + C.$
5) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	6) $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$	10) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C.$
11) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$	12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$
13) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C.$	14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + \lambda} \right + C$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1972.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов. – 10-ое издание. – М.: Наука, 1990.
3. Валєєв К. Г., Джаладова І. А., Лютий О.І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2002.

4. Апатенок Р.Ф. Элементы линейной алгебры.- Минск:Вышейш.шк., 1985.
5. Апатенок Р.Ф. Сборник задач по линейной алгебре.- Минск: Вышейш.шк., 1980.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.-М.: Высш.шк., 1986.- Ч.1, Ч.2.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов.- М.: Наука, 1978.- Т.2.- 576 с.
8. Берман А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа.- М.: Наука, 1971.- 664 с.
9. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике.- Харьков, 1966.- Ч.4.-236 с.
10. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. 1977-2006 гг.