

УДК 539.3

СИНГУЛЯРНІ ІТЕРАЦІЇ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ І МЕТОДИ ЇХ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

Кривоблоцька Л.М., к.ф.-м.н., Дворніченко А.П., к.т.н.

Кіровоградський національний технічний університет

пр. Університетський, 8, 25006, м. Кіровоград, Україна

E-mail: larisa.krivoblotsky@list.ru

Запропоновано новий підхід у регуляризації сингулярних ітерацій. Підхід використовує нові уяви про суми, підсумовування рядів, послідовності та погляди на розв'язок як на деяку апроксимацію за параметром.

Ключові слова: пластини, сингулярні ітерації, методи регуляризації, підсумовуючі функції.

Вступ. При розв'язанні деяких лінійних і нелінійних граничних задач математичної фізики, механіки, гідромеханіки ітераційними методами (методом малого параметра, послідовних наближень) можна зустрітися з таким явищем: початкові наближення можуть і не мати сингулярних особливостей, але в подальших наближеннях вони з'являються, і порядок їх необмежено зростає з номером наближення.

Зрозуміло, що за такої ситуації неможливо одержати аналітично або чисельно розв'язок відповідної граничної задачі вказаними ітераційними методами. Для гасіння особливостей або пониження їх порядку були винайдені спеціальні заходи. Так, для пошуку чисто періодичних рухів нелінійних динамічних систем Пуанкаре [1] запропонував спеціальний метод; його ідея пізніше потрапила до задачі обтікання тіл потоками рідини або газу. Остаточно був сформульований метод Пуанкаре-Лайтхіла-Го. В задачах динаміки n -тіл, небесної механіки для аналізу явищ співударів були розроблені Зундманом [1], Кустанхеймо та Штифелем [2] спеціальні перетворення.

Мета роботи. Показати новий підхід при розв'язанні граничних задач і методів підсумовування.

Матеріал і результати досліджень. Якщо при розв'язку деякої граничної задачі одержано певну кількість сингулярних наближень, то здається, що питання про їх застосування для обчислень може і не виникати. Але ж у них уже є деякий позитивний момент: вони задовольняють ітераційним рівнянням, граничним і початковим умовам. Отже, основна ідея методу полягає в тому, що для покращення збіжності і гасіння порядків особливостей пропонується застосувати спеціальні методи підсумовування.

На цей час створено велику кількість лінійних методів підсумовування. Специфіка їх у тому, що підсумовуючі функції або підсумовуючі матриці містять конкретні числа, параметри. Для розв'язку задачі, яку вивчають автори цієї статті, запропоновані нові типи методів підсумовування. Принципова їх відміна від традиційних у тому, що у функції або матриці підсумовування вводяться додатні довільні функції і параметри. Варіюючи ними, можна суттєво впливати на практичну збіжність рядів. У зв'язку із цим можна навести приклади, які розглянуто в роботі [3]. Це задача про великі прогини круглої пластинки з отвором. Обчисленнями встановлено, що для великих навантажень метод послідовних наближень збігається при числі ітерацій порядку

150-200. Характер збіжності наближень до шуканого розв'язку осцилюючий, що взагалі характерно для геометрично нелінійних задач. У запропонованій роботі наведені дані, з яких видно, що на основі деяких перших "поганих" наближень запропонованим методом можна побудувати розв'язок задачі, не використовуючи інші, більш громіздкі в обчислювальному відношенні алгоритми.

Дослідження багатьох проблем зводиться до розв'язання крайових, початково-крайових лінійних або нелінійних задач. У багатьох випадках їх постановку можна сформулювати в операторному вигляді.

Нехай в евклідовому просторі задана деяка відкрита область G . Позначимо через u функцію, яка описує деякий фізичний процес. Будемо вважати, що u задовольняє нелінійним рівнянням.

Отже, нехай розглядається гранична задача

$$Lu = eC(u) + h(P), \quad Du|_G = y(P). \quad (1)$$

$L, C(u)$ - деякий, відповідно, лінійний та нелінійний оператори, $u = u(P)$ - шуканий розв'язок, P - точка області G розглядуваного евклідового простору. Розв'язок задачі знаходимо у вигляді:

$$e^0 : Lu_0 = h(P) \quad Du_0|_G = y(P), K \quad (2)$$

$$e^n : Lu_n = H(u_0, u_1, \dots) \quad Du_n|_G = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

тобто шуканий розв'язок цієї задачі

$$u = \sum_{s=0}^{\infty} e^s F_s(P) = F_0(P) + \sum_{s=1}^{\infty} e^s F_s(P), \quad (3)$$

де $F_s(P)$ - розв'язки лінійних граничних задач.

Уведемо у розгляд дві функції [3]:

$$f_1(l, P, z) = \frac{2lz}{2l + s(P) - zs(P)}, \quad (4)$$

$$f_2(l, P, z) = \frac{4 \frac{s(P)}{l} z_1 z}{(1 - z_1)^2}, \quad (5)$$

де введені позначення: $\lambda > 0$ довільний дійсний параметр; $\sigma(P) > 0$ - довільна, неперервна, строго додатна в Ω - функція; z - комплексна змінна двовимірної області Ω ;

$$z_1 = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{s}{l}\right) + 2\sqrt{\frac{s}{l}\left(1 + \frac{s}{l}\right)}} \quad (6)$$

Якщо покладемо в (4), (5) $z=1$, то одержимо, що

$$f_1(l, P, 1) = 1 \quad f_2(l, P, 1) = 1 \quad (7)$$
 для довільних l і $s(P)$.

Розкладемо функції f_1 і f_2 в околі точки $z=0$ в ступеневі ряди. Будемо мати:

$$f_1(l, P, z) = \frac{2l}{2l+s(P)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{s(P)}{2l+s(P)} \right]^k z^k, \quad (8)$$

$$f_2(l, P, z) = 4 \frac{s(P)}{l} z_1 \sum_{k=1}^{\infty} k z_1^{k-1} z^k. \quad (9)$$

Замість двох функцій f_1 і f_2 введемо одну функцію $f = f(l, P, z)$, розклад якої в околі точки $z=0$ представимо у вигляді:

$$f(l, P, z) = a_1(l, P)z + a_2(l, P)z^2 + \quad (10)$$

Для ряду (8) коефіцієнти $a_k(l, P)$ будуть дорівнювати:

$$a_1 = \frac{b}{p}; \quad a_2 = \frac{bs}{p^2}; \quad a_3 = \frac{bs^2}{p^3}; \quad a_4 = \frac{bs^3}{p^4} \quad (11)$$

де введені позначення: $b = 2l$, $p = b + s(P)$. (12)

Коефіцієнти $a_k(l, P)$ для ряду (9) будуть рівні

$$a_1 = 4 \frac{s}{l} z_1; \quad a_2 = 8 \frac{s}{l} z_1^2; \quad a_3 = 12 \frac{s}{l} z_1^3; \quad (13)$$

$$a_4 = 16 \frac{s}{l} z_1^4; \dots$$

Бачимо, що для довільних $l > 0, s(P) > 0$

$$a_k = a_k(l, P) > 0 \quad (k=1, 2, \mathbf{K}). \quad (14)$$

Легко встановити, що ряди (8) і (9) збігаються, відповідно, у таких областях:

$$|z| < \frac{2l+s}{s}; \quad |z| < \frac{1}{z_1} \quad (15)$$

Радіуси збіжності більші одиниці для довільних l і $s(P)$. Тепер, враховуючи (3), розглянемо функціональний ряд

$$U(P, l, s, z) = F_0(P) + \sum_{s=1}^{\infty} F_s [ef(l, P, z)]^s. \quad (16)$$

Покладемо в (10) $z=1$, тоді ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(l, P)$ буде збігатися абсолютно до одиниці, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(l, P) = 1 \quad (17)$$

для довільних $l > 0, s(P) > 0$. Тоді з виразу (16), враховуючи (17), при $z=1$, будемо мати: $U(P, l, s, 1) = U$. Підставимо у (16) ступеневий ряд (10), впорядкуємо вираз U за степенями z і покладемо $z=1$. Одержимо новий, модифікований ряд:

$$U(P, l, s, 1) = U_{z=1} = F_0(P) + U_1(P, l, s) + U_2(P, l, s) + U_3(P, l, s) + U_4(P, l, s) + \dots + U_5(P, l, s) + \mathbf{K} \quad (18)$$

Коефіцієнти цього ряду виражаються через коефіцієнти вихідного ряду наступним чином:

$$U_1 = eF_1 a_1, \quad U_2 = eF_1 a_2 + e^2 F_2 a_2^{(2)} \quad (19)$$

$$U_3 = eF_1 a_3 + e^2 F_2 a_3^{(2)} + e^3 F_3 a_3^{(3)}$$

$$U_4 = eF_1 a_4 + e^2 F_2 a_4^{(2)} + e^3 F_3 a_4^{(3)} + e^4 F_4 a_4^{(4)}$$

$$U_5 = eF_1 a_5 + e^2 F_2 a_5^{(2)} + e^3 F_3 a_5^{(3)} + e^4 F_4 a_5^{(4)} + \mathbf{K}$$

$$a_2^{(2)} = a_1^2, \quad a_3^{(2)} = 2a_1 a_2, \quad a_4^{(2)} = a_2^2 + 2a_1 a_3, \quad a_5^{(2)} = 2(a_1 a_4 + a_2 a_3)$$

$$a_3^{(3)} = a_1^3, \quad a_4^{(3)} = 3a_1^2 a_2, \quad a_5^{(3)} = 3(a_1 a_2^2 + a_1^2 a_3) \quad (20)$$

К К К К

Прийmemo до уваги (11), (20), обчислимо коефіцієнти (19):

$$U_1 = eF_1 \frac{b}{R}; \quad U_2 = eF_1 \frac{bs}{p^2} + e^2 F_2 \frac{b^2}{p^2};$$

$$U_3 = eF_1 \frac{bs^2}{R^3} + e^2 F_2 \frac{b^2 s}{R^3} + e^3 F_3 \frac{b^3}{R^3}; \quad (21)$$

$$U_4 = eF_1 \frac{bs^4}{R^5} + e^2 F_2 \frac{b^2 s^3}{R^5} + e^3 F_3 \frac{b^3 s^2}{R^5} + e^4 F_4 \frac{b^4 s}{R^4} + e^5 F_5 \frac{b^5}{R^5}.$$

Враховуючи аналогічно формули (13); (20), одержимо, що формули (19) набувають вигляд

$$U_1 = eF_1 \frac{4}{l} (sz_1)$$

$$U_2 = eF_1 \frac{8}{l} S_1(sz_1) + e^2 F_2 \frac{16}{l^2} (sz_1)^2 \quad (22)$$

$$U_3 = eF_1 \frac{12}{l} x_1^3 s + e^2 F_2 \frac{64}{l^2} z_1^3 s^2 + e^3 F_3 \frac{64}{l^3} z_1^3 s^3$$

$$U_4 = eF_1 \frac{16}{l} z_1^4 s + e^2 F_2 \frac{160}{l^2} z_1^4 s^2 + e^3 F_3 \frac{324}{l^3} z_1^4 s + e^4 F_4 \frac{256}{l^3} z_1^4 s.$$

Бачимо, що в модифіковані ряди типу (18), де коефіцієнти визначаються згідно формули (21), або (22) входять коефіцієнти вихідного ряду (3) і довільні функції σ_1, ζ_1 . Підбираючи їх конкретний вигляд можна істотно впливати на характер збіжності цих рядів, у тому числі гасити особливості. Розглянемо частинні суми ряду (18), остаточно

$$S_{n+1}^* = \bar{h}_0(R) + \sum_{s=1}^n e^s F_s d_s(n, R, l, s) \quad (23)$$

$$\text{де } d_s(n, R, l, s) = \sum_{k=1}^n a_k^{(s)}(R, l, s). \quad (24)$$

Запишемо формули (21) у вигляді

$$\dot{U} = eGF \quad (25)$$

$$\text{де } \dot{U} = (U_1, U_2, U_3, \dots)^T, \quad \dot{F} = (F_1, F_2, F_3, \dots)^T,$$

G – нижня трикутна матриця, що має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ a_2 & a_2^{(2)} & & & \\ a_3 & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & & \\ a_4 & a_4^{(2)} & a_4^{(3)} & a_4^{(4)} & \\ a_5 & a_5^{(2)} & a_5^{(3)} & a_5^{(4)} & a_5^{(5)} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Функції (4), (5) називають підсумовуючими функціями, а матриці G – підсумовуючими матрицями з формули (19); (21). Легко встановити конкретні типи матриці G для підсумовуючих функцій (4) і (5). Такі матриці мають дуже важливу властивість, так звану властивість перманентності:

1) якщо вихідні ряди по параметру збігаються по певній нормі до деякої суми, то по цій нормі збігаються видозмінені ряди при довільних λ і $s(r)$.

2) видозмінені ряди збігаються до тієї ж суми, що і вихідний ряд (також при довільних λ і $s(r)$).

Значить, коли ми застосовуємо підсумовуючі функції, ми не змінюємо суми вихідних збіжних рядків. Теорема про перманентність методу підсумовування доведена в роботах [4-7].

Для ілюстрації вищезгаданого розглянемо елементарну нелінійну задачу: необхідно в області $1 \leq r < \infty$ знайти розв'язок нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{du}{dr} = -e(m \ln r + 1)r^{m-1}u^2; \quad (27)$$

($\epsilon \geq 0$; m – довільне ціле число, включаючи $m=0$), при умовах

$$u|_{r=1} = 1; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u = 0. \quad (28)$$

Точний розв'язок цієї задачі нам відомий:

$$u = \frac{1}{1 + e r^m \ln r}$$

Але якщо застосувати метод розкладу по параметру ϵ , то одержимо

$$u = 1 - e r^m \ln r + e^2 r^{2m} \ln^2 r - e^3 r^{3m} \ln^3 r \quad (29)$$

Зрозуміло, що цей ряд є розбіжним при $e r^m \ln r \neq 1$. Значить сам метод розкладу по параметру призводить до рядів, які при $r \rightarrow \infty, \epsilon \neq 0$ і довільних m розбігаються, хоча точний розв'язок прямує до нуля при $r \rightarrow \infty$. У більш складних лінійних або нелінійних задачах математичної фізики можна знайти розв'язок задачі аналітичними ітеративними методами максимум у 3-4 наближеннях. Тому, стосовно ілюстративної елементарної задачі, вважаємо так: нехай ми змогли обчислити наближення до $n=4$ і розв'язком (формальним) є вираз:

$$u = 1 - e r^m \ln r + e^2 r^{2m} \ln^2 r - e^3 r^{3m} \ln^3 r \quad (30)$$

Застосуємо першу підсумовуючу функцію (4), для якої підсумовуюча матриця G має наступний вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{b}{P} & & & & \\ \frac{bs}{r^2} & \frac{b^2}{r^2} & & & \\ \frac{bs^2}{r^3} & \frac{2b^2s}{r^3} & \frac{b^3}{r^3} & & \\ \frac{bs^3}{r^4} & \frac{3b^2s^2}{r^4} & \frac{3b^3s}{r^4} & \frac{b^4}{r^4} & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (31)$$

Згідно (25) враховуючи (31) будемо функції U_i ($i=1,4$)

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{b}{P}; & U_2 &= \frac{bs}{r^2} - e r^m \ln r \frac{b^2}{r^2}; \\ U_3 &= \frac{bs^2}{r^3} - e \ln r \frac{2b^2s}{r^3} + e^2 r^{2m} \ln^2 r \frac{b^3}{r^3}; & (32) \\ U_4 &= \frac{bs^3}{r^4} - e r^m \ln r \frac{3b^2s^2}{r^4} + e^2 r^{2m} \ln^2 r \frac{3b^3s}{r^4} - \\ &\quad - e^3 r^{3m} \ln^3 r \frac{b^4}{r^4} \end{aligned}$$

У цих формулах $b = 2l$ і $s = s(r)$ – довільні; підбираємо їх такими, щоб формальний розв'язок $U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ задовольняв умовам при $r = 1, \quad r = \infty$. Покладемо: $b = 2l$ – довільне

$$s(r) = 2a r^m \ln r \quad (a \neq 0 - \text{довільне})$$

Тоді легко встановити, що

$$U|_{r=1} = 1 \quad U_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \text{для довільних } a > 0; l > 0$$

Постає питання вибору довільних a та λ . Побудуємо згідно (23), (24) частинну суму:

$$\begin{aligned} S_4^* &= 1 \cdot d(r, l, a) - e r^m \ln r \cdot d_2(r, l, a) + \\ &\quad + e^2 r^{2m} \ln^2 r \cdot d(r, l, a) - \\ &\quad - e^3 r^{3m} \ln^3 r s_4(r, l, a), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{де } s_1 &= \frac{b}{r} \left(1 + \frac{s}{r} + \frac{s^2}{r^2} + \frac{s^3}{r^3} \right), \\ s_2 &= \frac{b^2}{r^2} \left(1 + 2 \frac{s}{r} + 3 \frac{s^2}{r^2} \right), \\ s_3 &= \frac{b^3}{r^3} \left(1 + 3 \frac{s}{r} \right), & s_4 &= \frac{b^4}{r^4}. \end{aligned} \quad (34)$$

Будемо вимагати, щоб

$$e^3 f_m^3(r) \left[\frac{l}{l + a f_m(b)} \right]^4 < m, \quad \text{де}$$

$f_m(r) = r^m \ln r, m > 0$ – достатньо мале наперед задане число. Оскільки $l > 0, a > 0, f_m(r) > 0$ для $r > 1$, то

$$\frac{l}{l + a f_m(r)} < \frac{l}{a f_m(r)} \Rightarrow e^3 f_m^3(r) \left[\frac{l}{l + a f_m(r)} \right]^4 <$$

$$< e^3 \frac{1}{f_m(r)} \left(\frac{l}{a} \right)^4 \Rightarrow e^3 \frac{1}{f_m(r)} \left(\frac{l}{a} \right)^4 < m,$$

Бачимо, що при заданих e, r, m можна досить легко обрати відношення $\frac{l}{a}$ тим самим забезпечимо

умову; щоб в (33) коефіцієнти спадали.

Проведемо необхідні обчислення. Нехай $e = 1, m = 1$, тоді точний розв'язок задачі буде мати вигляд:

$$U = \frac{1}{1 + r \ln r}, \quad (35)$$

а з (30) маємо:

$$U = 1 - r \ln r + r^2 \ln^2 r - r^3 \ln^3 r \quad (36)$$

В формулах (3.9) покладемо

$$\frac{b}{r} = \frac{l}{l + ar \ln r}, \quad \frac{s}{r} = \frac{ar \ln r}{l + ar \ln r} \quad \text{або} \quad (37)$$

$$\frac{b}{r} = \frac{m}{m + r \ln r}; \quad \frac{s}{r} = \frac{r \ln r}{m + r \ln r}; \quad m = \frac{l}{a}$$

У табл. 1 надані значення одержаної частинної суми S_4^* згідно формул (33), (34) (37) та значення точного розв'язку задачі для різних r . Хочеться відмітити, що різними способами можливо покращувати результати розв'язків задач: вибором функцій s та параметра λ та врахуванням специфічних особливостей розглядуваної задачі.

Таблиця 1 – Значення точного розв'язку задачі

r	S_1^*	S_4^*	Точний розв'язок
1	1	1	1
1,2	0,8233	0,821221	0,82049
1,4	0,69226	0,67579	0,67978
1,6	0,59197	0,578748	0,57078
1,8	0,51501	0,49388	0,48704
2	0,45415	0,425	0,4191
3	0,27798	0,2403	0,2328

4	0,19565	0,1795	0,1528
---	---------	--------	--------

Висновки. Запропоновано новий підхід до регуляризації сингулярних ітерацій. Підхід використовує нові уявлення про суми, підсумовування рядів, послідовностей і погляд на розв'язок як на певну апроксимацію по параметру. Характерною особливістю методів є те, що в схему їх реалізації введено довільні функції і параметри, певним вибором яких можна впливати на сингулярності в ітераціях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. Избранные труды, I, Новые методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. – С. 335-340.
2. Sundman K.F. Memoire sur le probleme des trios corps. // Acta math. ю – 1917. - № 36. -Рр. 14-179.
3. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика / Пер. с англ. - М., 1975. – 303 с.
4. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. – Киев: Наукова думка, 1980. – С.118, 144-151.
5. Попов В.С., Елецкий В.Л., Турбинер А.В. О суммировании асимптотических рядов в квантовой теории поля // Письма в ЖЭТФ. – 1977. – Вып. 26, № 3. - С.193-197.
6. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Метод регуляризации сингулярных итераций в нелинейных задачах изгиба пластин с отверстием // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. – 2002. - Вип. 1. - С. 83-90.
7. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Сингулярные итерации в нелинейных задачах концентрации напряжений // Теорет. и прикладная механика. - 2002.- Вип. 36. - С. 98-108.

Стаття надійшла 18.03.2010 р.

Рекомендовано до друку к.ф.-м.н., доц.
Ляшенко В.П.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИТЕРАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Кривоблоцкая Л.Н., к.ф.-м.н., Дворниченко А.П., к.т.н.

Кировоградский национальный технический университет

пр. Университетский, 8, 25006, г. Кировоград, Украина

E-mail: larisa.krivoblotsky@list.ru

Предложен новый подход в регуляризации сингулярных итераций. Подход использует новые представления о суммах, суммировании рядов, последовательностей и взгляд на решение, как на некоторую аппроксимацию по параметру.

Ключевые слова: пластины, сингулярные итерации, методы регуляризации, суммирующие функции.

SINGULAR ITERATION BY SOLVING OF BOUNDARY PROBLEMS AND METHODS OF THEIR REGULARIZATION

L. Kryvoblotska, A. Dvornichenko

Kirovograd National Technical University

Kirovograd, 25006, av. Universytetskyi, 8

E-mail: larisa.krivoblotsky@list.ru

It is formed the new approach to the solving of problem of regularization: it is offered to change the usual notions about particular sum of series and methods of their summing. It is created the new methods of linear and nonlinear summing, when in summable functions the arbitrary parameters and functions enter.

Key words: plates, singular iterations, methods of regularization, summable functions.