УДК 531/534: 62-755: 62-752

І.І.Філімоніхіна, асист.
Кіровоградський національний технічний університет

Застосування функції Гамільтона до визначення умов зрівноваження автобалансирами ротора, здійснюючого просторовий рух

З використанням функції Гамільтона досліджені критичні швидкості системи, складеної з ротора, здійснюючого просторовий рух, мас, що створюють дисбаланс і автобалансира для зрівноваження ротора, при переході через які наступає або втрачається автобалансування. Отримані узагальнені критичні швидкості, придатні для будь-якого типу автобалансира. Встановлено, що зрівноваження динамічного дисбалансу двома автобалансирами у двох різних площинах корекції можливе тільки у разі довгого складеного ротора, утвореного ротором, масами дисбалансу і автобалансирами.
автобалансир, ротор, дисбаланс, функція Гамільтона, стійкість

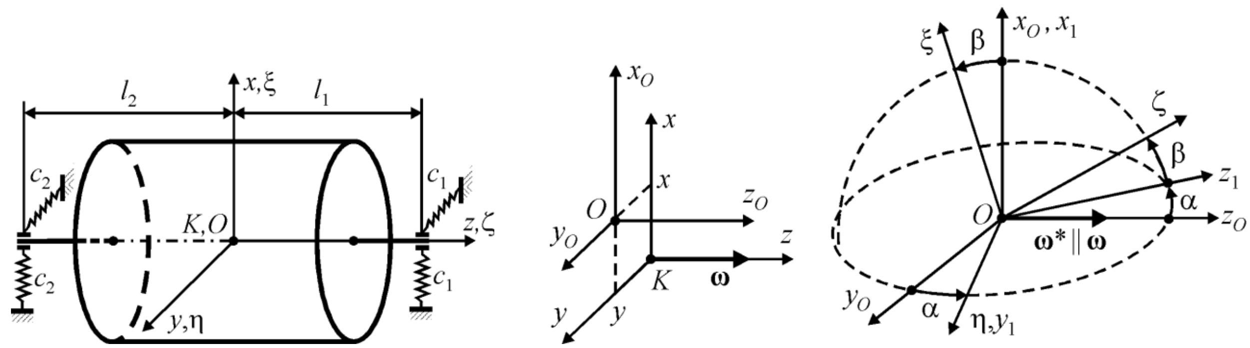
Вступ. Для зрівноваження на ходу швидкісних роторів застосовуються пасивні автобалансири (АБ), такі як кульові, кільцеві, маятникові тощо [1-5]. В них корегувальні вантажі (КВ) за певних умов з часом самі приходять в положення, в якому зрівноважують ротор і далі обертаються разом з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс, кутова швидкість обертання ротора, або не з'являться інші збурення.

Процес визначення умов настання автобалансування ускладнює велика кількість усталених рухів, які теоретично може здійснювати система. На практиці здійснюватимуться тільки ті рухи, які стійкі. В зв'язку з цим необхідним етапом визначення умов настання автобалансування є пошук усталених рухів системи ротор-АБ і оцінка їх стійкості. У роботі [6] був обґрунтований новий підхід до розв’язання цієї задачі, заснований на використанні функції Гамільтона. Цей підхід був застосований до ротора на ізотропних опорах, що здійснює плоский рух і зрівноважується пасивним АБ. У роботі [7] цей підхід був застосований до ротора з нерухомою точкою, який статично зрівноважується одним АБ. У даній роботі цей підхід застосовується до дослідження критичних швидкостей системи, складеної з ротора, який здійснює просторовий рух, мас, які створюють дисбаланс і автобалансирів для зрівноваження статичного чи динамічного дисбалансу.

На рис. а показана схема ротора на двох опорах, а на рис. б, в – схема руху системи. Ротор – зрівноважений, обертається з постійною кутовою швидкістю обертання ω навколо осі, що проходить через подовжню вісь вала ротора при недеформованих опорах. З ним жорстко зв'язані маси, що створюють дисбаланс. Усередині ротора встановлені АБ для зрівноваження дисбалансу. Ротор утримують зліва і справа осесиметричні опори відповідно жорсткостей c_1, c_2. Дія сил тяжіння не враховується.

Рух ротора задаватимемо за допомогою двох трійок осей $Kxyz$ і $O\xi\eta\zeta$. Осі $O\xi\eta\zeta$ – головні центральні осі інерції ротора. При недеформованих опорах ці осі співпадають, причому осі z, ζ направлені по осі вала ротора. В процесі руху осі $O\xi\eta\zeta$ переміщаються таким чином. Спочатку вони переміщаються поступально на x, y щодо осей $Kxyz$, внаслідок чого переходять в проміжне положення $Ox_O y_O z_O$. Потім осі $Ox_O y_O z_O$

повертаються на кути Резаля α, β, як це показаний на рис. в, після чого переходять в осі $O\xi\eta\zeta$. Потім осі $O\xi\eta\zeta$ і $Kxyz$ повертаються навколо осі z з кутовою швидкістю обертання ω. Відмітимо, що на усталеному русі система обертається як жорстке ціле навколо осі z з постійною кутовою швидкістю ω.



а б в

Рисунок – Модель ротора на двох опорах:

а – модель, б – схема поступального руху; в – схема обертального руху

Відмітимо, що описана схема руху застосовна для роторів, закріплених на невагомому пружному валі [5].

Побудуємо функцію Гамільтона для усталених рухів. Відповідно до теорії роторних систем вважатимемо координати α, β, x, y величинами першого порядку малості.

Визначаємо кінетичну енергію системи на усталеному русі. За теоремою Кеніга кінетична енергія системи на усталеному русі є сумою двох складових: T_n - кінетичної енергії поступального руху системи разом з центром мас; $T_{об}$ - кінетичної енергії обертального руху системи навколо центра мас. Введемо у розглядання осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$, які виходять із центра мас системи – точки G, і паралельні осям $O\xi\eta\zeta$. Тоді

$$T_n = \frac{1}{2} M_\Sigma r_G^2 \omega^2, \quad T_{об} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}_{G\xi_G\eta_G\zeta_G} \mathbf{J}_G \boldsymbol{\omega}_{G\xi_G\eta_G\zeta_G}, \tag{1}$$

де: M_Σ - маса всієї системи;

r_G - відстань від центра мас системи до осі обертання z;

$\boldsymbol{\omega}_{G\xi_G\eta_G\zeta_G}$ - вектор-стовпець кутової швидкості обертання системи, знайдений в проекціях на осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$;

$\mathbf{J}_G$ - тензор інерції системи відносно центральних осей $G\xi_G\eta_G\zeta_G$.

Відносно осей $O\xi\eta\zeta$ момент інерції системи утворений двома складовими – ротором і дисбалансом з автобалансирами. Позначимо через $\mathbf{J}_O^{(p)}$ тензор інерції ротора, а через $\mathbf{J}_O^{(d)}$ - дисбалансу з АБ. Тоді

$$\mathbf{J}_O^{(p)} = \begin{pmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & B_O & 0 \\ 0 & 0 & C_O \end{pmatrix}; \quad \mathbf{J}_O^{(d)} = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тоді тензор інерції системи щодо осей ξ, η, ζ

$$I_\xi = A_O + J_\xi,\quad I_\eta = B_O + J_\eta,\quad I_\zeta = C_O + J_\zeta,\quad I_{\xi\eta} = J_{\xi\eta},\quad I_{\xi\zeta} = J_{\xi\zeta},\quad I_{\eta\zeta} = J_{\eta\zeta}. \tag{3}$$

Нехай відносно осей $O\xi\eta\zeta$ система має координати центра мас ξ_G, η_G, ζ_G. Тоді

$$\mathbf{J}_G = \begin{pmatrix} I_\xi - M_\Sigma(\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -I_{\xi\eta} + M_\Sigma\xi_G\eta_G & -I_{\xi\zeta} + M_\Sigma\xi_G\zeta_G \\ -I_{\xi\eta} + M_\Sigma\xi_G\eta_G & I_\eta - M_\Sigma(\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -I_{\eta\zeta} + M_\Sigma\eta_G\zeta_G \\ -I_{\xi\zeta} + M_\Sigma\xi_G\zeta_G & -I_{\eta\zeta} + M_\Sigma\eta_G\zeta_G & I_\zeta - M_\Sigma(\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

Відмітимо, що відцентрові моменти інерції $I_{\xi\zeta}, I_{\eta\zeta}$ і координати центра мас ξ_G, η_G є параметрами, які характеризують незрівноваженність ротора.

З точністю до величин першого порядку малості включно переміщення центра мас ротора відносно осей $Kxyz$

$$x_G = x + \xi_G + \zeta_G\beta,\quad y_G = y + \eta_G - \zeta_G\alpha,\quad z_G = 0. \tag{5}$$

Тоді

$$T_n = \frac{1}{2}M_\Sigma\omega^2[(x + \xi_G + \zeta_G\beta)^2 + (y + \eta_G - \zeta_G\alpha)^2]. \tag{6}$$

У проекціях на осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ кутова швидкість обертання системи визначається так (рис. в):

$$\omega_{\xi_G} = -\omega\cos\alpha\sin\beta = -\omega\beta + O(\beta^3),\quad \omega_{\eta_G} = \omega\sin\alpha = \omega\alpha + O(\alpha^3),$$
$$\omega_{\zeta_G} = \omega\cos\alpha\cos\beta = \omega[1 - (\alpha^2 + \beta^2)/2] + O(\alpha^4, \beta^4, \alpha^2\beta^4). \tag{7}$$

Тоді, з точністю до величин другого порядку малості включно по α, β

$$T_{об} = \frac{\omega^2}{2}\{[I_\eta - I_\zeta + (\eta_G^2 - \zeta_G^2)M_\Sigma]\alpha^2 + [I_\xi - I_\zeta + (\xi_G^2 - \zeta_G^2)M_\Sigma]\beta^2 + 2\alpha\beta(I_{\xi\eta} - \xi_G\eta_G M_\Sigma) +$$
$$+ 2[(I_{\xi\zeta} - \xi_G\zeta_G M_\Sigma)\beta - (I_{\eta\zeta} - \eta_G\zeta_G M_\Sigma)\alpha] + I_\zeta - (\xi_G^2 + \eta_G^2)M_\Sigma\}. \tag{8}$$

Потенціальна енергія системи:

$$\Pi = (c_1\Delta l_1^2 + c_2\Delta l_2^2)/2, \tag{9}$$

де $\Delta l_1, \Delta l_2$ - модуль деформації пружин опор. У проекціях на осі $Kxyz$

$$\Delta l_{1x} \approx x + l_1\beta,\quad \Delta l_{1y} = y - l_1\alpha,\quad \Delta l_{2x} \approx x - l_2\beta,\quad \Delta l_{2y} = y + l_2\alpha. \tag{10}$$

З точністю до величин другого порядку малості включно

$$\Pi = \{c_1[(x + l_1\beta)^2 + (y - l_1\alpha)^2] + c_2[(x - l_2\beta)^2 + (y + l_2\alpha)^2]\}/2,$$

або, після перетворень

$$\Pi = [c_{33}(\alpha^2 + \beta^2) + 2c_{14}(\alpha y - \beta x) + c_{11}(x^2 + y^2)]/2, \tag{11}$$

де

$$c_{11} = c_1 + c_2,\quad c_{33} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2,\quad c_{14} = c_1 l_1 - c_2 l_2. \tag{12}$$

Відмітимо, що ці ж коефіцієнти були отримані в [5].

На усталеному русі функція Гамільтона $H_0 = \Pi - T_0$, або з точністю до величин другого порядку малості включно по α, β, x, y

$$H_0=\frac{1}{2}\{[c_{33}-(I_\eta-I_\zeta+\eta_G^2M_\Sigma)\omega^2]\alpha^2+[c_{33}-(I_\xi-I_\zeta+\xi_G^2M_\Sigma)\omega^2]\beta^2-2\omega^2\alpha\beta(I_{\xi\eta}-\xi_G\eta_GM_\Sigma)$$
$$+(c_{11}-M_\Sigma\omega^2)(x^2+y^2)+2(\zeta_GM_\Sigma\omega^2-c_{14})(\alpha y-\beta x)-I_\zeta\omega^2\}+$$
$$+[I_{\eta\zeta}\alpha-I_{\xi\zeta}\beta-M_\Sigma(x\xi_G+y\eta_G)]\omega^2\,. \qquad (13)$$

Визначаємо усталені рухи системи. Використовуючи (13), знаходимо рівняння усталених рухів по координатах ротора:

$$\partial H_0/\partial\alpha=[c_{33}-(I_\eta-I_\zeta+\eta_G^2M_\Sigma)\omega^2]\alpha-\omega^2\beta(J_{\xi\eta}-\xi_G\eta_GM_\Sigma)+(\zeta_GM_\Sigma\omega^2-c_{14})y+J_{\eta\zeta}\omega^2=0\,,$$
$$\partial H_0/\partial\beta=[c_{33}-(I_\xi-I_\zeta+\xi_G^2M_\Sigma)\omega^2]\beta-\omega^2\alpha(J_{\xi\eta}-\xi_G\eta_GM_\Sigma)-(\zeta_GM_\Sigma\omega^2-c_{14})x-J_{\xi\zeta}\omega^2=0\,,$$
$$\partial H_0/\partial x=-(\zeta_GM_\Sigma\omega^2-c_{14})\beta+(c_{11}-M_\Sigma\omega^2)x-M_\Sigma\xi_G\omega^2=0\,,$$
$$\partial H_0/\partial y=(\zeta_GM_\Sigma\omega^2-c_{14})\alpha+(c_{11}-M_\Sigma\omega^2)y-M_\Sigma\eta_G\omega^2=0\,. \qquad (14)$$

З рівнянь (14) видно, що якщо $|\alpha|,|\beta|,|x_G|,|y_G|<<1$, то $|I_{\xi\zeta}|,|I_{\eta\zeta}|,|\xi_G|,|\eta_G|<<1$. Тоді з точністю до величин другого порядку малості включно

$$H_0=\frac{1}{2}\{[c_{33}-(I_\eta-I_\zeta)\omega^2]\alpha^2+[c_{33}-(I_\xi-I_\zeta)\omega^2]\beta^2-2\omega^2I_{\xi\eta}\alpha\beta+(c_{11}-M_\Sigma\omega^2)(x^2+y^2)+$$
$$+2(\zeta_GM_\Sigma\omega^2-c_{14})(\alpha y-\beta x)-I_\zeta\omega^2\}+[I_{\eta\zeta}\alpha-I_{\xi\zeta}\beta-M_\Sigma(x\xi_G+y\eta_G)]\omega^2\,. \qquad (15)$$

Визначимо умови зрівноваження динамічного дисбалансу ротора. У цьому випадку його зрівноважують два АБ в двох різних площинах корекції. Тому параметри дисбалансу $I_{\xi\zeta},I_{\eta\zeta},\xi_G,\eta_G$ - між собою незалежні і виражаються не менше ніж через чотири незалежні координати, які задають положення КГ щодо ротора.

Розглядатимемо рівняння (14) як рівняння зв'язків. Перетворимо за їх допомогою функцію Гамільтона (15). Розв’язок рівнянь (14) відносно параметрів дисбалансу $I_{\xi\zeta},I_{\eta\zeta},\xi_G,\eta_G$ з точністю до величин першого порядку малості включно має вигляд:

$$J_{\xi\zeta}=-(I_\xi-I_\zeta-c_{33}/\omega^2)\beta-J_{\xi\eta}\alpha-(\zeta_GM_\Sigma-c_{14}/\omega^2)x,$$
$$J_{\eta\zeta}=(I_\eta-I_\zeta-c_{33}/\omega^2)\alpha+J_{\xi\eta}\beta-(\zeta_GM_\Sigma-c_{14}/\omega^2)y,$$
$$\xi_G=-\left(\zeta_G-\frac{c_{14}}{M_\Sigma\omega^2}\right)\beta+\left(\frac{c_{11}}{M_\Sigma\omega^2}-1\right)x,\quad \eta_G=\left(\zeta_G-\frac{c_{14}}{M_\Sigma\omega^2}\right)\alpha+\left(\frac{c_{11}}{M_\Sigma\omega^2}-1\right)y\,. \qquad (16)$$

Досліджуватимемо функцію Гамільтона (15) на умовний екстремум в припущенні, що виконуються рівняння (16). Дослідження проводитимемо по змінним α,β,x,y. Підставляючи (16) в (15), після перетворень отримаємо

$$H_0=\frac{1}{2}\{[(I_\eta-I_\zeta)\omega^2-c_{33}]\alpha^2+[(I_\xi-I_\zeta)\omega^2-c_{33}]\beta^2+$$
$$+2\omega^2I_{\xi\eta}\alpha\beta+(M_\Sigma\omega^2-c_{11})(x^2+y^2)-2(\zeta_CM_\Sigma\omega^2-c_{14})(\alpha y-\beta x)-I_\zeta\omega^2\}\,. \qquad (17)$$

Позначимо через

$$a_{11}=\frac{\partial^2H_0}{\partial\alpha^2}=(I_\eta-I_\zeta)\omega^2-c_{33},\quad a_{22}=\frac{\partial^2H_0}{\partial\beta^2}=(I_\xi-I_\zeta)\omega^2-c_{33},\quad a_{12}=\frac{\partial^2H_0}{\partial\alpha\partial\beta}=I_{\xi\eta}\omega^2\,,$$

$$a_{33}=\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2}=M_\Sigma\omega^2-c_{11},\quad a_{13}=\frac{\partial^2 H_0}{\partial\alpha\partial x}=0,\quad a_{24}=\frac{\partial^2 H_0}{\partial\beta\partial y}=0,\quad a_{34}=\frac{\partial^2 H_0}{\partial x\partial y}=0,$$

$$a_{23}=\frac{\partial^2 H_0}{\partial\beta\partial x}=\zeta_C M_\Sigma\omega^2-c_{14},\quad a_{44}=\frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2}=a_{33},\quad a_{14}=\frac{\partial^2 H_0}{\partial\alpha\partial y}=-a_{23}. \tag{18}$$

З використанням критерія Сильвестра знаходимо такі необхідні і достатні умови мінімуму функції H_0 на основному русі

$$a_{ii}>0,\ /i=\overline{1,4}/,$$

$$\Delta_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0,\quad \Delta_3=\Delta_2 a_{33}-a_{11}a_{23}^2>0,\quad \Delta_4=\Delta_2 a_{33}^2-(a_{11}+a_{22})a_{33}a_{23}^2+a_{23}^2>0. \tag{19}$$

Відмітимо, що при отриманні правих частин нерівностей (19) були враховані рівності (18).

Перші чотири умови в (19) можуть виконуватися за умови, що

$$I_\xi>I_\zeta,\ I_\eta>I_\zeta \tag{20}$$

на швидкостях, що перевищують

$$\omega>\omega^*,\quad \omega^*=\max\left\{\sqrt{c_{11}/M_\Sigma},\ \sqrt{c_{33}/(I_\xi-I_\zeta)},\ \sqrt{c_{33}/(I_\eta-I_\zeta)}\right\}. \tag{21}$$

Відповідно до умови (20) можливе динамічне зрівноваження складеного ротора, довгого щодо точки *O*.

Досліджуємо останні три умови в (19). Повернемо осі ξ, η на кут ψ навколо осі ζ. Отримаємо нові осі ξ_1, η_1. Кут ψ виберемо так, щоб $I_{\xi_1\eta_1}=0$. Введемо в розглядання осьові моменти інерції

$$I_{\max}=\max\{I_{\xi_1},I_{\eta_1}\}=\frac{I_\xi+I_\eta}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi-I_\eta)^2+4I_{\xi\eta}^2},$$

$$I_{\min}=\min\{I_{\xi_1},I_{\eta_1}\}=\frac{I_\xi+I_\eta}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi-I_\eta)^2+4I_{\xi\eta}^2}. \tag{22}$$

Введемо в розглядання наступні величини

$$b_{11}=(I_{\max}-I_\zeta)\omega^2-c_{33},\quad b_{22}=(I_{\min}-I_\zeta)\omega^2-c_{33}. \tag{23}$$

Тоді останні три умови в (19) приймуть вигляд

$$\Delta_2=b_{11}b_{22}>0,\quad \Delta_3=b_{11}b_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}^2>0,\quad \Delta_4=(b_{11}a_{33}-a_{23}^2)(b_{22}a_{33}-a_{23}^2)>0. \tag{24}$$

Нехай виконуються чотири перші умови в (19). Відмітимо, що $b_{11}\ge a_{11}\ge b_{22}$. Тоді $b_{11}>0$ і з першої умови в (24) випливає, що для виконання умови $\Delta_2>0$ повинна виконуватися умова $b_{22}>0$. Нехай $b_{22}>0$. Тоді має місце ланцюжок нерівностей

$$b_{22}(b_{11}a_{33}-a_{23}^2)=b_{11}b_{22}a_{33}-b_{22}a_{23}^2\ge b_{11}b_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}^2=\Delta_3>0.$$

З нього виходить, що якщо виконується умова $\Delta_3>0$, то виконується умова $b_{11}a_{33}-a_{23}^2>0$. Тоді для виконання умови $\Delta_4>0$ необхідно, щоб $b_{22}a_{33}-a_{23}^2>0$. Нехай ця умова виконується. Розглянемо

$$\Delta_3=b_{11}b_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}^2\ge b_{11}b_{22}a_{33}-b_{11}a_{23}^2=b_{11}(b_{22}a_{33}-a_{23}^2)>0.$$

Звідки випливає, що $\Delta_3>0$. Таким чином, умови (24) виконуватимуться, якщо виконуватимуться умови

$$b_{22}>0,\ b_{22}a_{33}-a_{23}^2>0. \tag{25}$$

Умова $b_{22} > 0$ виконуватиметься при обертанні ротора з швидкостями, що перевищують

$$\omega > \omega^{**}, \quad \omega^{**} = \max\left\{\sqrt{c_{11}/M_\Sigma},\ \sqrt{c_{33}/(I_{\min} - I_\zeta)}\right\}. \tag{26}$$

З другої умови в (25) знаходимо наступне рівняння для пошуку єдиної критичної кутової швидкості $\omega_{кр} \geq \omega^{**}$, при перевищенні якої виконуватиметься критерій Сильвестра

$$d(\omega) = (I_{\min} - I_\zeta - \zeta_G^2 M_\Sigma) M_\Sigma \omega^4 - [(I_{\min} - I_\zeta)c_{11} + (c_{33} + 2c_{14}\zeta_G)M_\Sigma]\omega^2 + c_{11}c_{33} - c_{14}^2 = 0. \tag{27}$$

Рівняння (27) можна подати у вигляді

$$d(\omega) = [(I_{\min} - I_\zeta)\omega^2 - c_{33}](M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) - (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 + c_{14})^2. \tag{28}$$

Можна перевірити, що при виконанні умови

$$I_{\min} - I_\zeta - \zeta_G^2 M_\Sigma > 0 \tag{29}$$

у рівнянні $d(\omega) = 0$ єдиний додатній корінь, більший за ω^{**}. Для настання автобалансування необхідно, щоб виконувалася умова (29) і ротор обертався з швидкостями, більшими, ніж $\omega_{кр}$. Ця умова отримана вперше.

Нехай ротор симетрично встановлений на опори і два однакових АБ симетрично встановлені щодо центра мас ротора. Тоді $c_{14} = 0$, $\zeta_G = 0$ і рівняння (28) приймає вигляд

$$[(I_{\min} - I_\zeta)\omega^2 - c_{33}](M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) = 0. \tag{30}$$

В цьому випадку автобалансування може наступати на швидкостях, що перевищують ω^{**} з (26). Для реальних роторних систем $\sqrt{c_{11}/M_\Sigma} < \sqrt{c_{33}/(I_{\min} - I_\zeta)}$ і тому необхідні умови настання автобалансування мають вигляд

$$\omega > \omega^{**}, \quad \omega^{**} = \sqrt{c_{33}/(I_{\min} - I_\zeta)} \quad I_{\min} = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_\xi - I_\eta)^2 + 4I_{\xi\eta}^2} > I_\zeta. \tag{31}$$

В цьому випадку автобалансування може наступати на швидкостях, що перевищують другу критичну швидкість обертання складеного ротора, який складається з ротора, дисбалансу і АБ. Отримані необхідні умови настання автобалансування узагальнюють результат, отриманий раніше Нестеренко В.П. [4] для випадку двох однакових двохкульових АБ.

Розглянемо випадок статично незрівноваженого ротора, коли у площині статичного дисбалансу, розташованій на відстані a від точки O, встановлений АБ. Тоді параметри дисбалансу $I_{\xi\zeta}, I_{\eta\zeta}, \xi_G, \eta_G$ між собою залежні, причому

$$I_{\xi\zeta} = a\xi_G M_\Sigma, \quad I_{\eta\zeta} = a\eta_G M_\Sigma. \tag{32}$$

З врахуванням (32) функція Гамільтона (15) приймає вигляд

$$H_0 = \frac{1}{2}\{[c_{33} - (I_\eta - I_\zeta)\omega^2]\alpha^2 + [c_{33} - (I_\xi - I_\zeta)\omega^2]\beta^2 - 2\omega^2 I_{\xi\eta}\alpha\beta + (c_{11} - M_\Sigma\omega^2)(x^2 + y^2) +$$
$$+ 2(\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14})(\alpha y - \beta x) - I_\zeta \omega^2\} + M_\Sigma[a(\alpha\eta_G - \beta\xi_G) - (x\xi_G + y\eta_G)]\omega^2. \tag{33}$$

Рівняння усталених рухів (14) з точністю до величин першого порядку малості включно приймають вигляд

$$\partial H_0/\partial\alpha = [c_{33} - (I_\eta - I_\zeta]\alpha - \omega^2\beta J_{\xi\eta} + (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14})y + a\eta_G M_\Sigma \omega^2 = 0,$$
$$\partial H_0/\partial\beta = [c_{33} - (I_\xi - I_\zeta)\omega^2]\beta - \omega^2\alpha J_{\xi\eta} - (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14})x - a\xi_G M_\Sigma \omega^2 = 0,$$

$$\partial H_0 / \partial x = -(\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14})\beta + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2) x - M_\Sigma \xi_G \omega^2 = 0,$$

$$\partial H_0 / \partial y = (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14})\alpha + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2) y - M_\Sigma \eta_G \omega^2 = 0. \qquad (34)$$

Задача полягає в пошуку такого діапазону кутових швидкостей обертання ротора, при яких функція Гамільтона (33) матиме умовний мінімум при виконанні рівностей (34).

Розв'язання загальної задачі приводить до результатів, які важко аналізувати. Тому розглянемо більш простий випадок – коли ротор осесиметричний і його маса набагато більша маси АБ і дисбалансу. В цьому випадку

$$|J_\xi|, |J_\eta|, |J_\zeta|, |J_{\xi\eta}|, |\zeta_G| << 1 \qquad B = A. \qquad (35)$$

Тоді з точністю до величин другого порядку малості включно функція Гамільтона (33) прийме вигляд

$$H_0 = \frac{1}{2}\{[c_{33} - (A - C)\omega^2](\alpha^2 + \beta^2) + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2)(x^2 + y^2) - 2c_{14}(\alpha y - \beta x) - C\omega^2\} +$$

$$+ M_\Sigma [a(\alpha \eta_G - \beta \xi_G) - (x \xi_G + y \eta_G)]\omega^2. \qquad (36)$$

Рівняння усталених рухів (34) приймуть вигляд

$$\frac{\partial H_0}{\partial \alpha} = [c_{33} - (A - C]\alpha - c_{14} y + a\eta_G M_\Sigma \omega^2 = 0, \quad \frac{\partial H_0}{\partial \beta} = [c_{33} - (A - C]\beta + c_{14} x - a\xi_G M_\Sigma \omega^2 = 0,$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial x} = c_{14}\beta + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2) x - M_\Sigma \xi_G \omega^2 = 0, \quad \frac{\partial H_0}{\partial y} = -c_{14}\alpha + (c_{11} - M_\Sigma \omega^2) y - M_\Sigma \eta_G \omega^2 = 0. \qquad (37)$$

Розв'язок системи рівнянь (37) відносно x, y, ξ_G, η_G має вигляд

$$x = \frac{(A - C)\omega^2 - c_{33} + ac_{14}}{a(M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) - c_{14}}\beta, \quad y = -\frac{(A - C)\omega^2 - c_{33} + ac_{14}}{a(M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) - c_{14}}\alpha,$$

$$\xi_G = -\frac{M_\Sigma (A - C)\omega^4 - [(A - C)c_{11} - M_\Sigma c_{33}]\omega^2 + c_{11}c_{33} - c_{14}^2}{[a(M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) - c_{14}]M_\Sigma \omega^2}\beta,$$

$$\eta_G = \frac{M_\Sigma (A - C)\omega^4 - [(A - C)c_{11} - M_\Sigma c_{33}]\omega^2 + c_{11}c_{33} - c_{14}^2}{[a(M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) - c_{14}]M_\Sigma \omega^2}\alpha. \qquad (38)$$

Функція Гамільтона (36) по підстановці (38), після перетворень, приймає вигляд

$$H_0 = [(\alpha^2 + \beta^2) \cdot f(\omega) - C\omega^2]/2 \qquad (39)$$

де

$$f(\omega) = \frac{\{(M_\Sigma \omega^2 - c_{11})[(A - C)\omega^2 - c_{33}] - c_{14}^2\}[(a^2 M_\Sigma + A - C)\omega^2 - a^2 c_{11} - 2ac_{14} - c_{33}]}{[a(M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) - c_{14}]^2}. \qquad (40)$$

Функція Гамільтона (39) матиме мінімум, якщо

$$f(\omega) > 0. \qquad (41)$$

Але це умова з точністю до множника постійного знаку співпадає з умовою, одержаною із застосуванням емпіричного методу у роботі [5], яка там і була досліджена.

Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки для ротора на двох осесиметричних пружних опорах, який зрівноважується АБ:

1) для визначення критичних швидкостей системи ротор-АБ, при переході через які настає чи втрачається автобалансування, ефективним є метод використання функції Гамільтона, як функції узагальнених координат і швидкостей;

2) за допомогою методу одержуються узагальнені критичні швидкості, які не залежать в явному вигляді від дисбалансу і типу АБ і тому придатні для будь-якого типу АБ;

3) зрівноважування динамічного дисбалансу можливе тільки у разі довгого складеного ротора (утвореного ротором, масами дисбалансу і АБ) на закритичних швидкостях обертання;

4) у випадку статичного зрівноваження ротора одним АБ результати, які дає метод використання функції Гамільтона, повністю співпадають із результатами, одержаними емпіричним методом.

Список літератури.

1. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 1 – Leblanc balancers // Machine Design, 1950a, Vol. 22 No 9, pp. 119-124.
2. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950b, Vol. 22 No 10, pp. 103-106.
3. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. -М.: Наука, 2002. -119 с.
4. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. -Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. –84 с.
5. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія (за спеціальністю 05.02.09 - динаміка та міцність машин). - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
6. Філімоніхін Г.Б., Філімоніхіна І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов настання автобалансування // Збірник наукових праць КНТУ, 2006. Вип. №17, С. 212-218.
7. Філімоніхіна І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов настання автобалансування ротора з нерухомою точкою // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник “Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин”, 2006. Вип.№36, С. 241-246.

С использованием функции Гамильтона исследованы критические скорости системы, состоящей из ротора, осуществляющего пространственное движение, масс, создающих дисбаланс и автобалансира для уравновешивания ротора, при переходе через которые наступает или теряется автобалансировка. Получены обобщенные критические скорости, пригодные для любого типа автобалансира. Установлено, что уравновешивание динамического дисбаланса двумя автобалансирами в двух разных плоскостях коррекции возможно только в случае длинного составленного ротора, образованного ротором, массами, создающими дисбаланс и автобалансирами.

With use of Hamilton’s function are investigated the critical speeds of the system consisting of a rotor which execute space motion, mass which create unbalance and the autobalancers for balancing of a rotor. At transition of this speeds is comes or lost the autobalancing. The generalized critical speeds which suitable for any type of autobalancers are received. Is established, that balancing of the dynamic unbalance by two autobalancers in two different planes of correction is possible only in the case of the long made rotor formed by a rotor, masses which create unbalance and autobalancers.