УДК 531.36:534.1:62-755
 И. И. Ф и л и м о н и х и н а, Г. Б. Ф и л и м о н и х и н

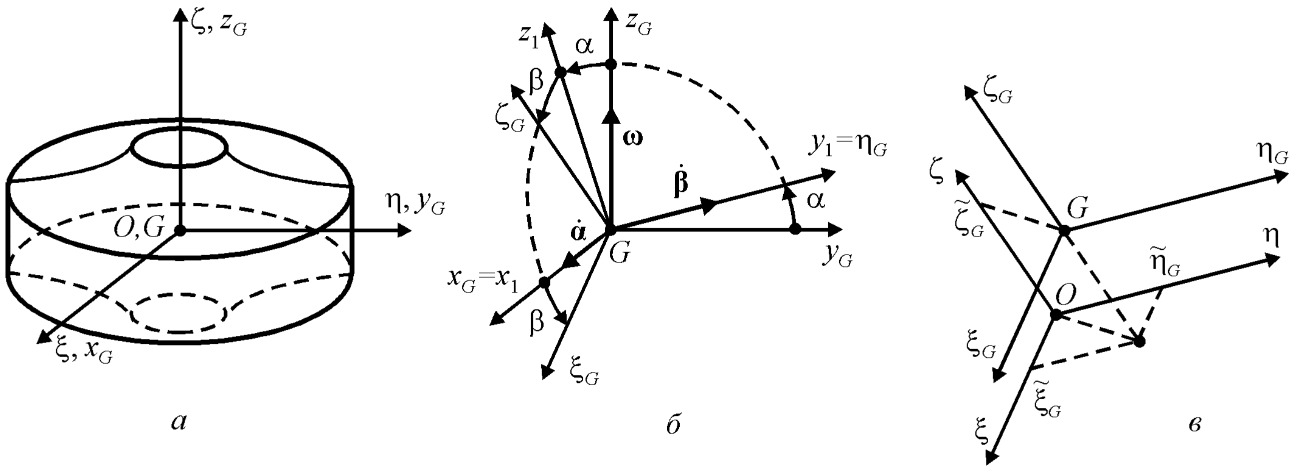
УСЛОВИЯ УРАВНОВЕШИВАНИЯ АВТОБАЛАНСИРАМИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА В ИЗОЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

Введение. В работах [1,4,5] установлено, что шаровые и маятниковые автобалансиры (АБ), а также АБ с двумя связанными твердыми телами статически уравновешивают вращающееся несущее тело, движущееся плоскопараллельно, входящее в состав изолированной системы. Для выделения установившихся движений системы – основных, в которых тело уравновешено и вращается вокруг требуемой оси вращения, и побочных, в которых этого не происходит, и оценки их устойчивости использовался энергетический подход [2,7]. Для оценки скорости прихода системы к основному движению использовался первый метод Ляпунова. В работе [6] с использованием энергетического подхода исследовалось динамическое уравновешивание четырьмя маятниками вращающегося тела, совершающего пространственное движение, входящего в изолированную систему. При этом выделялись основные и побочные движения системы, и оценивалась их устойчивость. В результате было установлено, что сплюснутые несущие тела уравновесить динамически невозможно, а случай вытянутого несущего тела требует дополнительных исследований. В настоящей работе устанавливаются обобщенные условия уравновешивания АБ вращающегося тела в изолированной системе, совершающего пространственное движение, пригодные для АБ любого типа. Рассматриваются случаи статического уравновешивания тела одним АБ, и динамического уравновешивания – двумя АБ. Для определения этих условий используется энергетический подход и эмпирический метод, созданный в работе [3] для роторных систем.

§1. Описание системы, основные допущения. Изолированная материальная система состоит из вращающегося несущего тела (рис. 1, а), и присоединенных тел, образующих АБ. В идеальном случае несущее тело должно вращаться вокруг некоторой оси ζ, жестко с ним связанной. Этому мешает неуравновешенность тела относительно оси ζ – статическая или динамическая. Тела АБ могут двигаться относительно несущего тела и в определенном положении могут полностью его уравновесить. Для дальнейших исследований тип АБ не имеет принципиального значения и поэтому не оговаривается.

Поскольку система изолирована, то ее центр масс – точка G движется равномерно и прямолинейно. Не ограничивая общности считаем, что он неподвижен. Также имеет место закон сохранения момента количества движения системы $\mathbf{K}_G = \mathbf{const}$. В соответствии с общей теорией пассивных АБ, у системы существует, по крайней мере, одно основное установившееся движение, в котором несущее тело уравновешено телами АБ и вращается вокруг оси ζ [3]. Пусть система совершает основное движение. Тогда в нем ось ζ направлена по вектору $\mathbf{K}_G$. Проведем для этого движения главные центральные оси инерции системы $O\xi\eta\zeta$, которые жестко свяжем с несущим телом (на основном движении $O = G$). Пусть относительно них система имеет главные осевые моменты инерции A, B, C.

Введем в рассмотрение оси $Gx_G y_G z_G$, в которых ось z_G направлена вдоль вектора $\mathbf{K}_G$. Пусть они вращаются вокруг оси z_G с угловой скоростью ω, соответствующей первому повороту несущего тела в пространстве. Тогда этот угол является циклической координатой, и в уравнения движения входить не будет. В процессе дальнейшего движения оси $Gx_G y_G z_G$ переходят в оси $O\xi\eta\zeta$, определяющие конечное положение несущего тела, следующим образом. Сначала оси $Gx_G y_G z_G$ поворачиваются на углы Резаля α, β, как это показано на рис. 1, б, в результате чего переходят в оси $G\xi_G\eta_G\zeta_G$. Потом оси $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ перемещаются поступательно на $-\tilde{\xi}_G, -\tilde{\eta}_G, -\tilde{\zeta}_G$, в результате чего переходят в оси $O\xi\eta\zeta$, как это показано на рис. 1, в. Очевидно, что $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G, \tilde{\zeta}_G$ – координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$. Заметим, что для небольших углов α, β угол нутации определяется по такой приближенной формуле $\theta \approx \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.



а *б* *в*

Рис. 1

Пусть тела АБ несколько отклонились от положения, в котором уравновешивают несущее тело. Тогда тензор инерции системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$ можно представить в виде

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon J_\xi & -\varepsilon J_{\xi\eta} & -\varepsilon J_{\xi\zeta} \\ -\varepsilon J_{\xi\eta} & B + \varepsilon J_\eta & -\varepsilon J_{\eta\zeta} \\ -\varepsilon J_{\xi\zeta} & -\varepsilon J_{\eta\zeta} & C \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $|\varepsilon| << 1$, и центробежные моменты инерции системы

$$\tilde{J}_{\xi\zeta} = \varepsilon J_{\xi\zeta}, \; \tilde{J}_{\eta\zeta} = \varepsilon J_{\eta\zeta} \tag{1.2}$$

характеризуют моментную неуравновешенность системы относительно оси ζ. В (1.1) учтено свойство АБ не изменять осевой момент инерции системы относительно оси ζ [3]. Аналогично координаты центра масс системы относительно осей $O\xi\eta\zeta$ можно подать в виде

$$\tilde{\xi}_G = \varepsilon\xi_G, \;\; \tilde{\eta}_G = \varepsilon\eta_G, \;\; \tilde{\zeta}_C = \varepsilon\zeta_G. \tag{1.3}$$

Тензор инерции системы относительно центральных осей системы $G\xi_G\eta_G\zeta_G$:

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \varepsilon^2 \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где M_Σ – масса всей системы. Дальнейшие допущения формулируются при применении соответствующего метода.

§2. Применение энергетического подхода. В соответствии с энергетическим подходом для устойчивости установившегося движения системы (для которой ее полная энергия совпадает с кинетической) необходимо, чтобы осевой момент инерции системы J_{z_G} принимал на нем по крайней мере локальное максимальное значение, и достаточно, чтобы он принимал абсолютное максимальное значение [2,7]. Рассмотрим различные случаи.

Динамическое уравновешивание несущего тела. Допускаем, что тела АБ могут устранить динамическую неуравновешенность несущего тела. Осевой момент инерции системы относительно оси z_G на установившемся движении определяется по формуле

$$J_{z_G} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{w}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{w}$ – единичный вектор, направленный по оси z_G:

$$w_\xi = -\cos\alpha\sin\beta, \quad w_\eta = \sin\alpha, \quad w_\zeta = \cos\alpha\cos\beta. \tag{2.2}$$

Ищем α, β в виде

$$\alpha \approx \alpha_1\varepsilon, \quad \beta \approx \beta_1\varepsilon. \tag{2.3}$$

Тогда с точностью до величин второго порядка малости включительно

$$J_{z_C} \approx C + \varepsilon^2\{[(B-C)\alpha_1^2 + (A-C)\beta_1^2 - M_\Sigma(\xi_G^2 + \eta_G^2) + 2(\beta_1 J_{\xi\zeta} - \alpha_1 J_{\eta\zeta})]\}. \tag{2.4}$$

Добавляем условия, что осевой момент инерции J_{z_G} – главный. Находим единичные векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, направленные по осям x_G, y_G в проекциях на оси несущего тела:

$$u_\xi = \cos\beta, \quad u_\eta = 0, \quad u_\zeta = \sin\beta, \qquad v_\xi = \sin\alpha\sin\beta, \quad v_\eta = \cos\alpha, \quad v_\zeta = -\sin\alpha\cos\beta. \tag{2.5}$$

Для того чтобы J_{z_G} был главным, необходимо и достаточно, чтобы два центробежных момента инерции $J_{x_G z_G}$, $J_{y_G z_G}$ равнялись нулю. Через тензор инерции (1.4) и через единичные векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ центробежные моменты инерции $J_{x_G z_G}$, $J_{y_G z_G}$ выражаются следующим образом

$$J_{x_G z_G} = -\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{w}, \quad J_{y_G z_G} = -\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_G\mathbf{w}. \tag{2.6}$$

Тогда с точностью до величин первого порядка малости включительно условия, что J_{z_G} – главный осевой момент инерции, примут вид

$$J_{x_G z_G} \approx [(A-C)\beta_1 + J_{\xi\zeta}]\varepsilon = 0, \qquad J_{y_G z_G} \approx [-(B-C)\alpha_1 + J_{\eta\zeta}]\varepsilon = 0. \tag{2.7}$$

Будем рассматривать параметры неуравновешенности $\xi_G, \eta_G, J_{\xi\zeta}, J_{\eta\zeta}$ как обобщенные координаты, характеризующие движение системы. На основном движении они обращаются в ноль. Заметим, что они независимы (т.к. АБ может устранить динамическую неуравновешенность несущего тела) и выражаются через обобщенные координаты, задающие положение тел АБ относительно несущего тела.

Решением системы (2.7) относительно $J_{\xi\zeta}, J_{\eta\zeta}$ будет

$$J_{\xi\zeta} = -(A-C)\beta_1, \qquad J_{\eta\zeta} = (B-C)\alpha_1. \tag{2.8}$$

Подставляя $J_{\xi\zeta}, J_{\eta\zeta}$ в осевой момент инерции J_{z_G} из (2.4), получим

$$J_{z_G} \approx C - \varepsilon^2[(B-C)\alpha_1^2 + (A-C)\beta_1^2 + M_\Sigma(\xi_G^2 + \eta_G^2)]. \tag{2.9}$$

Осевой момент инерции J_{z_G} из (2.9) будет иметь максимум, когда

$$A, B > C, \tag{2.10}$$

то есть в случае вытянутого составного тела, образованного несущим телом и АБ. При этом J_{z_G} принимает на основном движении локальное максимальное значение и поэтому полученные условия являются необходимыми условиями наступления динамического уравновешивания.

Статическое уравновешивание несущего тела. Пусть статическую неуравновешенность несущего тела устраняет один АБ, расположенный соответствующим образом. Пусть плоскость уравновешивания параллельна плоскости $O\xi\eta$ и смещена на координату b по оси ζ. Тогда

$$\widetilde{J}_{\xi\zeta} = M_\Sigma \widetilde{\xi}_G b, \quad \widetilde{J}_{\eta\zeta} = M_\Sigma \widetilde{\eta}_G b, \quad J_{\xi\zeta} = M_\Sigma \xi_G b, \quad J_{\eta\zeta} = M_\Sigma \eta_G b. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.4) получаем следующее выражение для главного осевого момента инерции

$$J_{z_G} \approx C + \varepsilon^2 \{[(B-C)\alpha_1^2 + (A-C)\beta_1^2 - M_\Sigma(\xi_G^2 + \eta_G^2) + 2M_\Sigma b(\beta_1 \xi_G - \alpha_1 \eta_G)]\}. \tag{2.12}$$

Система уравнений (2.7) принимает вид

$$J_{x_G z_G} \approx [(A-C)\beta_1 + M_\Sigma \xi_G b]\varepsilon = 0, \quad J_{y_G z_G} \approx [-(B-C)\alpha_1 + M_\Sigma \eta_G b]\varepsilon = 0. \tag{2.13}$$

Из этих уравнений находим

$$\alpha_1 = M_\Sigma \eta_G b/(B-C), \quad \beta_1 = -M_\Sigma \xi_G b/(A-C). \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в (2.12), получим следующее выражение для главного осевого момента инерции

$$J_{z_G} \approx C - \varepsilon^2 M_\Sigma \left(\frac{A + b^2 M_\Sigma - C}{A-C} \xi_G^2 + \frac{B + b^2 M_\Sigma - C}{B-C} \eta_G^2 \right). \tag{2.15}$$

Условиями, что J_{z_G} принимает на основном движении максимальное значение, будут

$$(A + b^2 M_\Sigma - C)/(A-C) > 0, \quad (B + b^2 M_\Sigma - C)/(B-C) > 0. \tag{2.16}$$

Из них находим такие два случая, при которых теоретически возможно статическое уравновешивание несущего тела

$$1)\ A, B > C, \quad 2)\ C > A + b^2 M_\Sigma, \quad C > B + b^2 M_\Sigma. \tag{2.17}$$

В первом случае составное тело – вытянутое, а во втором – сплюснутое, и плоскость уравновешивания незначительно отстоит от центра масс системы.

В случае вытянутого несущего тела J_{z_G} принимает на основном движении локальное максимальное значение и поэтому полученные условия являются необходимыми условиями наступления уравновешивания. В случае сплюснутого несущего тела J_{z_G} принимает на основном движении абсолютное максимальное значение и поэтому полученные условия являются достаточными условиями наступления уравновешивания.

Из теории демпферов для уменьшения угла нутации спутников, основанной на энергетическом подходе, известно, что в случае сплюснутого несущего тела внутреннее рассеяние энергии системы приводит к уменьшению угла нутации, а в случае вытянутого – к увеличению [2,7]. Поэтому поведение системы в случае вытянутого несущего тела требует дальнейшего изучения.

§3. Применение эмпирического метода. Будем использовать эмпирический (инженерный) критерий устойчивости основного движения [3]. В случае роторных систем этот критерий дает необходимые условия устойчивости основного движения, близкие к достаточным и совпадающие с последними при некоторых дополнительных предположениях о свойствах системы. Сформулируем критерий для случая нескольких АБ следующим образом.

При уравновешивании вращающегося тела n пассивными АБ с твердыми телами в n различных плоскостях уравновешивания для устойчивости основного движения необходимо и достаточно, чтобы при фиксированном положении тел АБ в положении, в котором они *уравновешивают вращающееся тело и при любых элементарных дисбалансах* $\mathbf{s}_i$, *лежащих в i-ой плоскости уравновешивания и приложенный в точках i на требуемой оси вращения несущего тела (оси ζ), выполнялось условие*

$$f(\mathbf{s}_1,...,\mathbf{s}_n) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i(t) \cdot \mathbf{r}_i(t) \right) dt < 0 \,. \tag{3.1}$$

где: t – время; $\mathbf{r}_i$ – вектор отклонения точки i от ее положения в основном движении, вызванный элементарными дисбалансами; T – период в случае, если движение периодическое или другой характерный промежуток времени. Под элементарным дисбалансом понимается вектор элементарной статической неуравновешенности. Критерий применим для деформируемых и твердых тел. Если вращающееся тело твердое, то его могут динамически уравновешивать два АБ ($n = 2$), или статически – один АБ ($n = 1$).

При построении критерия (3.1) использовано свойство тел АБ, уравновешивающего вращающее тело в i-ой плоскости, отклоняться в сторону вектора $\mathbf{r}_i$ [3]. Например, если элементарный дисбаланс не равен нулю только в плоскости i и в среднем вектор отклонения $\mathbf{r}_i$ будет противоположен вектору элементарного дисбаланса $\mathbf{s}_i$, его вызвавшему, то тела АБ будут иметь тенденцию двигаться противоположно вектору $\mathbf{s}_i$, чем будут стремиться уменьшить эту неуравновешенность.

Динамическое уравновешивание несущего тела. Пусть несущее тело уравновешивается двумя АБ в плоскостях, параллельных плоскости $O\xi\eta$ и смещенных на b_1, b_2 по оси ζ (рис. 2). Пусть в этих плоскостях возникли элементарные дисбалансы со следующими характеристиками (рис. 2)

$$\xi_i, \eta_i, b_i, \quad m_i = \varepsilon m, \quad |\,\varepsilon\,| << 1, \quad / i = 1,2 / \,, \tag{3.2}$$

где ξ_i, η_i, b_i – координаты элементарной массы m_i, создающей элементарную неуравновешенность $\mathbf{s}_i$ в плоскости уравновешивания i.

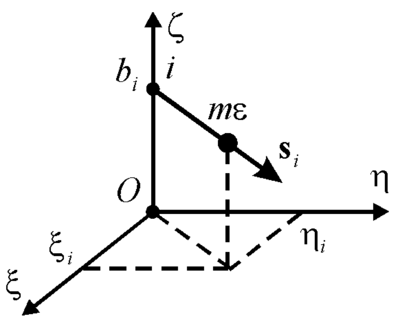


Рис. 2

Тогда относительно осей $O\xi\eta\zeta$

$$\widetilde{J}_{\xi\zeta} = m\varepsilon(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2), \quad \widetilde{J}_{\eta\zeta} = m\varepsilon(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2), \quad J_{\xi\zeta} = m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2), \quad J_{\eta\zeta} = m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2),$$

$$\widetilde{\xi}_G = m\varepsilon(\xi_1 + \xi_2)/M_\Sigma, \quad \widetilde{\eta}_G = m\varepsilon(\eta_1 + \eta_2)/M_\Sigma, \quad \widetilde{\zeta}_G = \varepsilon\zeta_G\,, \tag{3.3}$$

где M_Σ – масса всей системы. С точностью до величин первого порядка малости включительно

$$\mathbf{J}_G \approx \mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon J_\xi & -\varepsilon J_{\xi\eta} & -m\varepsilon(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) \\ -\varepsilon J_{\xi\eta} & B + \varepsilon J_\eta & -m\varepsilon(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2) \\ -m\varepsilon(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2) & -m\varepsilon(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2) & C \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Составим дифференциальные уравнения движения системы при неподвижных телах АБ. Во время движения системы имеем следующие проекции угловой скорости вращения системы и ее главного момента количества движения на оси несущего тела

$$\omega_\xi = \dot{\alpha}\cos\beta - \omega\cos\alpha\sin\beta,\quad \omega_\eta = \dot{\beta} + \omega\sin\alpha,\quad \omega_\zeta = \dot{\alpha}\sin\beta + \omega\cos\alpha\cos\beta,$$

$$K_\xi = -K\cos\alpha\sin\beta,\quad K_\eta = K\sin\alpha,\quad K_\zeta = K\cos\alpha\cos\beta. \tag{3.5}$$

Ищем ω, α, β с точностью до величин первого порядка малости относительно ε включительно в виде

$$\omega \approx \omega_0 + \omega_1\varepsilon,\quad \alpha \approx \alpha_1\varepsilon,\quad \beta \approx \beta_1\varepsilon. \tag{3.6}$$

Тогда с этой же точностью

$$\omega_\xi \approx \dot{\alpha}_1\varepsilon - \omega_0\beta_1\varepsilon,\quad \omega_\eta \approx \dot{\beta}_1\varepsilon + \omega_0\alpha_1\varepsilon,\quad \omega_\zeta \approx \omega_0 + \omega_1\varepsilon,\quad K_\xi \approx -K\beta_1\varepsilon,\quad K_\eta \approx K\alpha_1\varepsilon,\quad K_\zeta \approx K. \tag{3.7}$$

С другой стороны, с точностью до величин первого порядка малости включительно

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{J}_G\boldsymbol{\omega} \approx \begin{pmatrix} A\dot{\alpha}_1\varepsilon - \omega_0\varepsilon[\beta_1 A + m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2)] \\ B\dot{\beta}_1\varepsilon + \omega_0\varepsilon[\alpha_1 B - m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2)] \\ C\omega_0 + C\omega_1\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Приравнивая в (3.7) и (3.8) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующую систему уравнений для определения $\omega_0, \omega_1, \alpha_1, \beta_1$:

$$K = C\omega_0,\quad C\omega_1 = 0,$$

$$-K\beta_1 = A\dot{\alpha}_1 - \omega_0[\beta_1 A + m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2)],\quad K\alpha_1 = B\dot{\beta}_1 + \omega_0[\alpha_1 B - m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2)]. \tag{3.9}$$

В дальнейшем будем рассматривать только сплюснутые ($C > A, B$), или вытянутые ($C < A, B$) составные тела, так как в результате применения энергетического подхода было установлена теоретическая возможность уравновешивания только в этих случаях. Тогда решением системы (3.9) будет

$$\omega_0 = K/C,\quad \omega_1 = 0,\quad \alpha_1 = m(\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2)/(B - C) + C_1\sin pt + C_2\cos pt,$$

$$\beta_1 = -m(\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2)/(A - C) + C_3\sin pt + C_4\cos pt, \tag{3.10}$$

где

$$p = \omega_0\sqrt{(A - C)(B - C)/(AB)},\quad C_3 = \frac{ApC_2}{(A - C)\omega_0},\quad C_4 = -\frac{ApC_1}{(A - C)\omega_0}, \tag{3.11}$$

и C_1, C_2 - некоторые постоянные интегрирования, которые зависят от начальных условий. Для указанных тел p принимает действительное значение и движение системы – периодическое с периодом

$$T = 2\pi/p. \tag{3.12}$$

Заметим, что в случаях $A < C < B$ или $B < C < A$ решение системы (3.9) – апериодическое и в зависимости от начальных условий может неограниченно возрастать.

С точностью до величин первого порядка малости включительно в проекциях на оси $O\xi\eta\zeta$:

$$\mathbf{r}_i \approx \varepsilon(\beta_1 b_i - \xi_G, -\alpha_1 b_i - \eta_G, -\zeta_G)^{\mathrm{т}},\quad \mathbf{s}_i \approx m\varepsilon(\xi_i, \eta_i, 0)^{\mathrm{т}},\quad /i = 1,2/. \tag{3.13}$$

Критерий наступления самоуравновешивания принимает вид

$$f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\sum_{i=1}^{2}\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{s}_i\right)dt \approx \frac{m\varepsilon^2}{T}\int_0^T\left\{\sum_{i=1}^{2}[\xi_i(\beta_1 b_i - \xi_G) - \eta_i(\alpha_1 b_i + \eta_G)]\right\}dt < 0. \tag{3.14}$$

С точностью до величин второго порядка малости включительно

$$f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \approx -p(x_1, x_2, x_3, x_4)/M_\Sigma < 0, \tag{3.15}$$

где

$$x_1 = m\varepsilon\xi_1, \quad x_2 = m\varepsilon\xi_2, \quad x_3 = m\varepsilon\eta_1, \quad x_4 = m\varepsilon\eta_2,$$

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2, \tag{3.16}$$

и в равенствах (3.16)

$$a_{11} = \frac{A + b_1^2 M_\Sigma - C}{A - C}, \quad a_{22} = \frac{A + b_2^2 M_\Sigma - C}{A - C}, \quad a_{12} = \frac{A + b_1 b_2 M_\Sigma - C}{A - C},$$

$$a_{33} = \frac{B + b_1^2 M_\Sigma - C}{B - C}, \quad a_{44} = \frac{B + b_2^2 M_\Sigma - C}{B - C}, \quad a_{34} = \frac{B + b_1 b_2 M_\Sigma - C}{B - C}. \tag{3.17}$$

Для наступления самоуравновешивания необходимо, чтобы квадратичная форма (3.16) была положительно определена. Применяя критерий Сильвестра, находим следующие условия

$$a_{jj} > 0, \quad / j = \overline{1,4} /, \quad \Delta_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad \Delta_{34} = a_{33}a_{44} - a_{34}^2 > 0. \tag{3.18}$$

Учитывая, что

$$\Delta_{12} = M_\Sigma (b_1 - b_2)^2 / (B - C), \quad \Delta_{34} = M_\Sigma (b_1 - b_2)^2 / (A - C), \tag{3.19}$$

из (3.18) находим условие наступления самоуравновешивания $A, B > C$, которое совпадает с условием (2.10).

Статическое уравновешивание несущего тела. Положим в (3.16) $\xi_2, \eta_2 = 0$. Тогда $x_2 = x_4 = 0$ и квадратичная форма (3.16) примет вид

$$p(x_1, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{33}x_3^2. \tag{3.20}$$

Условие (3.15) будет выполняться при выполнении условий $a_{11} > 0,\ a_{33} > 0$, совпадающих с условиями (2.17).

С одной стороны эмпирический метод дал те же условия устойчивости основного движения, что и энергетический. Но эмпирический метод дополнительно выявил тенденцию к приходу тел АБ к положению, в котором они уравновешивают несущее тело при выполнении этих необходимых условий. Этот результат и анализ решения (3.10) дают возможность заключить, что в случае вытянутого составного тела возможно некоторое первоначальное уменьшение угла нутации за счет прихода тел АБ в окрестность положения, в котором они уравновешивают (статически или динамически) несущее тело, но со временем этот угол будет возрастать за счет рассеяния энергии при движении тел АБ в окрестности указанного положения.

Р Е З Ю М Е. Знайдені умови, за яких автобалансири із твердими тілами можуть зрівноважити обертове тіло, яке здійснює просторовий рух і входить до складу ізольованої системи. Встановлена можливість статичного зрівноваження сплюснутого обертового тіла за умови, що площина зрівноваження достатньо близька до центра мас системи. Встановлено, що у випадку витягнутого обертового тіла можливе початкове зменшення кута нутації за рахунок зрівноваження тіла, але у подальшому кут нутації буде зростати через розсіювання енергії у системі.

S U M M A R Y. Are found conditions under witch autobalancers with rigid bodies can balance rotating body which belong to isolated system and make dimensional motion. The capability of a static balancing of the depressed rotating body is established under condition that the plane of balancing is close to the center of mass of the system. Is established that in the case of the prolate rotating body is probably an initial reduction of a corner of nutation due to a balancing of a body, but in the further the corner of nutation will increase due to dissipation of energy in system.

1. *Горошко О. О., Філімоніхін Г. Б., Пирогов В. В., Філімоніхіна І. І.* Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2005. - №4. - С. 67-76.
2. *Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В.* Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, ПММ, т. XXVII, вып. 1, 1963. - С. 16-26.
3. *Філімоніхін Г.Б.* Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
4. *Філімоніхін Г.Б.* Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла // Вісник, математика-механіка. Київський національний університет. Вип. №7-8, - 2002. - С. 67-71.
5. *Филимонихин Г.Б., Пирогов В.В***.** Стабилизация положения оси вращения твердого тела связанными абсолютно твердыми телами // Прикладная механика, т.41, №8, 2005. - С. 122-129.
6. *Филимонихин Г.Б., Пирогов В.В., Филимонихина И.И.* Стабилизация маятниковыми демпферами пространственного положения оси вращения несущего тела // Прикладная механика, т.43, №10, 2007. –С.120-128.
7. *Likins P.W.* Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft //Technical Report No. 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966, p. 70.

Кировоградский национальный технический
университет (Украина)

Поступила 06.04.2007