

М.І.Бобир, проф., д-р техн. наук*Національний технічний університет України “КПІ”***Г.Б. ФІЛІМОНІХІН, доц., канд. фіз.-мат. наук***Кіровоградський національний технічний університет*

Інженерні умови зрівноваження роторів у рамках різних плоских моделей*

Для плоских моделей ротора на анізотропних і ізотропних в'язко-пружних опорах, за допомогою інженерного критерію настання автобалансування досліджений вплив сил в'язкого опору в опорах на критичні швидкості системи ротор-автобалансир (при переході через які настає, чи втрачається автобалансування). Для різних плоских моделей ротора з приєднаними тілами (коригувальними вантажами, дисбалансом, корпусом), за допомогою інженерного критерію стійкості основних рухів, знайдені критичні швидкості. Встановлено правило, яке дозволяє для визначення критичних швидкостей у випадку ротора з приєднаними тілами використовувати аналогічні формули для ротора без приєднаних тіл.

ротор, автобалансир, дисбаланс, балансування, критична швидкість

Пасивні автобалансири (АБП) застосовуються для зрівноваження на ходу роторів, чий дисбаланс змінюється у процесі експлуатації, зокрема для зрівноваження: абразивних кругів шліфувальних (полірувальних) верстатів та ручних шліфувальних машин; CD/DVD дисків; барабанів екстракторів, центрифуг, сепараторів; автомобільних і авіаколіс; колінчастих валів двигунів внутрішнього згорання; роторів електродвигунів; лопастей вентиляторів, тощо [1-5]. Для працездатності пристроїв необхідно, щоб на робочих швидкостях обертання ротора їх коригувальні вантажі (КВ) самі приходили у положення, у якому зрівноважують ротор. У монографії [5] для різних плоских моделей ротора, без врахування сил в'язкого опору в опорах, із застосуванням інженерного критерію настання автобалансування були наближено визначені критичні швидкості – при переході через які настає, чи втрачається автобалансування. Ці швидкості придатні для будь-якого АБП за умови, що маса КВ набагато менша маси ротора і малі сили опору в опорах. Якщо це не так, то критичні швидкості доцільно уточнювати. В цієї роботі досліджується вплив сил в'язкого опору в опорах на критичні швидкості ротора на анізотропних і ізотропних в'язко-пружних опорах, коли ротор здійснює плоский рух. Також, для різних плоских моделей ротора визначаються критичні швидкості системи ротор-АБП із врахуванням мас АБП, дисбалансу і деякого тіла (корпусу), у яке встановлений ротор і яке рухається разом з ротором плоскопаралельно. Для цього використовуються два інженерних критерії, сформульовані у монографії [5].

Дослідимо вплив в'язкості опор на критичні швидкості ротора, у випадку, коли ротор здійснює плоский рух.

На рис. 1 показані схеми, що пояснюють закріплення і рух ротора на анізотропних пружних (рис. 1, а), і в'язко-пружних (рис. 1, б) опорах. Нерухомі осі X, Y спрямовані по головним напрямкам для жорсткостей опор, причому так, що вісь X - вздовж мінімальної, а Y - максимальної жорсткості (рис. 1, в). Рух ротора визначаємо як суму двох рухів (рис. 1, г): поступального – разом з центром мас – точкою C ; обертального – навколо центра мас із сталою кутовою швидкістю ω . Положення центра мас ротора визначають координати x, y . Вектор дисбалансу $\vec{s}$ утворюється

елементарною масою dm , яка у початковий момент часу знаходилася на осі X . Поточний напрям вектора дисбалансу визначається кутом ωt між вектором і віссю X .

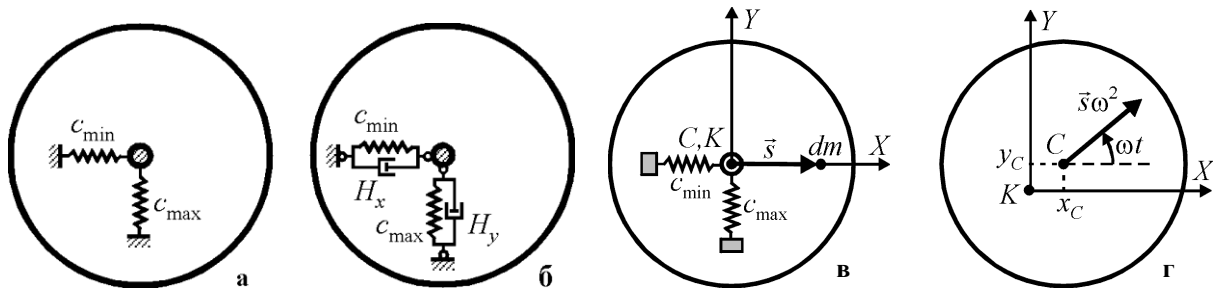


Рисунок 1 - Схема плоского ротора на анізотропних опорах

Диференціальні рівняння руху ротора на анізотропних в'язко-пружних опорах (рис. 1, б) мають вигляд

$$M\ddot{x} + H_x\dot{x} + c_{\min}x = s\omega^2 \cos\omega t, \quad M\ddot{y} + H_y\dot{y} + c_{\max}y = s\omega^2 \sin\omega t, \quad (1)$$

де H_x, H_y - коефіцієнти в'язкого опору в опорах. Подамо ці рівняння у вигляді

$$\ddot{x} + h_x\dot{x} + \omega_{\min}^2x = \tilde{s}\omega^2 \cos\omega t, \quad \ddot{y} + h_y\dot{y} + \omega_{\max}^2y = \tilde{s}\omega^2 \sin\omega t, \quad (2)$$

де

$$\omega_{\min} = \sqrt{c_{\min}/M}, \quad \omega_{\max} = \sqrt{c_{\max}/M}, \quad h_x = H_x/M, \quad h_y = H_y/M, \quad \tilde{s} = s/M, \quad \tilde{s} \ll 1. \quad (3)$$

Розв'язок цієї системи має декілька складових. Але за наявності навіть невеликих сил опору всі вони прямують до нуля за виключенням частинного розв'язку цієї системи. Саме ця складова і буде визначати відхилення вала, коли рух установиться. Частинний розв'язок має вигляд

$$x = K \cos\omega t + L \sin\omega t, \quad y = M \cos\omega t + N \sin\omega t, \quad (4)$$

де

$$K = \tilde{s}\omega^2(\omega_{\min}^2 - \omega^2)/\Delta_x, \quad L = \tilde{s}\omega^2\omega h_x/\Delta_x, \\ M = \tilde{s}\omega^2(\omega_{\max}^2 - \omega^2)/\Delta_y, \quad N = -\tilde{s}\omega^2\omega h_y/\Delta_y, \\ \Delta_x = (\omega_{\min}^2 - \omega^2)^2 + h_x^2\omega^2 > 0, \quad \Delta_y = (\omega_{\max}^2 - \omega^2)^2 + h_y^2\omega^2 > 0. \quad (5)$$

Застосуємо до розглядуваної системи інженерний критерій настання автобалансування [5]:

для усунення пасивним АБП з твердими КВ відхилення деякої точки поздовжньої осі ротора від осі обертання, чи для зменшення цього відхилення рідинним АБП необхідно і достатньо, щоб ця точка під дією дисбалансу, у ній прикладеного, у середньому за один оберт ротора, відхилялася протилежно вектору дисбалансу.

Математично критерій можна записати так

$$\bar{r}_{Ac} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{e}(\varphi) \cdot \bar{r}_A(\varphi) d\varphi = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \bar{e}(t) \cdot \bar{r}_A(t) dt < 0, \quad (6)$$

де: φ - кут повороту ротора; t - час; ω - стала кутова швидкість обертання ротора; $\bar{e}$ - одиничний вектор, спрямований по вектору дисбалансу, як функція $\varphi(t)$; $\bar{r}_A$ - вектор відхилення точки A вала від осі обертання, викликаний статичним дисбалансом, прикладеним у точці A , як функція $\varphi(t)$.

Для визначення відповідних умов введемо у розглядання одиничний вектор, спрямований у напрямку вектора дисбалансу. Тоді його проекції на осі X, Y :

$$\epsilon_x = \cos\omega t, \quad \epsilon_y = \sin\omega t. \quad (7)$$

Проекція вектора відхилення вала на напрям дисбалансу визначатиметься:

$$r_{Ce} = K \cos^2 \omega t + M \sin^2 \omega t + (L + N) \cos \omega t \sin \omega t. \quad (8)$$

Вал більшу частину часу буде знаходитися з легкого боку ротора за умови, що

$$\bar{r}_{Ce} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} r_{Ce}(t) dt = (K + M) / 2 < 0. \quad (9)$$

Подано $\bar{r}_{Ce}$ у вигляді

$$\bar{r}_{Ce}(\omega) = \frac{\tilde{\omega}^2 \{2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) + \omega^2 [h_x^2(\omega_3^2 - \omega^2) + h_y^2(\omega_1^2 - \omega^2)]\}}{2\Delta_x \Delta_y} < 0. \quad (10)$$

де

$$\omega_1 = \omega_{\min}, \omega_2 = \sqrt{(\omega_{\min}^2 + \omega_{\max}^2) / 2}, \omega_3 = \omega_{\max}, \omega_1 < \omega_2 < \omega_3. \quad (11)$$

За відсутністю сил в'язкого опору в опорах (рис. 1, а)

$$\bar{r}_{Ce} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} r_{Ce}(t) dt = \frac{\tilde{\omega}^2 [\omega_2^2 - \omega^2]}{2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)} < 0. \quad (12)$$

Видно, що існують три критичні швидкості з (11), і автобалансування може відбуватися на швидкостях між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями:

$$\omega \in (\omega_1, \omega_2) \cup (\omega_3, +\infty). \quad (13)$$

Цей результат був знайдений в роботі [5]. Зауважимо, що ω_1, ω_3 - це критичні швидкості обертання ротора, а ω_2 - це деяка додаткова критична швидкість, яка виникає завдяки АБП і знаходиться між критичними швидкостями обертання ротора.

Врахуємо сили в'язкого опору в опорах. З (10) видно, що

$$\forall \omega \in (0, \omega_1) \quad \bar{r}_{Ce}(\omega) > 0, \quad \forall \omega > \omega_3 \quad \bar{r}_{Ce}(\omega) < 0. \quad (14)$$

Тому, якщо сили опору такі, що критичних швидкостей три - $\tilde{\omega}_{1,2,3}$, то

$$\omega_1 < \tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega}_2 < \tilde{\omega}_3 < \omega_3, \quad (15)$$

якщо сили опору такі, що критична швидкість одна - $\tilde{\omega}_1$, то

$$\tilde{\omega}_1 < \omega_3. \quad (16)$$

Якщо сили в'язкого опору малі

$$h_x \sim \varepsilon, \quad h_y \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (17)$$

то критичних швидкостей три і вони визначаються такими наближеними формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^2 &\approx \omega_1^2 [1 + h_x^2 / (\omega_3^2 - \omega_1^2)], \quad \tilde{\omega}_2^2 \approx \omega_2^2 [1 + (h_x^2 - h_y^2) / (\omega_3^2 - \omega_1^2)] \\ \tilde{\omega}_3^2 &\approx \omega_3^2 [1 - h_y^2 / (\omega_3^2 - \omega_1^2)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Можна перевірити, що тільки у випадку великих сил в'язкого опору ($h_x, h_y \gg 1$) і при певному співвідношенні між ними система має одну критичну швидкість. Оскільки такий випадок на практиці важко реалізувати, то ми не будемо його розглядати.

Якщо в'язко-пружні опори ізотропні, то

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_0, \quad h_x = h_y = h, \quad \Delta_x = \Delta_y = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + h^2 \omega^2$$

і умова (10) приймає вигляд

$$\bar{r}_{Ce}(\omega) = \tilde{\omega}^2 (\omega_0^2 - \omega^2) / [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + h^2 \omega^2] < 0. \quad (19)$$

Звідки видно, що існує єдина критична швидкість ω_0 , яка співпадає із критичною швидкістю обертання ротора, при перевищенні якої настає автобалансування.

Знайдемо для різних плоских моделей ротора критичні швидкості системи ротор-АБП із застосуванням інженерного критерію стійкості основного руху, який має таке формулювання [5]:

для стійкості основного руху системи ротор-АБП необхідно і достатньо, щоб точка

А на поведздовжній осі ротора, яка знаходиться у площині корекції АБП, під дією елементарного дисбалансу, викликаного відхиленням КВ чи КМ від основного руху, відхилялася від основного руху у середньому за один оберт ротора, протилежно вектору елементарного дисбалансу:

$$\bar{r}_{Ac} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{e}(\varphi) \cdot \Delta \vec{r}_A(\varphi) d\varphi = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \vec{e}(t) \cdot \Delta \vec{r}_A(t) dt < 0, \quad (20)$$

де $\Delta \vec{r}_A$ - відхилення у русі точки А від закону $\bar{r}_A$, викликане елементарним дисбалансом.

Нехай з ротором рухаються: КВ сумарною масою Σm_i ; дисбаланс, масою m_d ; деяке тіло, наприклад корпус, масою M_T (рис. 2). На відміну від попередніх моделей

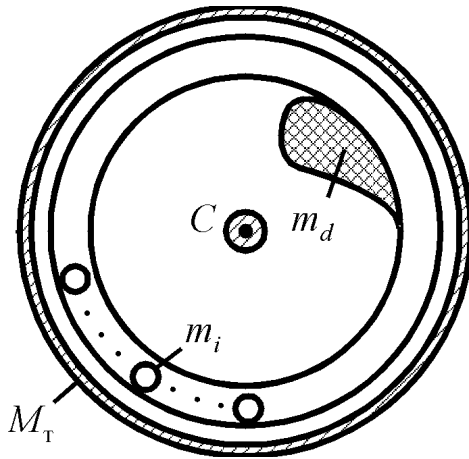


Рисунок 2 - Ротор з приєднаними тілами: дисбалансом, КВ, корпусом

до опор кріпиться корпус, а не ротор. У основному русі КВ зрівноважують дисбаланс, тому центр мас ротора з дисбалансом і КВ знаходиться у точці С. При елементарному відхиленні КВ від основного руху виникає елементарний дисбаланс. Не обмежуючі загальності можна вважати, що КВ залишаються у вихідному положенні, а елементарний дисбаланс, як і раніше, утворюється елементарною масою dm .

Зауважимо, що розглянуті вище диференціальні рівняння плоского руху ротора – це рівняння поступального руху ротора разом з центром мас. Тому ці рівняння зміняться наступним чином: в них замість маси ротора M буде стояти сумарна маса ротора і тіл, що з ним

рухаються

$$M_\Sigma = M + M_T + \Sigma m_i + m_d. \quad (21)$$

Решта у рівняннях не зміниться. Тому кількість і вигляд критичних швидкостей, знайдених вище не зміниться. Але у рівняння для їх визначення треба підставляти замість маси ротора M сумарну масу M_Σ .

Якщо АБП – рідинний, або комбінований, то у випадку роторів на ізотропних опорах вигляд і кількість критичних швидкостей також не зміниться, тільки в сумарну масу буде входити маса рідини. Якщо опори неізотропні, то рух рідини в середині АБП – невстановившийся. Проте для наближеного визначення критичних швидкостей і в цьому випадку можна застосовувати згадані формули, підставивши в них замість маси ротора M сумарну масу M_Σ .

Отже маємо таке **правило врахування приєднаних тіл, які рухаються з ротором**: при складанні диференціальних рівнянь руху системи, чи при визначенні критичних швидкостей, для врахування приєднаних тіл, які рухаються з ротором треба підставити у відповідні рівняння, одержані без врахування цих тіл, замість маси ротора – сумарну масу ротора і всіх тіл, що з ним рухаються.

Застосовуємо це правило до різних плоских моделей ротора. Для роторів, розглянутих вище одержимо наступне.

1. Ротор з приєднаними тілами, корпус якого встановлений на анізотропні опори, при нехтуванні силами в'язкого опору в опорах, має три критичні швидкості, які визначаються формулами (11), причому в них

$$\omega_{\min} = \sqrt{c_{\min} / M_\Sigma}, \quad \omega_{\max} = \sqrt{c_{\max} / M_\Sigma}. \quad (22)$$

2. Ротор з приєднаними тілами, корпус якого встановлений на анізотропні

опори, при врахуванні сил в'язкого опору в опорах, в залежності від їх величини, має одну чи три критичні швидкості, які є коренями рівняння

$$2(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2) + \omega^2[h_x^2(\omega_3^2 - \omega^2) + h_y^2(\omega_1^2 - \omega^2)] = 0, \quad (23)$$

причому ω_i визначаються за формулами (11), і

$$\omega_{\min} = \sqrt{c_{\min}/M_{\Sigma}}, \quad \omega_{\max} = \sqrt{c_{\max}/M_{\Sigma}}, \quad h_x = H_x/M_{\Sigma}, \quad h_y = H_y/M_{\Sigma}. \quad (24)$$

3. Ротор на ізотропних опорах має єдину критичну швидкість

$$\omega_1 = \sqrt{c/M_{\Sigma}}. \quad (25)$$

Аналог цієї формули одержували для конкретних типів АБП А.А.Гусаров [1], Е.Тearle [2,3] і інші вчені. На відміну від раніше одержаних формул, вираз (25) застосовний для будь-якого типу АБП, зокрема рідинного та комбінованого і враховує масу додаткового тіла, прикріпленого до ротора.

Використовуючи результати роботи [5] визначимо критичні швидкості для інших плоских моделей ротора.

4. Для ротора, пружно закріпленого в АТТ, яке також пружно закріплене і рухається поступально (рис. 3) були одержані такі три критичні швидкості [5]:

$$\omega_1 = \sqrt{x_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{(c_1 + c_2)/M_1}, \quad \omega_3 = \sqrt{x_2} : \omega_1 < \omega_2 < \omega_3, \quad (26)$$

де: M_1 – маса АТТ; c_1, c_2 – жорсткості опор тіла і ротора; x_1, x_2 – параметри, які визначаються нижче. Якщо до ротора приєднані додаткові тіла, то в формули для визначення x_1, x_2 треба підставляти замість маси ротора – сумарну масу ротора і приєднаних до нього тіл:

$$x_{1,2} = \frac{M_1 c_2 + M_{\Sigma}(c_1 + c_2)}{2M_1 M_{\Sigma}} \mp \left[\left(\frac{M_1 c_2 + M_{\Sigma}(c_1 + c_2)}{2M_1 M_{\Sigma}} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{M_1 M_{\Sigma}} \right]^{1/2}. \quad (27)$$

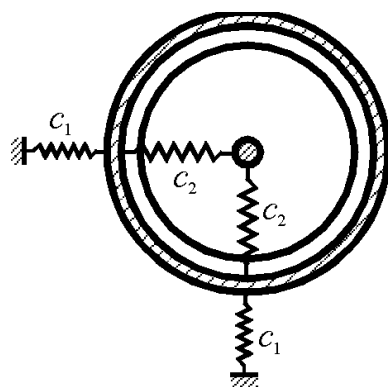


Рисунок 3 – Ротор, пружно закріплений в АТТ

Автобалансування настає між першою і другою, та над третьою критичними швидкостями. Зауважимо, що за наявності корпусу саме він кріпиться до АТТ, а не ротор.

5. Ротор під час різання (шліфування) (рис. 4), з врахуванням приєднаних тіл має єдину критичну швидкість:

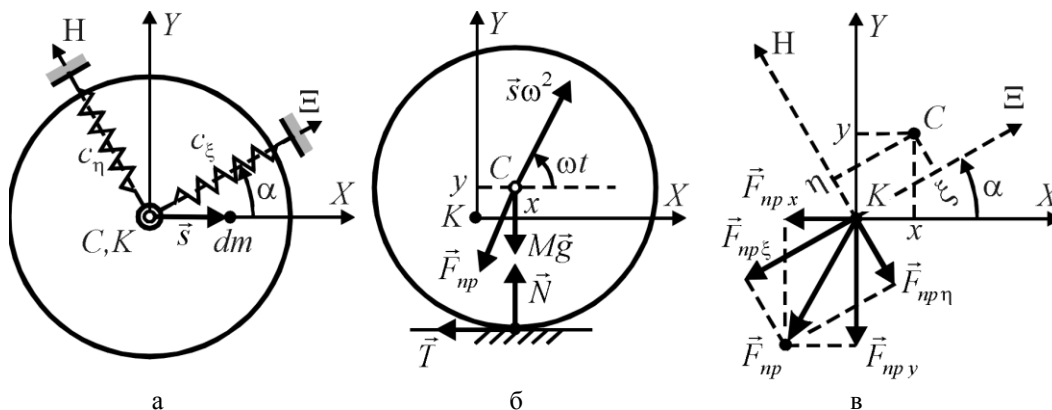


Рисунок 4 - Ротор під час різання (шліфування)

- у випадку анізотропних опор

$$\omega_1 = \sqrt{(c_x + f c_{xy}) / M_\Sigma}, \quad (28)$$

де: c_x, c_y, c_{xy} – жорсткості опор відносно осей X, Y ; f – коефіцієнт сухого тертя (шліфування, різання);

- у випадку ізотропних опор ($c_x = c_y = c, c_{xy} = 0$)

$$\omega_1 = \sqrt{c / M_\Sigma}. \quad (29)$$

Автобалансування настає на швидкостях, які перевищують єдину критичну швидкість.

Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки:

- 1) у рамках плоскої моделі ротора на анізотропних в'язко-пружних опорах, у реальних для практики випадках, у системи ротор АБП три критичні швидкості, причому сили опору в опорах збільшують найменшу і зменшують найбільшу критичні швидкості системи, знайдені без їх врахування;
- 2) у рамках плоскої моделі ротора на ізотропних в'язко-пружних опорах сили в'язкого опору в опорах не впливають на єдину критичну швидкість системи ротор-АБП;
- 3) для визначення критичних швидкостей системи ротор-АБП з врахуванням додаткових тіл, які рухаються з ротором (КВ, дисбалансу, корпусу), треба підставити у критичні швидкості, одержані без врахування додаткових тіл, замість маси ротора – сумарну масу ротора і всіх тіл, що з ним рухаються.

Список літератури

1. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. -М.: Наука, 2002. -119 с.
2. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 1 – Leblanc balancers // Machine Design, 1950a, Vol. 22 No 9, pp. 119-124.
3. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950b, Vol. 22 No 10, pp. 103-106.
4. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 3 – Designing for complete effectiveness // Machine Design, 1950c, Vol. 22 No 11, pp. 149-153.
5. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія (за спеціальністю 05.02.09 - динаміка та міцність машин). - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.

Для плоских моделей ротора на анизотропных и изотропных опорах, при помощи инженерного критерия наступления автобалансировки, исследовано влияние сил вязкого сопротивления в опорах на критические скорости системы ротор-автобаланси́р (при переходе через которые наступает, утрачивается автобалансировка). Для разных плоских моделей ротора с присоединенными телами (корректирующими грузами, дисбалансом, корпусом), при помощи инженерного критерия устойчивости основного движения, найдены критические скорости. Установлено правило, которое позволяет для определения критических скоростей в случае ротора с присоединенными телами использовать аналогичные формулы для ротора без присоединенных тел.

ротор, автобаланси́р, дисбаланс, баланси́ровка, критическая скорость

Through the engineering criterion of offensive of autobalancing is explored the influence of forces of viscid resistance in supports on the critical speeds of the system rotor-autobalancer (in transition of which comes ore loses autobalancing) in the case when a rotor is set on isotropic and anisotropic viscid-elastic supports and accomplished flat motion. For different flat models of rotor with the added bodies (corrective masses, disbalance, corps), through the engineering criterion of stability of the main motion, critical speeds are found. Is set the rule, which allows for determination of critical speeds in the case of a rotor with the added bodies to use similar formulas for the rotor without bodies.

rotor, autobalancer, disbalance, balancing, critical speed