

Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний
технічний університет
Кафедра деталей машин та прикладної механіки

**Лабораторна робота №11.
Експериментальне дослідження
косого згину прямої консольної балки**

Методичні вказівки і звіти
до лабораторних робіт з опору матеріалів
для студентів будівельних та технічних спеціальностей

Рекомендована засіданням кафедри
деталей машин та прикладної
протокол № 1 від 30 серпня 2023 р.

ЦНТУ
Кропивницький
2023

Лабораторна робота №11. Експериментальне дослідження косого згину прямої консольної балки. Методичні вказівки і звіти до лабораторних робіт з опору матеріалів для студентів будівельних та технічних спеціальностей/ О.Б. Чайковський, Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пукалов, Л.С. Олійніченко – Кропивницький: ЦНТУ, 2023 – 23 с.

Укладачі: Чайковський Олександр Борисович – канд.
техн. наук, доцент;
Філімоніхін Геннадій Борисович – доктор техн.
наук, професор кафедри ДМ та ПМ;
Пукалов Віктор Вікторович – канд.
техн. наук, доцент кафедри ДМ та ПМ;
Олійніченко Любов Сергіївна – канд.
техн. наук, ст. викладач кафедри ДМ та ПМ

Рецензент: В.В.Свяцький, канд. техн. наук,
доцент кафедри обробки металів тиском та спецтехнологій

ЦНТУ, м. Кропивницький,
пр. Університетський, 8

Зміст

Передмова	6
Лабораторна робота №11 Дослідження косого згину прямої консольної балки	7
1. Основні теоретичні відомості	7
2. Експериментальна установка	12
3. Характеристики консольної балки та вимірювального інструменту	15
4. Обробка результатів досліджень та обчислень	16
5. Побудова основних графіків	19
6. Аналіз результатів досліджень, висновки	21
Запитання для самоконтролю	22
Використана література	23

Використані позначки

Позначки		Назва	Примітка
вітчизняна література	зарубіжна література		
$F, F_{\text{пот}}$	$A, A_{\text{нес}}$	площа необхідна, потрібна	area – площа necessary – необхідний
W_k	W_t	момент опору при крученні	torsion – кручення
μ	ν	коефіцієнт Пуассона	_____
P	F	Сила	force – сила
q	p_e	зовнішнє розподілене навантаження	external – зовнішній
N	N_{cal}	розрахункова повздовжня сила	calculated – розрахунковий
$M_k = M_x$	T	крутний момент	torque – крутний момент
$\varepsilon_{\text{поп}}, \varepsilon'$	ε_t	поперечна деформація	transverse – поперечний
$\varepsilon_{\text{пр}}$	ε_{el}	пружна деформація	elastik – пружний
$\varepsilon_{\text{зал}}, \varepsilon_{\text{пл}}$	ε_r	залишкова, пластична деформація	residual – залишковий
$\varphi_{\text{від}}, \Theta$	ϑ_{rel}	відносний кут повороту чи закручування	relative – відносний
$\sigma_{\text{пц}}$	σ_{pr}	границя пропорційності	proportionality – пропорційність
$\sigma_{\text{пр}}$	σ_{el}	границя пружності	elasticity – пружність
σ_T	σ_y	границя текучості	yield – текучість
$\sigma_{\text{тч}}^p$	σ_{ut}	тимчасовий опір розтягуванню (границя міцності)	ultimate – граничний tension – розтяг
$\sigma_{\text{тч}}^c$	σ_{uc}	тимчасовий опір стисканню (границя міцності)	compression – стиск
$\sigma_{\text{кр}}$	σ_{cr}	критичне напруження	critical – критичний
$[\sigma]$	σ_{adm}	допустиме напруження	admissible – допустимий

Зразки абеток

Грецька	Латинська
Α, α – альфа	A, a – а
Β, β – бета	B, b – бе
Γ, γ – гама	C, c – це
Δ, δ – дельта	D, d – де
Ε, ε – епсілон	E, e – е
Ζ, ζ – дзета	F, f – еф
Η, η – ета	G, g – ге
Θ, θ – тета	H, h – аш
Ι, ι – йота	I, i – і
Κ, κ – капа	J, j – йот
Λ, λ – ламбда	K, k – ка
Μ, μ – мі	L, l – ель
Ν, ν – ні	M, m – ем
Ξ, ξ – ксі	N, n – ен
Ο, ο – омікрон	O, o – о
Π, π – пі	P, p – пе
Ρ, ρ – ро	Q, q – ку
Σ, σ – сігма	R, r – ер
Τ, τ – тау	S, s – ес
Υ, υ – епсілон	T, t – те
Φ, φ – фі	U, u – у
Χ, χ – хі	V, v – ве
Ψ, ψ – псі	W, w – дубль ве
Ω, ω – омега	X, x – ікс
	Y, y – ігрек
	Z, z – зет

Передмова

Дані методичні вказівки і журнали до лабораторних робіт з опору матеріалів запропоновано студентам для студентів технічних та будівельних спеціальностей, для підготовки до заняття та самостійного опрацювання результатів випробувань і підготовки до захисту лабораторної роботи та відповідають програмі курсу «Опір матеріалів» Центральноукраїнського національного технічного університету.

Дані лабораторні роботи з опору матеріалів відносяться до типу вивчення механічних властивостей матеріалів, які є основою для розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість.

Надаються теоретичні основи дослідження механічних властивостей матеріалів та методика механічних випробувань матеріалів. Ознайомлення із стандартами, вимірювальними приладами, випробувальними машинами.

Окремо в методичних вказівках, вказана частина кожної лабораторної роботи, яка складається з окремих сторінок і які в свою чергу, можуть бути роздруковані, з'єднані між собою, заповнені, як звіт з роботи.

Лабораторна робота №11.

Експериментальне дослідження косого згину прямої консольної балки

Мета роботи: експериментальне визначення переміщень вільного кінця консольної балки і положень нейтральної лінії при косому згині; експериментальне підтвердження теоретичних основ, значеннями отриманих результатів.

1. Основні теоретичні відомості

Силовой площиною при складному (косому) згині називається така, що проходить через поздовжню вісь стержня і у якій діють зовнішні навантаження.

Складний згин у загального випадку виникає від дії зовнішніх силових факторів, розташованих у різних силових площинах.

Косий згин – частинний випадок складного згину, коли всі зовнішні навантаження діють у одній силовій площині, яка не збігається з головними площинами стержня (рис. 11.1).

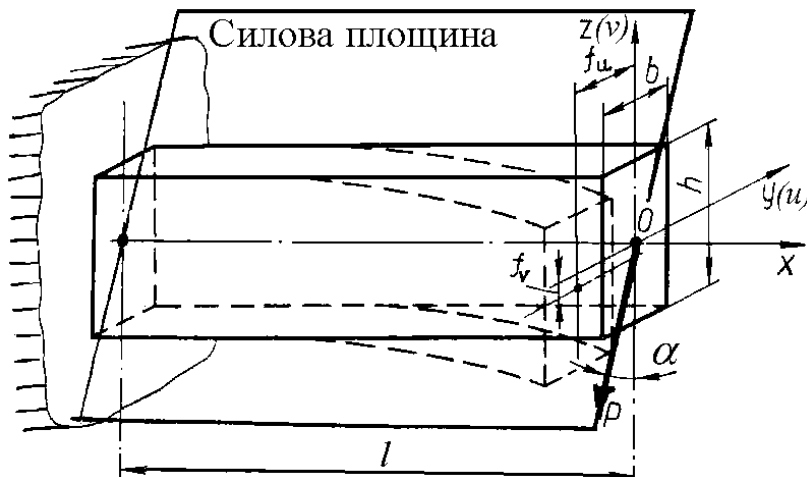


Рис. 11.1

Головна площина стержня – така, що проходить через головну центральну вісь поперечного перерізу і поздовжню вісь стержня.

Випадки складного (косого) згину зручно зводити до двох плоских згинів. Для цього загальні навантаження, або переміщення треба розкласти на

складові, розташовані у головних площинах стержня (принцип суперпозиції).

Як відомо, цей принцип справедливий тільки для випадків, коли матеріал підкоряється закону Гуку, а переміщення у межах пружних деформацій малі в порівнянні з розмірами стержня. В зв'язку з цим, дослідження косого згину необхідно проводити при навантаженнях, які викликають тільки пружні деформації. Максимальне навантаження при випробуванні консольних балок (рис. 11.1) на косий згин:

$$P_{\max} \leq \frac{\sigma_{\text{мц}}}{l \left(\frac{\cos \alpha}{W_u} + \frac{\sin \alpha}{W_v} \right)}, \quad (11.1)$$

де $\sigma_{\text{мц}}$ – границя пропорційності матеріалу балки; α – кут нахилу силової площини до вертикальної осі V ; W_u , W_v – осьові моменти опору відносно головних центральних осей. Для прямокутного перерізу:

$$W_u = W_y = \frac{bh^2}{6}, \quad W_v = W_z = \frac{hb^2}{6}, \quad (11.2)$$

Тоді для консольної балки (рис. 11.1), навантаженої зосередженою силою, **складові переміщення** вільного кінця у головних взаємно перпендикулярних площинах визначаються за формулами:

$$f_u = f_y = \frac{P_u l^3}{3EI_v} = \frac{Pl^3 \sin \alpha}{3EI_v}, \quad (11.3)$$

$$f_v = f_z = \frac{P_v l^3}{3EI_u} = \frac{Pl^3 \cos \alpha}{3EI_u}. \quad (11.4)$$

Величина повного переміщення вільного кінця балки визначається як геометрична сума вище знайдених складових переміщень

$$f = \sqrt{f_v^2 + f_u^2}. \quad (11.5)$$

Положення **площини повного переміщення** перерізу балки визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_u}{f_v}. \quad (11.6)$$

Положення **нейтральної лінії** у перерізі визначається кутом β , утвореним нею з горизонтальною головною центральною віссю U і визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_u}{I_v} \operatorname{tg} \alpha, \quad (11.7)$$

де I_u, I_v – осьові моменти інерції відносно головних центральних осей, для прямокутного перерізу, які визначаються за формулами

$$I_u = I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad I_v = I_z = \frac{hb^3}{12}. \quad (11.8)$$

Знаючи **співвідношення**

$$k = \frac{h}{b}, \quad \frac{I_u}{I_v} = \left(\frac{h}{b} \right)^2 = k^2, \quad (11.9)$$

тоді формулу (11.7) можна подати у вигляді

$$\operatorname{tg} \beta = k^2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (11.10)$$

Якщо у формулу (11.6) підставити значення формул (11.3), (11.4), то вона матиме вигляд

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_u}{I_v} \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \beta, \quad \varphi = \beta. \quad (11.11)$$

Тобто, площина переміщень перпендикулярна нейтральній лінії (рис.11.2).

Відхилення площини повного переміщення від силової площини складає кут

$$\gamma = \beta - \alpha = \varphi - \alpha. \quad (11.12)$$

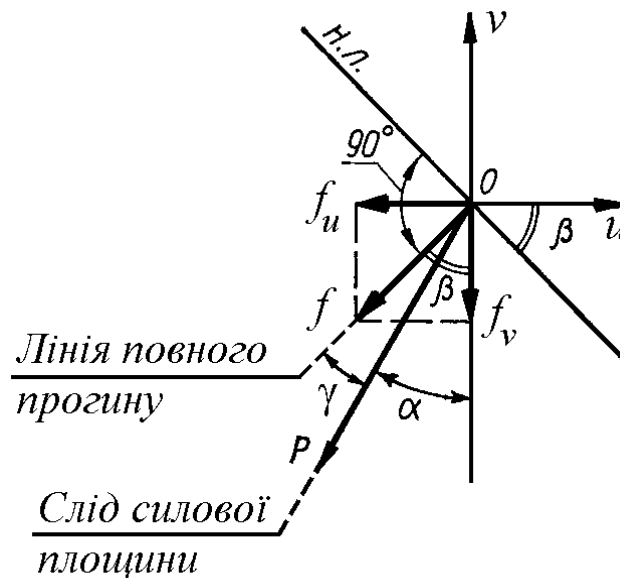


Рис. 11.2

Сумарні нормальні напруження у небезпечних (найбільш віддалених) точках поперечного перерізу балки при складному (косому) згині

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{Pl \cos \alpha}{W_u} + \frac{Pl \sin \alpha}{W_v} = \frac{M \cos \alpha}{W_u} + \frac{M \sin \alpha}{W_v}. \quad (11.13)$$

Знаки складових напружень залежать від того розтягнені волокна балки, чи стиснені.

Видно, що напруження являють собою функцію кута нахилу силової площини

$$\sigma_{\max} = \Phi_1(\alpha) = \frac{M}{W_u} \left(\cos \alpha + \frac{W_u}{W_v} \sin \alpha \right) = n \frac{M}{W_u}, \quad (11.14)$$

тут

$$n = \cos \alpha + \frac{W_u}{W_v} \sin \alpha. \quad (11.15)$$

Аналогічно можна подати повний прогин як функцію того ж кута, використавши формулу (11.5)

$$\begin{aligned} f_{\max} = \Phi_2(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{Pl^3 \cos \alpha}{3EI_u}\right)^2 + \left(\frac{Pl^3 \sin \alpha}{3EI_v}\right)^2} = \\ &= \frac{Pl^3}{3EI_u} \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{I_u}{I_v} \sin \alpha\right)^2} = m \frac{Pl^3}{3EI_u} = mf_v. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Тут

$$m = \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{I_u}{I_v} \sin \alpha\right)^2}. \quad (11.17)$$

На рис. 11.3 наведений графік, який ілюструє залежність найбільшого нормального напруження і повного прогину консольної балки від величини кута α (величина навантаження P незмінна, переріз прямокутний, $k = 2$)

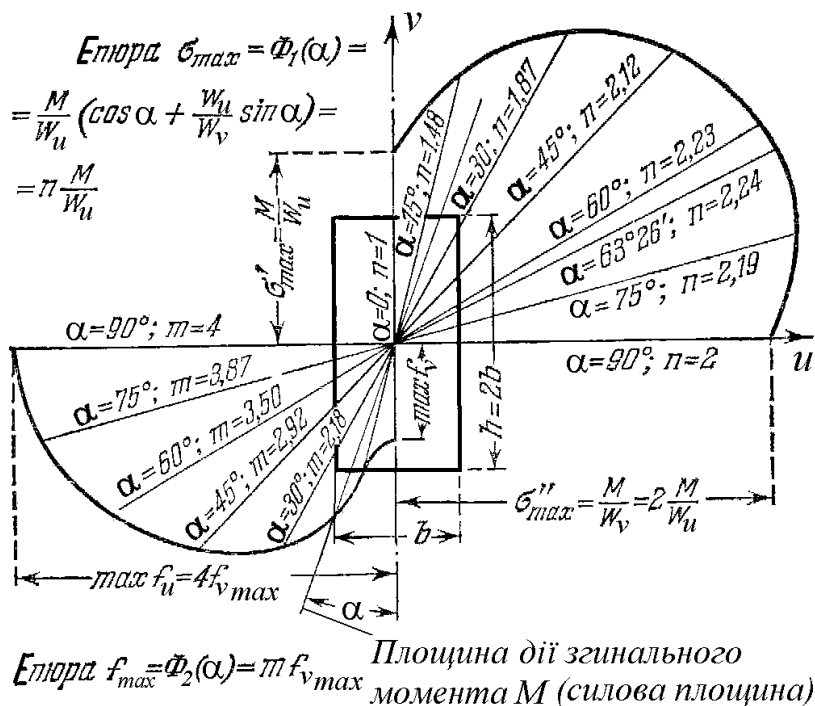


Рис. 11.3

Видно, що найбільше нормальне напруження виникає при умові, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_u}{W_v}, \quad n_{\max} = 2,236 \approx 2,24, \quad \alpha = 63^\circ 26'.$$

Таким чином, площа найменшої вантажопід'ємності не співпадає з площиною найменшої жорсткості.

2. Експериментальна установка

Типова експериментальна установка для дослідження косого згину показана на рис. 11.4 а.

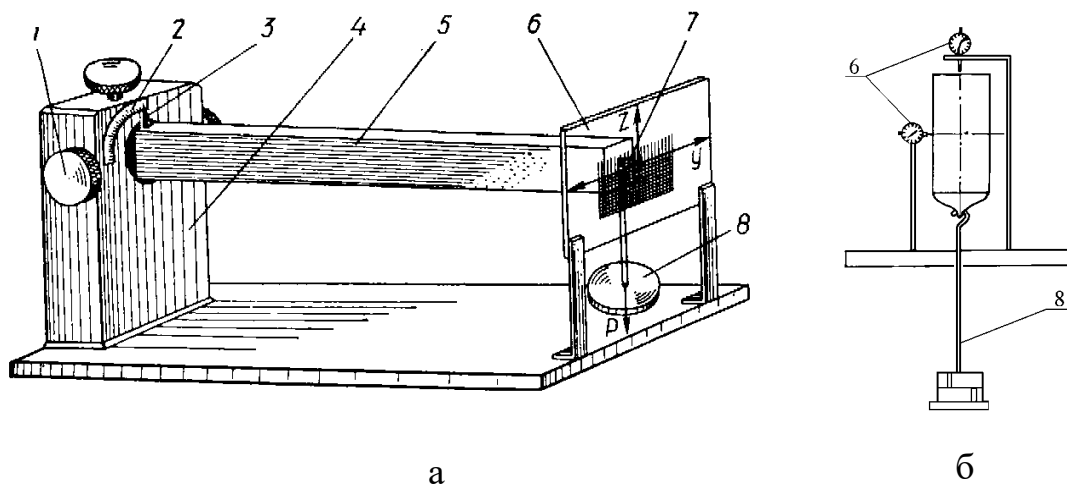


Рис. 11.4

1 – стопорний гвинт; 2 – кутова шкала; 3 – стрілка-вказівник кутів; 4 – стояк; 5 – консольна балка; 6 – прозорий вимірний, штриховий екран або вимірні індикатори; 7 – стрілка-вказівник прогинів; 8 – вантажна підвіска

Конструкція установки дозволяє повертати балку навколо власної поздовжньої осі на будь-який кут α при косому згині. Для такого довільного кута на рис. 11.5 приведені: слід силової площини; слід площини прогинів; складові переміщень; нейтральна лінія.

Горизонтальні (f_{Γ}) та вертикальні ($f_{\text{в}}$) переміщення вимірюються. Переміщення f_u , f_v – обчислюють за формулами (11.3), (11.4).

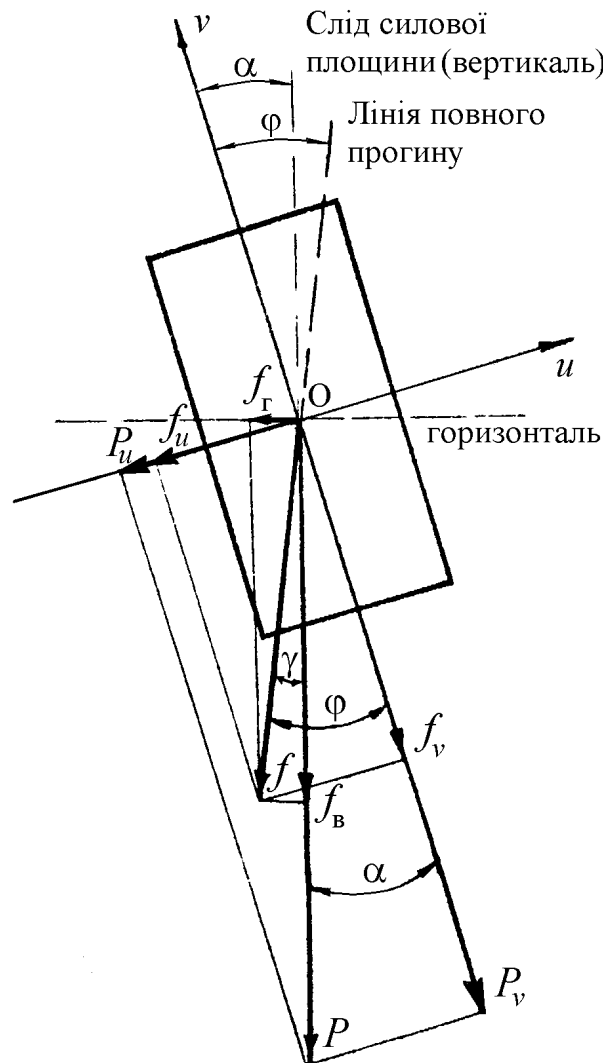


Рис.11.5

Повний прогин з урахуванням виразу (11.5)

$$f = \sqrt{f_v^2 + f_u^2} = \sqrt{f_{\Gamma}^2 + f_{\text{в}}^2}. \quad (11.18)$$

Тут: f_{Γ} , $f_{\text{в}}$ – експериментальні складові повного прогину у горизонтальному та вертикальному напрямках. Відхилення площини повного прогину від силової площини експериментально визначається за формулою

$$\text{tg} \gamma = \frac{f_{\Gamma}}{f_{\text{в}}}. \quad (11.19)$$

Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний
технічний університет
Кафедра деталей машин та прикладної механіки

ЗВІТ
до лабораторної роботи №11
на тему «Експериментальне дослідження
косого згину прямої консольної балки»

Виконав: ст. гр. _____
(група студента)

(П.І.Б. студента)

Перевірів: _____
(П.І.Б. викладача)

Робота №1 виконана _____
(підпис викладача)

(дата)

ЦНТУ
Кропивницький
_____ рік

3. Характеристики консольної балки та вимірювального інструменту

Матеріал балки _____.

Модуль Юнга матеріалу балки $E =$ МПа.

Границя пропорційності

для матеріалу балки $\sigma_{\text{пл}} =$ МПа.

Геометричні параметри балки:

– довжина консолі $l =$ см;

– ширина перерізу $b =$ см;

– висота перерізу $h =$ см.

Головні моменти інерції поперечного перерізу балки по (11.8):

$$I_u = \frac{bh^3}{12} = \text{см}^4;$$

$$I_v = \frac{hb^3}{12} = \text{см}^4.$$

Головні моменти опору поперечного перерізу балки по (11.2):

$$W_u = \frac{bh^2}{6} = \text{см}^3;$$

$$W_v = \frac{hb^2}{6} = \text{см}^3.$$

Значення найбільших навантажень на балку по (11.1):

$$P_{\max}^{(\alpha=30^\circ)} = \frac{\sigma_{\text{пц}}}{l \left(\frac{\cos \alpha}{W_u} + \frac{\sin \alpha}{W_v} \right)} = \quad H;$$

$$P_{\max}^{(\alpha=45^\circ)} = \quad H;$$

$$P_{\max}^{(\alpha=60^\circ)} = \quad H.$$

Ціна поділки індикатора $c_i = \quad \text{мм.}$

4. Обробка результатів досліджень та обчислень

Дані для проведення досліджень (задаються викладачем):

Таблиця 11.1

Навантаження на балку P_i, H	Кути повороту перерізу балки $\alpha_i, \text{град}$
$P_1 =$	$\alpha_1 =$
$P_2 =$	$\alpha_2 =$
$P_3 =$	$\alpha_3 =$

Результати досліджень та обчислень зводяться у таблиці 11.2 та 11.3.

Результати досліджень та обчислень (при постійному куті $\alpha =$)

Таблиця 11.2

Величина навантаження, H	Теоретичні значення величин					Експериментальні значення величин				Похибка, $\times 100\%$	
	складові переміщень, $см$	повний прогин, $см$	$tg \varphi = \frac{f_u}{f_v}$	φ , град	$\gamma = \varphi - \alpha$, град	складові переміщень, $см$	повний прогин, $см$	$tg \gamma = \frac{f_\Gamma}{f_B}$	γ , град	$\eta_f = \frac{f_\Gamma - f_e}{f_\Gamma}$	$\eta_\gamma = \frac{\gamma_\Gamma - \gamma_e}{\gamma_\Gamma}$
P_1	f_u	f_Γ		φ_Γ	γ_Γ	f_Γ	f_e		γ_e		
	f_v					f_B					
P_2	f_u	f_Γ		φ_Γ	γ_Γ	f_Γ	f_e		γ_e		
	f_v					f_B					
P_3	f_u	f_Γ		φ_Γ	γ_Γ	f_Γ	f_e		γ_e		
	f_v					f_B					

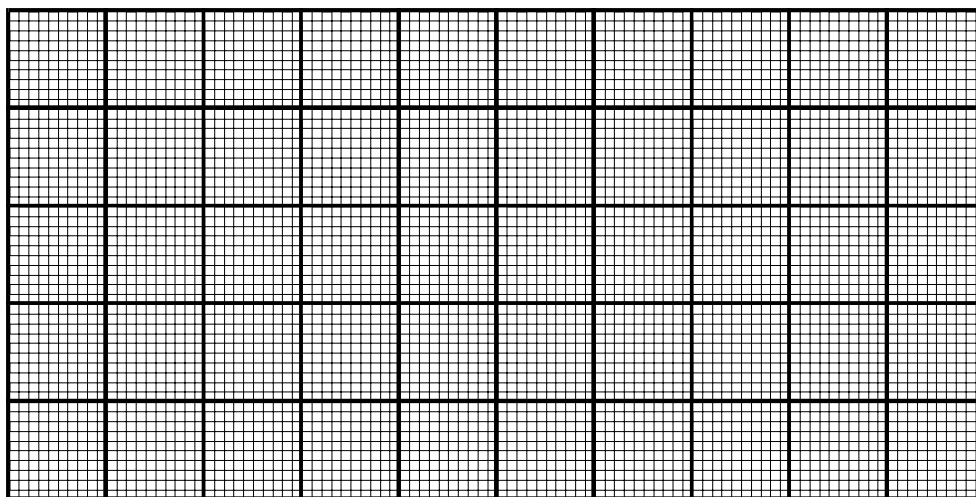
Результати досліджень та обчислень (при постійному навантаженні $P = H$)

Таблиця 11.3

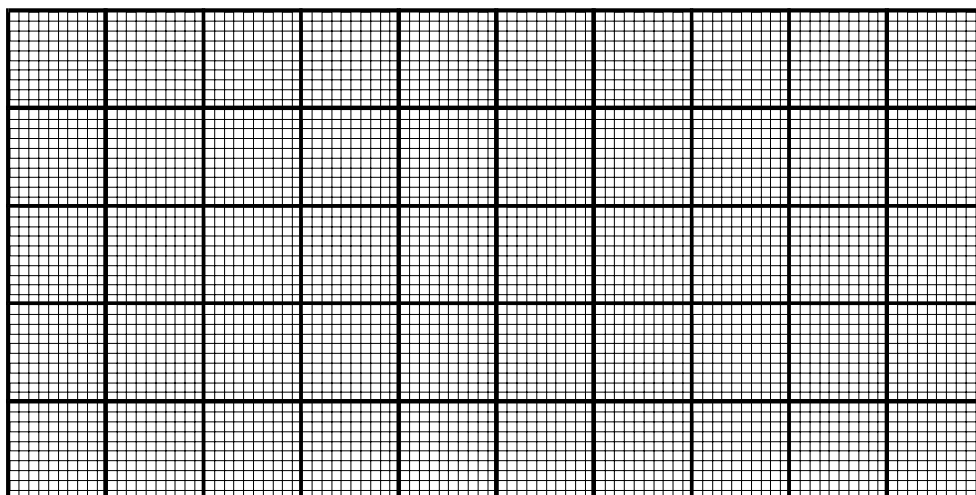
Величина α , град	Теоретичні значення величин					Експериментальні значення величин				Похибка, $\times 100\%$	
	складові переміщень, см	повний прогин, см	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_u}{f_v}$	φ , град	$\gamma = \varphi - \alpha$, град	складові переміщень, см	повний прогин, см	$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_\Gamma}{f_B}$	γ , град	$\eta_f = \frac{f_\Gamma - f_e}{f_\Gamma}$	$\eta_\gamma = \frac{\gamma_\Gamma - \gamma_e}{\gamma_\Gamma}$
α_1	f_u	f_Γ		φ_Γ	γ_Γ	f_Γ	f_e		γ_e		
	f_v					f_B					
α_2	f_u	f_Γ		φ_Γ	γ_Γ	f_Γ	f_e		γ_e		
	f_v					f_B					
α_3	f_u	f_Γ		φ_Γ	γ_Γ	f_Γ	f_e		γ_e		
	f_v					f_B					

5. Побудова основних графіків

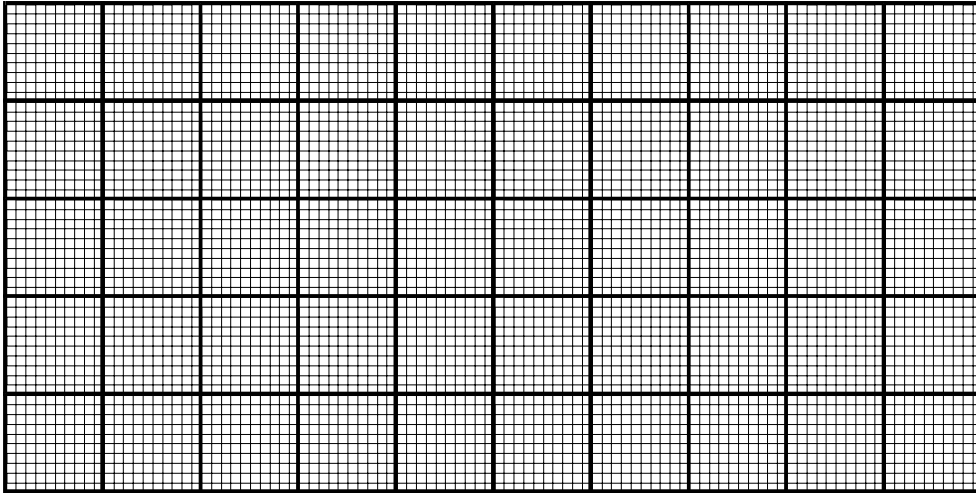
Графік залежності повного прогину (теоретичного) від величини навантаження ($\alpha =$) по даним табл. 11.2.



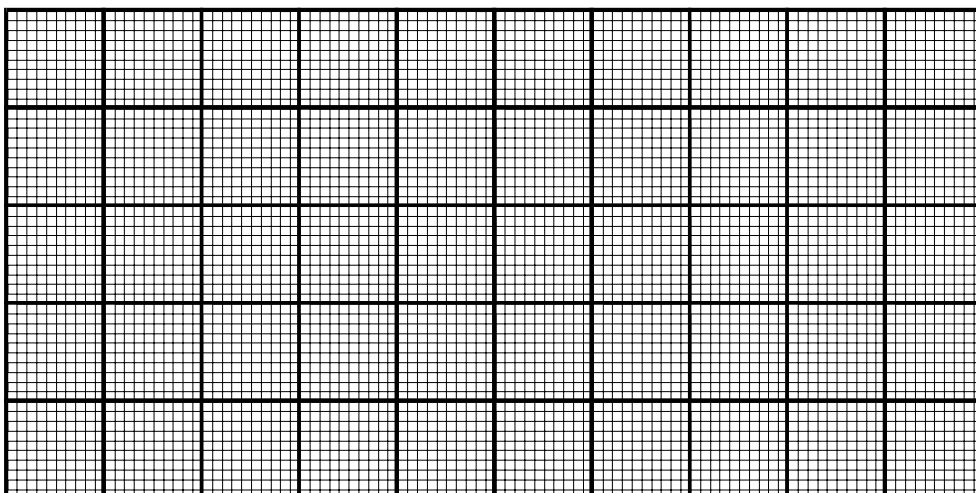
Графік залежності кута (теоретичного) відхилення площини повного прогину від величини навантаження ($\alpha =$) по даним табл. 11.2.



Графік залежності повного прогину (теоретичного) від кута нахилу
 силової площини ($P =$ H) по даним табл. 11.3.



Графік залежності кута (теоретичного) відхилення площини повного
 прогину від кута нахилу силової площини ($P =$ H)
 по даним табл. 11.3.



6. Аналіз результатів досліджень, висновки

Запитання для самоконтролю

1. Сформулювати мету роботи.
2. Що називають силовою площиною, головною площиною та площиною переміщень?
3. Коли виникає складний згин?
4. Що таке косий згин?
5. Записати формулу для допустимого навантаження при косому згині.
6. Як визначаються складові переміщення кінця балки при косому згині?
7. Записати формулу для визначення повного переміщення кінця балки при косому згині.
8. По яким формулам визначається положення нейтральної лінії?
9. Що являє собою кут нахилу площини переміщень, його взаємозв'язок з кутом нахилу нейтральної лінії?
10. Як визначається кут відхилення площини повного переміщення від силової площини?
11. Охарактеризувати конструкцію та принцип роботи експериментальної установки.
12. Як експериментально визначаються переміщення та кути?
13. Охарактеризувати графік залежності нормальних напружень і повного прогину по рис. 11.3.
14. Записати формулу сумарних напружень.

Використана література

1. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів: – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
2. Опір матеріалів: Підручник/ Г.С.Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський: За ред. Г.С.Писаренко – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
3. Методичні вказівки і журнали до лабораторних робіт з опору матеріалів (частина 1) для студентів технічних та будівельних спеціальностей /О.Б. Чайковський, Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пукалов. – Кіровоград: КДТУ, 2002. – 65 с.