

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

КОМБІНАТОРІКА ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Методичні вказівки та завдання для проведення практичних занять

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
Протокол № 10 від 07.06.2015

КІРОВОГРАД 2015

Комбінаторика та теорія ймовірностей:

Методичні вказівки та завдання для проведення практичних занять /Укл. Кривоблоцька Л.М., Петровська Т.В., Кічанова Н.П.-Кіровоград КНТУ, 2015-112с.

Укладачі:

Кривоблоцька Л.М.-канд. фіз.-мат. наук, доцент

Петровська Т.В.- асистент

Кічанова Н.П - асистент

ЗМІСТ

Тема 1. Перестановки, розміщення, сполучення без повторень	
Тема 2. Перестановки, розміщення, сполучення з повторенням	
Тема 3. Простір елементарних подій. Події та операції над ними	
Тема 4. Класичне означення ймовірності	
Тема 5. Теорема додавання та множення ймовірностей	
Тема 6. Формула повної ймовірності	
Тема 7. Формула Бейєса	
Тема 8. Послідовні випробування. Формула Бернуллі.	
Тема 9. Випадкові величини. Закон розподілу випадкової величини	
Тема 10. Теорема Пуасона. Локальна та інтегральна теорема Муавра-Лапласа	
Тема 11. Числові характеристики випадкових величин	
Тема 12. Деякі види розподілів випадкових величин. Закон великих чисел.	
Додатки.....	108
Список рекомендованої літератури	112

Елементи комбінаторики.

Тема 1. Перестановки, розміщення, сполучення без повторень.

Теоретичні відомості

Правило суми. Якщо множина M – це об'єднання множин $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$, які не перетинаються попарно, тоді кількість елементів множини зв'язані співвідношенням $|M| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + \dots + |M_k|$, де $|M|$ – кількість елементів множини M .

Нехай предмет a_1 можна обрати m_1 способами, предмет a_2 – m_2 способами, ..., предмет a_k – m_k способами. Тоді вибір предмета a_1 або $a_2, \dots$, або a_k може бути зроблений $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ способами.

Приклад 1. З міста A у місто B вирушають 3 потяги, 2 літаки і 1 автобус. Скількома способами можна дістатися з A в B ?

За правилами суми всього існує $3+2+1=6$ способів.

Правило добутку. Якщо $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$ – скінченні множини і $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$ – їх декартів добуток, то $|M| = |M_1| \times |M_2| \times \dots \times |M_k|$.

Нехай предмет a_1 можна обрати m_1 способами, предмет a_2 – m_2 способами, ..., предмет a_k – m_k способами і нехай вибір предмета a_1 не впливає на кількість способів вибору предметів $a_2, a_3, \dots, a_k$; вибір предмета a_2 не впливає на кількість способів вибору предметів $a_1, a_3, \dots, a_k$ тощо. Тоді вибір упорядкованої множини предметів $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ у вказаному порядку можна здійснити $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ способами.

Приклад 2. В групі 13 хлопців та 12 дівчат. Скільки танцювальних пар вони можуть утворити?

Розв'язання:

Спочатку оберемо, наприклад, парубка – це можна зробити 13 способами, кожному з цих 13 хлопців партнершу можна обрати 12 способами. Зрозуміло, що пару (хлопець, дівчина) можна обрати $13 \cdot 12 = 156$ способами.

Зауваження. Якщо нам треба побудувати множину з n символів, кожен з яких вибирається з можливих m символів незалежно один від одного, то кількість упорядкованих множин з n символів буде дорівнювати $\underbrace{m \cdot m \cdot m \dots m}_n = m^n$.

Приклад 3. Скільки різних символів з трьох знаків можна записати кодом Морзе ($\cdot, -$)?

Розв'язання:

Перший символ можна вибрати двома способами, другий – теж двома способами і третій – теж двома. За правилом добутку різних символів можна одержати $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ способами (символи в коді можуть повторюватись). Наприклад (---).

Розміщення та перестановки без повторень.

Нехай $M=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – фіксована множина.

Визначення. Упорядковані підмножини з k елементів $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ множини M називаються перестановками k елементів або розміщеннями з n елементів по k .

Позначається кількість розміщень з n елементів по k : A_n^k (читається A з n по k). За правилом добутку $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад 4.

Множина E складається з 10 перших літер українського алфавіту. З них обирається 4 літери, які не повертаються, та записується слово. Скільки слів з 4 літер можна скласти в результаті даного випробування? Скільки з цих слів будуть закінчуватись літерою а?

Розв'язання:

Кількість всіх слів з 4 літер в даному випробуванні – дорівнює кількості упорядкованих множин з 4 елементів, вибраних з 10 елементів, тобто

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Нехай випадковим чином складене з 4 літер множини E слово закінчується літерою а. Кількість таких слів дорівнює кількості способів розмістити на три місця, що залишилися по одному символу з 9 (символ а не розглядається, так як його місце вже зайнято); таким чином,

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 504.$$

Якщо у перестановці беруть участь всі елементи множини (n -перестановка), то використовують термін **перестановка**. Кількість перестановок позначають P_n .

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$$P_n = n!$$

Розміщення та перестановки враховують порядок елементів.

Приклад 5.

10 варіантів контрольної роботи, які написані на окремих картках, викладач випадковим чином роздає завдання 10 студентам, кожному по одному варіанту. Скільки існує способів роздати ці картки?

Розв'язання:

Кількість всіх способів роздати 10 карток в даному випробуванні – дорівнює кількості упорядкованих множин з 10 елементів, тобто

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

Сполучення без повторень.

Визначення. Сполученням з n елементів по k називається будь яке k -розміщення (або k - вибірка) з цих елементів, в якому враховується лише склад елементів і не враховується їх порядок. Позначається C_n^k , або $\binom{n}{k}$. Оскільки перестановок з k елементів можна утворити $k!$, то кількість сполучень буде в $k!$ разів менше за кількість розміщень.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \text{ або } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Числа C_n^m отримуються як коефіцієнти розкладання n -го степеня двочлена (бінома Ньютона):

Біном Ньютона.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, \text{ або}$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = b^n + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^k a^k b^{n-k} + \dots + a^n.$$

Коефіцієнти розкладання називаються також біноміальними коефіцієнтами. Основні співвідношення для біноміальних коефіцієнтів:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Приклад 6.

З 10 перших літер українського алфавіту навмання вибирається новий алфавіт, який складається з 5 літер. Скільки існує варіантів такого алфавіту?

Розв'язання:

В даному експерименті вибирається множина без повернення та без упорядкування 5 елементів з множини, яка складається з 10 елементів. Тому

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{5! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252.$$



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 1.1-51.1

1. Скільки потрібно взяти елементів, щоб число перестановок, утворених з них, дорівнювало 720?
2. Скількома способами можна вибрати голосну та приголосну літери з літер слова “будівля”? А зі слова “афоризм”?

3. На вершину гори ведуть 7 доріг. Скількома способами турист може піднятися вгору, а потім спуститися з неї? Розв'язати задачу за умови, що сходження та підймання відбуваються різними шляхами.
4. Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці білий та чорний квадрат, які не лежать на одній горизонталі та на одній вертикалі?
5. Скількома способами можна зробити триколірний прапор з горизонтальними смугами однакової ширини, якщо маємо тканини 6 різних кольорів? Розв'яжіть цю задачу, якщо відомо, що один з кольорів червоний.
6. Скількома способами можна вибрати з повної колоди в 52 карти по одній карті кожної масті? Розв'яжіть цю задачу, якщо відомо, що серед обраних карт немає пари карт, які відрізняються лише мастю, тобто двох “королів”, двох “десяток” і т.д.
7. Скількома способами можна посадити за круглий стіл 5 чоловіків та 5 жінок так, щоб ніякі дві людини однієї статі не сиділи поруч?
8. Скільки способів вибрати 3 фарби, якщо маємо 5 різних фарб?
9. П'ятеро дівчат та три юнаки грають в городки. Скількома способами вони можуть утворити дві команди з 4 людей, щоб хоч би один юнак був в кожній команді?
10. У одного студента є 7 книг з математики, а у іншого – 9 книг. Скількома способами вони можуть обміняти 3 книги одного на 3 книги іншого?
11. На конференції присутні 52 людини. Потрібно обрати президію в складі 5 чоловік та делегацію в складі 3 чоловік. Скільки способів вибрати, якщо
 - а) члени президії можуть увійти в склад делегації,
 - б) члени президії не можуть увійти в склад делегації?
12. У міському обрано 9 чоловік. З них треба вибрати голову, замісника та культорга. Скількома способами це можна зробити?
13. З групи, яка складається з 7 чоловіків та 4 жінок, потрібно вибрати 6, так, щоб серед них було не менше ніж 2 жінки. Скількома способами це можна зробити?
14. Скількома способами можна обтягти 6 стільців тканиною, якщо вона є шести різних кольорів, і всі стільці повинні бути різнокольоровими?

15. Телефонна мережа має n абонентів. Скількома способами можна з'єднати три пари абонентів?
16. Скількома способами можна опустити 5 листів у 11 поштових скриньок, якщо у кожную з них кидається не більш одного листа?
17. На шкільній вечірці присутні 12 дівчат та 15 юнаків. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари для танців?
18. В скількох числах, які складаються з дев'яти цифр, всі цифри різні?
19. Рота складається з 3 офіцерів, 6 сержантів та 60 рядових. Скількома способами можна скласти з них загін з офіцера, 2 сержантів та 20 рядових?
20. Є 8 токарів. Скількома способами можна доручити трьом з них виготовлення трьох різних деталей (за одним видом на кожного)?
21. В групі 16 дітей. 7 народились в Москві, 4 – в Петербурзі, 3 – в Києві та 2 – у Мінську. Скількома способами можна вибрати з них 4 дітей так, щоб в групі були лише діти, які народились в різних містах?
22. Скільки непарних чисел можна скласти з цифр числа 3694 (кожную цифру можна використовувати тільки один раз)? Скільки парних чисел можна скласти з цифр цього числа?
23. В скількох дев'ятицифрових числах всі цифри різні?
24. Скількома способами можна скласти з 9 приголосних та 7 голосних слова, які складаються з 4 різних приголосних та 3 різних голосних? В скількох словах ніякі дві приголосні не знаходяться поруч?
25. Скількома способами можна вибрати з 15 чоловік групу людей для роботи, якщо група складається з 5 чоловік?
26. Юнак має 6 друзів. На протязі 20 днів він запрошує їх до себе у гості по 3 кожного разу, так щоб кожен товариш був в гостях тільки один раз. Скількома способами він може це зробити?
27. Скількома способами можуть розміститися у турнірній таблиці 10 футбольних команд, якщо відомо, що ніякі 2 не набрали однакової кількості очок?
28. Скількома способами можна побудувати замкнену ламану, вершинами якої є вершини правильного шестикутника (ламана може бути самоперетинна)?

29. Скількома способами можна вибрати з слова “логарифм” 3 приголосних та 1 голосну літеру? Та сама задача, якщо серед вибраних літер повинна бути літера “ф”.
30. Скількома способами можна переставити букви у слові “чабан” таким чином, щоб і голосні і приголосні були записані за алфавітом?
31. Скільки чотиризначних чисел можна утворити з цифр 0,1,2,3, не повторюючи їх?
32. Скільки різних прямих можна провести через 10 точок площини, з яких ніякі 3 не лежать на одній прямій?
33. Скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 30 три натуральних числа так, щоб їх сума була парна?
34. З колоди в 52 карти двоє вибирають по 4 карти кожний. Скількома способами це можливо зробити? В скількох випадках один з них одержить чотири тузи, інший – чотири королі?
35. Скількома способами 6 людей можуть вибрати з 6 пар рукавичок ліву та праву так, щоб ніхто не одержав пару?
36. Скількома способами можна скласти три пари з 4 шахистів?
37. Скількома способами можливо розташувати 12 білих та 12 чорних шашок на чорних полях дошки?
38. Скількома способами можна вибрати 12 чоловік з 17, якщо двоє з них не можуть бути обрані разом? Скількома способами можна вибрати m чоловік з n , якщо p з них не можуть бути обрані разом?
39. В групі 7 чоловіків та 4 жінки. Потрібно вибрати 6 людей так, щоб серед них було не менше, ніж 2 жінки. Скількома способами це можна зробити?
40. Скількома способами у грі “Спортлото” можна вгадати п’ять куль з 36; вгадати 5, 4, 3 номери?
41. Троє юнаків та 2 дівчини обирають собі місце роботи. В місті є 3 заводи, де потрібні робочі в ливарні цехи (туди беруть тільки юнаків), 2 ткацькі фабрики, куди беруть тільки жінок, та 2 фабрики, куди беруть і юнаків, і дівчат. Скількома способами юнаки та дівчата можуть влаштуватись на роботу?

42. Яку кількість словників потрібно мати, щоб можна було безпосередньо перекласти з будь-якої з п'яти мов: російської, англійської, французької, німецької, італійської, на будь яку мову з цих п'яти мов? На скільки більше потрібно словників, якщо кількість різних мов дорівнює 10?
43. З 12 слів чоловічого роду, 9 жіночого та 10 середнього потрібно вибрати по одному слову кожного роду. Яким числом способів це можна зробити?
44. Будівельна фірма формує бригаду з 5 робітників. В організації 20 робітників, в тому числі 5 мулярів, 4 теслі і 2 штукатури. Скількома способами можна укомплектувати бригаду, щоб вона складалася з робітників всіх спеціальностей по одному?
45. Скількома способами можна розмістити 12 різних деталей у трьох ящиках?
46. Скільки існує п'ятизначних парних чисел, в яких жодна цифра не повторюється двічі?
47. В партері театру 50 місць. Скількома способами можна розмістити 40 чоловік, якщо не має значення, хто на якому місці буде сидіти і якщо це має значення?
48. Знайдіть суму всіх п'ятизначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 1,2,3,4,5 так, щоб жодна цифра не повторювалась двічі. Розв'яжіть цю задачу, якщо п'ятизначне число можна записати за допомогою цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9.
49. Скільки різних натуральних чисел можна утворити з цифр 0,1,2,3,4, якщо кожне число містить будь-яку з даних цифр не більше одного разу?
50. Знайдіть суму всіх тризначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 1,2,3,4. Розв'яжіть цю задачу, якщо жодна цифра не повторюється двічі в цьому числі.
51. Труппа складається з 10 артистів. Скількома способами можна вибрати з неї на два вечори по 6 чоловік для участі у виставах так, щоб склад труппи не повторювався?

Тема 2. Перестановки, розміщення, сполучення з повторенням.

Теоретичні відомості

Розміщенням з повторенням

Часто доводиться робити упорядковані вибірки з повторенням деяких елементів. Наприклад, з множини $M=(1,2,3)$ такими вибірками є 3-вибірки $(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (2,3,3), (3,2,3), (3,3,2), (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2), (3,2,2), (2,3,2), (2,2,3), (1,3,3), (3,1,3), (3,3,1), (1,3,1), (1,1,3), (3,1,1), (1,2,3), (2,1,3), (3,1,2)$. (Всього таких вибірок буде 27). Такі загальні упорядковані k вибірки з n елементів іноді називають **кортежами**.

Визначення. Розміщенням з повторенням з n елементів по k називається кортеж (вбірка з повторенням) довжини k з n елементів.

Кожен елемент може бути обраний n способами, тоді за правилом добутку

$$\overline{A_n^k} = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k.$$

Кількість k розміщень з повтореннями з n елементів обчислюється за формулою:

$$\boxed{\overline{A_n^k} = n^k}.$$

В нашому прикладі число розміщень з трьох елементів 1,2,3 по 3 з повторенням дорівнює $3^3 = 27$.

Перестановки з повторюванням.

Нехай множина M з n предметів ($|M|=n$) складається з множини M_1 предметів першого типу кількістю n_1 ($|M_1|=n_1$), множини M_2 предметів другого типу кількістю n_2 і т.д. до множини M_k предметів k -го типу кількістю n_k ($|M_k|=n_k$), причому $M = \bigcup_{i=1}^k M_i$, $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$, $M_i \cap M_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Перестановки елементів одного типу можна робити незалежно від перестановок елементів іншого типу $n_k!$ способами, тому за правилом добутку елементи перестановок можна переставити $n_1!n_2!n_3!\dots n_k!$ способами так, що загальна n перестановка не зміниться.

Тоді кількість різноманітних перестановок із вказаними повтореннями

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_k \quad \text{дорівнює} \quad P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!}, \quad \text{де}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n.$$

Список $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ називають специфікацією перестановки.

Приклад 7.

Маємо набір з чотирьох літер $aabc$. Тоді всі перестановки з повтореннями з цих літер: $abac, baac, aabc, aacb, abca, baca, acba, acab, bcaa, cbaa, caba, caab$. В розглянутому вище прикладі, літер a в даному наборі дві, а літер b и c – по

одній. Тоді кількість всіх перестановок з повтореннями з 4 елементів та складом літер 2, 1, 1 дорівнює $P(2, 1, 1) = 4! / (2! 1! 1!) = 12$, в чому ми переконались.

Сполучення з повтореннями.

Маємо предмети n типів у такій кількості, що предметів кожного типу не менше, ніж k екземплярів. Число k – кількість обираємих елементів, та n – кількість типів елементів, з яких проводимо вибір. Скільки існує неупорядкованих k вибірок (комбінацій) предметів з можливими повторюваннями?

Розглянемо задачу: маємо об'єкти n типів. Скільки існує способів вибрати k об'єктів, порядок розташування яких в вибірках не має значення? Складемо вибірки таким чином: для кожного типу пишуть стільки одиниць, скільки предметів цього типу входять у комбінацію, якщо предмети деякого типу не входять у комбінацію, тоді у відповідному місці пишеться 0, тобто кожен вибірку доповнюємо нулями, кількість яких дорівнює найбільшій кількості типів предметів відсутніх в вибірці – $n-1$. Тоді вибірки будуть мати вигляд, наприклад, $(\underbrace{111, 11, 0, 0, 11, 1, \dots}_{n+k-1})$ або $(\underbrace{111111111}_{k}, \underbrace{0, 0, 0, 0, \dots, 0}_{n-1})$. Кожна вибірка має $n+k-1$

елементів. Кількість таких вибірок буде дорівнювати кількості перестановок з повторюваннями з $n+k-1$ елементів, де одиниці повторюються k разів, нулі – $n-1$

раз: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = P(k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Приклад 8.

З трьох цифр 1, 2, 3 скласти всі можливі сполучення з повтореннями, які містять по 2 елементи.

Розв'язання:

Всі такі сполучення: (1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 3).

Скористаємося формулою ($k = 2, n = 3$).

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{2!2!} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Пояснимо цю формулу на даному прикладі:

Запишемо послідовності, які містять 2 одиниці та 2 нулі, так як максимальна кількість типів елементів, які відсутні в виборці дорівнює 2. Послідовності, які відповідають кожному з 6 сполук з повтореннями: (1, 1) – 1100; (1, 2) – 1010; (1, 3) – 1001; (2, 2) – 0110; (2, 3) – 0101; (3, 3) – 0011.

Таким чином, кожній сполуці з повтореннями відповідає своя послідовність з нулей та одиниць, по кожній з таких послідовностей однозначно встановлюється відповідна їй сполука з повтореннями.

Приклад 9.

В кондитерському магазині продають 4 сорти тістечок: наполеони, еклери, пісочні та «картошка». Сколькома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язання:

Кількість способів рахуємо за формулою:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4+7-1)!}{7!3!} = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

**Задачі для самостійного розв'язування****Задачі 52.2-72.2**

52. Скільки існує телефонних номерів з 7 цифр, в перших 3 цифрах яких не зустрічаються цифри 0 та 9?
53. Маємо 5 видів конвертів без марок та марки чотирьох видів. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою для того, щоб відіслати листа?
54. Автомобільні номери складаються з однієї, двох або трьох літер та чотирьох цифр. Знайти число таких номерів, якщо використовуються 32 літери.
55. Четверо студентів складають іспит. Скількома способами їм можуть бути виставлені оцінки, якщо відомо, що ніхто не одержав “незадовільно”?
56. Ювелір має 5 однакових смарагдів, 8 однакових рубінів та 7 однакових сапфірів. Скількома способами він може обрати 3 камені для прикраси?
57. 3 точок та тире складені всі можливі кортежі з 7 символів. Яка найбільша кількість таких кортежів, які відрізняються не менш ніж в трьох позиціях?
58. Скільки чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 8 та 9?
59. Маємо 4 білих кулі, 3 синіх та 3 червоних. Скількома способами можна скласти з них кортеж, якій складається з n куль, якщо $n=1,2,3,4,5$?
60. На залізничній станції n світлофорів. Скільки може бути послано різних сигналів за допомогою цих світлофорів, якщо кожний світлофор має три стани: горить або зелене, або жовте, або червоне світло?
61. Скільки існує п'ятизначних чисел? В скількох з них всі цифри парні? В скількох всі цифри непарні? В скількох входять цифри менше шести? В скількох немає цифр більше трьох? Скільки з них складаються з цифр 1,2,3,4,5? Скільки містять всі цифри 0,2,4,6,8?
62. Терміново треба надіслати 6 листів. Скількома способами це можна зробити, якщо для того, щоб передати листи можна посилати трьох листонош, та будь-який лист можна дати будь-кому з них?
63. Маємо набір з 16 карток. На чотирьох написана літера А, на чотирьох – Б, на чотирьох – В, на чотирьох – Г. Скільки різних слів можна одержати, вибираючи з набору 4 картки і розміщуючи їх у деякому порядку?
64. Знайдіть суму чотиризначних чисел, які одержуються за допомогою всіляких перестановок цифр 1,1,4,4. Те ж саме для 0,0,4,4.
65. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких приймають одне з таких значень: 4,5,6,7 см?

66. Для премій з математичної олімпіади виділено 3 екземпляри однієї книги, 4 – другої і 8 – третьої. Скількома способами можна розділити ці премії між 30 учасниками, якщо будь-якому вручають не більше однієї книги?
67. Абітурієнт повинен скласти 4 іспити. Вважається, що для зарахування достатньо набрати 17 балів, при цьому двійок не повинно бути. Скількома способами він може скласти іспити, набравши не менше 17 балів і не одержавши жодної двійки?
68. Скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 20 два числа так, щоб їх сума була непарна?
69. Знайдіть суму всіх тризначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 1,2,3,4. Розв'яжіть цю задачу, якщо жодна цифра не повторюється двічі в цьому числі.
70. Скількома способами 9 пасажирів можна розмістити у трьох вагонах? Для скількох комбінацій в перший вагон сядуть 3 з них? Для скількох комбінацій в один вагон сяде 4, у другий – 3, а у третій – 2 пасажирів?
71. На вступних іспитах проводиться тестування з математики. Абітурієнту пропонується по 4 завдання першого, другого та третього рівня. Завдання першого рівня оцінюються в 1 бал, другого – у 2, третього – у 3 бали. Абітурієнт отримав 20 балів. Скількома способами він міг це зробити?
72. На письмовому іспиті з математики абітурієнту пропонується 5 завдань, кожне з яких оцінюється або в 2 бали, або в 0 балів. Скількома способами абітурієнт може скласти іспит?

Тема 3. Простір елементарних подій. Події та операції над ними.

Теоретичні відомості

Множину всіх можливих результатів експерименту або простір результатів експерименту позначаємо через Ω . Цей простір – скінчений.

Нехай $A_i, i = \overline{1, n}$ – елемент такого простору елементарних подій:
 $\Omega = (A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_n)$

Означення. Елементарною подією A_i називають неподільний результат експерименту (подія, що може відбуватися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби).

Повна група подій. Якщо $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, то такі

випадкові події утворюють повну групу, а саме: внаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.

Приклад. Підкидання грального кубика дає простір вигляду $\Omega = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Приклад. Підкидання двох монет:

A_1 = герб, цифра

A_2 = цифра, герб

A_3 = герб, герб

A_4 = цифра, цифра

$\Omega = (\text{гц}, \text{цг}, \text{гг}, \text{цц})$

Приклад . При одному пострілі в мішень $\Omega = (\text{Влучив}, \text{не влучив})$.

Операції над подіями:

Додавання. Сумою двох подій A і B називається така подія $C = A \cup B$ ($C = A + B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B . Подія $A \cup B$ називається об'єднанням цих подій.

На рисунку 1 подію $A \cup B$ схематично зображено заштрихованою областю.

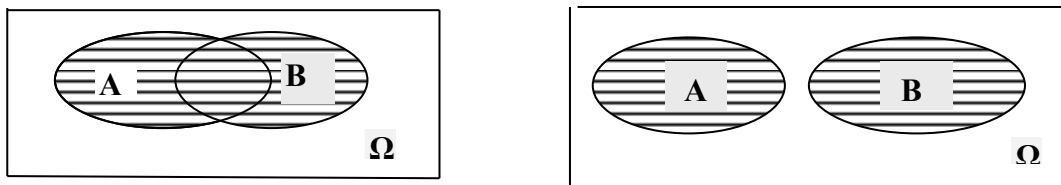


Рис.1

Множення. Добутком двох подій A і B називається така подія $C = A \cap B$ ($C = AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням події A і B . Операція $A \cap B$ називається перерізом цих подій (рис. 2).

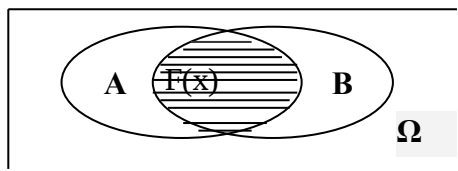


Рис.2

Віднімання. Різницею двох подій A і B називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події A і одночасним ненастанням події B (рис. 3).

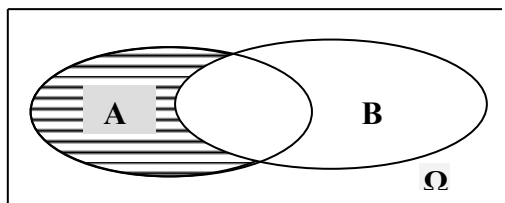


Рис. 3

Сумісні та несумісні події.

Якщо $A \cap B \neq \emptyset$, то випадкові події A та B називають сумісними.

Якщо $A \cap B = \emptyset$, то випадкові події A та B називають несумісними.

Протилежні події. Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називаються протилежними. Подія, яка протилежна A , позначається $\bar{A}$. Справедливе співвідношення: $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ (рис. 4).

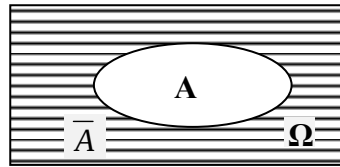


Рис.4

Приклад 1. Задано множину цілих чисел $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати випадкові події: $A = \{\text{узяте число } x \text{ менше або рівне } 10 \ (x \leq 10)\}$; $B = \{\text{Узяте число більше } 0 \text{ та менше або рівне } 12 \ (12 \geq x > 0)\}$. Визначити $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

Розв'язання. $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; $A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A \setminus B = \{-4, -3, -2, 0\}$.

Випадкові події A, B, C ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$), для яких визначено операції додавання, множення та віднімання, підлягають таким законам:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $A \cap B = B \cap A$.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
8. $A \cup \Omega = \Omega$.
9. $A \cap \Omega = A$.
10. $A \cup \emptyset = A$.
11. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
12. $\bar{\Omega} = \emptyset$.
13. $\bar{\emptyset} = \Omega$.
14. $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
15. $A \cup (A \cap \bar{B}) = A$.
16. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
17. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Випадкові елементарні події задовольняють таким твердженням: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими.



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 73.3-86.3

73. Одночасно кидають три монети. Скласти два простори елементарних подій, які відповідають даному експерименту.
74. Одночасно кидають два гральних кубика. Скласти не менше двох просторів елементарних подій, які відповідають даному експерименту.
75. З 5 різних книжок А, Б, В, Г, Д навмання вибирають 3 книги. Скласти простір елементарних подій, які відповідають даному експерименту. Виписати підмножини цього простору, які відповідають вибору трьох книг які: а) містять книгу А; б) не містять книгу Б; в) містять книги А та Б.
76. Навмання вибираються дві літери з числа літер, які утворюють слово "КОД". Розглянемо множини: а) { КД, ДК, ОД, ДО, КО, Ом }; { КД, КО, ОД }; { КОД, ДОК, ОДК, ДКО, КДО, ОКД }; { ДК, ОД, ДО, КО, ОК }; { КД, КО, ОД }; { КД, ДК, ОД, ДО, КО, ОК }; { КД, КО, Д }.
- Які з цих множин являються просторами елементарних подій, які відповідають даному експерименту ?
77. Парадокс де Мере. Дивлячись на гру в кубики, де Мере помітив, що при одночасному киданні трьох гральних кубиків сума зерен, яка дорівнює 11 випадає частіше, ніж сума зерен, яка рівна 12. Однак, він побачив протиріччя в тому, що числа 11 та 12 можна одержати однаковою кількістю способів: 11 – (146), (155), (236), (245), (335), (344), для числа 12 – (156), (255), (246), (336), (345), (444). Описати простори елементарних подій, які відповідають даному експерименту та пояснити даний парадокс. Виписати події, які відповідають появі суми зерен 11 та суми зерен 12.
78. Навмання вибирається одна літера з числа літер, які утворюють слово "ФОРМУЛА". Скласти простір елементарних подій, які відповідають даному експерименту.
79. Три стрільця роблять по одному пострілу в мішень. Подія А – влучання першого стрільця, В – влучання другого стрільця, С - влучання третього стрільця. Записати символічно такі події: а) всі три стрільця влучили в мішень; б) точно один стрілець влучив в мішень; в) два стрільці влучили в мішень, а один схибив; г) хоч би один стрілець влучив в мішень.
80. Простір елементарних подій, який відповідає киданню грального кубика, складається з шести наслідків, які позначаються цифрами 1,2,3,4,5 та 6. Записати множини А та В, які відповідають таким подіям: А – на верхній

грані з'явилась парна кількість зерен; B – на верхній грані з'явилося число, яке менше чотирьох, а також події $A+B$, AB , $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$.

81. Простір елементарних подій, який відповідає киданню грального кубик, складається з шести наслідків, які позначаються цифрами 1,2,3,4,5 та 6. Подія: A – на верхній грані з'явилась парна кількість зерен; B – на верхній грані з'явилося число, яке менше чотирьох. Представити суму подій $A+B$ в вигляді суми двох несумісних подій.

82. Для довільних подій $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ довести рівність:

а) $\overline{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n} = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \dots \overline{A_n}$;

б) $\overline{A_1 A_2 A_3 \dots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3} + \dots + \overline{A_n}$.

83. Довести другий дистрибутивний закон для подій A, B, C :
 $AB+C=(A+C)(B+C)$.

84. Події A та B – дві довільні події. Довести рівності:

а) $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\Omega$

б) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\emptyset$

в) $AB+A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}=\Omega$.

85. Події A та B – довільні події. Довести, що події A , $\overline{A}B$ та $\overline{A+B}$ утворюють повну групу подій.

86. Скільки елементів має простір елементарних подій:

1) експеримент – підкидають монету десять разів;

2) експеримент – підкидають гральний кубик шість разів;

3) експеримент – два постріли в мішень;

4) експеримент – на кожній з чотирьох карток пишуть одну з цифр:

1, 2, 3, 4, 5;

5) експеримент – вибір обіду з трьох справ, коли в меню пропонують 5 перших, 6 других і 3 треті страви;

6) експеримент – вибір одного числа із множини всіх п'ятицифрових чисел?

Тема 4. Класичне означення ймовірності. Геометричне означення ймовірності. Статистичне означення ймовірності.

Теоретичні відомості

Означення. Імовірністю випадкової події A називають невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \leq m \leq n$), які сприяють появі A , до кількості всіх елементарних подій n простору Ω :

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для неможливої події $P(A) = P(\emptyset) = 0$. Для вірогідної події $P(A) = 1$. Отже, для довільної випадкової події $0 \leq P(A) \leq 1$.

Приклад 1. Двоє друзів грають у таку гру: одночасно показують на пальцях цифри від 1 до 5. Якщо сума цих цифр парна, то виграє один з них, якщо непарна, то – інший. У якого з друзів ймовірність виграти більша?

Розв’язання. Простір елементарних подій Ω запишемо в вигляді таблиці

1\2	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Простір елементарних подій Ω містить $n = 25$ чисел.

A – сума цифр парна; B – сума цифр непарна. Підраховуючи парні (заштриховані) клітини, одержуємо $m = 13$.

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13}{25}$, $P(B) = \frac{12}{25}$. Для першого випадку (сума цифр парна) ймовірність виграти більша, перший з друзів буде вигравати частіше.

Приклад 2. З чисел від 1 до 30 Юра та Ваня називають по одному. Яка ймовірність того, що вони назвуть два числа, які діляться на 3, на 5?

Розв’язання. За правилом добутку $n = 30 \cdot 30 = 900$.

Серед чисел від 1 до 30 десять таких, що діляться на 3, шість таких, що діляться на 5.

A – обидва числа діляться на 3; B – обидва числа діляться на 5.

$$m_1 = 10 \cdot 10 = 100, \quad m_2 = 6 \cdot 6 = 36.$$

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{36}{900} = \frac{1}{25}.$$

Приклад 3. З чисел від 1 до 30 Катя повинна вибрати два випадковим чином. Яка ймовірність того, що вони обидва будуть ділитися на 3, на 5?

Розв’язання.

Серед чисел від 1 до 30 десять таких, що діляться на 3, шість таких, що діляться на 5.

Події A – обидва числа діляться на 3; B – обидва числа діляться на 5.

$$n = C_{30}^2, \quad m_1 = C_{10}^2, \quad m_2 = C_6^2, \quad C_{30}^2 = \frac{30!}{2! \cdot 28!} = 435, \quad C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45,$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15.$$

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{45}{465} = \frac{3}{31} \approx 0,096, \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{15}{465} = \frac{1}{31} \approx 0,032.$$

Приклад 4. Знайдемо ймовірність вгадати 4 номери в лотереї “Спортлото”: 6 з 36?

Розв’язання. $36 = \begin{cases} 6 \text{ виграшних,} \\ 30 \text{ невіграшних.} \end{cases}$ закреслили $6 = \begin{cases} 4 \text{ виграшних,} \\ 2 \text{ невіграшних.} \end{cases}$

Якщо числа замінити буквами, то одержимо загальну схему:

$$N = \begin{cases} m - \text{виграшних,} \\ N - m \text{ невіграшних.} \end{cases} \quad \text{взяли} \quad S = \begin{cases} k \text{ виграшних,} \\ S - k \text{ невіграшних.} \end{cases}$$

$$P = \frac{C_m^k \cdot C_{N-m}^{S-k}}{C_N^S}.$$

Підставивши, одержуємо

$$P = \frac{C_6^4 \cdot C_{30}^2}{C_{36}^6} = \frac{\frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{30!}{2! \cdot 28!}}{\frac{36!}{6! \cdot 30!}} = \frac{15 \cdot 29 \cdot 16}{\left(\frac{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \right)} = \frac{15 \cdot 29 \cdot 15}{31 \cdot 8 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 7} = \frac{2175}{649264} \approx 0,003.$$

Геометричне означення ймовірності: Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події A – як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Приклад 1. Двоє осіб домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від t_1 до t_2 годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом t годин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти у довільний момент часу $t \in [t_1; t_2]$.

Розв’язання. Подія A – «зустріч відбудеться». Позначимо довжину часового проміжку $t_2 - t_1 = T$, а моменти приходу кожної особи – x і y . Тоді подія A відбудеться за умови $|x - y| \leq t$, де $0 \leq x \leq T$, $0 \leq y \leq T$. Зобразимо ці умови на площині в системі координат $ХОУ$ (рис. 1). Як випливає з рис. 1, часу T відповідає площа квадрата $OBCD$, а події A – площа шестикутника $OEFCKM$.

Скориставшись геометричним означенням імовірності, отримаємо:

$$P(A) = \frac{S_{OEFCKM}}{S_{OBCD}} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2} = \frac{t(2T - t)}{T^2}.$$

Приклад 2. На двох суміжних сторонах квадрата з довжиною сторони, що дорівнює 1, навмання взято по точці. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищить 0,5.

Розв'язання. Подія A – «відстань між двома навмання взятими точками не перевищить 0,5». Позначимо відстань від точок, узятих на сторонах квадрата, до його вершини, що є спільною для цих сторін, через x і y . Тоді відстань між зазначеними точками $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Множина значень для x і y незліченна, причому значення кожної з цих змінних рівноможливі на заданих відрізках. Для обчислення ймовірності скористаємося геометричною інтерпретацією. Як елементарну подію розглядаємо $\omega_i = \{x_i; y_i\}$. Якщо x і y змінюються в зазначених межах, то множина Ω є квадратом зі стороною 1. Щоб визначити множину точок для події A , проведемо лінію $\sqrt{x^2 + y^2} = 0,5$. На рис. 2 подано множину Ω , в якій заштриховано множину точок, що відповідають події A . Мірою кожної з розглядуваних множин є відповідна площа, тому

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{\pi \cdot 0,25}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

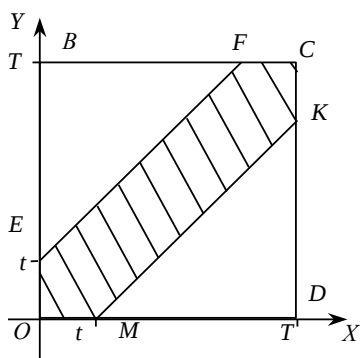


Рис. 1

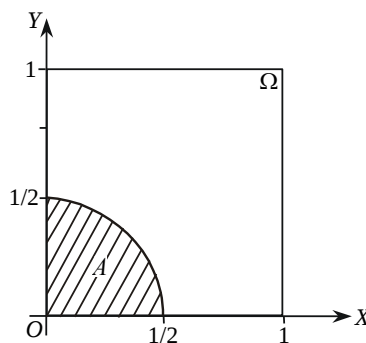


Рис. 2

Статистичне означення ймовірності: Статистичною ймовірністю події A називається відношення кількості m випробувань, в яких подія A відбулась, до загальної кількості виконаних випробувань n : $W(A) = \frac{m}{n}$.

Аксіоматичне означення ймовірностей: У системі аксіом, запропонованій А. М. Колмогоровим, невизначеним є поняття елементарної події і ймовірність. Наведемо аксіоми, які визначають ймовірність:

1. Кожній події поставлено у відповідність невід'ємне дійсне число $P(A)$. Це число називається ймовірністю події A .
2. Ймовірність достовірної події дорівнює 1.
3. Ймовірність настання хоча б однієї події дорівнює сумі ймовірностей подій.



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 87.4-151.4

86. Випадково кинули два гральних кубика. Знайти ймовірності таких подій:
- а) сума випавших зерен дорівнює семи;
 - б) сума випавших зерен не перевищує п'яти;
 - в) сума випавших зерен дорівнює восьми, а різниця – чотирьом;
 - г) сума випавших зерен – просте число;
 - д) сума випавших зерен рівна п'яти, а добуток – чотирьом.
87. В урні сто жетонів з номерами від 1 до 100. Яка ймовірність того, що навмання взятий жетон має номер, який не містить цифри 3?
88. Куб, усі грані якого пофарбували, розрізаний на тисячу кубиків однакового розміру, котрі потім ретельно перемішуються. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кубик:
- а) не має жодної грані, яка пофарбована; б) має тільки одну пофарбовану грань; в) дві пофарбовані грані; г) три пофарбовані грані.
89. В урні дві білі та чотири чорні кулі. Послідовно виймають всі кулі. Знайти ймовірність того, що останньою дістануть чорну кулю.
90. Випадковим чином кинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що цифра 5 з'явиться хоч би на одному з них.
91. Числа 1,2,3,4 та 5 написані на п'яти картках. Навмання вибирають три картки та кладуть їх зліва направо. Знайти ймовірність того, що одержиться парне число.
92. Набираючи номер телефона, абонент забув дві останні цифри. Знаючи, що вони різні, абонент набрав дві останні цифри навмання. Яка ймовірність того, що він набрав правильний номер?
93. На восьми картках записані числа 2,4,6,7,8,11,12 та 13. Навмання взяли дві картки. Знайти ймовірність того, що утворений з чисел, які записані на цих картках, дріб можна скоротити.
94. П'ять відрізків мають довжину 1,3,5,7 та 9. Навмання вибирають три відрізка з п'яти. Знайти ймовірність того, що з них можна скласти трикутник.
95. З 15 деталей 10 фарбовані. Вибирають навмання 3 деталі, знайти ймовірність того, що ці три деталі виявились фарбованими.

96. Зі 100 питань програми студент підготував до іспиту 70 питань. Викладач навмання запропонував студенту відповісти на три запитання. Знайти ймовірність того, що студент відповість на всі три запитання.
97. Лотерейні білети мають п'ятизначний номер, починаючи з 00001. Яка ймовірність того, що навмання вибраний білет лотереї не містить однакових цифр?
98. З 10 книг – 5 мають ціну 40 гривень, 3 книги по 10 гривень, 2 книги – по 30 гривень. Знайти ймовірність того, що навмання вибрані книги коштують 50 гривень.
99. В урні три білі, чотири чорні та п'ять червоних куль. Навмання вибирають з урни дві кулі. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?
100. В класі 25 учнів – 13 хлопців та 12 дівчат. Яка ймовірність того, що на початку занять в клас першою зайде дівчинка? Першим зайде хлопець?
101. На окремих картках записані літери А, У, П, Р, С. Картки перемішують та розкладають випадковим чином в ряд. Знайти ймовірність того, що при цьому утворюється слово ПАРУС.
102. На окремих картках записані літери А,А,А,Е,И,К,М,М,Т,Т. Знайти ймовірність того, що з карток, випадковим чином розкладених в ряд, утворюється слово МАТЕМАТИКА.
103. На полиці випадковим чином розставлено вісім книг. Знайти ймовірність того, що три певні книги стоятимуть поруч.
104. На окремих картках написані літери А,А,А,А,Б,В,Г,Д,Е,К. Картки перемішують та випадковим чином розкладають в ряд. Знайти ймовірність того, що картки з літерою А будуть розташовані поруч.
105. П'ятитомний збірник творів розташований на полиці випадковим чином. Знайти ймовірність того, що томи розташовані в потрібному порядку зліва направо або справа наліво.
106. Для проведення змагань 10 команд, з яких дві набагато сильніші за інші, ділять на дві групи по п'ять команд в кожній. Знайти ймовірність того, що дві сильніші команди: а) потраплять в різні групи; б) потраплять в одну групу.

107. В певний день у одного вчителя два уроки, в другого – три. Враховуючи, що в цей день у всіх класах по шість уроків, знайти ймовірність того, що у випадку відсутності одного вчителя, другий зможе провести за нього урок.
108. З 10 білетів лотереї два виграшних. Купили п'ять білетів. Знайти ймовірність того, що серед них: а) один виграшний; б) два виграшних; в) хоч би один виграшний.
109. В цеху працюють шість чоловіків та чотири жінки. Навмання відібрано семеро людей. Знайти ймовірність того, що серед них три жінки.
110. На окремих картках записані натуральні числа від 1 до 49 включно. Навмання вибрали шість карток. Знайти ймовірність того, що m з них – це картки, на яких написані лише числа від 1 до 6 ($m=0,1,2,3,4,5,6$).
111. Десять людей випадковим чином сідають в поїзд, який складається з 10 вагонів. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть в різних вагонах.
112. П'ять чоловіків та п'ять жінок випадковим чином сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що дві людини однієї статі не будуть сидіти поруч.
113. Десятеро пасажирів сідають випадковим чином в три вагони. Знайти ймовірність того, що а) в кожний вагон сядуть по три пасажирів; б) в один вагон сядуть чотири, в другий – три, а в третій – два пасажирів.
114. На першому поверсі дев'ятиповерхового будинку сідають в ліфт чотири людини. Яка ймовірність того, що вони зійдуть а) на різних поверхах; б) всі на одному поверсі?
115. Чотири листа, різних за адресою, кладуть у конверти з написаними випадковим чином адресами. Знайти ймовірність того, що а) всі листи потраплять у конверт з потрібною адресою; б) три листи потраплять у конверт з потрібною адресою; в) один лист потрапить у конверт з потрібною адресою; г) три листи потраплять у конверти з чужою адресою; д) всі листи потраплять у конверт з потрібною адресою.
116. В туристичний похід вирушили 8 людей. Яка ймовірність того, що серед них половина жінок?
117. На вступних іспитах проводиться тестування з математики. Абітурієнту пропонується по 4 завдання першого, другого та третього рівня. Завдання першого рівня оцінюються в 1 бал, другого – в 2, третього – в 3 бали. Абітурієнт отримав 20 балів. Яка ймовірність того, що всі завдання першого рівня він розв'язав? Яка ймовірність того, що він не розв'язав одне завдання третього рівня?

118. На письмовому іспиті з математики абітурієнту пропонується 5 завдань, кожне з яких оцінюється або в 2 бали, або в 0 балів. Для складання іспиту досить 6 балів. Знайти ймовірність того, що абітурієнт, який склав іспит, не розв'язав задачу з геометрії?
119. Із коробки доміно беруть навмання три пластинки. Яка ймовірність того, що всі вони є «дублями»?
120. На кожній із шести однакових карток надруковано одну з літер E, H, A, I, T, G . Картки витягують навмання послідовно і складають зліва направо. Яка ймовірність того, що в результаті вийде слово «НАТІГ»?
121. Партія із 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих двох деталей будуть:
- 1) дві придатні;
 - 2) дві браковані;
 - 3) 1 придатна і 1 бракована.
122. Партія складається з 20 виробів, з яких 8 виробів 1-го сорту, 6 – 2-го, 2 – 3-го сорту, а решта – браковані. Навмання беруть 4 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них виявилось 2 вироби 1-го сорту, 1–2-го сорту і 1 бракований.
123. На складі є 10 кінескопів заводу № 1 і вісім кінескопів заводу № 2. Навмання взято чотири кінескопи. Знайти ймовірність того, що серед них два кінескопи заводу № 1 і два кінескопи заводу № 2.
124. За підсумком року акції десяти фірм мали прибуток, чотирьох фірм знецінились, а акції шести фірм – зберегли свою номінальну вартість. Яка ймовірність того, що випадково куплені шість акцій різних фірм матимуть прибуток?
125. Партія електролампочок складається з 10 придатних і п'яти бракованих. Із партії навмання по одній беруть усі лампочки. Знайти ймовірність того, що останньою буде взята придатну.
126. У партії із 16 деталей чотири – нестандартні. Навмання з поверненням беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед них дві деталі будуть стандартними.
127. Для молодіжної вечірки діджей заготував 20 компакт-дисків, 7 з яких з інструментальною музикою. Знайти ймовірність того, що з чотирьох навмання відібраних компактів три будуть з інструментальною музикою.

128. До ліфта дев'ятиповерхового будинку на 1-му поверсі зайшло троє пасажирів. Кожен із них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з 2-го. Знайти ймовірність того, що всі пасажирі:
- 1) вийдуть на 5-му поверсі;
 - 2) вийдуть одночасно на одному з поверхів;
 - 3) вийдуть на різних поверхах.
129. У конверті 10 акцій, серед яких три фірми А. Навмання відібрано 4 акції. Яка ймовірність того, що серед них буде одна акція фірми А?
130. В автосалоні шість автомобілів мають магнітофони фірми «AIWA», сім – фірми «PHILIPS», десять – фірми «PIONEER». За день продано п'ять авто. Знайти ймовірність того, що всі авто з магнітофонами фірми «PHILIPS» залишилися на своїх місцях.
131. Академічній групі, в якій 12 дівчат та 18 юнаків, запропоновано придбати 10 акцій банку «Надра». Знайти ймовірність того, що власниками акцій стануть 4 юнаки та 3 дівчини, якщо розігрування здійснюється випадковим чином.
132. Пасажир забув дві останні цифри коду комірки автоматичної камери схову, де він залишив речі. Знайти ймовірність того, що після першого набору коду із двома останніми навмання набраними цифрами комірка відчиниться, а також ймовірність цієї ж події у випадку, коли пасажир пам'ятає, що ці цифри різні.
133. Серед 30 видів акцій будівельних організацій 19 стали прибутковими, 5 – збитковими, а 6 залишилися без змін. Яка ймовірність того, що серед п'яти навмання придбаних акцій різних видів прибутковими виявляться три?
134. Цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 написано на однакових картках, які ретельно перемішано. Тричі навмання беруть по одній картці і кладуть їх зліва направо. Знайти ймовірність того, що утворене тризначне число виявиться: а) парним; б) кратним трьом; в) кратним 5.
135. У шухляді є вісім однотипних деталей, три з яких браковані (решта – стандартні). Навмання з шухляди беруть три деталі. Знайти ймовірність подій A_i де i – число бракованих деталей серед взятих ($i = 0, 1, 2, 3$).
136. До контролера надійшла партія однотипних виробів кількістю 20 шт. Серед них є п'ять бракованих, але про це йому невідомо. Контролер навмання бере чотири вироби для перевірки. Якщо всі відібрані вироби виявляться доброякісними, то партія пропускається. Знайти ймовірність того, що партія буде пропущена контролером.

137. В кафе на початок зміни було 5 пакетів кави «Jacobs», 6 – «Nescafe», 8 – «Галка». Попит на кожний із цих видів кави був однаковий. За зміну було продано п'ять пакетів. Яка ймовірність того, що вся кава «ГАЛКА» залишилася невитраченою?
138. У касовому апараті є вісім 25-копійчаних монет, 10 – вартістю по 50 коп. і 12 – по 5 коп. Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання взятих монет не виявиться жодної вартістю 50 коп.
139. Першість області з баскетболу виборюють 18 команд, які жеребкуванням поділяються на дві групи, по 9 команд у кожній. 5 команд зазвичай займають перші місця. Яка ймовірність потрапляння всіх лідируючих команд в одну групу? Яка ймовірність потрапляння двох лідируючих команд в одну групу і трьох – в іншу?
140. Світлана і Василь домовилися зустрічати Новий рік у компанії чисельністю 10 осіб. Вони дуже хотіли сидіти за святковим столом поруч. Яка ймовірність виконання цього бажання, якщо в їхній компанії є звичай розподіляти місця жеребкуванням.
141. Із шести літер розрізної абетки складено слово «книжка». Маленький хлопчик змішав літери, а потім навмання їх зібрав. Яка ймовірність того, що він знову отримав те саме слово?
142. У контейнері є 20 деталей, серед яких 8 нестандартних. Знайти ймовірність того, що число нестандартних деталей серед п'яти навмання взятих деталей виявиться рівним: а) 0; б) 2; в) 5.
143. Студент підготував на залік 36 питань із 42. Знайти ймовірність того, що він складе залік за першим разом, якщо для цього достатньо правильно відповісти на три навмання витягнуті питання (кожне із 42 питань надруковане на окремій картці).
144. Серед 18 телевізорів, що продаються, 6 вимагають додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що з п'яти куплених телевізорів два потребуватимуть додаткового регулювання.
145. З двадцяти пісень, трансльованих українським радіо, 12 є російськомовними. Яка ймовірність того, що слухач передачі з перших п'яти прослуханих пісень мав нагоду чути тільки російську мову?
146. Банк протягом місяця мав видати в кредит позику дванадцяти клієнтам першого району і десяти клієнтам другого району. Ця операція здійснюється поетапно. Знайти ймовірність того, що за перший тиждень кредити

отримають два клієнти першого району і чотирі клієнти другого, якщо всі клієнти мають однакові можливості отримати позику.

147. Стрижень завдовжки L розрубують на дві частини. Знайти ймовірність того, що менша з частин, на які він поділяється, має довжину не менш як $\frac{L}{5}$.
148. Усередині круга радіусом R навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що точка потрапить усередину:
1) вписаного у круг квадрата;
2) вписаного у круг правильного трикутника.
149. У коло радіуса 10 кидають точку. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до центра кола не перевищує 4.
150. На колі взято будь-які три точки A , B , C . Знайти ймовірність того, що трикутник ABC гострокутний.
151. На колі радіуса R навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує r ($r \leq 2R$).
152. У прямокутник 5×4 см² вписано коло радіусом 1,5 см. Якою є ймовірність того, що точка, випадково поставлена у прямокутник, виявиться у середині кола?
153. Точку навмання поставили на відрізок $[0; 2]$. Якою є ймовірність влучення точки на менший відрізок: $[0,5; 1,4]$?
154. Два студенти A і B домовилися зустрітись у визначеному місці між 12-ю та 13-ю годинами. Той, хто прийшов першим, чекає на другого упродовж 20 хвилин, після чого йде. Якою є ймовірність зустрічі студентів A і B , якщо: 1) прихід кожного з них може відбутися навмання упродовж зазначеної години; 2) моменти часу їх приходу є незалежними.
155. У ящику знаходяться фрукти: 5 апельсинів і 4 яблука. Навмання обирають 3 фрукти. Якою є ймовірність, що усі вони будуть апельсини?
156. У партії, що складається з k виробів, є l дефектних. Із партії навмання обирається для контролю r виробів. Знайти ймовірність події A , яка відповідає тому, що з вибраних r рівно s виробів будуть дефектними.
157. Визначити ймовірність того, що партія із 100 деталей, серед яких 5 бракованих, буде прийнята при випробуваннях навмання узятій половини

усієї партії, якщо умовами прийому допускається бракованих деталей не більше однієї з п'ятдесяти.

158. Визначити ймовірність того, що корені квадратного рівняння $x^2 + 2ax + b = 0$ будуть: а) дійсними; б) додатними, якщо значення коефіцієнтів у прямокутнику $|a| < N$, $|b| < M$ є рівноможливими.
159. Із 33 карток із літерами українського алфавіту навмання вибирають 7 карток. Якою є ймовірність, що ці п'ять літер у порядку виймання складуть слово КАФЕДРА.
160. Знайти ймовірність, що при підкиданні двох кубиків сума очок буде кратна чотирьом. Розписати простір подій.
161. Гравець кидає два гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума одержаних цифр кратна 3? Розписати простір подій.
162. Яка імовірність того, що Ваша майбутня дитина народиться:
1) 5 числа; 2) 30 числа; 3) 28 числа?

Тема 5. Теорема додавання та множення.

Теоретичні відомості

Несумісними подіями називаються події, коли настання однієї з них повністю виключає настання іншої, тобто коли $A \cap B = \emptyset$.

Теорема додавання.. Ймовірність суми двох несумісних подій (або A або B ($A \cup B$)) дорівнює сумі ймовірностей двох подій:

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Загальна формула на випадок, якщо події A і B сумісні, тобто $A \cap B \neq \emptyset$, дорівнює

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема множення. Розглянемо дві незалежні події A і B . Незалежними подіями називаються такі події, коли ймовірність настання будь-якої з них не залежить від того, відбулася інша чи ні. Добутком двох подій A і B ($A \cap B$) називається подія, яка полягає в тому, що події A і B відбуваються разом.

Теорема. Ймовірність сумісного настання двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Ймовірність сумісного настання двох залежних подій дорівнює добутку ймовірностей події A на ймовірностей події B , при умові, що подія A наступила.

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Ймовірність суми двох сумісних подій (наступила хоч би одна з двох подій) можна визначити через ймовірність протилежної події (не наступила жодна з цих подій) за формулою $P(A + B) = 1 - P(\bar{A} \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$. Таку формулу доцільно використовувати, якщо подій більше двох.

Приклад 1. Троє друзів складають екзаменаційну сесію. Ймовірність того, що вони не матимуть трійок, для кожного з них дорівнює 0,9; 0,6; 0,8 відповідно. Знайти ймовірності всіх можливих наслідків даного експерименту. Знайти ймовірність події “Хоч би один з друзів склав сесію без трійок”.

Розв’язання.

Події: А – “Перший студент склав без трійок”, В – “Другий студент склав без трійок”, С – “Третій студент склав без трійок”. $P(A)=0,9$; $P(B)=0,6$; $P(C)=0,8$. Ймовірності протилежних подій $P(\bar{A})=0,1$; $P(\bar{B})=0,4$; $P(\bar{C})=0,2$. Очевидно, що події сумісні, але незалежні.

1) Всі друзі склали без трійок: $A \cap B \cap C$

$$P_3 = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,9 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,432$$

2) Двоє з них склали без трійок: $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

$$P_2 = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,9 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,108 + 0,228 + 0,048 = 0,444$$

3) Один з них склав без трійок: $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

$$P_1 = P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) = 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,072 + 0,012 + 0,032 = 0,116$$

4) Всі друзі склали з трійками: $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

$$P_0 = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,008.$$

Сума всіх ймовірностей дорівнює $\sum_{i=1}^4 P_i = 0,432 + 0,444 + 0,116 + 0,008 = 1$.

Ймовірність події “Хоч би один з друзів склав сесію без трійок”:

$$p = 0,432 + 0,444 + 0,116 = 0,992 \text{ або } p = 1 - 0,008 = 0,992.$$

Приклад 2. У двох кошиках по 5 яблук одного сорту та 10 яблук іншого (грушівка та антонівка). З кожного кошика взяли по яблуку. Яка ймовірність того, що взяли два яблука одного сорту?; Двох різних сортів?

Розв’язання. Подія $A_1 = \{ \text{з першого кошика взяли антонівку} \}$, подія $\Gamma_1 = \{ \text{з першого кошика взяли грушівку} \}$. Подія $A_2 = \{ \text{з другого кошика взяли антонівку} \}$, подія $\Gamma_2 = \{ \text{з другого кошика взяли грушівку} \}$. Події A_1, A_2 та A_1, Γ_2 та A_2, Γ_1 , та Γ_1, Γ_2 сумісні, але незалежні.

Ймовірність того, що взяли два яблука одного сорту (або обидва яблука грушівки, або антонівки):

$$P(A_1) \cdot P(A_2) + P(\Gamma_1) \cdot P(\Gamma_2) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{5}{9}.$$

Ймовірність того, що взяли два яблука різних сортів:

$$P(A_1) \cdot P(\Gamma_2) + P(\Gamma_1) \cdot P(A_2) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{15} = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

Приклад 3. В кошику 5 яблук одного сорту та 10 яблук іншого (грушівка та антонівка). З кошика взяли два яблука. Яка ймовірність того, що взяли два яблука одного сорту?; Двох різних сортів?

Розв'язання.. Події несумісні, але залежні (ймовірність другої події залежить від того, яка була попередня). Подія $A_1 = \{\text{з кошика перший раз взяли антонівку}\}$, подія $\Gamma_1 = \{\text{з кошика перший раз взяли грушівку}\}$. Подія $A_2 = \{\text{з кошика другий раз взяли антонівку}\}$, подія $\Gamma_2 = \{\text{з кошика другий раз взяли грушівку}\}$.

Ймовірність того, що взяли два яблука одного сорту (або обидва яблука грушівки, або антонівки):

$$P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) + P(\Gamma_1) \cdot P(\Gamma_2 / \Gamma_1) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{21}.$$

Ймовірність того, що взяли два яблука різних сортів:

$$P(A_1) \cdot P(\Gamma_2 / A_1) + P(\Gamma_1) \cdot P(A_2 / \Gamma_1) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} + \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} = 1 - \frac{11}{21} = \frac{10}{21}.$$



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 152.5-205.5

163. Кинуті два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума зерен не перевищує п'яти.
164. У ящику лежать нитки різних кольорів: білого – 50%, чорного – 20%, синього – 10%, зеленого – 20%. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана нитка буде кольорова.
165. Три елементи електричного ланцюга виходять з ладу незалежно один від іншого з ймовірностями 0,1, 0,05, та 0,08 відповідно. Знайти ймовірність того, що ланцюг розірветься, якщо елементи з'єднані а) паралельно; б) послідовно.
166. Абонент забув останню цифру номера телефону, пам'ятаючи, що вона відмінна від нуля. Знайти ймовірність того, що абонент набрав вірний номер не пізніше, ніж з четвертої спроби, якщо останню цифру він набрав навмання.
167. Літери слова ЗАДАЧА написані на однакових картках. Навмання беруться по одній чотири картки без повернення їх в гру.

168. В кожному з трьох ящиків лежить по 10 деталей. В першому ящику 10 стандартних, в другому – 7, в третьому – 9. З кожного ящика навмання вибирають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі вони стандартні.
169. В урні 7 білих та 3 чорних кулі. Навмання одну за одною беруть з урни 2 кулі. Знайти ймовірність того, що а) обидві кулі білі; б) кулі різного кольору; в) обидві кулі одного кольору.
170. Білети на екзамен містять по два теоретичних питання та по одній задачі. Всього складено 28 білетів. Студент підготував 50 теоретичних питань та може розв'язати 22 задачі. Знайти ймовірність того, що студент зможе відповісти на всі три завдання.
171. Випадковим чином кинуті два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що сума зерен, які випадають на верхніх гранях а) рівна семи, а модуль різниці дорівнює трьом; б) рівна семи, якщо відомо, що модуль різниці дорівнює трьом.
172. Випадковим чином кинуті два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що добуток чисел, які випадуть на верхніх гранях, – парне число.
173. Двоє гравців по черзі кидають по одному разу гральний кубик. Виграє той, в якого з'явиться більше число. Знайти ймовірність виграшу для гравця, який починає ігру.
174. Гральний кубик підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що цифра 3 з'явиться на верхній грані вперше на п'ятий раз.
175. Монета підкидається випадковим чином 10 разів. Знайти ймовірність того, що герб вперше з'явиться на а) шостий раз; б) на десятий раз.
176. В першій урні 4 білих, 5 чорних та 1 синя куля, в другій – 2 білих, 3 чорних та 5 синіх куль. Навмання беруть по одній кулі з кожної урни. Знайти ймовірність того, що обидві кулі одного й того ж кольору.
177. В першій урні 2 білих, 6 чорних та 2 сині кулі, в другій – 5 білих та 5 чорних куль. Навмання переклали дві кулі. Знайти ймовірність того, що склад куль в обох урнах не зміниться.
178. В першій урні 3 білих та 7 чорних куль, в другій – 4 білих та 5 чорних куль. З першої урни переклали в другу одну кулю, після чого з другої урни переклали одну кулю в першу. Знайти ймовірність того, що склад куль в обох урнах не зміниться.

179. Ймовірність влучення в ціль при пострілі з двох гармат дорівнює 0,38. Яка ймовірність попадання для першої гармати, якщо для другої гармати вона дорівнює 0,8?
180. В першій урні 6 білих та 4 чорних кулі, а в другій лежить одна біла куля. З першої урни в другу переклали одну за одною дві кулі. Знайти ймовірність того, що в другій урні буде після цього не менш двох білих куль.
181. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність безвідмовної роботи для них дорівнюють відповідно 0,6, 0,7, 0,8. Знайти ймовірність того, що безвідмовно працюватимуть а) всі три елементи; б) точно два з трьох елементів; в) точно один з трьох елементів.
182. Випадковим чином кидають два гральних кубика. Знайти ймовірність таких подій: а) на всіх кубиках випаде однакова кількість зерен; б) на двох кубиках з'явиться число 5, а на третьому – інше число; в) на двох кубиках з'явиться однакова кількість зерен, а на третій – інше число; г) на всіх кубиках з'явиться різна кількість зерен.
183. Скільки разів потрібно кинути гральний кубик, щоб ймовірність того, що жодного разу не з'явиться шість зерен, була менше 0,3?
184. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі рівна 0,8. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб ймовірність того, що не буде жодного промаху, була менше 0,4?
185. В урні 10 куль з номерами від 1 до 10. Послідовно виймають три кулі. Знайти ймовірність того, що послідовно з'являться кулі з номерами 1,2,3, якщо кулі виймають: а) без повернення; б) з поверненням кулі, яку дістали, в урну.
186. В урні 5 білих та 5 чорних куль, в другій – 4 білих та 6 чорних куль. З кожної урни вибирають навмання по 2 кулі. Знайти ймовірність того, що серед вибраних куль а) не буде жодної білої; б) буде тільки одна біла; в) буде точно дві білі; г) буде точно три білі; д) всі вибрані кулі будуть білі.
187. Стрілець А влучає в мішень з ймовірністю 0,6, стрілець В – з ймовірністю 0,5, а стрілець С – з ймовірністю 0,4. Стрільці дали один залп по мішені, дві кулі влучили в ціль. Що ймовірніше: влучив С в мішень чи ні?
188. Ймовірність того, що лист знаходиться в письмовому столі, дорівнює p , причому, з різною ймовірністю він може знаходитися в будь-якому з восьми ящиків стола. Продивились сім ящиків та листа не знайшли. Знайти ймовірність того, що лист знаходиться у восьмому ящику.

189. Чотири мисливця домовились стріляти в ціль в певній послідовності, причому наступний мисливець стріляє в випадку, якщо попередній схибив, а у кожного мисливця є тільки по одному патрону. Ймовірність влучання в ціль кожним мисливцем однакова та дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що буде а) один постріл; б) два постріли; в) три постріли; г) чотири.
190. Студент шукає необхідну йому книгу в трьох бібліотеках. Ймовірність того, що книга знаходиться в фондах кожної з бібліотек або не знаходиться там однакова та однакова ймовірність, видана вона іншому читачу або не видана нікому. Що ймовірніше: знайде студент потрібну книгу чи ні?
191. Випадковим чином кинуто три монети. Яка ймовірність того, що цифра 5 випаде хоча б на одній з них?
192. Одночасно кинуто випадковим чином п'ять монет. Знайти ймовірність того, що хоч б на одній з'явиться герб.
193. Два гральних кубика кидають три рази випадковим чином. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз сума зерен буде а) рівна шести; б) кратна трьом; в) простим числом.
194. Випадковим чином кидають три рази дві монети. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз на верхній стороні монет з'явиться хоча б один герб.
195. Три стрільця по одному разу стріляють у мішень, ймовірність влучання 0,8, 0,6 та 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що а) всі стрільці влучать в ціль; б) один стрілець влучить в ціль; в) два стрільця влучать в ціль; г) хоча б один стрілець влучить в ціль.
196. Ймовірність того, що перший стрілець влучить в ціль – 0,6, другий стрілець влучить в ціль – 0,7. Вони роблять по чотири постріли. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз вони влучать разом.
197. Ймовірність того, що подія А настане хоча б один раз в двох незалежних випробуваннях дорівнює 0,75. Знайти ймовірність появи події А в одному випробуванні.
198. В екзаменаційному білеті два питання та задача. Ймовірність відповісти на перше запитання для деякого студента – 0,8, на друге – 0,9, а ймовірність розв'язати задачу для цього студента дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно розв'язати задачу та відповісти хоча б на одне запитання?

199. Ймовірність хоча б одного влучення в ціль при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.

200. В електричний ланцюг послідовно підключені чотири незалежно працюючих елементи. Ймовірність того, що на протязі години ці елементи вийдуть з ладу, дорівнюють відповідно 0,08, 0,10, 0,15 та 0,2. Знайти ймовірність того, що на протязі години ланцюг буде розімкнено.

201. Електричний ланцюг між точками А та В складений за схемою приведеною на рис. 3. Різні елементи ланцюга виходять з ладу незалежно один від одного. За час T кожен елемент виходить з ладу з ймовірністю 0,1. Знайти ймовірність розриву ланцюга за вказаний проміжок часу.

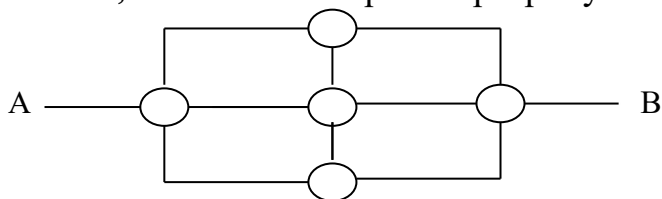


Рис. 3

202. В урні знаходяться 6 білих та 4 чорних кулі. Навмання вибирають одну за одною чотири кулі. Знайти ймовірність того, що хоч би одна з вибраних куль буде білою.

203. Серед ста деталей, які знаходяться в ящику, п'ять бракованих. Робітник вибирає навмання шість деталей. Знайти ймовірність того, що хоч би одна з них буде бракована.

204. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,3. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб з ймовірністю, більшою, ніж 0,94, можна було твердити, що у ціль буде влучено хоч би один раз?

205. Скільки раз потрібно кинути монету, щоб з ймовірністю більшою, ніж 0,9, можна твердити, що хоч би раз з'явиться герб?

206. Скільки разів потрібно кинути два гральних кубика, щоб з ймовірністю, більшою, ніж 0,925, можна було твердити, що хоч би один раз сума зерен на двох кубиках буде дорівнювати десяти?

207. Для зруйнування мосту досить влучення принаймі однієї авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйнованим, якщо на нього скинути чотири бомби з ймовірностями влучення відповідно 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

208. У разі масового виготовлення виробів брак становить у середньому 1,5 % загальної кількості всіх виробів. З-поміж придатних виробів 85,3 % становлять вироби 1-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб належить до 1-го сорту.
209. Контролер перевіряє партію з двох деталей 1-го сорту, двох 2-го сорту і трьох – 3-го сорту. Деталі беруть по одній навмання без повернення. Знайти ймовірність того, що деталь 1-го сорту з'явиться раніше за деталь 3-го сорту.
210. У цеху є три резервні двигуни, для кожного з яких ймовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент ввімкнено:
- 1) принаймні два двигуни;
 - 2) принаймні один двигун.
211. Із партії суконь дівчина має намір вибрати дорогі. Ймовірність того, що навмання взята сукня дорога, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що із трьох суконь тільки дві будуть дорогими.
212. Від аеровокзалу відправились два автобуси. Ймовірність своєчасного прибуття кожного з них дорівнює 0,92. Знайти ймовірність такої події:
- A* – обидва автобуси прибудуть своєчасно;
B – обидва автобуси запізняться;
C – тільки один автобус прибуде своєчасно.
213. Маємо дві партії деталей. У першій партії сім придатних і три браковані деталі. У другій – 10 придатних і чотири браковані. Із кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність такої події:
- 1) обидві деталі придатні;
 - 2) обидві деталі браковані;
 - 3) одна деталь придатна, а друга бракована.
214. Механізм, що містить 4 однакові деталі, не працюватиме, якщо під час його складання буде взято 3 або більше деталей меншого розміру, ніж потрібно. У робітника залишилось 15 деталей, серед яких 6 меншого розміру. Знайти ймовірність того, що механізм працюватиме, якщо робітник братиме деталі навмання.
215. Облік щодо використання запасних частин показав, що в разі ремонту двигуна деталь № 1 замінювалась у середньому у 35 % випадків, деталь № 2 – у 30 % випадків, а обидві деталі одночасно замінювались у 28 % випадків. Знайти ймовірність того, що у двигуні, який надійшов у ремонт, замінюватиметься деталь № 2 за умови, що деталь № 1 замінено, і навпаки.

216. Імовірність того, що питання в екзаменаційному билеті стандартне, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з двох питань тільки одне стандартне.
217. Із повної колоди карт (52 шт.) виймають дві карти. Одна з них виявилася дамою. Після цього дві карти, що були вийняті, перемішують та беруть одну з них навмання. Визначити ймовірність того, що ця карта є тузом.
218. Імовірність перегорання за певний час кожної з двох електроламп дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що за вказаний час: а) перегорить хоч би одна; б) ні одна лампочка не перегорить.
219. Кидають дві однакові монетки. Яка ймовірність того, що випадуть: 1) дві цифри; 2) різні сторони монеток?
220. Робітник обслуговує три ткацьких верстати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що на протязі години верстат не потребує втручання робітника, для першого дорівнює 0,9, для другого – 0,8 і для третього – 0,25. Знайти ймовірність того, що протягом першої ж робочої години: а) жоден верстат не потребує втручання робітника; б) всі три верстати потребують втручання; в) тільки один станок потребує втручання
221. Зернозбиральний комбайн обслуговує дві вантажівки. Імовірність підходу вантажівки під завантаження на момент заповнення бункера дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що на момент заповнення бункера: а) підійде тільки одна вантажівка; б) обидві підійдуть; в) хоч би одна вантажівка підійшла.
222. На картках написані натуральні числа від 1 до 7. Навмання вибираються дві з них. Яка ймовірність того, що сума номерів вибраних карток дорівнює 5?
223. У двох урнах знаходиться по 6 білих і 8 чорних кульок. Не дивлячись дістають з кожної урни по одній кульці. Яка ймовірність того, що: а) обидві кульки білі; б) хоч би одна кулька була білою; в) одна кулька біла, а інша – чорна.
224. Кинули одночасно два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума випавших зерен рівна 5.
225. У двох урнах знаходиться по 6 білих і 8 чорних кульок. Не дивлячись дістають з кожної урни по одній кульці. Яка ймовірність того, що: а) обидві

кульки білі; б) хоч би одна кулька була білою; в) одна кулька біла, а інша – чорна.

Тема 6. Формула повної ймовірності. Формула Бейсса.

Теоретичні відомості

У разі, коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій H_i , які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними ($H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$, $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$), ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i),$$

яка називається формулою повної ймовірності. Випадкові події $H_1, H_2, \dots, H_n$ називаються гіпотезами ($\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$).

Приклад 1. Батьки зробили для трьох дітей три пакетики з цукерками. В першому пакету 10 шоколадних цукерок та 20 льодяників, в другому 15 шоколадних, 15 льодяників, в третьому – 25 шоколадних та 5 льодяників. Першим підійшов хлопчик, взяв намання пакетик та намання вийняв цукерку. Яка ймовірність того, що це льодяник?

Розв'язання. Подія $A = \{\text{Хлопчик дістав льодяник}\}$. Гіпотези: $H_1 = \{\text{Хлопчик взяв намання перший пакетик}\}$, $H_2 = \{\text{Взяв другий пакетик}\}$, $H_3 = \{\text{Взяв третій пакетик}\}$. Ці події утворюють повну групу подій, вони рівноможливі, тому ймовірність кожної гіпотези дорівнює $\frac{1}{3}$ ($P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$). Умовна ймовірність того, що хлопчик дістав льодяник з першого пакетика $P(A/H_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, з другого $P(A/H_2) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, з третього $P(A/H_3) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{9}.$$

Приклад 2. Для складання поступили деталі з чотирьох верстатів, з першого 20, з другого 25, з третього 30, з четвертого – 25 деталей. Ймовірність браку для першого 1%, для другого – 0,5%, для третього – 2%, для четвертого – 1,5%. Для складання виробу випадковим чином взяли деталь. Яка ймовірність того, що вона стандартна?

Розв'язання. Гіпотези: $H_1 = \{\text{Взяли деталь з першого верстата}\}$, $H_2 = \{\text{Деталь з другого верстата}\}$, $H_3 = \{\text{Деталь з третього верстата}\}$, $H_4 = \{\text{Деталь з четвертого верстата}\}$.

Всього поступило на складання з чотирьох верстатів 100 деталей. Ймовірності гіпотез:

$$P(H_1) = \frac{20}{100} = 0,2; P(H_2) = \frac{25}{100} = 0,25; P(H_3) = \frac{30}{100} = 0,3; P(H_4) = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Умовні ймовірності, що деталь стандартна для відповідної гіпотези:

$$P(A/H_1) = 0,99, P(A/H_2) = 0,95, \text{ з третього } P(A/H_3) = 0,98, P(A/H_4) = 0,985.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4) = \\ = 0,2 \cdot 0,99 + 0,25 \cdot 0,95 + 0,3 \cdot 0,98 + 0,25 \cdot 0,985 = 0,97575.$$

У разі, коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій H_i , які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними

$$(H_i \cap H_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega), \quad \text{ймовірність події } A$$

обчислюється за формулою: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$, якщо випадкова подія A здійснилася, то для переоцінювання ймовірностей гіпотез H_i використовують формулу Байєса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Приклад 3. В цеху, що виготовляє деталі, перший верстат виробляє 25%, другий – 35%, третій – 40% усіх виробів. У їх продукції брак становить 3; 4; 2%. Взятий навмання виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він виготовлений на першому верстаті?

Розв'язання. Гіпотези: $H_1 = \{\text{Взяли деталь з першого верстата}\}$, $H_2 = \{\text{Деталь з другого верстата}\}$, $H_3 = \{\text{Деталь з третього верстата}\}$.

Ймовірності гіпотез:

$$P(H_1) = 0,25; P(H_2) = 0,35; P(H_3) = 0,4.$$

Умовні ймовірності, що деталь бракована для відповідної гіпотези:

$$P(A/H_1) = 0,03, P(A/H_2) = 0,04, \text{ з третього } P(A/H_3) = 0,02.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ = 0,25 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,0295.$$

За формулою Бейєса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,03}{0,0295} \approx 0,254.$$



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 226.6-253.6

226. В першій урні 6 білих та 4 чорних кулі, в другій – 5 білих та 5 чорних куль, в третій – 3 білих та 7 чорних куль. З навання вибраної урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.
227. В кожній з трьох урн знаходяться 4 білих та 6 чорних куль. З кожної урни навання вибрали по одній кулі, з цих трьох куль вибрали одну. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.
228. В першій батареї дві гармати. Ймовірності влучення в ціль кожної з них дорівнюють 0,8, та 0,6 відповідно. В другій батареї три гармати, ймовірності влучення в ціль яких дорівнюють 0,6, 0,5, та 0,4, в третій батареї чотири гармати ймовірності влучення в ціль – 0,6, 0,6, 0,6 та 0,8 відповідно. Навання вибирають батарею, всі гармати якої дають залп. Знайти ймовірність враження цілі, якщо для цього достатньо одного влучення.
229. Для стрільби мають чотири гармати, ймовірності влучення в ціль яких дорівнюють 0,6, 0,7, 0,8 та 0,9 відповідно. З двох навання взятих гармат дають залп. Знайти ймовірність враження цілі, якщо для цього достатньо одного влучення.
230. В першій урні 8 білих та 2 чорних кулі, в другій – 7 білих та 2 чорних кулі, в третій – 5 білих та 4 чорних кулі. З першої урни переклали навання одну кулю в другу урну, після чого з другої урни переклали одну кулю в третю урну. Знайти ймовірність того, що навання взята куля з третьої урни буде біла.
231. Два автомати виготовляють деталі, які йдуть на загальний конвеєр. Ймовірність виготовлення бракованої деталі для цих автоматів дорівнюють відповідно 0,06 та 0,09. Знайти ймовірність того, що на конвеєр поступить бракована деталь, якщо продуктивність другого автомата в два рази більша за продуктивність першого.
232. На конвеєр поступають деталі з трьох автоматів. Перший дає 0,3% браку, другий – 0,2%, третій – 0,4% браку. Знайти ймовірності того, що деталь, яка випадковим чином надійшла до конвеєру, буде бракована, якщо її взяли з 5500 деталей, з котрих 1000 виготовлені на першому, 2000 – на другому, 2500 – на третьому автоматі.

233. З 20 екзаменаційних білетів студент вивчив 20. В якому випадку ймовірність вибрати на екзамені той білет, який він вивчив буде більшою: чи він прийде на екзамен першим; другим;...; k -м?
234. В трьох урнах білі та чорні кулі. В першій урні 2 білих та 3 чорних кулі, в другій – 2 білих та 2 чорних кулі, в третій – 3 білих та 1 чорна куля. З першої урни переклали навмання одну кулю в другу урну, після чого з другої урни переклали одну кулю в третю урну, потім з третьої урни переклали одну кулю в першу. Яке співвідношення білих та чорних куль буде мати більшу ймовірність. Знайти ймовірність того, що кількість білих та чорних куль в кожній урні не зміниться.
235. Відомо, що літак приземлився в районі I з ймовірністю 0,2, в районі II з ймовірністю 0,8. Для пошуку літака виділили 10 вертольотів, кожен з яких може знайти літак з ймовірністю 0,5. Як слід розподілити вертольоти за районами, щоб ймовірність знайти літак була найбільшою, якщо вертольоти шукають літак незалежно один від одного.
236. В колоді з 36 карт загублено два тузи. Яка ймовірність того, що навмання з цієї колоди візьмуть два червоних тузи?
237. Студент вивчив 15 теоретичних питань з 20, які є в екзаменаційних білетах. В групі 20 студентів. Чи залежить ймовірність взяти потрібний білет від місця в черзі?
238. Відомо, що 5% всіх чоловіків і 0,25% всіх жінок – дальтоніки. Навмання вибрана людина-дальтонік. Яка ймовірність того, що це чоловік (вважати, що кількість чоловіків та жінок однакова)?
239. В урні n кульок, серед них 5 білих. Навмання взяли одну кульку, а потім навмання ще дві. Яка ймовірність того, що вони білі?
240. В спортивному класі середньої школи 10 хлопців, в математичному – 15. Їх об'єднали разом. Потім випадковим чином взяли воротаря для гри в футбол. Ймовірність пропустити м'яч для хлопця з спортивного класу 0,05; для хлопця з математичного – 0,1. Знайти ймовірність того, що м'яч влучить у ворота.
241. В першій корзині 5 апельсинів та одне яблуко; в другій 5 яблук, один апельсин. З першої корзини взяли навмання 5 плодів та переклали в другу. Потім з другої взяли 5 плодів та переклали в першу. Яка ймовірність того, що склад першої корзини не зміниться?

242. Ймовірність того, що кольоровий телевізор не зіпсується на протязі гарантійного терміну дорівнює 0,7, для телевізора з чорно-білим зображенням ця ймовірність на 0,2 більша. Знайти ймовірність того, що навмання взятий телевізор із п'яти кольорових і 10 чорно-білих не зіпсується на протязі гарантійного терміну.
243. Продукція виготовляється на двох підприємствах і надходить на спільну базу. Ймовірність виготовлення бракованої продукції для 1-го підприємства 0,1, для другого – 0,2. Перше підприємство здало на склад 100 одиниць продукції, друге – 400. Знайти ймовірність того, що навмання взята зі складу одиниця продукції буде не бракованою.
244. Є дві партії зошитів. У першій з них n зошитів, у другій – m зошитів, причому в кожній партії по k зошитів у клітинку, а решта зошитів у лінійку. З першої партії навмання беруть один зошит і перекладають в другу, після чого з другої партії навмання беруть один зошит. Знайти ймовірність того, цей зошит виявиться в клітинку.
245. Є дві колоди карт. В одній з колод загублена карта. З навмання взятої колоди взяли випадковим чином карту. Яка ймовірність того, що це туз?
246. Три баскетболісти стоять біля кошика. Випадковим чином одному з них кидають м'яч. Ймовірність того, що баскетболіст влучить в кошик для першого 0,9; для другого – 0,8; для третього – 0,6. Яка ймовірність того, що баскетболіст влучить в кошик?
247. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90 %, другий – 93 %, а третій – 95 % придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого – 50, від третього – 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр: 1) нестандартної деталі; 2) стандартної деталі.
248. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % із першого, 45 % із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3 %, а з другого цеху – 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку:
1) придатна; 2) бракована.
249. На складі зберігаються кінескопи, 70 % яких виготовлено на заводі № 1, а решта – на заводі № 2. Ймовірність того, що кінескоп витримає гарантійний строк, дорівнює 0,9 для заводу № 2 і 0,8 для заводу № 1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескоп:
1) не витримає гарантійного строку;
2) витримає гарантійний строк.

250. На склад надходить продукція від двох підприємств. Від першого – 60 %, від другого – 40 %. Перше підприємство дає 80 % продукції 1-го сорту і 20 % 2-го сорту, а друге дає 70 % продукції 1-го сорту і 30 % 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції буде: 1) першого сорту; 2) другого сорту.
251. Для посіву пшениці заготовлене насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Імовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для 1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту – 0,2, для 3-го – 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.
252. Деталі на конвеєр надходять із двох автоматів. Від першого – 60 %, від другого – 40 %. Перший автомат дає 2 %, а другий – 1 % браку. Деталь, яка надійшла на конвеєр, виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь виготовлено:
1) першим автоматом; 2) другим автоматом.
253. В першій та другій урнах по 4 білих та 6 чорних куль, в третій та четвертій – по 2 білих та 8 чорних куль, в п'ятій – 10 білих куль. З навмання вибраної урни беруть одну кулю, яка виявилась білою. Яка ймовірність того, що вона взята з першої урни?
254. Серед 10 гвинтівок 4 мають оптичний приціл. Ймовірність влучення в ціль зі звичайної гвинтівки 0,8, а з гвинтівки з оптичним прицілом – 0,95. Стрілець влучив в ціль з навмання вибраної гвинтівки. Що ймовірніше: він стріляв зі звичайної гвинтівки чи з гвинтівки з оптичним прицілом?
255. З урни, в якій 3 білих та 7 чорних куль, загублена одна куля невідомого кольору. Взята навмання куля виявилась білою. Яка ймовірність того, що була загублена біла куля?
256. З урни, в якій 7 білих та 4 чорних кулі, загублено дві кулі невідомого кольору. З цієї урни навмання взяли дві кулі, які виявилися білими. Яка ймовірність того, що було загублено дві чорних кулі?
257. В урні знаходяться 6 білих та 4 чорних кулі. З неї навмання беруть дві кулі, виявилось, що вони одного кольору. Знайти ймовірність того, що вони білі.
258. З чотирьох гармат, які мають ймовірності влучення в ціль 0,8, 0,7, 0,6, та 0,9 відповідно, дві навмання вибрані гармати вистрелили, ціль була вражена

(для цього досить хоч би одного влучення в ціль). Знайти ймовірність того, що перша гармата прийняла участь в стрільбі.

259. В урні знаходяться 7 білих та 4 чорних кулі. З цієї урни навмання вибрали дві кулі, а потім з цих двох куль вибрали одну, яка виявилася білою. Знайти ймовірність того, що вибрані дві кулі виявилися різного кольору.
260. Два автомати виготовляють однакові деталі, причому продуктивність першого вдвічі більша за продуктивність другого автомата. Перший автомат дає 60% деталей вищої якості, другий – 84%. Навмання взята деталь виявилася вищої якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на першому автоматі.
261. В першій урні 2 білих та 8 чорних куль, в другій – 3 білих та 6 чорних куль. З першої урни переклали в другу 2 кулі, а потім взяли дві кулі з другої урни, які виявилися білими. Знайти ймовірність того, що з першої урни взяли дві чорних кулі.
262. Кількість вантажних автомобілів, що проїжджає по шосе повз заправку, відноситься до кількості легкових автомашин як 3:2. Ймовірність того, що заправиться вантажівка – 0,1; легковик – 0,2. Машина заправилась, яка ймовірність того, що вона а) легковик; б) вантажівка?
263. Є три однакові коробки з іграшками. В одній 5 синіх м'ячиків та 6 жовтих, в другій – 6 синіх та 7 жовтих, в третій – 6 синіх та 6 жовтих. Навмання хлопчик підійшов до однієї з коробок та навмання взяв м'ячик. Він виявився жовтим. З якої ймовірніше коробки він був взятий?
264. В гаманці 5 монет по 10 копійок та 10 монет по 25 копійок. З гаманця навмання дістали монету та кинули в копійку. Після цього навмання знов дістали монету. Яка ймовірність того, що це 10 копійок.
265. Тренер з трьох стрільців випадковим чином обирає одного. Ймовірність влучення в ціль для першого 0,9; для другого – 0,8, для третього – 0,7. Стрілець влучив в ціль. Яка ймовірність того, що це перший стрілець, другий, третій?
266. В двох однакових конвертах знаходяться картки розрізної азбуки з літерами. В першому конверті це літери слова “ВЕСНА”, в другому – “БАТЬКІВЩИНА”. З навмання взятого конверту витягли випадковим чином літеру. Вона виявилася приголосною. З якого ймовірніше конверта вона була взята?
267. У першому ящику є 20 деталей, з яких 16 стандартних, у другому ящику – відповідно 10 і 7. Навмання взята деталь із випадково вибраного ящика

виявилася стандартною. Яка ймовірність того, що деталь була взята з першого ящика?

268. За зміну на склад підприємства надходять вироби з трьох цехів в однакових кількостях. Перший цех виробляє 1% браку, другий – 3% і третій – 2%. Навмання взятий зі складу виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що він вироблений у другому цеху?
269. Два економісти заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність зробити помилку в документі для першого економіста 0,1, для другого – 0,2. Перший заповнив 40 документів, другий – 60. Навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Визначити ймовірність, що його склав перший економіст.
270. В першому ящику 5 синіх м'ячів та 5 жовтих, в другому – 5 червоних та 5 зелених, в третьому – 5 синіх та 8 червоних. Випадковим чином взяли два ящики та переклали кулі в один ящик. З одного з тих двох ящиків, що утворились, навмання вибирають один, та з нього випадковим чином беруть м'яч, він виявився синім. Яка ймовірність того, що змішали перший та другий ящики?
271. Колоду карт поділили порівну. В першій колоді – три тузи, в другій – один. З навмання вибраної колоди взяли карту. Вона виявилась не тузом. Яка ймовірність того, що ця карта з другої колоди?
272. З колоди карт взяли половину. З цієї половини взяли карту. Вона виявилася дамою. Знайти ймовірності того, що в складі карт не було дам, була одна дама.
273. Ймовірність того, що кольоровий телевізор не зіпсується на протязі гарантійного терміну дорівнює 0,7, для телевізора з чорно-білим зображенням ця ймовірність на 0,2 більша. Знайти ймовірність того, що навмання взятий телевізор із п'яти кольорових і 10 чорно-білих не зіпсується на протязі гарантійного терміну, ймовірність того, що зіпсується чорно-білий телевізор.
274. Три автомати штампують однотипні деталі, які надходять до загального конвеєра. Продуктивності роботи автоматів співвідносяться як 2: 3: 5. Кожен з автоматів штампує нестандартних деталей усередньому 2,5 %; 2 % і 1,5 % відповідно. Знайти ймовірність того, що навмання узята з конвеєра деталь виявиться стандартною (подія A).
275. В ящику лежать a білих і c чорних кульок. Після кожного виймання кульку, що було вийнято, повертають до ящика з додатковою кулькою такого самого кольору. Визначити ймовірність того, що при n дослідах такого роду m білих кульок будуть вийняті.

276. Характеристика матеріалу, взятого для виготовлення продукції з ймовірностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 і 0,09 може знаходитися у шести різних інтервалах. Залежно від властивостей матеріалу ймовірності отримання першосортної продукції дорівнюють відповідно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 і 0,2. Визначити ймовірність отримання першосортної продукції.
277. Два стрільці по черзі стріляють по мішені. Імовірності влучення під час перших пострілів для них дорівнюють відповідно 0,4 і 0,5, а ймовірності влучення під час наступних пострілів для кожного збільшуються на 0,05. Якою є ймовірність, що першим зробив постріл перший стрілець, якщо під час п'ятого пострілу було влучення у ціль

Тема 7. Послідовні випробування. Формула Бернуллі.

Теоретичні відомості Формула Бернуллі

Будемо розглядати послідовність незалежних однотипних випробувань, в результаті кожного з яких настає або успіх, або невдача, ймовірності яких відомі (p – ймовірність успіху, $q=1-p$ – невдачі). Наприклад, якщо кинути кілька монет, то кожна з них впаде одним із двох можливих боків (“герб” чи “цифра”). Один із них називають успіх, інший – невдача. Такі послідовності мають назву – випробування за схемою Бернуллі.

Встановимо ймовірність того, що при проведенні n -випробувань, успіх наступить m разів і, відповідно, $n-m$ разів настане невдача. При знаходженні ймовірності, треба врахувати порядок настання успіхів і невдач. Для кожного з варіантів будемо мати: $p^m \cdot q^{n-m}$. Кількість варіантів C_n^m . За правилом суми, оскільки варіанти несумісні, маємо:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Цю формулу називають формулою Бернуллі або біноміальним розподілом.

Приклад 1. З урни, в якій містяться 5 білих та 10 чорних куль навмання виймають 3 кулі з поверненням і підраховують кількість білих куль. Яка подія найбільш ймовірна?

Розв'язання: Ймовірність появи білої кулі- $p = \frac{1}{3}$, чорної $q = 1 - p = \frac{2}{3}$.

За формулою Бернуллі

$$P_3(0) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \quad P_3(1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9};$$

$$P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}; \quad P_3(3) = C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}.$$

Найбільш ймовірна подія: “Серед вибраних куль – одна біла”.

Приклад 2. Із партії, в якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

- 1) усі три стандартні;
- 2) не більше як одна нестандартна;
- 3) принаймні одна нестандартна.

Розв'язання. Маємо схему трьох незалежних випробувань. Нехай подія A – «узята щоразу деталь стандартна», тоді $P(A) = p = \frac{12}{16} = 0,75$. Імовірності обчислюватимемо за формулою Бернуллі:

$$1) P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0,75^3 = 0,421875.$$

2) Подію «із трьох деталей не більш як одна нестандартна» можна розглядати так: узято 3 стандартні деталі або 2 стандартні і одну нестандартну деталь. У позначеннях формули Бернуллі

$$P_3(m \geq 2) = P_3(3) + P_3(2) = 0,421875 + C_3^2 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 = 0,84375.$$

3) Протилежною для даної буде подія «усі три деталі стандартні». Їй рівносильна подія $P_3(m < 3)$. Обчислимо цю ймовірність:

$$P_3(m < 3) = 1 - P_3(3) = 1 - 0,421875 = 0,578125.$$

Найімовірніша кількість. Частота m_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається **найімовірнішою кількістю** (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$$np - q \leq m_0 \leq np + q$$

Розподіл може мати одне або два найімовірніші числа.

Приклад 3. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

Розв'язання. Скористаємося формулою, за якою визначається найімовірніше число: $np - q \leq m_0 \leq np + q$. Підставимо сюди значення відомих величин:

$$0,6n - 0,4 \leq 40 \leq 0,6n + 0,6; \quad -0,4 - 40 \leq -0,6n \leq 0,6 - 40; \quad \frac{39,4}{0,6} \leq n \leq \frac{40,4}{0,6};$$
$$65,7 \leq n \leq 67,3.$$

Задача має два розв'язки: $n = 66$ і $n = 67$.



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 254.8-279.8

278. Гральну кістку випадковим чином підкинули 5 разів. Знайти ймовірність того, що двічі на верхній грані з'явиться число, кратне трьом.
279. Знайти ймовірність руйнування об'єкту при стрільбі із гармати, якщо для цього необхідно не менше трьох влучень, а зроблено п'ять пострілів, кожний з ймовірністю, рівною 0,4.
280. На автобазі є 12 автобусів. Ймовірність виходу на лінію кожного з них дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автобусного маршруту, якщо для цього необхідно мати на лінії не менше восьми автобусів.
281. Що ймовірніше: виграти у рівносильного шахіста 2 партії з чотирьох або 3 партії з шести? Нічия не враховується.
282. Два стрільці, які мають ймовірність влучення в ціль 0,5 і 0,8, роблять 6 подвійних пострілів. Знайти ймовірність того, що не менше трьох разів обидва стрільці влучать в ціль.
283. Два баскетболісти роблять по три кидки в кошик з ймовірністю влучення 0,6 і 0,7 відповідно. Знайти ймовірність того, що: а) у них буде однакове число влучень, б) у першого баскетболіста буде більше влучень, ніж у другого.
284. Дві гральні кістки випадковим чином підкинули 7 разів. Знайти ймовірність того, що точно три рази з'явиться сума очків, що виражається простим числом.
285. Зроблено 14 пострілів, кожний з ймовірністю 0,2. Знайти наймовірніше число влучень і відповідну ймовірність.
286. Баскетболіст влучає в кошик з ймовірністю 0,4. Знайти наймовірніше число влучень при 10 кидках.
287. З урни, що містить 6 білих і 4 чорні кулі, вибирають навмання одну кулю і повертають її в урну. Дослід повторюється 9 разів. Знайти наймовірніше число появ білої кулі в цих дослідах і відповідну ймовірність.
288. Скільки потрібно провести випробувань з ймовірністю появи події в кожному з них рівною 0,4, щоб наймовірніше число появ події було рівним

289. Скільки можна провести випробувань з ймовірністю появи події, рівною 0,3, щоб наймовірніше число появ події було рівним 30.
290. Чому дорівнює ймовірність появи події в кожному з 49 незалежних випробувань, якщо наймовірніше число появи події в цих випробуваннях рівне 30?
291. Чому дорівнює ймовірність появи події в кожному з 39 незалежних випробувань, якщо наймовірніше число появи події в цих випробуваннях рівне 25?
292. Кругла мішень розбита на 10 областей. Стрілець влучає в “десятку” з ймовірністю 0,4, а в “дев’ятку” – з ймовірністю 0,6. Знайти наймовірніше число очків, яке отримає стрілець при трьох пострілах. Знайти ймовірність набрати при трьох пострілах не менше 29 очків.
293. Контрольне завдання для учнів містить 10 питань, на які учень повинен дати відповідь “так” чи “ні”. Учень знає відповіді на 4 питання, а на інші дає відповідь навмання. Знайти: а) наймовірніше число правильних відповідей; б) ймовірність того, що учень відповість правильно на всі питання; в) ймовірність того, що учень відповість правильно не менше, ніж на 5 питань.
294. Пару гральних кісток підкинули 8 разів. Знайти наймовірніше число появ суми очків на верхніх гранях.
295. Імовірність того, що витрати електроенергії на механічному заводі не перевищують 10 000 кВт·год в один робочий день, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що серед шести робочих днів тижня виявиться m днів ($m=0, \dots, 6$). Скласти таблицю.
296. Гральний кубик підкидають шість разів. Знайти ймовірність того, що шістка випаде m разів ($m=0, \dots, 6$). Скласти таблицю.
297. Імовірність виготовлення стандартної деталі на автоматичному станку дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що з п’яти навмання взятих деталей три виявляться стандартними?
298. Із урни, в якій лежать 5 білих і 3 чорних кульки, послідовно виймають сім кульок. Перед кожним наступним випробуванням кульку повертають назад до урни. Визначити ймовірність того, що серед вийнятих кульок буде:
1) 4 білих; 2) 4 чорних?

299. Два рівносильні шахісти грають у шахи. Нехай P_1 – імовірність того, що один з них виграє три партії з чотирьох; P_2 – імовірність того, що один з них виграє п'ять партій із восьми. Що більше: P_1 чи P_2 ?
300. Нитка на ткацькому верстаті обривається в середньому 0,375 раз за годину. Знайти ймовірність того, що за зміну (вісім годин) буде не менше двох і не більше чотирьох обривів
301. На кожні 30 штампованих виробів у середньому припадає 6 виробів з дефектом. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів 3 виявляться без дефекту.
302. Імовірність виграшу облігації за весь період позики становить 0,6. Куплено 5 облігацій. Знайти ймовірність такої події:
- 1) виграють дві облігації;
 - 2) виграш випаде принаймні на одну облігацію;
 - 3) виграють не більш як дві облігації.
303. Для забезпечення роботи на деякому будівельному об'єкті автопідприємство має 6 автомобілів. Імовірність виходу кожного автомобіля на лінію у першу зміну дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього у першу зміну потрібно мати на лінії не менш як 4 автомобілі.
304. Із n акумуляторів за один рік зберігання k виходить з ладу. Навмання обирають m акумуляторів ($m < n$). Визначити ймовірність того, що серед них l є справними при $n = 100, k = 7, m = 5, l = 3$.
305. Ймовірність хоча б одного влучення у ціль під час чотирьох пострілів дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення у ціль під час одного пострілу.
306. 30% виробів підприємства – продукт вищого сорту. Знайти ймовірність того, що з шести виробів цього підприємства чотири вищого сорту.
307. Незалежно один від одного працюють 6 приладів. Ймовірність відмови одного приладу дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що буде 5 відмовлень.
308. Робітник виготовив 10 виробів. Ймовірність виготовлення виробу першого гатунку 0,8. Яка ймовірність того, що буде виготовлено 3 вироби першого гатунку?

309. По цілі проводиться 5 незалежних пострілів. Імовірність попадання при одному пострілі дорівнює 0,2. Для знищення цілі достатньо трьох влучень. Знайти імовірність знищення цілі.
310. Імовірність того, буде зелений, рівна 0,2. Куплено 5 кавунів. Знайти імовірність того, що два кавуни зелені.
311. Імовірність того, що лампочка перегорить протягом місяця $p=0,1$. Знайти імовірність того, що з 5 лампочок перегорить три.

Тема 8. Теорема Пуассона. Локальна та інтегральна формули Муавра-Лапласа.

Теоретичні відомості

Теорема Пуассона.

Для подій, коли ймовірність успіху мала, тобто $p \rightarrow 0$, але кількість випробувань $n \rightarrow \infty$, причому вважається, що величина $\lambda = n \cdot p$ – скінчена. Імовірність одержати m успіхів у цьому випадку дорівнює:

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

де параметр $\lambda = n \cdot p$, m – кількість успіхів, $m=0, 1, 2, 3, \dots$. Це співвідношення називається формулою Пуассона. Вона дає досить близькі до точних результати, якщо кількість випробувань у серії $n \geq 100$, а величина $0 \leq n \cdot p \leq 10$. Це критерій використання даної формули.

Приклад 1. В лотереї з 2000 квіток – 2 виграшних. Яка ймовірність того, що серед придбаних 10 квіток більше 3 виграшних?

Розв'язання: $p = 0,001$, $\lambda = 2000 \cdot 0,001 = 2$, $m=3$

Ймовірність знайдемо через ймовірність протилежної події – “Серед придбаних білетів менше 3 виграшних”.

$$P(0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} \approx 0,135, \quad P(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} \approx 0,271, \quad P(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0,271,$$

$$P(3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0,18$$

$$P(m > 3) = 1 - P(m \leq 3) = 1 - (0,135 + 0,271 + 0,271 + 0,18) = 0,143$$

Приклад 1. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з ймовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

Розв'язання. Якщо подія A – «виріб пошкоджено», то її ймовірність $p = 0,003$. Розглядається схема незалежних випробувань, $n = 1000$. Імовірність події

A досить мала, тому задачу розв'яжемо за формулою Пуассона: $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$.

Виконуючи обчислення, знаходимо: $a = np = 1000 \cdot 0,003 = 3$;

$$P_{1000}(3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0,229.$$

Локальна формула . Муавра-Лапласа.

У випадку, коли ймовірність успіху в кожному конкретному випробуванні набуває довільного значення (зрозуміло, що в межах від нуля до одиниці), а кількість випробувань велика ($n \geq 100$), застосовують наближену формулу Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ де } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для обчислення цього виразу використовують табличні значення функції:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \text{Тоді } P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

Оскільки функція $\varphi(x)$ парна, то для від'ємних значень x беремо $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Приклад 2. Ймовірність події в кожному з випробувань дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 300 випробувань подія з'явиться 260 разів?

Розв'язання: $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$. Знайдемо значення x :

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{260 - 300 \cdot 0,8}{\sqrt{300 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{20}{\sqrt{48}} \approx 2,89.$$

По таблиці знаходимо значення $\varphi(x)$, що відповідає цьому значення аргументу $\varphi(x) = 0,0061$. Остаточню знаходимо ймовірність, підставляючи в формулу:

$$P_{300}(260) = \frac{1}{\sqrt{48}} \cdot 0,0061 = 0,00088.$$

Приклад 3. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає 4 дефектних. Із усієї продукції навантаження узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання. Подія A – «узято виріб без дефекту». За умовою $P(A) = p = 0,9$. Проведено $n = 400$ незалежних випробувань. Розв'яжемо задачу за формулою локальної теореми Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Підставляючи дані

за умовою задачі, дістаємо:

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,67. \text{ За таблицями знаходимо } \varphi(-1,67) = 0,0989, \text{ беручи}$$

до уваги, що $\varphi(x)$ — парна функція.

Отже,

$$P_{400}(350) \approx \frac{0,0989}{6} \approx 0,0165.$$

Інтегральна формула Муавра-Лапласа.

У випадку, коли ми шукаємо ймовірність того, що кількість успіхів у випробуваннях за схемою Бернуллі лежить у межах від m_1 до m_2 і кількість випробувань велика, то вдаються до інтегральної формули Муавра-Лапласа.

Теорема. Якщо ймовірність p настання успіху в кожному конкретному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці ($0 < p < 1$), то ймовірність того, що успіх наступить від m_1 до m_2 разів дорівнює:

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$\text{де } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ можна знайти в таблиці. Тому

користуємося формулою: $P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

Для від'ємних значень аргументу, враховуючи що функція $\Phi(x)$ непарна, маємо:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Приклад 4. У ґрунт висаджено 600 цибулин тюльпанів, ймовірність проростання кожної з них – 0,9. Знайти ймовірність того, що кількість тюльпанів, що зійдуть, буде не менше 530 і не більше 570.

Розв'язання: Згідно з умови задачі, $n = 600$; $m_1 = 530$; $m_2 = 570$; $p = 0,9$; $q = 1 - p = 0,1$.

Спочатку визначимо x_1 і x_2 :

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{530 - 600 \cdot 0,9}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = \frac{-10}{\sqrt{54}} \approx -1,36;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{570 - 600 \cdot 0,9}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = \frac{30}{\sqrt{54}} \approx 4,08.$$

Знайдемо в таблиці № значення $\Phi(x_1)$ та $\Phi(x_2)$

$$\Phi(x_1) = -0,41309, \quad \Phi(x_2) = 0,49997.$$

Остаточно для шуканої ймовірності

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,49997 + 0,41309 = 0,91306.$$

Приклад 5. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язання. Подія A – «зерно пшениці зійшло». Її імовірність $p = 0,95$, кількість незалежних випробувань $n = 2000$. Застосуємо формулу інтегральної теореми Лапласа:

$$P_n(m_1; m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt —$$

функція Лапласа, а далі виконаємо обчислення:

$$x_1 = \frac{1880 - 2000 \cdot 0,95}{\sqrt{2000 \cdot 0,95 \cdot 0,05}} \approx -1,03; \quad x_2 = \frac{1920 - 1900}{\sqrt{95}} \approx 2,06;$$

$$P_{2000}(1880; 1920) \approx \Phi(2,06) - \Phi(-1,03) = \Phi(2,06) + \Phi(1,03) = 0,4803 + 0,3485 = 0,8288.$$

Значення функції Лапласа беруться з відповідної таблиці.

Інтегральна формула Муавра-Лапласа може бути зведена до часткового вигляду:

$$P_n\left(-\varepsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \text{ або } P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

де ε довільне наперед задане число.

Величина відношення кількості успіхів до загальної кількості випробувань — частота появи події. За допомогою інтегральної формули Муавра-Лапласа можна оцінити ймовірність того, що різниця між частотою появи події й істинним значенням імовірності успіху в конкретному випробуванні не більша за наперед задану величину.

Приклад 6. При проростанні насіння встановили, що ймовірність проростання кожної зернини дорівнює 0,8. У ґрунт висаджено 500 зернин. Знайти межі відхилення частоти сходження зерна від величини ймовірності в кожному конкретному випробуванні, які гарантуються з ймовірністю $P = 0,95$.

Розв'язання: Згідно з умови задачі, $n = 500$; $p = 0,8$; $q = 1 - p = 0,2$; $P = 0,95$ — ймовірність того, що частота сходження буде відрізнятися від величини p (ймовірність успіху) не більше ніж на ε , яке потрібно знайти.

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,95, \text{ тоді } \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,475.$$

З таблиці № знаходимо, що $\Phi(x) = 0,475$ при $x = 1,96$, тобто

$$\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} = 1,96, \text{ звідки } \varepsilon = 1,96 \sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{0,16}{500}} \approx 0,035.$$

Тепер можна сказати, що з імовірністю $p = 0,95$ частота проростання буде лежати в межах: $0,8 - 0,035 \leq \frac{m}{n} \leq 0,8 + 0,035$ або $0,765 \leq \frac{m}{n} \leq 0,835$.

Приклад 7. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Подія A – «виготовлено нестандартну деталь». Маємо схему з n незалежними випробуваннями, в якій $P(A) = p = 0,1$. Скористаємося формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

$$2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,9973; \quad \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,49865. \quad \text{За таблицями знаходимо}$$

$$\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} = 3; \quad n = \frac{9pq}{\varepsilon^2} = 900.$$

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії за даних умов, розв'язавши нерівність:

$$\left|\frac{m}{900} - 0,1\right| < 0,03; \quad -0,03 < \frac{m}{900} - 0,1 < 0,03; \quad 0,07 < \frac{m}{900} < 0,13; \quad 63 < m < 117.$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 280.9-315.9

312. За даними технічного контролю в середньому 2% годинників, виготовлених на заводі, потребують додаткового регулювання. Яка ймовірність того, що із 300 виготовлених годинників 290 не потребують додаткового регулювання?
313. Ймовірність збити літак з гвинтівки рівна 0,004. Був зроблений залп з 250 гвинтівок. Знайти ймовірність збити літак, якщо для цього необхідно: а) хоча б одне влучення, б) не менше двох влучень.
314. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі рівна 0,001. Знайти ймовірність двох влучень при 5000 пострілах.

315. Прядильниця обслуговує 600 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом хвилини рівна 0,005. Знайти найімовірніше число обриву за хвилину і відповідну ймовірність.
316. Лічильник Гейгера реєструє частинки, що вилітають з джерела випромінювання, з ймовірністю 0,0001. За час спостережень вилетіло 30000 частинок. Знайти ймовірність реєстрації: а) більш ніж трьох частинок, б) жодної частинки, в) рівно чотирьох частинок.
317. Ймовірність влучення в ціль рівна 0,6. Знайти ймовірність того, що буде рівно 3276 попадань, якщо зроблено 5400 пострілів.
318. В лабораторії посадили 300 насінин деякого сорту, сходження якого оцінюється числом 75 %. Знайти ймовірність того, що не зійде 130 насінин.
319. Ймовірність того, що з кожних трьох пострілів стрілець влучає в ціль хоча б один раз, рівна 0,271. Знайти ймовірність того, що з 4000 пострілів цей стрілець влучить в ціль рівно 300 разів.
320. Гральну кістку підкинули випадковим чином 245 разів. Знайти ймовірність того, що цифра 5 на верхній грані з'явиться не менше 30 і не більше 40 разів.
321. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі рівна 0,6. Знайти ймовірність того, що при 60 пострілах стрілець в більшості випадків влучає в ціль.
322. Для перевірки в ВТК поступають 80% виготовлених деталей. Знайти ймовірність того, що з 400 виготовлених деталей не менше 70 і не більше 100 виявляться неперевіреними.
323. Ймовірність того, що покупцю потрібне взуття 41-го розміру дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з 700 покупців не більше 120 потрібне взуття цього розміру.
324. Ймовірність народження хлопчика – 0,515. У великому місті щорічно народжується 122500 дітей. Знайти ймовірність того, що кількість новонароджених хлопчиків перевищить кількість дівчаток більше, ніж на 2500.
325. У страховому агентстві застраховано від нещасних випадків 3600 осіб, причому річний страховий внесок кожного становить 1,5 гривні. Знайти

ймовірність того, що страхове агентство зазнає збитків, якщо ймовірність нещасного випадку дорівнює 0,01, а страхова допомога складає 120 гривень.

326. Двоє грають у таку гру: перший підкидає гральну кістку і при появі “шістки” отримує від іншого гравця 7 копійок, а в інших випадках платить йому 1 копійку. Знайти ймовірність того, що після проведення 8000 кидків виграш першого гравця буде не менше 16, але не більше 30 гривень.
327. Приймаючи однаково ймовірним народження хлопчика і дівчинки, знайти ймовірність того, що: а) з 4500 новонароджених буде 2300 хлопчиків; б) з 4000 новонароджених хлопчиків буде від 1950 до 2050.
328. Виконано 1000 випробувань деякої події, ймовірність появи якої в кожному випробуванні, дорівнює 0,9. Вирахувати ймовірність того, що відносна частота появи цієї події відхилиться від її ймовірності (по модулю) не більше, ніж на 0,03.
329. Пару гральних кісток кидали 3500 разів. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи суми 12 відхилиться по модулю від ймовірності цієї події не більш, ніж на 0,005.
330. Ймовірність виникнення події в кожному випробуванні рівна 0,8. Знайти найбільше відхилення відносної частоти цієї події від її ймовірності, яке можна очікувати з ймовірністю 0,9127 при 4900 випробуваннях.
331. Ймовірність промислового вмісту металу в кожній пробі 0,4. При рівні надійності $\beta = 0,997$ знайти межі числа проб з промисловим змістом металу серед 1000 проб.
332. Майстерня по ремонту телевізорів обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що телевізору потрібен ремонт протягом року рівна 0,3. З рівнем надійності 0,996 знайти межі числа телевізорів, які не потребують ремонту.
333. Гральну кістку підкинули 80 разів. З ймовірністю 0,99 знайти межі, в яких укладено число появ “шістки”.
334. Скільки разів потрібно підкинути монету, щоб з ймовірністю 0,95 можна було очікувати: що відносна частота появи герба відхилиться від 0,5 менш, ніж на 0,01.
335. Ймовірність того, що виготовлена деталь є деталлю першого ґатунку, рівна 0,9. Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з ймовірністю 0,99 можна було стверджувати, що відхилення відносної частоти появи деталі

першого гатунку від ймовірності цієї події не перевищить (по модулю) числа 0,005?

336. Скільки пострілів з ймовірністю влучення 0,9 потрібно зробити, щоб з ймовірністю 0,812 можна було очікувати, що відносна частота влучень в ціль відхилиться від 0,9 (по модулю) не більш, ніж на 0,03?
337. При рівні надійності 0,97 знайти довірчий інтервал для ймовірності події, яка відбулася 1200 разів при 4900 випробуваннях.
338. З рівнем надійності 0,975 оцінити ймовірність події, яка відбулася 300 разів при 9000 випробуваннях.
339. Гральну кістку підкинули 6000 разів. При цьому “шість” випало 1200 разів. З рівнем надійності $\beta = 0,9973$ з'ясувати, чи узгоджується цей результат з гіпотезою, що гральна кістка фальшива.
340. Монету підкинули 900 разів. При цьому 420 разів з'явився герб. З рівнем надійності 0,9973 встановити, чи пояснюється отримане відхилення випадком, або ж монета – фальшива.
341. Яку частку (у відсотках) виробів 1-го сорту має виробляти автомат, щоб у партії із 100 навмання взятих виробів наймовірніша кількість виробів 1-го сорту дорівнювала 80?
342. Частка 2-го сорту деякої масової продукції в середньому становить 20 %. Навмання взято 100 примірників цієї продукції. Яка кількість виробів 2-го сорту в утвореній групі наймовірніша і яка ймовірність того, що в цій групі буде саме така кількість виробів 2-го сорту?
343. Посівний фонд містить 92 % насіння 1-го сорту. Навмання взято 150 зерен. Знайти ймовірність того, що серед них 140 зерен 1-го сорту.
344. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом 1 хв дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хв буде обрив нитки на двох веретенах.
345. До банку надійшло 5000 пачок грошових знаків. Ймовірність того, що пачку неправильно вкомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більше як одна неправильно укомплектована.
346. Частка 1-го сорту в деякій продукції в середньому становить 80 %. Скільки примірників цієї продукції треба взяти, щоб з ймовірністю 0,9

можна було стверджувати, що в партії буде не менш як 75 примірників 1-го сорту?

347. На трьох верстатах-автоматах виготовляються однакові деталі. Перший верстат дає 5 % браку, другий – 7 %, третій – 9 %. Із продукції кожного верстата навмання взято по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них виявилось:
- 1) 0, 1, 2, 3 придатних;
 - 2) принаймні одна деталь придатна;
 - 3) принаймні одна деталь бракована.
348. Ймовірність влучення в ціль $p=0,5$. Яка ймовірність того, що при 250 пострілах буде:
- а) рівно 180 влучень?
 - б) від 100 до 150 влучень?
349. На склад поступила партія капелюхів в кількості 400 штук. Ймовірність того, що капелюх чорного кольору $p=0,8$. Знайти ймовірність того, що в партії:
- а) рівно 310 чорних капелюхів б) від 300 до 400 чорних капелюхів?
350. Цех щотижня виробляє 400 приладів. Ймовірність того, що прилад без браку $p=0,9$. Знайти ймовірність того, що буде випущено
- а) рівно 365 виробів без браку;
 - б) від 350 до 400 без браку.
351. Короп становить 70% наявної риби в ставку. Яка ймовірність того, що серед 100 виловлених рибин буде:
- а) 82 коропа;
 - б) від 60 до 85 коропів?
352. В магазин поступила партія телевізорів. Ймовірність того, що телевізор найкращої якості 0,85. Яка ймовірність, що серед 1000 телевізорів:
- а) рівно 70 найкращої якості;
 - б) від 500 до 680 найкращої якості.

Тема 10. Випадкові величини. Закон розподілу випадкової величини. Інтегральна функція розподілу. Диференціальна функція розподілу. Теоретичні відомості

Випадкова величина – це величина, яка в результаті випробування набуває одне (певне) значення з можливих, яке наперед невідоме, бо залежить від випадкових причин, що не можуть бути враховані.

Випадкові величини можуть бути дискретні і неперервні.

Дискретною випадковою величиною називається величина, яка набирає лише певні (конкретні) можливі значення з певними ймовірностями. Звідси випливає, що множина значень дискретної випадкової величини скінчена.

Неперервною називають випадкову величину, що може набувати довільні значення з певного скінченного або нескінченного проміжку. Кількість можливих значень неперервної випадкової величини – нескінчена.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають однозначну відповідність між можливими значеннями випадкової величини $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ та їх ймовірностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$.

Ця відповідність може бути задана в вигляді таблиці, в верхньому ряду якої записують в порядку зростання всі її можливі значення, а у нижньому – відповідні ймовірності, або у вигляді графіка, який представляє собою ламану лінію з вершинами в точках (x_i, p_i) .

Сума всіх значень ймовірностей дорівнює 1.

Закон розподілу дискретної випадкової величини, яка набуває n значень:

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Приклад. 1. Баскетболіст кидає м'яч у кошик до першого попадання. Ймовірність попадання дорівнює 0,7. Записати закон розподілу даної випадкової величини.

Розв'язання: Ймовірність протилежної події дорівнює $q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$.

За теоремою про ймовірність множення незалежних подій маємо:

$$p_1 = 0,7, p_2 = 0,3 \cdot 0,7, p_3 = 0,3^2 \cdot 0,7, \dots, p_k = 0,3^{k-1} \cdot 0,7, \dots$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини

1	2	3	$\dots$	k	$\dots$
0,7	0,21	0,063	$\dots$	$0,3^k \cdot 0,7$	$\dots$

Даний закон розподілу називається геометричним, так як послідовність 0,7; 0,21; 0,063; $0,3^k \cdot 0,7 \dots$ є геометричною прогресією.

Приклад. 2. Баскетболіст кидає м'яч у кошик 3 рази. Ймовірність попадання дорівнює 0,7. Записати закон розподілу випадкової величини X – кількості попадань м'яча в кошик.

Розв'язання. Оскільки події незалежні і ймовірність не змінюється при кожному випробуванні, ймовірність обчислюємо за формулою Бернуллі.

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Враховуючи, що $p = 0,7$, $n = 3$, $0 \leq m \leq 3$, $q = 1 - p = 0,3$,

$$P_3(m) = C_3^m 0,7^m 0,3^{3-m}$$

$$P_3(0) = C_3^0 0,7^0 0,3^3 = 0,3^3 = 0,027$$

$$P_3(1) = C_3^1 0,7 \cdot 0,3^2 = 3 \cdot 0,7 \cdot 0,09 = 0,189$$

$$P_3(2) = C_3^2 0,7^2 0,3 = 3 \cdot 0,49 \cdot 0,3 = 0,441$$

$$P_3(3) = C_3^3 0,7^3 0,3^0 = 0,7^3 = 0,343$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини:

0	1	2	3
0,027	0,189	0,441	0,343

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0,027 + 0,189 + 0,441 + 0,343 = 1$$

Даний закон розподілу називається біноміальним законом.

Інтегральною функцією розподілу випадкової величини називають функцію $F(x)$, яка визначає для довільного x ймовірність того, що випадкова величина набуває значення, меншого за x , тобто

$$F(x) = P(X < x).$$

Приклад 3. Побудуємо функцію розподілу та її графік для тільки що розглянутого приклада.

Закон розподілу дискретної випадкової величини

0	1	2	3
0,027	0,189	0,441	0,343

Можливі значення випадкової величини ділять числову вісь на п'ять частин $(-\infty, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$; $(2, 3)$; $(3, \infty)$. Для проміжку $(-\infty, 0)$ функція розподілу дорівнює нулю, тому що не існує значень випадкової величини менших за значення x з цього проміжка.

Для проміжку $(0, 1)$ функція розподілу дорівнює 0,027, тому що існує одне значення випадкової величини менше за значення x з цього проміжка, це $x = 0$.

Для проміжку $(1, 2)$ функція розподілу дорівнює $0,027 + 0,189 = 0,216$, тому що існують два значення випадкової величини менше за значення x з цього проміжка, це $x = 0$ та $x = 1$.

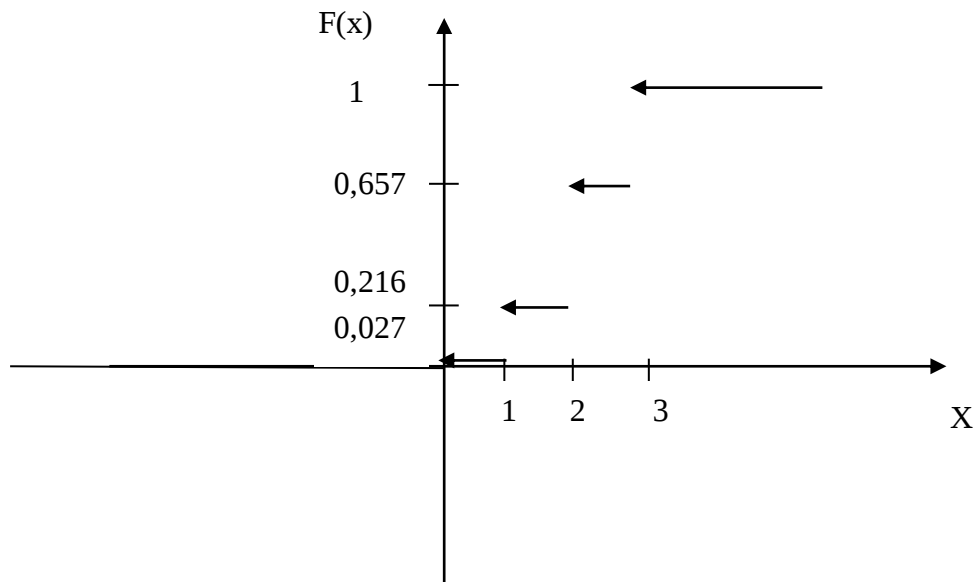
Для проміжку $(2, 3)$ функція розподілу дорівнює $0,027 + 0,189 + 0,441 = 0,657$, тому що існують три значення випадкової величини менше за значення x з цього проміжка, це $x = 0$ та $x = 1$ та $x = 2$.

Для проміжку $(3, \infty)$ функція розподілу дорівнює $0,027 + 0,189 + 0,441 + 0,343 = 1$, тому що всі чотири значення випадкової величини менше за значення x з цього проміжка.

Запишемо для функції розподілу остаточний вираз:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0; \\ 0,027 & 0 < x \leq 1; \\ 0,216 & 1 < x \leq 2; \\ 0,657 & 2 < x \leq 3; \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

Побудуємо графік інтегральної функції розподілу.



Для неперервної випадкової величини інтегральна функція розподілу має вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \text{ функція } f(x) \text{ називається диференціальною функцією}$$

розподілу випадкової величини X . Існує співвідношення $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(a;b)$,

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ якщо } b > a$$

Приклад 4. Випадкова величина x задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ (x-2)^2, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти а) диференціальну функцію, б) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2,5;3)$, в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функції.

Розв'язання.

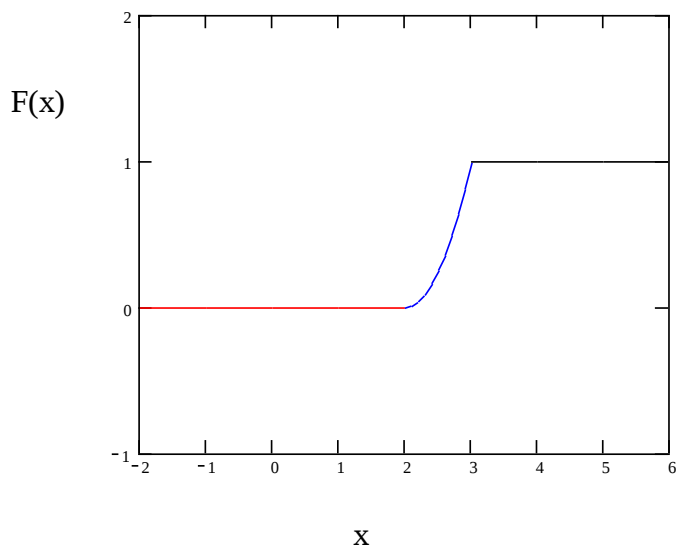
а) диференціальну функція $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 2(x-2), & 2 \leq x < 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

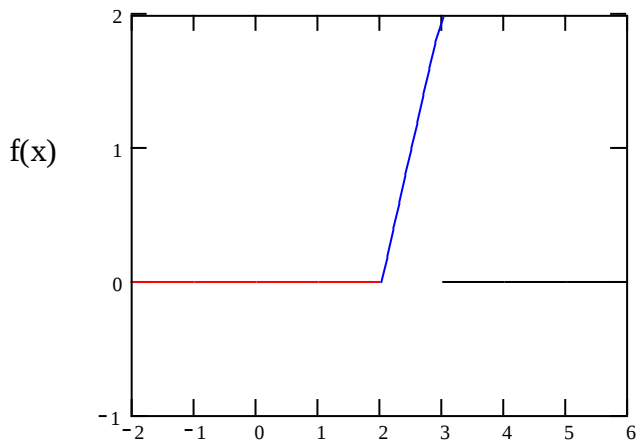
б) $F(b) - F(a) = P(a \leq x \leq b)$

$$F(3) - F(2,5) = P(2,5 \leq x \leq 3) = 1 - 0,5^2 = 0,75$$

в) графік інтегральної функції розподілу



графік диференціальної функції розподілу



Тема 10. Числові характеристики випадкових величин.

Теоретичні відомості

Математичне сподівання.

Нехай якась дискретна випадкова величина X , може набувати k різних значень $x_1, x_2, \dots, x_k$. В результаті проведення n випробувань випадкова величина X набула n_1 разів значення x_1 , n_2 разів значення $x_2, \dots$ n_k разів значення x_k .

Зрозуміло, що $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Знайдемо середнє значення випадкової величини X в даному експерименті.

$$X_c = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \dots + x_k \cdot n_k}{n} = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + x_3 \cdot \frac{n_3}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{n_k}{n}$$

Оскільки відносні частоти приймаємо за ймовірності ($\frac{n_i}{n} = p_i$), то математичне сподівання дискретної випадкової величини дорівнює сумі добутків можливих значень випадкової величини на відповідні ймовірності:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_k \cdot p_k = \sum_{i=1}^k x_i \cdot p_i.$$

Дисперсія.

Математичне сподівання квадрата відхилення значень випадкової величини від її математичного сподівання називається дисперсією.

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = \sum_{i=1}^k (x_i - M(X))^2 \cdot p_i.$$

Дисперсію можна знайти ще за такою формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot p_i - M^2(X), \text{ тобто як різницю між математичним сподіванням}$$

квадрата випадкової величини і квадратом математичного сподівання.

Середньоквадратичне відхилення.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Приклад 1.

В лотереї 8 білетів, серед них 3 виграшні. Взяли 4 білети. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення випадкової величини X -кількості виграшних білетів серед відібраних.

Розв'язання.

Для знаходження ймовірності скористаємося формулою:

$$P = \frac{C_m^k \cdot C_{N-m}^{S-k}}{C_N^S}, \text{ де}$$

$$N = \begin{cases} m \text{ виграшних,} \\ N - m \text{ невіграшних.} \end{cases} \quad \text{взяли} \quad S = \begin{cases} k \text{ виграшних,} \\ S - k \text{ невіграшних.} \end{cases}$$

$$8 = \begin{cases} 3 \text{ виграшних,} \\ 5 \text{ невиграшних.} \end{cases} \quad \text{взяли} \quad 4 = \begin{cases} k \text{ виграшних,} \\ 4 - k \text{ невиграшних.} \end{cases}$$

Випадкова величина X може приймати значення 0,1,2,3.

$$k \in \{0,1,2,3\}.$$

$$P_0 = \frac{C_3^0 \cdot C_5^4}{C_8^4} = \frac{1}{14}, \quad P_1 = \frac{C_3^1 \cdot C_5^3}{C_8^4} = \frac{3}{7}, \quad P_2 = \frac{C_3^2 \cdot C_5^2}{C_8^4} = \frac{3}{7}, \quad P_3 = \frac{C_3^3 \cdot C_5^1}{C_8^4} = \frac{1}{14}.$$

Закон розподілу:

0	1	2	3
$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

Математичне сподівання:

$$M(X) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot p_i = 0 \cdot \frac{1}{14} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{1}{14} = 1,5.$$

Дисперсія:

$$D(X) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot p_i - M^2(X) = 0 \cdot \frac{1}{14} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot \frac{3}{7} + 9 \cdot \frac{1}{14} - (1,5)^2 = \frac{15}{28}.$$

Середньоквадратичне відхилення.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{15}{28}} \approx 0,73.$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини визначається виразом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Дисперсія неперервної випадкової величини визначається виразом:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx \quad \text{або} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X).$$

Середньоквадратичне відхилення. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$

Приклад 2. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення неперервної випадкової величини, яка задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$f(x) = F'(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Математичне сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^4 \frac{x}{4} dx = \frac{x^2}{8} \Big|_0^4 = 2.$$

Дисперсія:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - M^2(X) = \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx - 4 = \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 - 4 = \frac{4}{3}.$$

Середньоквадратичне відхилення.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15.$$



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 316.10-353.10

353. Кожного дня студентами, що працювали на дослідному полі було зібрано по 39, 41, 42, 41, 40, 44, 41, 42, 40, 41, 42, 43, 39, 40, 40, 40, 41, 42, 40, 41, 43, 41, 41, 39, 40 ящиків яблук. Отримані дані записати у вигляді таблиці та знайти числові характеристики даного розподілу.
354. Скласти таблицю розподілу випадкової величини X , як числа хлопчиків у сім'ї, де є троє дітей. Обчислити параметри розподілу.
355. Скласти закон розподілу випадкової величини X як числа спроб здати іспит (трьох студентів), якщо студент підготував 60 % матеріалу. Обчислити параметри розподілу.
356. Продається 10 пар шкарпеток, з яких 4 мають приховані дефекти. Скласти закон розподілу випадкової величини X як числа куплених годних шкарпеток, якщо куплено 3 пари шкарпеток. Обчислити параметри розподілу.
357. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини x по даному закону розподілу:

$$x = \begin{pmatrix} 1,4 & 1,8 & 2,3 & 3,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

358. Скласти закон розподілу випадкової величини $4x$, якщо випадкова величина x задана матрицею:

$$x = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,15 & 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,05 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити виконання рівності $M(4x) = 4Mx$; $D(4x) = 16Dx$.

359. Закон розподілу випадкової величини x задано матрицею:

$$x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0,25 & 0,35 & 0,05 & 0,15 & 0,10 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Перевірити рівність $Dx = M(x^2) - (Mx)^2$.

360. Право на постріл в тирі коштує 50 копійок, а ймовірність влучення в мішень при одному пострілі рівна 0,8. Знайти математичне сподівання виграшу при двох пострілах, якщо за кожне влучення видається приз в 60 коп.

361. Право на постріл в тирі коштує 50 копійок. Ймовірність влучення в мішені №1 і №2 рівні відповідно 0,4 і 0,2, а призи за влучення в ці мішені – 1 гривня і 2 гривні. Знайти математичне сподівання виграшу, якщо стрілець робить по одному пострілу в кожен мішень.

362. Право на постріл в тирі коштує 20 копійок. Ймовірність влучення в мішені №1 і №2 рівні відповідно 0,6 і 0,4, а призи у разі влучення – 30 коп. і 40 коп. Стрілець придбав два квитки, що дає йому право зробити два постріли. Що вигідніше: стріляти в першу мішень; в другу мішень; в різні мішені?

363. З урни, в якій знаходиться 8 білих і 2 чорні кулі, переклали 3 кулі в іншу урну, що містить 5 білих і 4 чорні кулі. Скласти закон розподілу числа білих куль в другій урні після перекладання трьох куль, обчислити математичне сподівання і дисперсію цієї величини.

364. Випадковим чином підкинули дві гральні кістки. Позначимо через x і y число очків, що з'явилися на першій і другій гральній кістці відповідно. Обчислити математичне сподівання випадкових величин $x + y$ і xy .

365. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа випадкових кидань гральної кістки до першої появи “шістки”, якщо число кидань не більше п'яти.

366. Написати закон розподілу числа кидань монети до першої появи герба. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

367. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа випадкових кидань гральної кістки до першої появи “двійки”.

368. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа випадкових кидань двох гральних кісток до першої появи суми очків, рівної дев'яти.

369. Монету кидають до тих пір, доки двічі поспіль не випаде герб. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа необхідних для цього кидань, якщо воно не більше шести.
370. Написати закон розподілу числа влучень в ціль при трьох пострілах, якщо ймовірність влучення при одному пострілі рівна 0,8. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
371. Студент повинен скласти в сесію чотири іспити. Ймовірність скласти кожний з них рівна 0,6. Знайти закон розподілу числа складених іспитів, обчислити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
372. З шести іспитів студент склав три, а ймовірність скласти кожний з іспитів, що залишилися, рівна 0,8. Записати закон розподілу числа іспитів, складених студентом у цю сесію, обчислити математичне сподівання і дисперсію числа складених іспитів.
373. З трьох урн, що містять по 6 білих і 2 чорні кулі, вибирають навмання по одній кулі і кладуть їх назад. Цей експеримент повторюється 512 разів. Обчислити математичне сподівання і дисперсію числа появ такої події: “хоча б одна з трьох вибраних куль в кожному експерименті – біла”.
374. Кожна з трьох гармат має ймовірність влучення, рівну 0,25. Батарея робить п’ять залпів по п’яти мішенях, Знайти закон розподілу числа збитих мішеней і обчислити математичне сподівання і дисперсію цієї величини, якщо для того, щоб збити мішень, необхідно, щоб в неї влучило: а) три снаряда, б) хоча б один снаряд.
375. Випадкова величина задана законом розподілу:
- $$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$
- Знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.
376. Випадкова величина задана законом розподілу:
- $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$
- Знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.
377. Знайти функцію розподілу числа появи герба при трьох випадкових киданнях монети і побудувати її графік.
378. Монету випадковим чином підкидають до першої появи герба. Знайти функцію розподілу числа кидань монети і побудувати її графік.

379. Монету випадковим чином підкидають до тих пір, поки двічі поспіль не з'явиться герб, при цьому число кидань не більше чотирьох. Знайти функцію розподілу числа кидань монети і побудувати її графік.

380. В колі радіусу r навмання вибирається точка. Знайти функцію розподілу відстані точки від центру кола і побудувати її графік.

381. Нехай $g(x)$ є неперервна функція розподілу випадкової величини ξ . Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = a\xi + b$, де a і b – постійні.

382. Функція розподілу випадкової величини ξ задана формулою

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ a(x+1) & \text{при } -1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

При якому a функція $F(x)$ неперервна? При цьому значенні a побудувати графік функції розподілу і обчислити ймовірність того, що $\xi \in (1, 3)$.

383. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань випадкова величина ξ три рази прийме значення з інтервалу $(0,25; 0,75)$.

384. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією $p(x) = \frac{2C}{1+x^2}$.

Знайти значення постійної C . Обчислити ймовірність того, що $\xi \in (1, \sqrt{3})$.

385. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією

$$p(x) = \frac{4C}{e^x + e^{-x}}. \text{ Обчислити значення постійної } C.$$

386. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією $p(x) = C e^{-|x|}$. Знайти значення постійної C і обчислити ймовірність того, що $\xi \in (0, 1)$. Обчислити $M\xi$ і $D\xi$.

387. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Обчислити $M \xi$ і $D \xi$.

388. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \notin (-C, C), \\ \frac{1}{\pi \sqrt{C^2 - x^2}}, & \text{якщо } x \in (-C, C). \end{cases}$$

Обчислити $M \xi$ і $D \xi$.

389. Густину розподілу випадкової величини ξ задано функцією

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\cos x}{2}, & \text{при } |x| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти $M \xi$ і $D \xi$. Обчислити функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графік.

390. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ 1 - |x| & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти $M \xi$ і $D \xi$. Обчислити функцію розподілу $F(x)$. Побудувати графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$.

391. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \frac{\pi}{6}, \\ 3 \sin 3x & \text{при } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Знайти $M \xi$ і $D \xi$. Обчислити функцію розподілу $F(x)$.

392. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{якщо } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Як називається цей розподіл? Обчислити $M \xi$, $D \xi$ і функцію розподілу $F(x)$.

393. Густина розподілу випадкової величини ξ задана функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ ax + b & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Як називається цей розподіл? Знайти значення параметрів a і b , знайти густину розподілу $p(x)$; побудувати графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$.

394. Вважаючи, що наближене значення ребра куба a є випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $[5,65 \text{ см}, 5,70 \text{ см}]$, знайти математичне сподівання і дисперсію об'єму куба.

Тема 10. Закон великих чисел. Нерівність Чебишева. Граничні теореми теорії ймовірності.

1. Закон великих чисел.

Математичні закони теорії ймовірностей одержані внаслідок формалізації реальних статистичних закономірностей, що притаманні масовим випадковим подіям. Під час спостереження масових однорідних випадкових подій у них виявляються певні закономірності типу стабільності. Так, у разі великого числа проведених експериментів відносна частота події $W(A)$ виявляє стабільність і за ймовірністю наближається до ймовірності $P(A)$; середнє арифметичне для випадкової величини наближається за ймовірністю до її математичного сподівання.

Усі ці явища об'єднують під спільною назвою закону великих чисел, який можна загалом сформулювати так: у разі великого числа експериментів, що здійснюються для вивчення певної випадкової події або випадкової величини, середній їх результат практично перестає бути випадковим і може передбачатися з великою надійністю.

Закон великих чисел об'єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних не випадкових, сталих величин.

Для доведення цих теорем використовується нерівність Чебишева.

2. Нерівність Чебишева

Якщо випадкова величина X має обмежені $M(X)$; $D(X)$, то ймовірність відхилення цієї величини від свого математичного сподівання, взятого за абсолютною величиною ε ($\varepsilon > 0$), не перевищуватиме величини: $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Це можна записати так:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Доведення нерівності. Нехай випадкова величина X є неперервна, закон розподілу ймовірностей якої $f(x)$; $M(X)$, $D(X)$ – обмежені величини. Випадкові події $|X - M(X)| < \varepsilon$ і $|X - M(X)| > \varepsilon$ будуть протилежними (рис. 4).

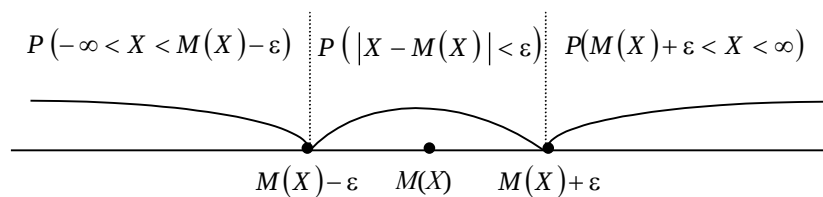


Рис. 4

А тому

$$P(|X - M(x)| < \varepsilon) + P(|X - M(x)| \geq \varepsilon) = 1 \rightarrow \\ \rightarrow P(|X - M(x)| < \varepsilon) = 1 - P(|X - M(x)| \geq \varepsilon).$$

Отже, знаючи оцінку для $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$, ми згідно з (а), знайдемо оцінку і для $P(|X - M(X)| < \varepsilon)$.

Розглянемо нерівність:

$$|X - M(X)| \geq \varepsilon \rightarrow |X - M(X)|^2 \geq \varepsilon^2 \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} |X - M(X)|^2 \geq 1. \quad (б)$$

Помноживши ліву і праву частини нерівності (б) на $f(x)$ ($f(x) > 0$), дістанемо:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} |X - M(X)|^2 f(x) \geq f(x). \quad (в)$$

Зінтегруємо праву і ліву частини нерівності (в) на проміжках $[-\infty; M(X) - \varepsilon] \cup [M(X) + \varepsilon; \infty]$:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{M(X) - \varepsilon} (X - M(X))^2 f(x) dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{M(X) + \varepsilon}^{\infty} (X - M(X))^2 f(x) dx \geq \\ \geq \int_{-\infty}^{M(X) - \varepsilon} f(x) dx + \int_{M(X) + \varepsilon}^{\infty} f(x) dx \quad (г)$$

$$\text{або } \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|X - M(X)| \geq \varepsilon} (X - M(X))^2 f(x) dx \geq \int_{|X - M(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx. \quad (д)$$

Згідно з рис. 4 запишемо: $\int_{|X-M(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx = P(|X - M(X)| > \varepsilon),$

Оскільки $P(|X - M(X)| > \varepsilon) = P(-\infty < X < M(X) - \varepsilon) + P(M(X) + \varepsilon < X < \infty).$

З огляду на те, що $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - M(X))^2 f(x) dx,$ маємо:

$$\begin{aligned} \int_{|X-M(X)| \geq \varepsilon} (X - M(X))^2 f(x) dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (X - M(X))^2 f(x) dx \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{|X-M(X)| \geq \varepsilon} (X - M(X))^2 f(x) dx \leq D(X). \end{aligned}$$

Зрештою, нерівність (д) набере такого вигляду:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} D(X) \geq P(|X - M(X)| \geq \varepsilon). \quad (e)$$

Отже,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} D(X) \geq P(|X - M(X)| \geq \varepsilon).$$

Підставивши оцінку для $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$, дістанемо:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \text{ що й потрібно було довести.}$$

Приклад 1. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-2; 4)$.

Скориставшись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність $|x - a| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon=4\sigma$.

Розв'язання.

Оскільки $a = -2, \sigma_x = 4, D(X) = 16,$ то маємо:

$$P(|x + 2| < 16) \geq 1 - \frac{16}{256} = 1 - 0,0625 = 0,9375.$$

Приклад 2. Імовірність появи випадкової події в кожній із 400 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність події $|X - M(X)| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 10$.

Розв'язання: За умовою задачі маємо: $n=400, p=0,9; q=0,1; \varepsilon=10$.

$M(X) = np = 400 \cdot 0,9 = 360; D(X) = npq = 360 \cdot 0,1 = 36.$

$$P(|x - 360| < 10) \geq 1 - \frac{36}{100} = 0,64.$$

3. Теорема Чебишева

Нехай задано n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, які мають обмежені $M(X_i)$ ($i=1, \dots, n$) і дисперсії яких $D(X_i)$ не перевищують деякої сталої C ($C > 0$), тобто $D(X_i) \leq C$. Тоді для будь-якого малого додатного числа ε імовірність відхилення середнього арифметичного цих величин

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

від середнього арифметичного їх математичних сподівань

$$M(\bar{X}) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n},$$

взятого за абсолютним значенням на величину ε , прямуватиме до одиниці зі збільшенням числа n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$$

або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

! Доведення. Оскільки X_i – випадкові величини, то і $\bar{X}$ буде випадковою. Числові характеристики для $\bar{X}$:

$$M(\bar{X}) = M \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i); \quad D(\bar{X}) = D \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i).$$

Застосуємо нерівність Чебишева для випадкової величини $\bar{X}$:

$$P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} \quad \text{або} \quad P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^n D(X_i)}{(n\varepsilon)^2}.$$

Ураховуючи умову $D(X_i) \leq C$, записуємо:

$$P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{nc}{(n\varepsilon)^2} \rightarrow P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Тоді при $n \rightarrow \infty$ дістаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c}{n\varepsilon^2} \right) = 1.$$

Оскільки ймовірність не може бути більшою за одиницю, а нерівність є не строгою, одержимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) = 1$$

$$\text{або } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 3. Дисперсія кожної із 4500 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу ймовірностей, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань, взате за абсолютною величиною, не перевищить 0,4.

Розв'язання.

Використовуючи нерівність Чебишева для теореми Чебишева, одержимо:

$$P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{4500} X_i}{4500} - \frac{\sum_{i=1}^{4500} M(X_i)}{4500} \right| < 0,4 \right) \geq 1 - \frac{5}{4500 \cdot 0,4} = 0,003.$$

Приклад 4. Унаслідок медичного огляду 900 допризовників було виявлено, що середня маса кожного з них на 1,2 кг більша від середньої маси попереднього призову. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення маси допризовника дорівнює 8 кг?

Розв'язання.

$$P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900} \right| < 1,2 \right) \geq 1 - \frac{8}{900 (1,2)^2} = 1 - 0,0062 = 0,9932 ;$$

$$P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900} \right| < 1,2 \right) \approx 0,0068.$$

Оскільки ця ймовірність дуже мала, відхилення маси можна вважати не випадковим.

4. Теорема Бернуллі

Теорема. Якщо ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p , то при необмеженому збільшенні числа експериментів $n \rightarrow \infty$ імовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від імовірності p , взятої за абсолютною величиною на $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ прямуватиме до одиниці зі зростанням n , що можна записати так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1.$$

! Доведення. Оскільки $W(A) = m/n$, де m – число експериментів – яких випадкова подія A спостерігалась, n – загальне число проведених експериментів, то ми можемо записати, що $m = \sum_{i=1}^n X_i$, де X_i – дискретна випадкова величина, яка може набувати лише одного з можливих значень: 0 або 1. У табличній формі закон дискретної випадкової величини X_i можна записати так:

x_i	0	1
p_i	q	p

Числові характеристики X_i :

$$M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$M(X_i^2) = p;$$

$$D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Нерівність Чебишева для теореми Бернуллі матиме такий вигляд:

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{n^2 \varepsilon^2} \rightarrow P(|W(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n \varepsilon^2}.$$

Отже, доведено, що $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1.$

Приклад 5. Імовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі $W(A)$ від імовірності 0,95 не більше ніж на величину 0,02.

Розв'язання. За умовою задачі: $p = 0,95$; $q = 0,05$; $n = 400$. На підставі (333) дістаємо:

$$P(|W(A) - 0,95| < 0,02) \geq 1 - \frac{0,95 \cdot 0,05}{400 \cdot (0,02)^2} = 1 - 0,2969 = 0,7031.$$

Приклад 6. Скільки необхідно провести експериментів n , щоб імовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від імовірності $p = 0,85$, взяте за абсолютною величиною, на $\varepsilon = 0,001$, була б не меншою за 0,99.

Розв'язання. Із умови задачі маємо $p = 0,85$; $q = 0,15$; $\varepsilon = 0,001$,

$$P(|W(A) - 0,85| < 0,001) = 0,99.$$

$$1 - \frac{pq}{n \varepsilon^2} = 0,99 \rightarrow n = \frac{pq}{0,01 \varepsilon^2} = \frac{0,85 \cdot 0,15}{0,01 \cdot 0,000001} = 12450000.$$



Задачі 354.10-369.10

395. Імовірність появи випадкової події в одному експерименті є величиною сталою і дорівнює 0,3. Із якою імовірністю можна стверджувати, що відносна частота цієї події при 100 експериментах буде знаходитись у межах $[0,2; 0,4]$.

Відповідь. 0,98.

396. Випадкова подія A може здійснитися при одному експерименті із імовірністю p . Експеримент повторили n раз. Яка ймовірність того, що при цьому виконується нерівність $np - 2\sqrt{npq} < m < np + 2\sqrt{npq}$.

Відповідь. 0,9544.

397. Яке повинна мати значення величина ε у нерівності Чебишева, щоб $P(|X - a| < \varepsilon) \approx 0,99$, коли відомо, що $(X) = 4$.

Відповідь. $\varepsilon = 20$.

398. Із якою надійністю середнє арифметичне вимірів певної величини відповідає істинному виміру цієї величини, якщо було здійснено 500 вимірювань із точністю 0,1 і при цьому дисперсії випадкових величин – результатів вимірювання – не перевищують 0,3.

Відповідь. 0,94.

399. Скільки необхідно провести вимірів діаметра втулки, щоб середнє арифметичне цих вимірів відрізнялося від істинного розміру діаметра втулки не більше як 0,05 із надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірів) не перевищують 0,2.

Відповідь. $n = 800$.

400. Імовірність того, що за час t із ладу вийде один конденсатор, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що за час t із 100 конденсаторів із ладу вийде:

- 1) не менш як 28 конденсаторів;
- 2) від 14 до 26 конденсаторів?

Відповідь. 1) 0,98; 2) 0,9.

401. При відливанні відливок, із яких потім виготовляють на верстатах деталі, одержують у середньому 20% браку. Скільки необхідно запланувати відливок, щоб із імовірністю не меншою за 0,95 була забезпечена програма

випуску деталей, для виготовлення яких необхідно 50 бездефектних відливок.

Відповідь. $n=305$.

402. Здійснюється вибіркове обстеження партії електроламп для визначення тривалості їх горіння. Скільки необхідно перевірити електролампочок, щоб із імовірністю не меншою за 0,9876 можна було стверджувати, що середня тривалість горіння лампочки для всіх n штук перевірених відхилялось від її середньої величини не більше ніж на 10 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочок дорівнює 80 годин.

Відповідь. $n=4776$.

403. Випадкова величина $\bar{X}$ – середнє арифметичне 10000 незалежних випадкових велечин, що мають один і той самий закон розподілу, і середнє квадратичне відхилення кожної із них дорівнює 2. Яке максимальне відхилення величини $\bar{X}$ від його математичного сподівання можна очікувати із імовірністю 0,9544?

Відповідь. 0,04.

404. Верстат із програмним управлінням виготовляє за робочу зміну 900 виробів, із яких в середньому 1% складає брак. Знайти наближено ймовірність того, що за зміну буде виготовлено не менше 810 доброякісних виробів, якщо вони виявляються доброякісними незалежно один від одного.

Відповідь. 0,99865.

405. Кожна із 40 незалежних випадкових величин має гамма-розподіл із значеннями параметрів $\alpha = 2$, $\lambda = 10$. На підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей записати наближено закон розподілу для

випадкової величини $X = \sum_{i=1}^{40} X_i$.

Відповідь. $a=8$; $\sigma \approx 0,9$; $f(x) = \frac{1}{0,9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{1,62}}$, $-\infty < x < \infty$.

406. У касі певного закладу в наявності є 4000 гривень. У черзі знаходиться $n=30$ робітників. Сума X , яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною із математичним сподіванням, рівним 200 грн. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=60$ грн. Знайти ймовірність того, що суми, котра є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі.

Відповідь. $M(Y) = n M(X) = 30 \cdot 200 = 6000$ грн.;

$\sigma(Y) = \sqrt{30} \cdot 60 \approx 5,48 \cdot 60 \approx 328,8$ грн.;

$$P(X > 4000) = 0,5 - \Phi\left(\frac{4000 - 6000}{328,8}\right) = 1. \text{ Не вистачить.}$$

407. Зберігається умова задачі 12, тільки в черзі стоїть $n = 15$ робітників і сума X , яку повинен одержати кожний із них, є випадковою величиною із значеннями $M(X)=150$ грн., $\sigma(X)=60$ грн. Яка ймовірність того, що суми вистачить усім людям?

Відповідь. $M(Y) = 2250$ грн.; $\sigma(Y) = \sqrt{15} \cdot 60 \approx 232,4$ грн.;

$$P(X > 4000) = 0,5 - \Phi\left(\frac{4000 - 2250}{232,4}\right) = 0,5 - 0,5 = 0.$$

Усім робітникам вистачить суми, що є в касі.

408. Залізничний потяг складається із 30 вагонів. Маса кожного з них є випадковою величиною X із математичним сподіванням $M(X) = 400$ т і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X)=20$ т. Локомотив може нести масу не більшу за 12100 т. Якщо маса потяга перевищує допустиму, то необхідно причеплювати другий локомотив. Знайти ймовірність того, що одного локомотива не досить для перевезення потяга.

Відповідь. $G = \sum_{i=1}^n X_i$ – маса потяга.

$$M_G = n M(X) = 30 \cdot 400 = 12000 \text{ т}; \sigma(Y) = \sqrt{30} \sigma_X \approx 5,5 \cdot 20 = 110 \text{ т};$$

$$P(G > 14500) \approx 0,1814.$$

409. Маємо 100 ідентичних елементів, що складають певний технічний комплекс. Час безвідмовної роботи кожного i -го елемента є випадковою величиною T_i , що має експоненціальний закон розподілу із параметром $\lambda = 40$ і однаковим для всіх елементів. Випадкові величини $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$ є незалежними між собою. У разі відмови в роботі i -го елемента миттєво здійснюється переміщення на $i+1$ -й справний елемент. Загальний час безвідмовної роботи комплексу дорівнює сумі T_i , а саме $T = \sum_{i=1}^{100} T_i$.

Знайти наближено ймовірність того, що комплекс безвідмовно пропрацює не менш як 20 год.

Відповідь:

$$P(T > 20) = 0,5 - \Phi\left(\frac{80 - 100}{\sqrt{100}}\right) \approx 0,5 + \Phi\left(\frac{20}{10}\right) = 0,5 + \Phi(2) = 0,9772.$$

410. Верстат-автомат виготовляє за робочу зміну $n = 1000$ виробів, із яких брак у середньому становить 5%. На скільки доброякісних виробів k має бути розрахований бункер для доброякісних виробів, щоб ймовірність його переповнення за зміну не перевищувала 0,001.

Відповідь.

$$P(Y > k) \approx 1 - 0,001 = 0,999 \rightarrow \Phi\left(\frac{k - 956}{6,9}\right) \approx 0,499 \rightarrow k \approx 772.$$

Тема 11. Деякі види розподілів випадкових величин.

Теоретичні відомості

Геометричний закон розподілу ймовірностей

Інколи спроби здійснюють до першої появи випадкової події. Число проведених спроб буде цілочисловою випадковою величиною. Цілочислова випадкова величина X має геометричний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

$$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Тут p — ймовірність появи випадкової події в кожній спробі — є величиною сталою, $q = 1 - p$.

У табличній формі геометричний закон розподілу такий:

$X = X_k = k$	1	2	3	4	...
$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}$	p	pq	pq^2	pq^3	...

При перевірці умови нормування використовується формула суми нескінченної геометричної прогресії, тому й закон розподілу називають геометричним:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = p + pq + pq^2 + pq^3 + \dots = p(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = p \frac{1}{1-q} = p \frac{1}{p} = 1.$$

Числові характеристики для цього закону:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Серед дискретних випадкових величин лише геометричному закону притаманна властивість відсутності післядії. Це означає, що ймовірність появи випадкової події в k -му експерименті не залежить від того, скільки їх з'явилося до k -го, і завжди дорівнює p .

Приклад 1. Гральний кубик підкидається до першої появи цифри 6. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для випадкової величини X числа здійснюваних підкидань.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисловою, що має геометричний закон розподілу ймовірностей. За умовою задачі: $p = \frac{1}{6}$; $q = \frac{5}{6}$.

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6; D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = 30; \sigma(X) = \sqrt{30} \approx 5,48.$$

Приклад 2. Спортсмен стріляє зі спортивної рушниці по одній і тій самій мішені. Імовірність влучити в мішень при одному пострілі є величиною сталою і дорівнює 0,8. Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X – числа витрачених спортсменом набойів.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисловою, з геометричним законом розподілу ймовірностей. За умовою задачі: $p=0,8$; $q=0,2$.

Згідно з (245), (246) і (247) маємо:

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4}; D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,2}{0,64} = \frac{5}{16}; \sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Біноміальний закон розподілу ймовірностей.

Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

Ймовірність того, що при проведенні n випробувань успіх наступить k разів і, відповідно, $n-k$ разів настане невдача дорівнює

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

У табличній формі цей закон набирає такого вигляду:

$X = x_k = k$	0	1	2	3	...	n
$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$	...	p^n

При перевірці виконання умови нормування використовується формула біному Ньютона, тому закон розподілу називають *біноміальним*:

$$\sum_{k=0}^n P_k = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (q + p)^n = 1.$$

Оскільки дана величина є дискретною, то її математичне сподівання обчислюється за формулою:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = \sum_{k=0}^n k \cdot P_n(k) = np$$

$$M(x) = np$$

Дисперсія біноміально розподіленої випадкової величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - M^2(X) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot P_n(k) - (np)^2 = npq. \quad D(x) = npq$$

Приклад 3. У партії однотипних деталей стандартні становлять 95%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X – появи числа стандартних деталей серед 400 навмання взятих.

Розв’язання. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу ймовірностей, яка може набувати значення $X = k = 0, 1, 2, \dots, 400$.

Імовірності можливих значень обчислюються за формулою Бернуллі:

$P_k = P(X = k) = C_{400}^k p^k q^{400-k}$, де $p = 0,95$ – імовірність появи стандартної деталі, $q = 1 - p = 1 - 0,95 = 0,05$ – імовірність появи нестандартної деталі.

Згідно з (235), (236), (237), маємо:

$$M(X) = np = 400 \cdot 0,95 = 380;$$

$$D(X) = npq = 400 \cdot 0,95 \cdot 0,05 = 19;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{19} \approx 4,36.$$

Приклад 4. У кожному із 100 контейнерів міститься по 8 виробів першого сорту, а решта 2 – браковані. Із кожного контейнера навмання беруть по одному виробу. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X – поява числа виробів першого сорту серед 100 навмання взятих.

Розв’язання. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу. Із умови задачі маємо:

$n = 100$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 100$.

$$M(X) = np = 100 \cdot 0,8 = 80; \quad D(X) = npq = 100 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 16;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{16} \approx 4.$$

Розподіл Пуассона.

Розподіл Пуассона $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ визначає ймовірність того, що в серії з великої кількості ($n \rightarrow \infty$) рідкісних випробувань кількість успіхів набуває значення k ($k = 0, 1, 2, \dots$), $\lambda = np$ - параметр розподілу.

У табличній формі цей закон розподілу буде такий:

$X = k$	0	1	2	3	...	n
$P = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{1}{2!} \lambda^2 e^{-\lambda}$	$\frac{1}{3!} \lambda^3 e^{-\lambda}$	...	$\frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda}$

$$\sum_{k=0}^n P_k = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

K - випадкова величина, що має пуассонівський розподіл.

Математичне сподівання

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

$$M(x) = \lambda.$$

Дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot p_i - M^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda.$$

$$D(x) = \lambda.$$

Рівномірний закон розподілу ймовірностей.

Цілочислова випадкова величина X має рівномірний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

$$P_k = P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

У табличній формі запису рівномірний закон розподілу має вигляд:

$X = x_k = k$	1	2	3	...	n
$P_k = P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

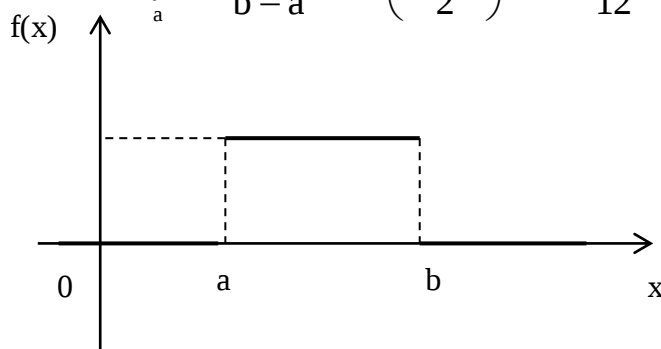
Умова нормування $\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ виконується.

Випадкова величина X розподілена рівномірно на проміжку $a \leq x \leq b$ має таку густину (щільність) розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Математичне сподівання $M(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}.$

Дисперсія $D(X) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$



Приклад 5. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо цілочислова випадкова величина X має рівномірний закон розподілу і можливі значення її такі:

$$X_k = k = 1, 2, 3, \dots, 100.$$

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $n = 100$, $P_k = 1/100$.

$$M(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{100+1}{2} = 50,5.$$

$$D(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{10000-1}{12} = \frac{9999}{12} = 832,25.$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{832,25} \approx 28,87$$

Показниковий закон розподілу ймовірності.

Неперервна випадкова величина X має показниковий розподіл із параметром λ , якщо її густина розподілу ймовірностей дорівнює:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсія

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормальний закон розподілу ймовірностей.

Нормально розподіленою з параметрами a та σ називається випадкова величина X , густина розподілу ймовірностей якої дорівнює:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty,$$

Нормальний розподіл з параметрами $a=0$ та $\sigma=1$, тобто $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$-\infty < x < \infty$, називається нормалізованим тобто $f(x) = \varphi(x)$ є функцією Гаусса, Математичне сподівання.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a.$$

$$M(X) = a$$

Дисперсія

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - a^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx - a^2 = \sigma^2.$$

$$D(X) = \sigma^2.$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ для загального нормального закону залежно від параметрів a і σ зображені на рис. 5 і 6

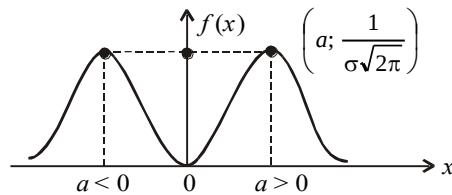


Рис. 5

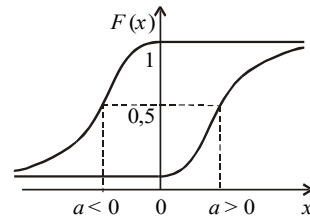


Рис. 6

Із рис. 5 бачимо, що графік $f(x)$ розміщений симетрично відносно умовно проведеного перпендикуляра в точку $X=a$. Зі зміною значень параметра a крива $f(x)$ зміщується праворуч, якщо $a > 0$ або ліворуч, якщо $a < 0$, не змінюючи при цьому своєї форми; $f(a) = \max$, отже, $M_0 = a$.

Із рис. 92 бачимо, що графік $F(x)$ є неспадною функцією, оскільки $f(x) = F'(x) > 0$ і, як буде доведено далі, $F(a) = 0,5$.

Отже, $M_e = a$.

Зі зміною значень параметра a крива $F(x)$ зміщується праворуч для $a > 0$ або ліворуч при $a < 0$, не змінюючи при цьому форми кривої.

Отже, для нормального закону $M_0 = M_e = a$.

Зі зміною значень σ при $a = \text{const}$ змінюється крутизна кривих у околі значень $X = a$, що унаочнюють рис. 5 і 6.

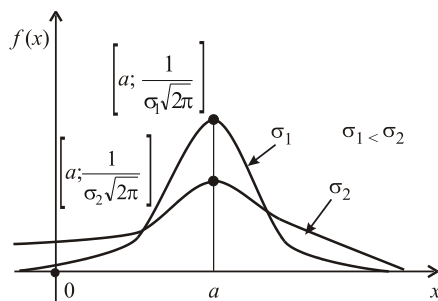


Рис. 7

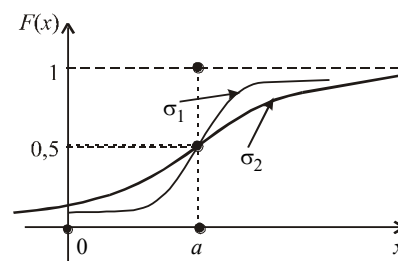


Рис. 8

Для нормованого нормального закону графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображено на рис. 7 і 8.

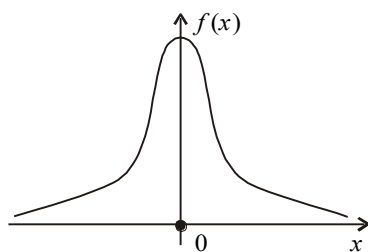


Рис. 9

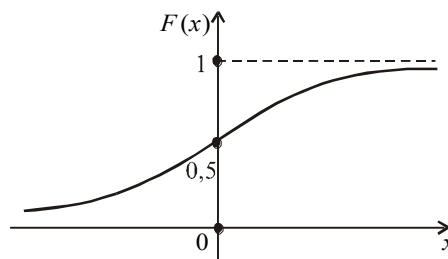


Рис. 10

Загальний нормальний закон позначають: $N(a; \sigma)$. Так, наприклад, $N(-2; 4)$ – загальний нормальний закон із значенням параметрів $a = -2$, $\sigma = 4$.

Нормований нормальний закон позначають $N(0; 1)$.

Формули для обчислення ймовірностей подій:

$$\begin{aligned}
 \alpha < x < \beta; \quad |x - a| < \delta. \quad 1) \quad P(\alpha < x < \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
 &= \left| \frac{x-a}{\sigma} = z \rightarrow x = \sigma z + a, \quad dx = \sigma dz \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

$$\begin{aligned}
 P(|x-a| < \delta) &= P(a-\delta < x < a+\delta) = | \alpha = a-\delta, \beta = a+\delta | = \\
 &= \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).
 \end{aligned}$$

Отже:

$$P(|x-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Для (0, 1) формули наберуть такого вигляду:

Правило трьох сигм для нормального закону

Коли $\delta = 3\sigma$, то маємо:

$$P(|x - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Практично ця подія при одному експерименті здійсниться, а тому її вважають практично вірогідною. Звідси:

$$P(|x - a| > 3\sigma) = 1 - P(|x - a| < 3\sigma) = 1 - 0,9973 = 0,0027.$$

Тобто ймовірність того, що внаслідок проведення експерименту випадкова величина X , яка має закон розподілу $N(a; \sigma)$, не потрапить у проміжок $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, дорівнює 0,0027. Це становить 0,27%, тобто практично вважається, що ця подія внаслідок проведення одного експерименту не здійсниться.

Приклад 6. Відомо, що випадкова величина X має закон розподілу $N(-4; 2)$. Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$ і накреслити їх графіки. Обчислити $P(-6 < x < 3)$, $P(|x + 4| < 4)$.

Розв'язання.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{3}}, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x+4)^2}{3}} dx.$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ наведені на рис. 9 і 10.

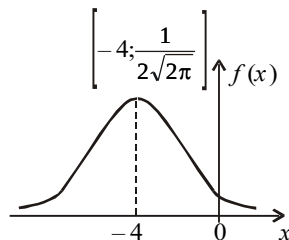


Рис. 9

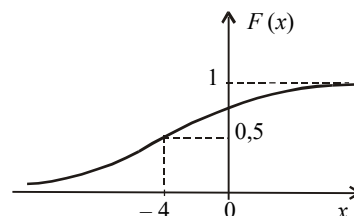


Рис. 10

Використовуючи формули (261), (262), обчислюємо ймовірності:

$$\begin{aligned} 1) P(-6 < x < 3) &= \Phi\left(\frac{3 - (-4)}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-6 - (-4)}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3+4}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-6+4}{2}\right) = \\ &= \Phi(3,5) - \Phi(-1) = \Phi(3,5) + \Phi(1) = 0,49966 + 0,3413 = 0,84096; \end{aligned}$$

$$P(-6 < x < 3) = 0,84096.$$

$$2) P(|x + 4| < 4) = 2\Phi\left(\frac{4}{2}\right) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

$$P(|x + 4| < 4) = 0,9544.$$

Приклад 7. Відомо, що діаметр кульки підшипника D є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу. Бракування кульок

здійснюється за таким алгоритмом: якщо кулька не проходить через отвір із діаметром 5,5 мм, але проходить через отвір із діаметром 5,58 мм, то її розмір відповідає стандарту. Якщо будь-яка із наведених умов не виконується, то кулька бракується. Визначити σ_d , якщо брак становить 10%.

Розв'язання. Середній діаметр кульки

$$m_d = \frac{5,5 + 5,58}{2} = \frac{11,08}{2} = 5,54 \text{ мм.}$$

Якщо позначимо $d_1 = 5,5$ мм, $d_2 = 5,58$ мм, то ймовірність того, що кулька буде забракована, визначається як:

$$P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - m_d}{\sigma_d}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - m_d}{\sigma_d}\right) \right].$$

Оскільки $m_d = \frac{d_1 + d_2}{2}$ – математичне сподівання, то виконуються рівності:

$$\begin{aligned} P &= 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma_d}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma_d}\right) \right] = \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma_d}\right) \right] = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) + \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) \right] = \\ &= 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right). \end{aligned}$$

Далі маємо:

$$\begin{aligned} 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) &= 0,9 \rightarrow \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d}\right) = 0,45 \rightarrow \frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} = \\ 1,65 &\rightarrow \sigma_d = \frac{d_2 - d_1}{3,3} = \frac{5,58 - 5,5}{3,3} = 0,024 \text{ мм; } \sigma_d = 0,024 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей

Цілочислова випадкова величина X має гіпергеометричний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою

$$P_k = P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m}.$$

Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей відбувається за таких обставин: нехай задано деяку множину однотипних елементів, число яких дорівнює n ; з них n_1 елементів мають, наприклад, ознаку A (колір,

стандартність), а решта $n - n_1$ елементів – ознаку B ; коли із цієї множини навмання беруть m елементів, число елементів k з ознакою A (або B), що трапляється серед m навмання взятих елементів, буде цілочисловою випадковою величиною з гіпергеометричним законом розподілу.

У табличній формі запису цей закон розподілу подається так:

$X = x_k = k$	0	1	2	...	m
$P_k = P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m}$	$\frac{C_{n-n_1}^m}{C_n^m}$	$\frac{C_{n_1}^1 C_{n-n_1}^{m-1}}{C_n^m}$	$\frac{C_{n_1}^2 C_{n-n_1}^{m-2}}{C_n^m}$	...	$\frac{C_{n-n_1}^m}{C_n^m}$

При цьому $m \leq n$.

$$\text{Умова нормування } \sum_{k=0}^m P_k = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^m C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k} = 1.$$

Залежно від умови задачі найменше значення може становити $m = 0, 1, 2, 3, \dots, m - 1$.

Числові характеристики цього закону обчислюються за наведеними далі формулами:

$$1. M(X) = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^m k C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k}.$$

$$2. D(X) = \frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^m k^2 C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k} - M^2(X)$$

$$3. \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{C_n^m} \sum_{k=0}^m k^2 C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{m-k} - M^2(X)}.$$

Приклад 8. В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта є бракованими. Навмання із ящика беруть m деталей. Побудувати закони розподілу цілочислової випадкової величини X – появу числа стандартних деталей серед m навмання взятих і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо: 1) $m = 3$; 2) $m = 4$; 3) $m = 5$; 4) $m = 7$.

Розв’язання. Використовуючи формулу (253) побудуємо гіпергеометричні закони розподілу:

$$1. m = 3; n_1 = 7; n - n_1 = 3; k = 0, 1, 2, 3.$$

У табличній формі гіпергеометричний закон подається так:

$X = x_k = k$	0	1	2	3
$P_k = P(X = k) = \frac{C_7^k C_3^{3-k}}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3}$

або

k	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

$P_k = \frac{C_7^k C_3^k}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$
---------------------------------	-----------------	------------------	------------------	------------------

$$\sum P_k = \frac{1+21+63+35}{120} = \frac{120}{120} = 1.$$

$$1) M(X) = \sum k p_k = 0 \frac{1}{120} + 1 \frac{21}{120} + 2 \frac{63}{120} + 3 \frac{35}{120} = \frac{21+126+105}{120} = \frac{252}{120} = 2,1;$$

$$2) M(X^2) = \sum k^2 p_k = 0 \frac{1}{120} + 1 \frac{21}{120} + 4 \frac{63}{120} + 9 \frac{35}{120} = \frac{21+252+315}{120} = \frac{588}{120} = 4,9; D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 4,9 - (2,1)^2 = 4,9 - 4,41 = 0,49;$$

$$3) \sigma(X) = \sqrt{0,49} = 0,7.$$

$$2. m = 4; n_1 = 7; n - n_1 = 3; k = 1, 2, 3, 4.$$

У табличній формі закон розподілу подається так:

$X = x_k = k$	1	2	3	4
$P_k = P(X = k) = \frac{C_7^k C_3^{4-k}}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^1 C_3^3}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^2 C_3^2}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^3 C_3^1}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^4 C_3^0}{C_{10}^4}$

або

k	1	2	3	4
$P_k = \frac{C_7^k C_3^{4-k}}{210}$	$\frac{7}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{35}{210}$

$$\sum P_k = \frac{7+63+105+35}{210} = \frac{210}{210} = 1.$$

$$1) M(X) = \sum k p_k = 1 \frac{7}{210} + 2 \frac{63}{210} + 3 \frac{105}{210} + 4 \frac{35}{210} = \frac{7+126+315+140}{210} = \frac{588}{210} = 2,8;$$

$$2) M(X^2) = \sum k^2 p_k = 1 \frac{7}{210} + 4 \frac{63}{210} + 9 \frac{105}{210} + 16 \frac{35}{210} = \frac{7+252+945+560}{210} = \frac{1764}{210} = 8,4;$$

$$3) \sigma(X) = \sqrt{0,56} \approx 0,75.$$

$$3. m = 5; n_1 = 7; n = 3; k = 2, 3, 4, 5.$$

У табличній формі закон подається так:

$X = x_k = k$	2	3	4	5
$P_k = P(X = k) = \frac{C_7^k C_3^{5-k}}{C_{10}^5}$	$\frac{C_7^2 C_3^3}{C_{10}^5}$	$\frac{C_7^3 C_3^2}{C_{10}^5}$	$\frac{C_7^4 C_3^1}{C_{10}^5}$	$\frac{C_7^5 C_3^0}{C_{10}^5}$

або

k	2	3	4	5
$P_k = \frac{C_7^k C_3^{5-k}}{252}$	$\frac{21}{252}$	$\frac{105}{252}$	$\frac{105}{252}$	$\frac{21}{252}$

$$1) M(X) = \sum k p_k = 2 \frac{21}{252} + 3 \frac{105}{252} + 4 \frac{105}{252} + 5 \frac{21}{252} = \\ = \frac{42 + 315 + 420 + 105}{252} = \frac{882}{252} = 3,5;$$

$$2) M(X^2) = \sum k^2 p_k = 4 \frac{21}{252} + 9 \frac{105}{252} + 16 \frac{105}{252} + 25 \frac{21}{252} = \\ = \frac{84 + 945 + 1680 + 525}{252} = \frac{3234}{252} = 12,83;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 12,83 - (3,5)^2 = 12,83 - 12,25 = 0,58.$$

$$3) \sigma(X) = \sqrt{0,58} \approx 0,76.$$

$$4. m = 7; n_1 = 7; n - n_1 = 3; k = 4, 5, 6, 7.$$

У табличній формі закон подається так:

$X = x_k = k$	4	5	6	7
$P_k = P(X = k) = \frac{C_7^k C_3^{7-k}}{C_{10}^7}$	$\frac{C_7^4 C_3^3}{C_{10}^7}$	$\frac{C_7^5 C_3^2}{C_{10}^7}$	$\frac{C_7^6 C_3^1}{C_{10}^7}$	$\frac{C_7^7 C_3^0}{C_{10}^7}$

або

k	4	5	6	7
$P_k = \frac{C_7^k C_3^{7-k}}{C_{10}^7}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

$$\sum P_k = \frac{21 + 105 + 105 + 21}{252} = \frac{252}{252} = 1.$$

$$1) M(X) = \sum k p_k = 4 \frac{35}{120} + 5 \frac{63}{120} + 6 \frac{21}{120} + 7 \frac{1}{120} = \\ = \frac{140 + 315 + 126 + 7}{120} = \frac{588}{120} = 4,5;$$

$$2) M(X^2) = \sum k^2 p_k = 16 \frac{35}{120} + 25 \frac{63}{120} + 36 \frac{21}{120} + 49 \frac{1}{120} = \frac{2942}{120} \approx 24,52;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 24,52 - (4,5)^2 = 24,52 - 20,25 = 4,27;$$

$$3) \sigma(X) = \sqrt{4,27} \approx 2,1.$$



Задачі для самостійного розв'язування

Задачі 411-449

411. Серед дев'яти однотипних виробів п'ять відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Навмання береться шість виробів. Визначити закон розподілу цілочислової випадкової величини X – появу числа виробів, що відповідають стандарту і обчислити для цієї величини $M(X)$, $\sigma(X)$.

Відповідь.

k	2	3	4	5
P_k	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

$$M(X) = 3,33, \sigma(X) \approx 0,76.$$

412. Під час штампування валиків імовірність відхилення кожного валика від стандартного розміру дорівнює 0,15. За робочу зміну робітником було проштамповано 800 валиків. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа валиків, що не відповідають стандартному розміру.

Відповідь. $M(X) = 120$, $D(X) = 102$, $\sigma(X) \approx 10,1$.

413. У лабораторних умовах було висіяно 10000 насінин нового сорту ячменю. Імовірність того, що насінина ячменю не проросте в середньому становить 0,2. Визначити закон розподілу цілочислової випадкової величини X – числа зернин ячменю, що проростуть, і обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$.

Відповідь. $M(X) = 8000$, $\sigma(X) = 40$.

414. Радіотелефонна станція отримує цифровий текст. Унаслідок атмосферних завад імовірність спотворення цифри в середньому дорівнює 0,001. Було отримано текст, що налічує 2000 цифр. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$

дискретної випадкової величини X – числа спотворених цифр в отриманому тексті.

Відповідь. $M(X) = 2, D(X) = 2, \sigma(X) \approx 1,41$.

415. В урні міститься 100 кульок, із них 80 білі, а решта чорні. Кульки із урни виймають навздогад по одній із поверненням. Визначити закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа проведених експериментів, якщо вони здійснюються до першої появи чорної кульки. Чому дорівнюють $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$?

Відповідь. $M(X) = 5, D(X) = 20, \sigma(X) \approx 4,47$.

416. В електромережу містечка увімкнено для освітлення вулиць у вечірню пору 20000 електролампочок. Імовірність того, що лампочка не перегорить протягом вечірнього часу дорівнює в середньому 0,95. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа електролампочок, що не перегорять протягом вечірнього часу.

Відповідь. $M(X) = 19000, \sigma(X) \approx 30,8$.

417. Для космічного корабля ймовірність зіткнення його з метеоритом малої маси дорівнює 0,001 протягом одного оберту навкіл землі. Космічний корабель здійснив 900 обертів. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X – числа зіткнень космічного корабля із метеоритами малої маси.

Відповідь. $M(X) = 0,9, \sigma(X) \approx 0,95$.

418. Монета підкидається доти, доки вона випаде гербом. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа здійснених підкидань.

Відповідь. $M(X) = 2, \sigma(X) \approx 1,41$.

419. Робітник за зміну обслуговує 14 однотипних верстатів-автоматів. Імовірність того, що верстат за зміну потребує уваги робітника становить $1/7$. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа верстатів-автоматів, що потребують уваги робітника за зміну.

Відповідь. $M(X) = 2, \sigma(X) = 2\sqrt{\frac{3}{7}}$.

420. За одну робочу зміну верстат-автомат виготовляє 400 однотипних деталей. Імовірність, що виготовлена верстатом деталь стандартна дорівнює 0,8. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей, виготовлених верстатом-автоматом за робочу зміну.

Відповідь. $M(X) = 320$, $\sigma(X) = 8$.

421. Серед 12 однотипних телевізорів 8 відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Навмання вибирають 10 телевізорів. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед 10 навмання вибраних.

Відповідь. $M(X) \approx 6,67$, $\sigma(X) \approx 0,601$.

422. Випадкова величина розподілена за законом Пуассона і має математичне сподівання рівне числу 2. Записати закон розподілу цієї величини.

423. Довести, що для випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, математичне сподівання дорівнює дисперсії.

424. Знайти параметри a і b для функції розподілу закону Коші:

$$F(x) = a + b \arctg \frac{x}{2}. \text{ Обчислити ймовірність того, що } \xi \in [2, 2\sqrt{3}].$$

425. Знайти функцію розподілу випадкової величини ξ^2 , де ξ – випадкова величина, розподілена згідно із законом Коші з функцією розподілу

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{2}.$$

426. Випадкові величини ξ і η незалежні і рівномірно розподілені в інтервалах (a, b) і (c, d) відповідно. Обчислити $M(\xi + \eta)$, $D(\xi + \eta)$.

427. Обчислити початковий і центральний моменти K -го порядку випадкової величини, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$.

428. Знайти функцію розподілу випадкової величини, розподіленої по нормальному закону ($a = 0$, $\delta = 1$).

429. Результати вимірювання відстані між двома пунктами розподілені по нормальному закону з параметрами $a = 16$ км і $\delta = 100$ м. Знайти ймовірність того, що відстань між цими пунктами: а) не менше 15,8 км, б) не більше 16,25 км, в) не менше 15,75 км, але не більше 16,3 км.

430. Виконуються постріли в ціль із гармати. Дальність польоту снаряда є випадкова величина, що має нормальний розподіл з параметром $\delta^2 = 900 \text{ м}^2$. Який відсоток снарядів матиме переліт від 20 м до 50 м?

431. Заряд пороху для гвинтівки повинен мати вагу у 2,3 г. Порох зважують на вагах, які мають похибку зважування, розподілену за нормальним законом з дисперсією $\sigma^2 = 0,04 \text{ г}^2$. Знайти ймовірність пошкодження гвинтівки, якщо максимально можлива вага заряду дорівнює 2,8 г.
432. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметром $a=25$. Відомо, що ймовірність влучення випадкової величини ξ в інтервал (10, 15) дорівнює 0,2. Чому дорівнює ймовірність влучення цієї величини в інтервал (35, 40)?
433. Випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом. Знайти відношення між середнім квадратичним відхиленням ξ і середнім лінійним відхиленням $E = M |\xi - M \xi|$ цієї величини.
434. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу
- $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,5x & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$
- Як називається цей розподіл? Обчислити ймовірність того, що випадкова величина ξ прийме значення: а) менше 0,2, б) менше числа 1, в) не менше числа 1, г) не менше числа 2,5.
435. Оцінити ймовірність того, що модуль відхилення випадкової величини від математичного сподівання не перевершить трьох середніх квадратичних відхилень (правило “трьох сигм”).
436. Приймаючи ймовірність народження хлопчика рівною 0,5, оцінити за допомогою нерівності Чебишева ймовірність того, що серед 1200 новонароджених буде від 550 до 650 (включно) хлопчиків.
437. Ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,3. Застосовуючи нерівність Чебишева, знайти число випробувань, необхідних для того, щоб ймовірність відхилення відносно частоти події від її ймовірності, яке не більше 0,01 (по модулю), була більша 0,075.
438. Добові витрати води в населеному пункті є випадковою величиною, середнє квадратичне відхилення якого дорівнює 10000 л. Оцінити ймовірність того, що витрати води в цьому пункті відхилиться від математичного сподівання більше, ніж на 25000 л. (по модулю).

439. Оцінити ймовірність того, що відносна частота появи події, яка має ймовірність 0,2, відхилиться (по модулю) від її ймовірності менше, ніж на 0,1, якщо проведено 1000 випробувань події.
440. Дисперсія кожної з 3000 незалежних випадкових величин не перевищує 6. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищить (по модулю) 0,3.
441. За значення деякої величини приймають середнє арифметичне достатньо великої кількості результатів вимірів цієї величини. Знаючи, що середнє квадратичне відхилення результату кожного виміру не перевищує 1 см, оцінити ймовірність того, що при 1000 вимірів відхилення прийнятого значення від дійсного не перевищить по модулю 0,1 см.
442. Під час гри у городки залишився нешибитим один городок, а у гравця залишилося n бітів. Побудувати ряд розподілу невикористаних бітів X , що залишаються у гравця після того, як останній городок буде вибитий, якщо ймовірність вибити городок при кожному киданні дорівнює p .
443. У групі навчається 25 студентів. Вважається, що дні народження студентів є незалежними і рівномірно розподілені за 12 місяцями року. Знайти математичне сподівання та дисперсію місяців, в яких немає жодного дня народження.
444. Знайти абсолютний (за модулем) центральний момент k -го порядку нормально розподіленої випадкової величини X , середнє квадратичне відхилення якої дорівнює S , а математичне сподівання $X=0$.
445. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , яка рівномірно розподілена на інтервалі (2; 6).
446. Деяка випадкова величина може набути одного із таких значень: $-2, -1, 0, 1, 2$. Знайти відповідні цим значенням ймовірності, $(1, 2, \dots, 5) \text{ } p_j =$, якщо $X = X_3 = 0, X_2 = 1, X_4 = 2$.
447. Дискретна випадкова величина X може набувати будь-яких цілих додатних значень з ймовірностями, що спадають у геометричній прогресії. Вибрати перший член та знаменник прогресії так, щоб математичне сподівання випадкової величини X дорівнювало 10, і визначити за цієї умови ймовірність того, що $X \leq 10$.
448. Знайти характеристичну функцію та моменти k -го порядку рівномірно розподіленої випадкової величини X , щільність ймовірності якої задана функцією

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Побудувати графіки $p(x)$ і $F(x)$ при $a < 0$, $b > 0$, $b = 3a$

449. Проводиться вимірювання діаметра вала без систематичних (одного знака) похибок. Випадкові похибки вимірювання X підлягають нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням 10 мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде проведене з похибкою, яка за абсолютною величиною не перевищує 15 мм.



Задачі для підготовки до модуля

1. Президент фірми хоче створити команду дизайнерів для розробки нової моделі виробу у складі двох інженерів і п'яти маркетинговиків. Яка ймовірність того, що команда такого складу буде створена, якщо з групи 13 інженерів і шести маркетинговиків вибрати навмання 7 осіб?
2. Серед 20 телевізорів фірми «СОНІ» 14 мають систему дистанційного керування. Яка ймовірність того, що серед п'яти випадково відібраних телевізорів три матимуть цю систему?
3. На десяти сторінках газети розміщені рекламні оголошення, 7 сторінок присвячені соціально-політичним проблемам, 3 – спортивним новинам. Прочитали 4 сторінки з цієї газети. Яка ймовірність того, що серед них немає сторінок зі спортивними новинами?
4. У папці є 8 відомостей, сформованих одним бухгалтером, і 12 відомостей – другим. Навмання беруться три відомості. Знайти ймовірність того, що:
1) всі три відомості сформовано другим бухгалтером; 2) відомостей, сформованих другим бухгалтером, виявиться більше, ніж сформованих першим.
5. У продавця канцтоварів у шухляді є 16 фломастерів українського виробництва, 8 – угорського і 14 – китайського. Знайти ймовірність того, що серед випадково вибраних п'ятнадцяти фломастерів тринадцять фломастерів виявляться імпортного виробництва.
6. Гросмейстер демонструє сеанс одночасної гри на 14 дошках з аматорами, серед яких 8 надають перевагу захисту Альохіна, 3 – «Каро-Кан» і троє – індійському захисту. Яка ймовірність того, що на перших п'яти шахівницях буде розіграно захист Альохіна?
7. На паркінгу автомобілів є десять марок «Жигулі», 5 – закордонного виробництва і 9 – «Таврій». Через снігопад 7 автомобілів не виїхали з паркінгу. Яка ймовірність того, що серед них немає жодного автомобіля іноземного виробництва?

8. Експерт з управління цінними паперами розглядає 24 об'єкти для інвестування. Лише 6 з них буде вибрано. Яка ймовірність того, що з п'яти намання взятих об'єктів виявиться об'єкт під номером 8?
9. У папці 12 акцій 1-го виду і 8 – іншого. Навмання беруть три акції. Знайти ймовірність того, що акції будуть одного виду.
10. Ймовірність поліпшення спортсменом особистого досягнення зі стрибків у висоту дорівнює 0,1. Чому дорівнює ймовірність того, що він поліпшить свій результат, якщо йому надано можливість зробити три спроби.
11. Ймовірність одного влучення в ціль при одному залпі з двох автоматів дорівнює 0,38. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з першого автомата, якщо відомо, що для другого ця ймовірність дорівнює 0,7.
12. В аудиторії серед 15 комп'ютерів 12 справних. Знайти ймовірність того, що з двох намання вибраних комп'ютерів хоча б один виявиться несправним.
13. Студент знає 50 із 60 питань програми. Знайти ймовірність того, що із трьох намання витягнутих питань він знатиме: а) хоча б одне; б) тільки одне; в) не більш як одне.
14. Підприємство отримує сировину від трьох постачальників і не виконує контракту з виготовлення продукції, якщо хоча б один із постачальників зриває поставку сировини. Ймовірності вчасної поставки сировини для постачальників відповідно дорівнюють 0,97; 0,95; 0,99. Знайти ймовірність виконання контракту підприємством-виробником.
15. У лотереї розігрується 1000 білетів, з яких виграшними є 4 речових вартістю 40, 60, 70 і 100 грн і 5 грошових по 300 грн кожний. Знайти ймовірність того, що учасник лотереї, маючи три білети, виграє на суму, не меншу 400 грн.
16. Протипожежний пристрій складається із трьох незалежно працюючих сигналізаторів, які спрацьовують у випадку пожежі з ймовірностями, що відповідно дорівнюють 0,95; 0,92; 0,98. Знайти ймовірність того, що при пожежі спрацюють: а) тільки один сигналізатор; б) принаймні один; в) тільки два; г) хоча б два.
17. Акція клубу «Книга – поштою» включає десять різних книжок, причому п'ять із них коштують по 4 грн, три – по 5 грн, дві – по 3 грн. Знайти ймовірність того, що сумарна вартість двох намання замовлених книжок становить 8 грн.

18. У пакеті на тендер міститься 5 акцій, останні цифри номерів яких відповідно 1, 2, 3, 4, 5. Навмання витягають дві акції. Знайти ймовірність того, що сума останніх цифр номерів витягнутих акцій буде не менша від трьох.
19. В альбомі 20 фотокарток, серед яких три шукані. Навмання відібрано 5 карток. Яка ймовірність того, що серед них виявиться хоча б дві шукані.
20. У кошику бабусі є пряжа в мотках, 40 % якої блакитна, решта – біла. Знайти ймовірність того, що два навмання взяті мотки матимуть однаковий колір.
21. Для вчасного збирання врожаю пшениці достатньо, щоб у полі працювало два комбайни. Знайти ймовірність того, що пшеницю буде вчасно зібрано, якщо господарство має три комбайни, ймовірності справної роботи яких дорівнюють відповідно 0,4; 0,9; 0,8.
22. Ймовірність банкрутства для першої фірми – розв'язок рівняння $7p^2 - p = 0$, а для другої фірми ця ймовірність на 20 % більша. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з цих фірм збанкрутує.
23. Відомо, що випадкові події A та B незалежні, причому $P(A\bar{B}) = 0,52$, $P(\bar{A}B) = 0,37$, $P(A + B) = 0,89$. Знайти $P(A) + P(B)$ і з'ясувати, чи сумісні події A та B .
24. В дипломаті 30 акцій, серед яких 3 шукані. Навмання беруться 3 акції. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться хоча б дві шукані.
25. Для виготовлення деталі робітникові потрібно виконати чотири незалежні технологічні операції. Ймовірність припуститися браку при виготовленні кожної з них дорівнює відповідно 0,004; 0,005; 0,008; 0,001. Знайти ймовірність того, що виготовлена робітником деталь виявиться бракованою.
26. Ймовірності вчасної сплати податків для кожного із трьох підприємств дорівнюють відповідно 0,4; 0,3; 0,6. Знайти ймовірність вчасної сплати податків не більш ніж двома підприємствами.
27. Групі студентів для проходження виробничої практики виділено 30 місць: 15 – у Києві, 8 – у Львові, 7 – у Москві. Ці місця розподіляються між студентами випадковим чином. Знайти ймовірність того, що студент і студентка, які незабаром збираються одружитися, будуть направлені для проходження практики в одне й те саме місто.
28. Ймовірність того, що перший спортсмен пройде дистанцію без штрафних очок, дорівнює 0,6, а для другого і третього ці ймовірності дорівнюють

відповідно 0,9 і 0,8. Знайти ймовірність того, що: 1) тільки два спортсмени пройдуть дистанцію без штрафних очок; 2) хоча б два; 3) не більш як два.

29. Імовірність того, що деякий товар зберігається на складі, дорівнює p , причому він може перебувати в будь-якій із восьми секцій складу з однаковою ймовірністю. Перевірка семи секцій показала, що там він відсутній. Знайти ймовірність того, що товар міститься у восьмій секції складу.
30. При збиранні телевізорів використовуються мікросхеми двох постачальників, частка яких становить відповідно 40 % і 60 %. Частка бракованої продукції для кожного постачальника становить відповідно 2 і 3 %. Знайти ймовірність того, що взята навмання мікросхема виявиться стандартною.
31. На підприємстві виготовляються однотипні вироби на трьох поточних лініях. На першій лінії виготовляється 20 % виробів від усього обсягу їх виробництва, на другій – 30 %, на третій – 50 %. Кожна з ліній характеризується відповідно такою часткою стандартних виробів: 97, 98 і 95 %. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб, виготовлений на підприємстві, виявиться бракованим, а також ймовірність того, що цей бракований виріб виготовлено: а) на першій лінії; б) на другій; в) на третій.
32. Телевізійне ательє має чотири кінескопи. Імовірність того, що кожний з них витримає подвійний гарантійний термін, дорівнює відповідно 0,7; 0,9; 0,85; 0,8. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескоп витримає подвійний гарантійний термін.
33. У двох контейнерах є по 20 деталей, причому в першому – 5 бракованих, а в другому – 3 браковані деталі. З першого контейнера навмання береться одна деталь і перекладається в другий. Знайти ймовірність того, що після цього навмання взята з другого контейнера деталь виявиться стандартною.
34. Два автомати штампують однорідні деталі, які потрапляють на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата втричі більша, ніж продуктивність другого. Частка браку для кожного з них становить відповідно 0,4 і 0,5. Яка ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь буде стандартною?
35. На складі телеательє зберігаються три комплекти однотипних деталей: у першому – 100 деталей, з яких дві браковані, в другому – 200, з-поміж яких 2 % бракованих; у третьому – 1500, причому всі вони стандартні. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь із випадково вибраного комплекту виявиться стандартною.

36. У першій шухляді є чотири стандартні і дві браковані деталі, у другій – п'ять стандартних і три браковані, третя – порожня. З першої шухляди навмання беруть дві деталі, з другої – одну, і все це перекладають у третю. Знайти ймовірність того, що навмання взята з третьої шухляди деталь виявиться стандартною.
37. Деталь може надійти для обробки на перший автомат з ймовірністю 0,3, на другий – з ймовірністю 0,2, а на третій – з ймовірністю 0,5. При обробці на першому верстаті ймовірність браку становить 0,01, на другому – 0,03, а на третьому – 0,08. Вибрана навмання деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовлено на другому автоматі?
38. У кінці потокової лінії з виготовлення приладів установлено два автоматизовані контролери, які визначають, належить чи не належить відповідний прилад до найвищої категорії якості. Статистично встановлено, що 30 % приладів задовольняють вимоги найвищої категорії якості, а контролери роблять помилкові висновки щодо якості приладу відповідно у 2 і 8 % випадків. Випадково один і той самий прилад було перевірено обома автоматами: перший визначив найвищу категорію якості, другий – ні. Якому з висновків вірити?
39. Із 14 баскетболістів четверо влучають у кошик із штрафного кидка з ймовірністю 0,9; п'ять – з ймовірністю 0,8; три – з ймовірністю 0,7 і два – з ймовірністю 0,6. Яка ймовірність того, що: 1) навмання відібраний спортсмен влучить у кошик із штрафного; 2) довільно відібраний баскетболіст виконає один штрафний кидок і не влучить у кошик? До якої групи найімовірніше він належить?
40. Для формування футбольної команди КНТУ з I курсу виділено 5 студентів, з II – 7, з III – 8, з IV – 6. Ймовірність того, що будь-якого студента кожного з курсів буде включено до складу збірної університету, дорівнює відповідно 0,6; 0,4; 0,8; 0,45. Навмання відібраний учасник змагань потрапив до складу збірної. На якому курсі ймовірніше за все він навчається?
41. У товарному поязу 50 вагонів, завантажених вугіллям двох сортів, 25 вагонів містить 70 % вугілля 1-го сорту, 15 вагонів – 60 % і 10 вагонів – 85 % вугілля 2-го сорту. Випадково взятий для аналізу кусок вугілля виявився 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що він взятий із вагона другої групи.
42. У першому комплекті міститься 20 деталей, 6 із яких нестандартні; у другому 10, з яких 3 нестандартні. З кожного комплекту навмання виймають

по одній деталі, а потім із цих двох деталей навмання беруть одну. Знайти ймовірність того, що ця деталь виявиться стандартною.

43. У першому контейнері є 30 деталей, з яких 4 браковані, у другому відповідно 20 і 3. Навмання взята деталь із випадковим чином вибраного контейнера виявилась стандартною. Яка ймовірність того, що деталь було взято з першого контейнера?
44. На конвеєр надходять деталі, які виготовляються двома автоматами. Імовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,05, на другому на 10 % нижча. Продуктивність другого автомата на 60 % вища, ніж першого. Знайти ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь виявиться нестандартною.
45. Відомо, що для деякої вікової групи k_1 відсотків усіх чоловіків і k_2 відсотків усіх жінок хворіють на діабет. Кількість чоловіків для цієї групи на 7 % менша за кількість жінок. У навмання відібраної особи було виявлено діабет. Яка ймовірність того, що це була жінка?
46. Імовірність того, що двокамерний холодильник «NORD» не зіпсується протягом гарантійного терміну, дорівнює 0,8, а для однокамерного ця ймовірність на 10 % більша. Знайти ймовірність того, що навмання куплений холодильник із шести двокамерних і десяти однокамерних не зіпсується протягом гарантійного терміну.
47. На біржі продаються акції чотирьох фірм, частка акцій кожної з яких становить відповідно 25, 30, 15 і 30 %. Але серед них є акції збанкрутілих фірм, частка яких становить відповідно 10, 4, 1 і 3. Знайти ймовірність того, що навмання придбана акція належить фірмі, яка збанкрутіла.
48. Виріб перевіряється на стандартність одним із товарознавців. Імовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,65, а до другого – 0,35. Імовірність того, що стандартний виріб буде підтверджений як стандартний першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці було підтверджено як стандартний. Знайти ймовірність того, що цей виріб перевірів другий товарознавець.
49. Монітор до комп'ютера може належати одній із чотирьох партій з імовірностями, що становлять відповідно 0,4; 0,1; 0,2 і 0,3. Імовірність того, що монітор відпрацює подвійний гарантійний термін, для кожної партії дорівнює відповідно 0,7; 0,8; 0,6; 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний монітор працюватиме подвійний гарантійний термін.

50. У продаж надійшли дискети трьох кольорів: чорного, синього і червоного. Чорних і червоних дискет порівну, а синіх удвічі менше, ніж чорних. Серед дискет чорного кольору 2 % бракованих, червоного – 1 %, синього – 0,5%. Знайти ймовірність того, що навмання придбана дискета виявиться якісною.
51. Імовірність того, що випадково відібраний із партії прилад потребує додаткового регулювання, дорівнює 0,07. Якщо при вибірковій перевірці партії приладів виявиться, що не менш як 6 % відібраних приладів потребують регулювання, то вся партія повертається для доробки. Знайти ймовірність того, що партію буде повернено, якщо для контролю з партії відібрали 500 приладів.
52. Імовірність того, що навмання взята електрична лампочка відпрацює передбачений стандартом термін, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з 400 придбаних лампочок хоча б 370 відпрацюють передбачений стандартом час, а також найімовірнішу кількість таких лампочок.
53. Встановлено, що 5 % імпортованих телевізорів виходять з ладу через перепади напруги електромережі. Яка ймовірність того, що з п'яти придбаних телевізорів хоча б три не вийдуть з ладу?
54. Текст із 2000 літер передається по телеграфу. При передаванні однієї літери можлива помилка з ймовірністю 0,002. Знайти ймовірність того, що при передаванні цього тексту виявиться не менш як дві помилки.
55. Відомо, що в технологічному процесі виготовлення мікросхем забезпечується 98 % продукції, яка відповідає технологічним вимогам. Яка ймовірність того, що з 300 мікросхем бракованих виявиться не менш як три.
56. На дорогах України лише 80 % автомобільних шин витримують гарантійний термін. Знайти найімовірнішу кількість шин, що не витримують гарантійного терміну, з партії 1500 шин, а також ймовірність такої кількості шин.
57. Імовірність того, що навмання взятий кінескоп задовольняє вимоги найвищого гатунку, становить 0,7. За місяць ВТК телевізійного заводу має перевірити 400 кінескопів. Яка ймовірність того, що серед них виявиться хоча б 350 кінескопів найвищого гатунку?
58. Для студентського гуртожитку закуплено 10 телевізорів. Імовірність того, що будь-який із них витримає гарантійний термін, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну з ладу вийдуть: а) два телевізори; б) принаймні два. Знайти найімовірнішу кількість телевізорів, що витримують гарантійний термін.

59. Для нормальної роботи гуртової бази на лінії має бути не менш як 3 вантажних бусів, а їх є 7. Імовірність для кожного з них не вийти на лінію дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що найближчого дня гуртова база працюватиме нормально.
60. Імовірність появи події в кожному із 300 незалежних випробувань дорівнює 0,9. Знайти таке додатне число ε , щоб з імовірністю 0,98 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності 0,9 не перевищила ε .
61. Технологічний процес підприємства дає змогу дістати 90 % виробів найвищого гатунку. Знайти найімовірнішу кількість виробів найвищого гатунку серед 300 виготовлених підприємством виробів, а також імовірність появи цієї кількості виробів.
62. Детектор неправди фіксує неправдиву відповідь з імовірністю 95 %. Яка ймовірність того, що на 10 поставлених запитань неправдиву відповідь буде зафіксовано хоча б двічі?
63. Серед автомобілів, то ввозяться в Україну, 80 % становлять легкові. Протягом дня на митницю прибуло 40 автомобілів. Яка ймовірність того, що не більш як 9 з них легкові?
64. Для розвинутих країн Заходу частка тіньового бізнесу становить 1 %. Яка ймовірність того, що серед 200 зареєстрованих за рік фірм таким бізнесом займається хоча б дві?
65. Відомо, що три чверті населення міста користується послугами кабельного телебачення. Яка ймовірність того, що серед 300 мешканців такими послугами користується хоча б 230?
66. У середньому 30 % акцій видавничих фірм протягом року стають збитковими. Яка ймовірність того, що серед 140 акцій цих фірм збитковими будуть менш як 40?
67. У середньому 80 % студентів курсу здають залік із першої спроби. Знайти ймовірність того, що з п'яти навмання взятих студентів цього курсу з першого разу здадуть не більш як четверо.
68. Радіостанція протягом дня транслює 300 музичних програм. Яка ймовірність того, що не менш як 150 з них виконуються англійською мовою, коли відомо, що англомовні програми становлять 80 % репертуару радіостанції?

69. Відомо, що серед готівкової маси 0,5 % купюр непридатні до подальшого використання. Знайти ймовірність того, що серед 2700 купюр виторгу магазину непридатними для наступного використання є хоча б дві купюри.
70. Імовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,95 можна було очікувати відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності за абсолютною величиною не більш як на 0,03?
71. Є n урн. У кожній урні m білих та k чорних кульок. Із першої урни вийняли одну кульку і поклали її до другої урни. Потім із другої урни вийняли одну кульку і поклали її до третьої урни і т. д. Якою є ймовірність того, що з останньої урни виймуть білу кульку?
72. На групу з N чоловік дістали $M < N$ квитків у театр. Для розподілу квитків заготовили урну з M білими і $N-M$ чорними кульками. Кульки по черзі виймають, і той, хто витягує білу кульку, отримує квиток. Чи є справедливим такий розподіл квитків?
73. Два стрільці по черзі стріляють по мішені. Імовірності влучення під час перших пострілів для них дорівнюють відповідно 0,4 і 0,5, а ймовірності влучення під час наступних пострілів для кожного збільшуються на 0,05. Якою є ймовірність, що першим зробив постріл перший стрілець, якщо під час п'ятого пострілу було влучення у ціль?
74. Кожна із літер Т, М, Р, О, Ш написана на одній із п'яти карток. Картки перемішують і розкладають у ряд. Якою є ймовірність того, що утвориться слово ШТОРМ.
75. Якою є ймовірність влучити, не цілячись, пулею нескінченно малої величини, до квадратної решітки, що має товщину прутків решітки t , а відстань між їх середніми лініями дорівнює b ?
76. У колі радіусом R навмання поставили точку. Знайти ймовірність того, що ця точка виявиться усередині цього вписаного рівностороннього трикутника.
77. Кидають n гральних кісточок. Якою є ймовірність того, що хоча б на одній з них випаде шістка?
78. Задача де Мере. У 1654 році кавалером де Мере була запропонована Паскалю задача: скільки разів потрібно кинути пару гральних кісточок, щоб із ймовірністю не менше $1/2$ можна було стверджувати, що хоча б один раз випаде дванадцять очок?

79. Задача де Мере у загальному вигляді. Скільки разів потрібно провести досліди, щоб із ймовірністю, не меншою за r , можна було стверджувати, що хоча б один раз відбудеться подія, ймовірність якої при кожному досліді дорівнює p ?
80. Знайти ймовірності проходження струму через ланцюг при послідовному з'єднанні, якщо ймовірність справної роботи елементів дорівнює P_1 і P_2 . Елементи працюють незалежно один від одного.
81. Знайти ймовірності проходження струму через ланцюг при паралельному з'єднанні елементів, якщо ймовірність справної роботи елементів дорівнює P_1 і P_2 . Елементи працюють незалежно один від одного.
82. Серед деталей, що надходять до збірки з 1-го станка, 0,1 % бракованих, із 2-го – 0,2 %, із 3-го – 0,25 %, із 4-го – 0,5 %. Продуктивності станків співвідносяться відповідно як 4 : 3 : 2 : 1. Узята навмання деталь виявилася стандартною. Визначити, на якому станку ймовірніше за все вона була виготовлена .

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називають подією? Яка подія називається достовірною, неможливою, випадковою? Наведіть приклади таких подій.
2. Чи може подія бути одночасно і неможливою і достовірною?
3. Що називають ймовірністю події? Яких значень може набувати ймовірність події?
4. Виходячи з визначення ймовірності, поясніть, чому значення ймовірності знаходиться у межах від 0 до 1.
5. Якою є різниця між класичним та статистичним визначенням ймовірності?
6. Дайте визначення сумісних та несумісних подій.
7. Дайте визначення геометричної ймовірності. Наведіть приклади.
8. Які події називають протилежними?
9. Що називають сумою подій? Сформулюйте теорему про додавання ймовірностей несумісних та сумісних подій.
10. Дайте визначення залежних та незалежних подій. Наведіть поняття та приклади умовної ймовірності.
11. Сформулюйте теорему про множення (добуток двох залежних подій).
12. Сформулюйте теорему про множення (добуток двох незалежних подій).
13. Наведіть формулу повної ймовірності.
14. Формула Байєса.
15. Послідовність незалежних однорідних випробувань. Формула Бернуллі.
16. Які величини називають випадковими? Як позначаються випадкові величини та їх можливі значення?
17. Які величини називають дискретними, неперервними?

18. Наведіть існуючі способи описання випадкових величин. Яка характеристика випадкових величин є універсальною і чому?
19. Що називають законом розподілу випадкової величини?
20. Що характеризує функція розподілу випадкової величини? Наведіть її властивості.
22. Дайте визначення елемента ймовірності. Наведіть властивості щільності ймовірності випадкової величини.
23. Як визначається і що характеризує математичне сподівання випадкової величини? Наведіть його властивості.
24. Як визначаються початкові та центральні моменти випадкової величини довільного порядку? Які моменти (якого порядку) містять найбільшу інформацію про ймовірнісні властивості випадкової величини.
25. Як визначається і що характеризує дисперсія випадкової величини? Наведіть властивості дисперсії.
26. Як визначаються і що характеризують: середнє квадратичне відхилення, мода, медіана, коефіцієнт асиметрії та ексцесу випадкової величини?
27. Чи є правильним твердження, що математичне сподівання, медіана та мода нормально розподіленої випадкової величини збігаються? Доведіть або спростуйте це твердження.
28. Дайте визначення характеристичної функції. Наведіть її властивості. Для чого вводять характеристичні функції?

Значення функції Пуассона:

$$P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

m\λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

m\λ	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
0	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316	0,011109	0,006738	0,004087	0,002479	0,001503	0,000912
1	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263	0,04999	0,033690	0,022477	0,014873	0,009772	0,006383
2	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525	0,112479	0,084224	0,061812	0,044618	0,03176	0,022341
3	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367	0,168718	0,140374	0,113323	0,089235	0,068814	0,052129
4	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367	0,189808	0,175467	0,155819	0,133853	0,111822	0,091226
5	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293	0,170827	0,175467	0,171401	0,160623	0,145369	0,127717
6	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196	0,12812	0,146223	0,157117	0,160623	0,157483	0,149003
7	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540	0,082363	0,104445	0,123449	0,137677	0,146234	0,149003
8	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770	0,046329	0,065278	0,084871	0,103258	0,118815	0,130377
9	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231	0,023165	0,036266	0,051866	0,068838	0,085811	0,101405
10	0,000216	0,00081	0,002296	0,005292	0,010424	0,018133	0,028526	0,041303	0,055777	0,070983
11	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925	0,004264	0,008242	0,014263	0,022529	0,032959	0,045171
12	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642	0,001599	0,003434	0,006537	0,011264	0,017853	0,026350
13	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197	0,000554	0,001321	0,002766	0,005199	0,008926	0,014188
14	0	0,000003	0,000014	0,000056	0,000178	0,000472	0,001087	0,002228	0,004144	0,007094
15	0	0,000001	0,000003	0,000015	0,000053	0,000157	0,000398	0,000891	0,001796	0,003311
16	0	0	0,000001	0,000004	0,000015	0,000049	0,000137	0,000334	0,00073	0,001448
17	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000044	0,000118	0,000279	0,000596
18	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000039	0,000101	0,000232
19	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000012	0,000034	0,000085
20	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000011	0,00003
21	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000010
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблиця значень локальної функції Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблиця значень інтегральної функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		

0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986		

ЛІТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей : учебник / Б. В. Гнеденко. — Изд. 6-е, перераб. и доп. — М. : Наука. Гл. Ред. физ. -мат. лит., 1988.—448 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. — М. : Высшая школа, 1979.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. — М. : Высшая школа, 1977.
4. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е. И. Гурский . - М. : "Высшая школа", 1971.
5. Майстров Л. Е. Теория вероятности. Исторический очерк / Л.Е. Майстров. — М. : Наука, 1967.
6. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики / Бабак В. П., Білецький А. Я., Приставка О. П., - К. : КВІЦ, 2003. - 432с.
7. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник / П.С. Сеньо. — Київ : Центр навчальної літератури, 2004.
8. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерное приложение. — М.: Наука, 1988.