

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ТРАНСПОРТНИХ ПРОЦЕСАХ.
МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ.

Навчальний посібник

КРОПИВНИЦЬКИЙ – 2023

УДК 519.85

ББК 22.1Г

Рецензенти: доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри математики та методики її викладання В.А. Панченко (ЦДУ імені Володимира Винниченка), доктор технічних наук, професор, професор кафедри експлуатації та ремонту машин В. В. Аулін (ЦНТУ, м. Кропивницький)

Навчальний посібник /Кривоблоцька Л.М., Філімоніхіна І.І., Якименко С.М., Гуцул В.І.– Кропивницький: ЦНТУ, 2023 р. – 152 с.

Навчальний посібник містить необхідні означення та поняття, головні алгоритми розв’язання задач, приклади розв’язання задач, а також питання для самоперевірки та тестові завдання, які дозволять студентові більш ефективно опрацювати навчальний матеріал в процесі самостійного вивчення. Індивідуальні завдання сприятимуть формуванню практичних прийомів і навичок логічного мислення. Орієнтований на студентів технічних спеціальностей.

Рекомендовано до друку Вченою радою
ЦНТУ міністерства освіти та науки України.
Протокол № 9 від 29.05 2023 р.

© Філімоніхіна І.І. 2023

© Кривоблоцька Л.М. 2023

© Якименко С. М. 2023

© Гуцул В. І. 2023

© ЦНТУ 2023

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
1. Постановка задачі оптимізації	6
2. Основні класи екстремальних задач	11
3. Необхідні та достатні умови екстремуму в задачі безумовної оптимізації	13
4. задача умовної оптимізації	18
5.ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	27
6. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	30
7. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	38
7.1. Задача про використання сировини (планування виробництва)	38
7.2. Задача про використання потужностей обладнання.	40
7.3. Задача про використання обладнання	42
7.4 Транспортна задача	43
8. канонічний вигляд задачі лінійного програмування	44
8.1. Приведення довільної задачі лінійного програмування до канонічного вигляду	45
8.2. Розв'язання системи обмежень	47
8.3. Основні теореми лінійного програмування	48
9. СИМПЛЕКС- МЕТОД	53
9.1. Симплексний метод у випадку допустимого початкового розв'язку	54
9.2. Випадок недопустимого початкового розв'язку	59
9.4 Деякі частинні випадки	68
9.5 Алгоритм симплексного методу	75
10. ДВОЇСТА ЗАДАЧА	77
10.1. Складання двоїстої задачі	77
10.2. Основні теореми двоїстості	80
10.3. Об'єктивно обумовлені оцінки	90
11. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА	91

11.1. Класична задача транспортного типу	92
11.2. Початковий розподіл поставань	94
11.3. Правило „північно-західного кута”	95
11.4. Правило врахування найменших затрат	97
11.5. Перерозподіл поставань	99
11.6. Оцінка клітинок. Знаходження оптимального	101
розподілу поставань.....	102
11.7. Відкрита модель транспортної задачі	104
11.8. Виродження в транспортних задачах.....	108
11.9. Алгоритм розв’язання транспортної задачі.....	112
12.Принцип динамічного програмування Р. Беллмана. Багатокрокові задачі дослідження операцій	115
Індивідуальні завдання	120
Тестові завдання	144
ЛІТЕРАТУРА	152

ПЕРЕДМОВА

Швидкий розвиток та ускладнення техніки, збільшення масштабів та вартості здійснюваних заходів, широке впровадження автоматизації в сферу керування – все це приводить до необхідності наукового аналізу складних процесів з метою удосконалення та організації їх діяльності для підвищення ефективності. Ці потреби практичної діяльності людини обумовили виникнення спеціальних наукових математичних методів. Математичними методами, що полегшують процес прийняття правильних рішень займається наука «Дослідження операцій». Ця наука знаходить своє застосування в різних сферах народного господарства: промисловості, сільському господарстві, торгівлі, транспорті. Для розв'язання практичних задач є цілий арсенал математичних засобів. До них належать математичні методи оптимізації, такі, як лінійне програмування, принцип динамічного програмування, принцип максимуму Л.С. Понтрягіна. Серед цих методів в даному посібнику висвітлюються найуживаніші в технічних, економічних та гуманітарних дослідженнях. Для розуміння матеріалу студенту достатньо володіти основами математичного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, диференціальним та інтегральним численням. Посібник містить необхідні означення та поняття, головні алгоритми розв'язання задач, приклади розв'язання задач, а також питання для самоперевірки та тестові завдання, які дозволять студентові більш ефективно опрацювати навчальний матеріал в процесі самостійного вивчення. Індивідуальні завдання сприятимуть формуванню практичних прийомів і навичок логічного мислення.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ

Екстремальна задача з точки зору математики є задачею знаходження екстремуму (мінімуму чи максимуму) деякої функції $f(x)$ на деякій множині X .

Будемо розглядати скінченновимірні екстремальні задачі, тобто задачі, в яких множина X належить евклідовому простору $\mathbb{R}^n$, при цьому значення функції $f(x)$ належать множині дійсних чисел $\mathbb{R}^1 = (-\infty; +\infty)$.

Серед екстремальних задач виділяють задачі мінімізації і задачі максимізації.

Задача мінімізації записується у вигляді

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \quad (1.1)$$

або $\min_{x \in X} f(x)$, де функція $f(x)$ називається цільовою функцією, X -

допустимою множиною, а будь-який елемент $x \in X$ - допустимою точкою цієї множини.

Якщо $X \neq \emptyset$, то задача (1.1) називається сумісною, в протилежному випадку - несумісною.

Якщо $X = \mathbb{R}^n$, то задача (4.1) називається задачею без обмежень на змінні або задачею безумовної мінімізації, у протилежному випадку - задачею з обмеженнями на змінні або задачею умовної мінімізації.

Формалізація екстремальної задачі полягає в точному визначенні її основних елементів: функції $f(x)$ і множини X .

Цільова функція $f(x)$, яку часто називають також критерієм якості або критерієм ефективності, представляє собою математичний опис мети, досягнення якої вимагається при розв'язуванні реальної задачі.

Допустима множина X визначає умови, за яких відбувається процес, що досліджується, і яким має задовільняти розв'язок задачі.

Означення 1.1. Точка $x^* \in X$ називається розв'язком задачі (1.1) або точкою глобального мінімуму функції f на множині X , якщо

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всіх } x \in X \quad (1.2)$$

Означення 1.2. Точка $x^* \in X$ називається точкою локального мінімуму або локальним розв'язком задачі (1.1), якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всіх } x \in X \cap U_\varepsilon(x^*), \quad (1.3)$$

де $U_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$ - ε -окіл точки x^* .

Означення 1.3. Якщо в (1.2) і (1.3) нерівність виконується як строга при $x \neq x^*$, то x^* називається відповідно точкою строгого глобального чи строгого локального мінімуму.

Точка глобального мінімуму завжди є точкою локального мінімуму, але не навпаки.

Той факт, що точка $x^* \in X$ є точкою глобального мінімуму функції $f(x)$ на множині X , записують у вигляді

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$$

або $x^* = \arg \min_{x \in X} f(x).$

Множину всіх точок глобального мінімуму позначають через

$$\text{Arg} \min_{x \in X} f(x) = \{x^* \in X \mid f(x^*) = f^*\}.$$

Таким чином, $\arg \min_{x \in X} f(x)$ - це просто довільна точка з множини

$$\text{Arg} \min_{x \in X} f(x).$$

За аналогією з (1.1) задачу максимізації функції f на множині X записують у вигляді

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (1.4)$$

Замінюючи в означеннях 1.1-1.3 слово «мінімум» на «максимум» і знак нерівностей в (1.2) і (1.3) на протилежний, одержимо відповідні поняття точок глобального і локального максимуму, точок строгого глобального і строгого локального максимуму для задачі (1.4).

Легко бачити, що задача максимізації (1.4) еквівалентна задачі

$$-f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

у тому розумінні, що множина глобальних і локальних, строгих або нестрогих розв'язків цих задач співпадають. Це дозволяє без труднощів переносити результати, отримані для задачі мінімізації, на задачі максимізації, і навпаки. Тому надалі розглядатиметься в основному задача (1.1).

В залежності від властивостей допустимої множини X і цільової функції $f(x)$ множина всіх точок глобального мінімуму $\text{Arg} \min_{x \in X} f(x)$ може бути скінченною, нескінченною або порожньою.

Існують функції, для яких будь-яка точка локального мінімуму є водночас і точкою глобального мінімуму. До таких функцій відносяться, наприклад, опуклі донизу функції.

Означення 1.4. Множина X називається опуклою, якщо вона містить всякий відрізок, кінці якого належать X , тобто якщо для будь-яких $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$; $\forall \alpha \in [0;1]$ має місце співвідношення:

$$\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} \in X. \quad (1.5)$$

Означення 1.5. Функція $f(x)$ називається опуклою донизу (або просто опуклою), якщо для будь-яких двох точок x_1, x_2 з області її визначення справджується нерівність:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad (1.6)$$

для всіх $\alpha \in [0;1]$.

Означення 1.6. Функція $f(x)$ називається строго опуклою донизу (або просто опуклою), якщо для будь-яких двох точок x_1, x_2 з області її визначення справджується нерівність:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad (1.7)$$

для всіх $\alpha \in [0;1]$.

Геометрична інтерпретація означень 1.5 - 1.6 полягає в наступному:

- функцію $f(x)$ називають опуклою, якщо її графік цілком лежить не вище відрізка, що з'єднує дві її довільні точки;
- функцію $f(x)$ називають строго опуклою, якщо її графік цілком лежить нижче відрізка, що з'єднує дві її довільні, але не співпадаючі точки.

Зауваження 1.1. Якщо функція строго опукла, то вона одночасно опукла.

Зауваження 1.2. Опуклість функції можна визначити за допомогою матриці Гессе:

- якщо $H(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, то функція опукла;
- якщо $H(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, то функція строго опукла.

Приклади опуклих функцій:

1. Лінійна функція $f(x) = c^T x = (c, x)$ є опуклою (і увігнутою) у всьому просторі $\mathbb{R}^n$.
2. Квадратична форма $f(x) = x^T A x = (x, A x)$ опукла у всьому просторі $\mathbb{R}^n$, якщо вона невід'ємно визначена (тобто, якщо $\forall x \in \mathbb{R}^n$ має місце нерівність $x^T A x \geq 0$).

3. Сума опуклих функцій $f(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x)$, визначених на опуклій множині $X \subset \mathbb{R}^n$, є опуклою функцією на X .

4. Квадратична функція $f(x) = c^T x + x^T A x = (c, x) + (x, A x)$ є опуклою функцією у всьому просторі $\mathbb{R}^n$, якщо квадратична форма $x^T A x$ невід'ємно визначена.

5. Якщо $f(x)$ опукла на опуклій множині X , то функція $g(x) = \max \{ f(x), 0 \}$ також опукла на X .

6. Якщо $g(x)$ опукла і невід'ємна на опуклій множині X , то функція $f(x) = g^2(x)$ також опукла на X .

Означення 1.7. Градієнтом неперервно диференційованої функції декількох змінних $f(x_1, \dots, x_n)$ в точці $x^* \in \mathbb{R}^n$ називається вектор перших частинних похідних, обчислених в цій точці:

$$\text{grad } f(x^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \right). \quad (1.8)$$

Означення 1.8. Матрицею Гессе (гессіаном) двічі неперервно диференційованої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ в точці $x^* \in \mathbb{R}^n$ називається матриця виду:

$$H(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \right)_{i,j=1,\dots,n}. \quad (1.9)$$

Матриця Гессе є симетричною матрицею розміру $n \times n$.

Разом із градієнтом можна визначити антиградієнт, який дорівнює за модулем градієнту, але протилежний за напрямком. Він вказує напрямом найбільшого спадання функції в даній точці.

За допомогою градієнта і матриці Гессе, використовуючи розвинення в ряд Тейлора, приріст функції $f(x)$ в точці x може бути записаний у формі

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \text{grad } f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|^2) \quad (1.10)$$

де $o(\|\Delta x\|^2)$ – сума всіх членів розвинення, що мають порядок вище другого; $\Delta x^T H(x) \Delta x$ – квадратична форма.

Приклад 1.1. Для функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ обчислити градієнт і знайти матрицю Гессе в точках $x^{(0)} = (0; 0)$, $x^{(1)} = (1; 1)$.

Розв'язання. Відповідно до означень 1.4 і 1.5 маємо:

$$\text{grad } f(x) = (2x_1; 4x_2^3), \quad \text{grad } f(x^{(0)}) = (0; 0), \quad \text{grad } f(x^{(1)}) = (2; 4),$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}, \quad H(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.9. Квадратична форма $\Delta x^T H(x) \Delta x$ (а також відповідна матриця Гессе $H(x)$) називається:

– додатно визначеною ($H(x) > 0$), якщо для будь-якого ненульового Δx виконується нерівність $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$;

– від'ємно визначеною ($H(x) < 0$), якщо для будь-якого ненульового Δx виконується нерівність $\Delta x^T H(x) \Delta x < 0$;

– додатно напіввизначеною ($H(x) \geq 0$), якщо для кожного Δx виконується нерівність $\Delta x^T H(x) \Delta x \geq 0$ і знайдеться відмінний від нуля вектор Δx , для якого $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$;

– від'ємно напіввизначеною ($H(x) \leq 0$), якщо для кожного Δx виконується нерівність $\Delta x^T H(x) \Delta x \leq 0$ і знайдеться відмінний від нуля вектор Δx , для якого $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$;

– невизначеною ($H(x) \not\leq 0$), якщо існують такі вектори Δx , $\Delta \bar{x}$, що виконуються нерівності $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$, $\Delta \bar{x}^T H(x) \Delta \bar{x} < 0$;

– тотожно рівною нулю ($H(x) \equiv 0$), якщо для кожного Δx виконується $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$.

Приклад 1.2. Класифікувати квадратичні форми й матриці Гессе, отримані в прикладі 1.1.

1. $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Випишемо квадратичну форму

$$\Delta x^T H(x) \Delta x = (\Delta x_1 \quad \Delta x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2.$$

Очевидно, $\Delta x^T H(x) \Delta x \geq 0$ для будь-якого вектора Δx й $\Delta x^T H(x) \Delta x = 0$ для $\Delta x_1 = 0$ й будь-яких $\Delta x_2 \neq 0$. Відповідно до означення 1.9 квадратична форма (матриця Гессе) є додатно напіввизначеною.

2. $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$. Випишемо квадратичну форму

$$\Delta x^T H(x) \Delta x = (\Delta x_1 \quad \Delta x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = 2\Delta x_1^2 + 12\Delta x_2^2$$

Очевидно, $\Delta x^T H(x) \Delta x > 0$ для будь-якого ненульового вектора Δx .

Відповідно до означення 1.9 квадратична форма (матриця Гессе) є додатно визначеною.

Тип квадратичної форми можна визначити, використовуючи критерій Сильвестра. Він дозволяє визначити тип квадратичної форми за знаками кутових мінорів її матриці.

Критерій Сильвестра: для того, щоб квадратична форма була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі головні кутові мінори матриці цієї форми були додатними; для того, щоб квадратична форма була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб головні кутові мінори парного порядку цієї форми були додатними, а непарного – від'ємними.

Приклад 1.3. Дослідити на знаковизначеність квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Матриця квадратичної форми має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Її головні кутові мінори

$$\Delta_1 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

додатні. Отже, дана квадратична форма є додатно визначеною.

Запитання для самоконтролю

1. Як формально записується задача мінімізації (максимізації) функції на заданій множині?
2. Які точки називаються точками локального і глобального мінімуму (максимуму) функції?
3. Як зв'язані між собою задачі мінімізації та максимізації?
4. Дати означення градієнта неперервно диференційованої функції декількох змінних.
5. Дати означення матриці Гесса.
6. Дати означення додатно визначеної квадратичної форми.
7. Дати означення від'ємно визначеної квадратичної форми.
8. Сформулювати критерій Сильвестра.

Вправи для самостійного виконання

1. а) Довести, що множина точок мінімуму функції $f(x)$ на множині X порожня:

1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad X = \mathbb{R}^1;$

2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5, \quad X = (-\infty; 5);$

3) $f(x) = \ln x, \quad X = (0; 1].$

б) Довести, що множина точок максимуму функції $f(x)$ на множині X порожня:

1) $f(x) = -\frac{1}{\ln x}, \quad X = (1; +\infty);$

2) $f(x) = (x-1)^3 - 3(x-1), \quad X = (-1; +\infty);$

3) $f(x) = e^x, \quad X = [0; +\infty).$

2. Для заданих функцій обчислити градієнт і знайти матрицю Гессе в точках $x^{(0)} = (0; 0), \quad x^{(1)} = (1; 1)$:

1) $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^2;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_3^2 - x_3.$

3. Дослідити на знаковизначенність квадратичні форми:

1) $x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2;$

2) $x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2;$

3) $-8x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

4) $x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3.$

2. ОСНОВНІ КЛАСИ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Оптимізація за функцією однієї змінної називають одновимірною оптимізацією, багатьох змінних – багатовимірною оптимізацією.

Відносно допустимої множини загальна постановка задачі оптимізації визначає поділ задач оптимізації на наступні класи:

- 1) задачі локальної безумовної оптимізації;
- 2) задачі глобальної безумовної оптимізації;
- 3) задачі локальної умовної оптимізації;
- 4) задачі глобальної умовної оптимізації.

Задачами безумовної локальної оптимізації називають задачі пошуку екстремуму функцій в точках скінченно-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n, \quad X \neq \mathbb{R}^n.$

Локальна умовна оптимізація – це задача пошуку екстремуму функцій в точках допустимої множини $X \subset \mathbb{R}^n.$

Глобальна безумовна оптимізація визначає пошук екстремуму функції у всьому просторі $\mathbb{R}^n.$

Глобальна умовна оптимізація – це пошук екстремуму функцій багатьох змінних на всій допустимій множині евклідового простору $\mathbb{R}^n.$

Всі відомі методи пошуку екстремуму залежно від використовуваної інформації, тобто по порядку використання похідних, можна поділити на дві основні групи:

1. Прямі методи (методи пошуку екстремуму нульового порядку), в яких використовуються лише поточні значення функції, що оптимізується.

2. Методи k -того порядку, в яких додатково накладають умови диференційованості функції k -того порядку.

Методи першого порядку називають градієнтними методами. Градієнтні методи є одними із найкращих груп методів пошуку безумовного локального екстремуму. В них використовуються тільки значення градієнта функції, тому вони належать до методів першого порядку. Градієнтні метод базуються на відомому факті, що напрям градієнта показує напрям найшвидшого зростання функції, а напрям антиградієнта, відповідно, показує напрям найшвидшого спадання функції. Модуль градієнта – характеризує швидкість цього зростання.

Методи оптимізації першого порядку для функції однієї змінної $f(x)$ зводяться перш за все до пошуку її стаціонарних точок, в яких похідна дорівнює нулю $g(x) = f'(x) = 0$, тобто знаходження коренів рівняння, які в основному можуть бути знайдені чисельними (наближеними) методами. Для чисельного знаходження коренів рівняння $f'(x) = 0$ потрібно спочатку здійснити їх ізоляцію.

Під ізоляцією коренів розуміють виділення системи відрізків, що не перетинаються між собою, в середині кожного із яких знаходиться рівно один корінь. Як правило, така можливість ізоляції коренів можлива, виходячи із графічного представлення функції. Графічне представлення функцій можна реалізувати за допомогою сучасних комп'ютерних систем.

Серед чисельних методів безумовної оптимізації найбільш розповсюдженими є: метод покоординатного спуску, симплексний метод, градієнтні методи, метод Ньютона та його модифікації, метод спряжених градієнтів.

Для розв'язування задач умовної оптимізації використовують, зокрема, метод проекції градієнта, метод умовного градієнта, метод можливих напрямів, метод штрафних функцій.

Запитання для самоконтролю

1. На які класи поділяються екстремальні задачі відносно цільової функції?
2. На які класи поділяються екстремальні задачі відносно допустимої множини?
3. Які є методи пошуку екстремуму залежно від порядку використання похідних?
4. Які найбільш розповсюджені чисельні методи безумовної оптимізації?
5. Які є методи розв'язування задач умовної оптимізації?

3. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ В ЗАДАЧІ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

При вивченні екстремальних задач будь-якого класу важливе місце займають питання про умови оптимальності або умови екстремуму. Вони складають основу якісних методів теорії оптимізації, за допомогою яких вивчаються властивості екстремальних задач і які використовуються при побудові та обґрунтуванні чисельних методів розв'язування цих задач, а у деяких випадках для отримання явного розв'язку екстремальної задачі.

Розрізняють необхідні і достатні умови екстремуму. Необхідними є умови, яким повинна задовольняти точка, яка є розв'язком екстремальної задачі. Достатніми є умови, з яких випливає, що знайдена точка є точкою екстремуму певного типу (точкою мінімуму чи максимуму).

Розглянемо задачу:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Головна властивість точки мінімуму: приріст функції в точці мінімуму є додатним незалежно від знака приросту аргументу:

$$\Delta f^* \geq 0 \quad (3.2)$$

Означена властивість виходить з визначення точки мінімуму:

$$f(x)^* \leq f(x), \quad \text{при всіх } x \in X \cap U_\varepsilon(x^*),$$

де $U_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$ - ε -окіл точки x^* .

$$\begin{aligned} f(x^*) &\leq f(x^* + \Delta x) \\ f(x^* + \Delta x) - f(x^*) &\geq 0 \\ \Delta f^* &\geq 0 \end{aligned}$$

Наступна теорема дає необхідну умову локальної оптимальності першого порядку.

Теорема 3.1. (необхідні умови екстремуму першого порядку)

Нехай функція $f(x)$ диференційована в точці $x^* \in \mathbb{R}^n$. Якщо x^* - локальний розв'язок задачі (3.1), то

$$f'(x^*) = 0. \quad (3.3)$$

Доведення. Розкладемо функцію цілі $f(x)$ у ряд Тейлора в ε -околі точки мінімуму x^* :

$$\begin{aligned} f(x^* + \Delta x) &= f(x^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^* \Delta x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^* \Delta x_n + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right)^* \Delta x_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \right)^* \Delta x_n^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^* \Delta x_1 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \right)^* \Delta x_{n-1} \Delta x_n \right] + o(\|\Delta x\|^2), \end{aligned}$$

де $o(\|\Delta x\|^2)$ - сума всіх членів розкладу, що мають порядок вище другого, індекс «*» означає, що обчислення проводяться в точці мінімуму x^* .

Перепишемо отриманий вираз у матричному вигляді:

$$\Delta f^*(x) = f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \text{grad } f(x^*)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H^*(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|^2)$$

Так як $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \Delta x^T H^*(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|^2)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{*T} \Delta x} = 0$ при умові

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{*T} \neq 0, \quad (3.4)$$

то ряд Тейлора прийме вигляд:

$$\Delta f^*(x) = f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \text{grad } f(x^*)^T \Delta x \quad (3.5)$$

Якщо покласти $x_i = \text{const}$ ($i=1, \dots, n$; $i \neq r$), то з урахуванням (3.2) отримаємо:

$$\Delta f^* = \Delta f^*(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\right)^* \Delta x_r \geq 0 \quad (3.6)$$

З цього випливає, що $\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\right)^* = 0$, тому що в протилежному випадку до кожного $\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\right)^* \neq 0$ завжди можна знайти протилежний за знаком приріст Δx_r , що протирічить (3.5).

Так як змінну x_r вибирали довільно, то $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^* = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$

Таким чином,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* = 0. \quad (3.7)$$

Точки, в яких виконуються необхідні умови називаються *стаціонарними*. Стаціонарна точка може бути як точкою екстремуму, так і точкою перегину.

Виведення необхідних умов (3.7) трималося на допущенні (3.4). Але в наслідок виведення був одержаний протилежний результат. Тому умови (3.7) вважаються необхідними, але зовсім не достатніми.

Розглянемо необхідні і достатні умови локального екстремуму другого порядку.

Теорема 3.2. (необхідні умови локального екстремуму другого порядку).

Нехай точка x^* є точкою локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$ на множині $\mathbb{R}^n$ і функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована в точці x^* . Тоді матриця Гесса $H(x^*)$ функції $f(x)$ обчислена в точці x^* є додатно напіввизначеною (від'ємно напіввизначеною), тобто $H(x^*) \geq 0$ ($H(x^*) \leq 0$).

Теорема 3.3. (достатні умови локального екстремуму другого порядку). Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційована в точці $x^* \in \mathbb{R}^n$, її градієнт дорівнює нулю, а матриця Гесса є додатно визначеною

(відємно визначеною), тобто $\text{grad } f(x^*) = 0$, $H(x^*) > 0$ ($H(x^*) < 0$). Тоді точка x^* є точкою локального мінімуму (максимуму).

Доведення. Розкладемо знову функцію цілі $f(x)$ в ряд Тейлора в ε -околі точки мінімуму x^* :

$$\Delta f^*(x) = f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \text{grad } f(x^*)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H^*(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|^2) \quad (3.8)$$

З урахуванням (3.7) розклад (3.8) набере вигляду:

$$\Delta f^*(x) = \frac{1}{2} \Delta x^T H^*(x) \Delta x + o(\|\Delta x\|^2) \quad (3.9)$$

Так як $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\|\Delta x\|^2)}{\frac{1}{2} \Delta x^T H^*(x) \Delta x} = 0$ за умови, що знаменник не дорівнює нулю,

то ряд розкладу Тейлора з урахуванням (3.2) матиме вигляд:

$$\Delta f^*(x) = \frac{1}{2} \Delta x^T H^*(x) \Delta x \geq 0 \quad (3.10)$$

Таким чином, приріст функції у точці мінімуму визначається диференційною квадратичною формою.

Співвідношення (3.10) виконується лише у випадку додатної визначеності матриці коефіцієнтів квадратичної форми, у даному разі – матриці Гесса.

Означення 3.1. Власні значення $\lambda_i, i=1, n$ матриці $H(x^*)$ розміру $n \times n$ знаходяться як корені характеристичного рівняння (алгебраїчного рівняння n -го степеня):

$$|H(x^*) - \lambda E| = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

Власні значення симетричної матриці $H(x^*)$ є дійсними.

Визначники $\Delta_1 = h_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}$ називаються

кутовими мінорами.

Визначники m -го порядку ($m \leq n$), які можна одержати із визначника матриці $H(x^*)$ викреслюванням яких-небудь $(n-m)$ рядків і $(n-m)$ стовпців з тими самими номерами, називаються *головними мінорами*.

Для перевірки виконання достатніх умов екстремуму і необхідних умов другого порядку застосовуються два способи:

Перший спосіб (за допомогою кутових і головних мінорів, тобто з застосуванням критерію Сильвестра).

Другий спосіб (за допомогою власних значень матриці Гессе).

Обидва способи перевірки достатніх і необхідних умов екстремуму другого порядку наведені в таблицях 3.1 і 3.2.

Критерії перевірки достатніх умов другого порядку у задачі пошуку безумовного екстремуму при $\text{grad } f(x^) = 0$*

Таблиця 3.1

№	$H(x^*)$	Перший спосіб	Другий спосіб	Тип стаціонарної точки x^*
1	>0	$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$	$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$	Локальний мінімум
2	<0	$\Delta_1 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$	$\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$	Локальний максимум

Критерії перевірки необхідних умов другого порядку у задачі пошуку безумовного екстремуму при $\text{grad } f(x^) = 0$*

Таблиця 3.2

№	$H(x^*)$	Перший спосіб	Другий спосіб	Тип стаціонарної точки x^*
1	≥ 0	Всі головні мінори $\det H(x^*)$ від'ємні	$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$	Може бути локальний мінімум, потрібні додаткові дослідження
2	≤ 0	Всі головні мінори парного порядку від'ємні, а непарного - невід'ємні	$\lambda_1 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0$	Може бути локальний максимум, потрібні додаткові дослідження
3	$=0$	Матриця Гесса складається з нульових елементів	Всі λ_i рівні нулю	Потрібні додаткові дослідження
4	$\leq \geq 0$	Не виконуються всі попередні умови	λ_i мають різні знаки	Немає екстремуму

Приклад 3.1. Знайти екстремум функції $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ на множині $\mathbb{R}^2$.

Розв'язання

1. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 = 0$$

В результаті розв'язання системи одержимо стаціонарну точку $x^* = (0; 0)^T$

2. Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму і необхідних умов другого порядку.

Перший спосіб. Матриця Гессе має вигляд $H(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Оскільки $\Delta_1 = h_{11} = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$, то достатні умови екстремуму не виконуються (табл. 1.1, рядки 1 і 2).

Перевіримо виконання необхідних умов другого порядку. Головні мінори першого порядку ($m=1$) одержимо із Δ_2 в результаті викреслювання $n-m=2-1=1$ рядків і стовпців з однаковими номерами: $-2, 2$. Головний мінор другого порядку ($m=2$) одержимо із Δ_2 в результаті викреслювання $n-m=2-2=0$ рядків і стовпців, тобто він збігається з Δ_2 : -4 .

Звідси маємо, що необхідні умови екстремуму другого порядку не виконуються (табл. 1.2, рядки 1 і 2).

Оскільки матриця Гессе не є нульовою, то можна зробити висновок про те, що в точці x^* немає екстремуму (табл. 1.2, рядок 4).

Другий спосіб. Знайдемо власні значення матриці Гессе:

$$\det(H - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) = 0.$$

Звідси маємо $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$, тобто власні значення мають різні знаки. Тому точка x^* не є точкою мінімуму або максимуму (табл. 1.2, рядок 4), а є сідловою точкою.

3. Оскільки екстремум не досягається в жодній точці, то $f(x^*)$ не обчислюємо.

Приклад 3.2. Знайти мінімум функції:

$$f(x) = -x^3 + 6x_2x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 18x_2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2}$$

Розв'язання.

1) Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -3x_1^2 + 6x_2 + 6 = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1 + 6x_2 + 18 = 0. \end{cases}$$

Маємо дві стаціонарні точки: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2) Знаходимо матриці Гесса: $H^{(1)} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$, $H^{(2)} = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

3) Згідно з критерієм Сильвестра матриця $H^{(1)}$ не визначена; матриця $H^{(2)}$ додатно визначена.

Отже, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ - точка локального мінімуму (при від'ємній визначеності матриці других похідних в стаціонарній точці має місце максимум функції).

У точці $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $f^* = -107$.

Запитання для самоконтролю

- 1) Що означають необхідні і достатні умови екстремуму для задач оптимізації?
- 2) Сформулювати необхідну умову локальної оптимальності першого порядку.
- 3) Сформулювати достатню умову локальної оптимальності першого порядку.
- 4) Сформулювати необхідну умову локальної оптимальності другого порядку.

Вправи для самостійного виконання

Дослідити функції на екстремум:

- 1) $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^2$;
- 2) $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$;
- 3) $f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - x_2^2$;
- 4) $f(x) = x_1x_2^2x_3^3(7 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)$.

4. ЗАДАЧА УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Задано двічі неперервно диференційовані на множині $\mathbb{R}^n$ цільова функція $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ й функції обмежень $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$. Система обмежень $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$ визначає множину допустимих розв'язків X .

Потрібно дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, тобто визначити точки $x^* \in X$ її локальних мінімумів і максимумів на множині X :

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \quad (4.1)$$

де

$$X = \{x : g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m; m < n\} \quad (4.2)$$

Знаходяться точки x^* локальних екстремумів за допомогою необхідних і достатніх умов мінімуму й максимуму першого й другого порядку при обмеженнях типу рівностей (порядок умов визначається порядком похідних, які використовуються). Обчислюються значення $f(x^*)$ функції в знайдених точках локального екстремуму.

В класичному математичному аналізі для знаходження умовного екстремуму в задачі (4.1) застосовується метод множників Лагранжа. Цей метод дозволяє звести задачу пошуку умовного екстремуму до задачі пошуку безумовного екстремуму.

Означення 4.1. Функція

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (4.3)$$

називається узагальненою функцією Лагранжа, числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ – множниками Лагранжа, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$. Якщо $\lambda_0 = 1$, то функція (4.3) називається класичною функцією Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \quad (4.4)$$

Означення 4.2. Градієнтом узагальненої (класичної) функції Лагранжа по x називається вектор-стовбець, складений з її частинних похідних першого порядку по x_j , $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \text{grad}_x L(x, \lambda_0, \lambda) &= \left(\frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1}, \frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_n} \right)^T \\ \left(\text{grad}_x L(x, \lambda) &= \left(\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1}, \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_n} \right)^T \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Означення 4.3. Другим диференціалом узагальненої (класичної) функції Лагранжа називається функція

$$\begin{aligned} d^2 L(x, \lambda_0, \lambda) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \\ \left(d^2 L(x, \lambda) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Означення 4.4. Першим диференціалом функції обмеження (x) і g називається функція

$$dg_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_j} dx_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.7)$$

Означення 4.5. Градієнти обмежень $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x) \in$ лінійно незалежними в точці x^* , якщо рівність

$\lambda_1 \text{grad } g_1(x^*) + \lambda_2 \text{grad } g_2(x^*) + \dots + \lambda_m \text{grad } g_m(x^*) = 0$ виконується тільки при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. Якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, які одночасно не дорівнюють нулю і для яких рівність виконується, то градієнти лінійно залежні.

У цьому випадку один з них є лінійною комбінацією інших. Один вектор $\text{grad } g_1(x^*)$ теж утворює систему векторів: при $\text{grad } g_1(x^*) \neq 0$ лінійно незалежну, а при $\text{grad } g_1(x^*) = 0$ лінійно залежну.

Система векторів, що містить нульовий вектор, завжди лінійно залежна. Якщо $\text{rang } A = \text{rang}(\text{grad } g_1(x^*) \text{grad } g_2(x^*) \dots \text{grad } g_m(x^*)) = m$, то система векторів лінійно незалежна. Якщо $\text{rang } A < m$, то система лінійно залежна.

Теорема 4.1. (необхідні умови екстремуму першого порядку). Нехай x^* є точкою локального екстремуму в задачі (4.1). Тоді знайдуться числа

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, які одночасно не дорівнюють нулю й такі, що виконуються наступні умови:

– умова стаціонарності узагальненої функції Лагранжа по x :

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.8,a)$$

- умова допустимості розв'язку:

$$g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.8,b)$$

Якщо при цьому градієнти обмежень у точці x^* лінійно незалежні (виконується умова регулярності), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Умову (4.8, а) можна записати у векторній формі:

$$\text{grad}_* L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0$$

Система (4.8) містить $n+m$ рівнянь з $n+m+1$ невідомими $\lambda_0^*, \lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*), x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$.

Точки x^* , що задовольняють системі при деяких λ_0^*, λ^* називаються *умовно стаціонарними*. Точка екстремуму, яка задовольняє системі (4.8) при $\lambda_0^* \neq 0$, називається *регулярною*, а при $\lambda_0^* = 0$ – *нерегулярною*.

Випадок $\lambda_0^* = 0$ означає виродженість обмежень. При цьому в узагальненій функції Лагранжа зникає член, що містить цільову функцію, а в необхідних умовах екстремуму не використовується інформація, що надається градієнтом цільової функції.

Зауваження. При розв'язуванні задач перевірка умови регулярності утруднена, тому що точка x^* заздалегідь не відома. Тому, як правило, розглядаються два випадки: $\lambda_0^* \neq 0$ і $\lambda_0^* = 0$. Якщо $\lambda_0^* \neq 0$, у системі (4.8,a) приймають $\lambda_0^* = 1$. Це еквівалентно діленню системи рівнянь (4.8,a) на λ_0^* й заміні $\frac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*}$ на λ_i^* . При цьому узагальнена функція Лагранжа стає класичною, а сама система (4.8) має вигляд:

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.9,a)$$

$$g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.9,b)$$

Тут число рівнянь дорівнює числу невідомих. Система (4.9) відображає той факт, що антиградієнт цільової функції в регулярній точці екстремуму x^* є лінійною комбінацією градієнтів обмежень.

Дійсно, з урахуванням (4.4) можна переписати умови (4.9,a) у формі;

$$\text{grad } f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \text{grad } g_i(x^*) = 0.$$

Звідси

$$-\text{grad } f(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \text{grad } g_i(x^*).$$

Теорема 4.2. (необхідні умови екстремуму другого порядку). Нехай x^* – регулярна точка мінімуму (максимуму) в задачі (4.1) і є розв’язком (x^*, λ^*) системи (4.9). Тоді другий диференціал класичної функції Лагранжа, обчислений у точці (x^*, λ^*) , є невід’ємним (недодатним):

$$d^2L(x^*, \lambda^*) \geq 0 \quad (d^2L(x^*, \lambda^*) \leq 0) \quad (4.11)$$

для всіх $dx \in \mathbb{R}^n$ таких, що

$$dg_i(x^*) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.12)$$

Теорема 4.3. (достатні умови екстремуму). Нехай x^* є точка (x^*, λ^*) , що задовольняє системі (4.9). Якщо в цій точці $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$ ($d^2L(x^*, \lambda^*) < 0$) для всіх ненульових $dx \in \mathbb{R}^n$ таких, що

$$dg_i(x^*) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

то точка x^* є точкою локального мінімуму (максимуму) в задачі (4.1).

Зведемо необхідні й достатні умови в задачі пошуку умовного екстремуму при обмеженнях типу рівностей в таблицю:

№ п/п	$\lambda_0^* \neq 0$ $d^2L(x^*, \lambda^*)$	$dg_i(x^*),$ $i = 1, \dots, m$	Тип умовно Стационарної точки x^*
1	>0	$0, dx \neq 0$	Умовний локальний мінімум
2	<0	$0, dx \neq 0$	Умовний локальний максимум
3	≥ 0	0	Може бути умовний локальний мінімум. Потрібні додаткові дослідження
4	≤ 0	0	Може бути умовний локальний максимум. Потрібні додаткові дослідження
5	$=0$	0	Потрібне додаткове дослідження
6	$\leq \geq 0$	0	Немає екстремуму

Зауваження. Достатні й необхідні умови екстремуму другого порядку перевіряються в умовно стаціонарних точках, які задовольняють системі (4.8) при $\lambda_0^* \neq 0$ або системі (4.9), оскільки для практики становить інтерес випадок, коли у функції Лагранжа присутня цільова функція, екстремум якої шукається.

Алгоритм дослідження функції на умовний екстремум

1. Скласти узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x).$$

2. Записати необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$a) \frac{\partial L(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$б) g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

3. Розв'язати систему рівнянь п.2 для двох випадків:

$$1) \lambda_0^* = 0;$$

$$2) \lambda_0^* \neq 0 \text{ (поділити умову «а» на } \lambda_0^* \text{ й замінити } \frac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*} \text{ на } \lambda_i^* \text{)}.$$

В результаті знайти умовно стаціонарні точки x^* , виділивши з них отримані при $\lambda_0^* \neq 0$ (вони можуть бути регулярними точками екстремуму).

4. Для виділених на кроці 3 точок перевірити достатні умови екстремуму:

а) записати вираз для другого диференціала класичної функції Лагранжа в точці (x^*, λ^*) :

$$d^2L(x^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

б) записати систему (4.12) у точці x^* :

$$dg_i(x^*) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

в) з попередньої системи виразити будь-які m диференціалів dx_j через інші $n-m$ й підставити в $d^2L(x^*, \lambda^*)$;

г) якщо $d^2L(x^*, \lambda^*) > 0$ при ненульових dx , то в точці x^* – умовний локальний мінімум.

Якщо $d^2L(x^*, \lambda^*) < 0$ при ненульових dx , то в точці x^* – умовний локальний максимум.

Якщо достатні умови екстремуму не виконуються, варто перевірити виконання необхідних умов другого порядку (див. теорему 4.2), діяти аналогічно. Якщо вони виконуються, то потрібні додаткові дослідження, а якщо не виконуються, то в точці x^* немає умовного екстремуму.

5. Обчислити значення функції в точках умовного екстремуму.

Зауваження. Іноді вдається перевірити умову лінійної незалежності градієнтів обмежень на множині X (див. означення 4.5). Якщо вона виконується, то на кроці 1 варто записати класичну функцію Лагранжа (4.4), на кроці 2 можна записувати відразу систему (1.12), а на кроці 3 відсутній випадок $\lambda_0^* = 0$.

Приклад 4.1. Знайти екстремум функції $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$ на множині X при умові $g_1(x) = x_1 + x_2 - 8 = 0$.

Розв'язання

Перевіримо умову регулярності. Так як $\text{grad } g_1(x) = (1, 1)^T \neq 0$, то умова виконується. Тобто застосовуємо класичну функцію Лагранжа.

1. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 8)$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$а) \frac{\partial L(x, \lambda_1)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + \lambda_1 = 0,$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 5) + \lambda_1 = 0;$$

$$б) g_1(x) = x_1 + x_2 - 8 = 0.$$

3. Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 2) + \lambda = 0, \\ 2(x_2 - 5) + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 8 = 0. \end{cases}$$

Маємо розв'язок $x_1 = 2, 5$; $x_2 = 5, 5$; $\lambda_1 = -1$. Отже, $(5; 5, 5; -1)$ - умовно стаціонарна точка.

4. Перевіряємо достатні умови екстремуму:

$$а) \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \Rightarrow d^2 L(x^*, \lambda_1^*) = 2dx_1^2 + 2dx_2^2;$$

$$б) \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = 1 \Rightarrow dg_1(x^*) = dx_1 + dx_2 = 0;$$

в) виразимо диференціал dx_1 через dx_2 : $dx_1 = -dx_2$;

г) $d^2 L(x^*, \lambda_1^*) = 4dx_2^2 > 0$ при $dx_2 \neq 0 \Rightarrow$ в точці $x^* = (1; 1)^T$ - регулярний локальний умовний мінімум.

Приклад 4.2. Знайти умовний екстремум в задачі

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr};$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0;$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$$

Розв'язання

1. Складаємо узагальнену функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - x_3) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3)$$

2. Записуємо необхідні умови екстремуму першого порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0;$$

$$а) \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0;;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2\lambda_0 x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

$$б) g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0;$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$$

3. Розв'язуємо систему для двох випадків: $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_0 \neq 0$.

$$\underline{\lambda_0 = 0:}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь отримуємо: $\begin{cases} \lambda_1(2x_1 + 1) = 0, \\ \lambda_1(2x_2 + 1) = 0. \end{cases}$

Якщо $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_2 = 0$, що суперечить вимогам теореми 4.1.

Якщо $\lambda_1 \neq 0$, то $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Із останніх двох рівнянь отримуємо: $\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}, \\ x_3 = 4 - x_1 - x_2 = 5. \end{cases}$

Тобто маємо суперечність і система несумісна.

$\lambda_0 \neq 0$. Поділимо перші три рівняння на λ_0 і замінімо $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \frac{\lambda_2}{\lambda_0}$ на λ_1, λ_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0.$$

З перших трьох рівнянь маємо:

$$x_1 = x_2 = -\frac{\lambda_2}{2(1 + \lambda_1)}; \quad x_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Підставляємо ці співвідношення в рівняння зв'язку. Розв'язуючи їх, отримуємо:

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{10}{3};$$

$$\lambda_1 = -\frac{20}{3}, \quad \lambda_2 = -\frac{68}{3}.$$

Таким чином, маємо 2 умовно стаціонарні точки:

$$A: x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 2, \lambda_1^* = \frac{2}{3}, \lambda_2^* = -\frac{10}{3};$$

$$B: x_1^* = -2, x_2^* = -2, x_3^* = 8, \lambda_1^* = -\frac{20}{3}, \lambda_2^* = -\frac{68}{3}.$$

4. Перевіряємо достатні умови екстремуму:

$$a) d^2L(x^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(1+\lambda_1^*)dx_2^2 + 2dx_3^2;$$

$$d^2L(x^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 2(1+\lambda_1^*)dx_1^2 + 2(1+\lambda_1^*)dx_2^2 + 2dx_3^2;$$

$$б) dg_1(x^*) = 2x_1^*dx_1 + 2x_2^*dx_2 - dx_3 = 0;$$

$$dg_2(x^*) = dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0.$$

$$в) \text{ Досліджуємо точку } A: dx_1 = -dx_2, dx_3 = 0$$

$$d^2L(A) = 2(1+\frac{2}{3})(-dx_2)^2 + 2(1+\frac{2}{3})dx_2^2 > 0 \text{ при } dx_2 \neq 0 \Rightarrow$$

в точці A – регулярний умовний локальний мінімум (рядок 1 у табл.).

$$\text{Досліджуємо точку } B: dx_1 = -dx_2, dx_3 = 0$$

$$d^2L(B) = 2(1-\frac{20}{3})(-dx_2)^2 + 2(1-\frac{20}{3})dx_2^2 > 0 \text{ при } dx_2 \neq 0 \Rightarrow$$

Тому в точці B – регулярний умовний локальний максимум (рядок 2 у табл.).

5. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму:

$$f(A) = 6, \quad f(B) = 72.$$

Запитання для самоконтролю

1. Як формулюється класична задача на умовний екстремум?
2. Яка точка називається точкою локального умовного мінімуму (максимуму)?
3. У чому полягає суть методу множників Лагранжа?
4. Що представляє собою функція Лагранжа для класичної задачі на умовний екстремум?
5. Як формулюється теорема про необхідні умови екстремуму в термінах функції Лагранжа?
6. У чому полягає умова регулярності для класичної задачі на умовний екстремум?
7. Яка точка називається стаціонарною точки для класичної задачі на умовний екстремум?
8. Що представляє собою регулярна функція Лагранжа?
9. У чому полягає загальне правило пошуку розв'язків класичної задачі на умовний екстремум?

Вправи для самостійного виконання

Дослідити функції на умовний екстремум:

$$1) f(x) = x_1x_2 \rightarrow \text{extr};$$

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0.$$

$$f(x) = x_1x_2x_3 \rightarrow \text{extr};$$

$$2) g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0,$$

$$g_2(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 8 = 0.$$

$$f(x) = x_1^3 x_2^2 x_3 \rightarrow extr;$$

$$3) \quad g_1(x) = x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0,$$

$$g_2(x) = x_1 - x_2 - x_3 - 16 = 0.$$

5.ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Якщо множина X описується лінійними і нелінійними обмеженнями у вигляді рівностей і нерівностей, то задача оптимізації називається *задачею математичного програмування*.

Кожну нерівність, або рівність в умовах допустимої множини X називають *обмеженням*, а всі нерівності і рівності – *системою обмежень*.

Будь-який розв'язок, що задовольняє систему обмежень, називають *допустимим (планом) розв'язком* системи. *Оптимальним розв'язком* задачі математичного програмування є довільний вектор x^* , який реалізує (локальний або глобальний) екстремум функції $f(x)$. Функція $f(x)$ називається *цільовою*.

В залежності від того, якими є параметри задачі, випадковими величинами чи не випадковими, задачі математичного програмування поділяються на *стохастичні* і *детерміновані*. Якщо всі функції (цільова функція і функції системи обмежень) задачі програмування лінійні, то така задача є задачею *лінійного математичного програмування* (задача ЛМП), в протилежному випадку це задача *нелінійного математичного програмування* (задача НЛМП).

За типом змінних розрізняють задачі МП з неперервними та дискретними змінними. Останні створюють окремий клас задач *дискретного програмування*, підкласом якого є задачі *цілочислового програмування*. В залежності від виду функцій, які входять в задачі математичного програмування, найбільш вивченими класами задач нелінійного математичного програмування є задачі *квадратичного програмування* (цільова функція квадратична, функції системи обмежень лінійні), *дробово-лінійного програмування*. До задач дробово-лінійного програмування належать задачі, в яких функції системи обмежень лінійні, а цільова функція дробова.

Стохастичним програмуванням називається розділ математичного програмування, який вивчає моделі вибору оптимальних розв'язків у ситуаціях, що характеризуються випадковими величинами.

Задачі стохастичного програмування впливають за умови неточної інформації, невизначеності та ризику.

Динамічним програмуванням називається розділ математичного програмування, який вивчає багатокрокові процеси пошуку розв'язку.

У деяких галузях практичної діяльності доцільно шукати розв'язки не відразу, а послідовно, тобто розв'язок розглядається як процес, що складається з певних кроків, етапів.

Надалі будемо розглядати лише задачі лінійного програмування.

Сформулюємо загальний вигляд основної задачі лінійного програмування (ОЗЛП).

Потрібно знайти вектор $X^n = (x_1, x_2 \dots x_n)$, який забезпечує найбільше (max) або найменше (min) значення функції:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \max(\min) \quad (5.1)$$

за виконання умов

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\&\dots\dots\dots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots x_n \geq 0, &\text{де} \\c_i \forall i = \overline{1, n}, a_{ij} \forall i, j, b_i \forall i = \overline{1, m} &\text{- довільні дійсні числа.}\end{aligned}\tag{5.2}$$

Будемо вважати, що завжди в (5.1) стоїть знак «*max*». Це припущення не зменшує загальності міркувань, адже заміною змінних $L' = -L$ будь-яку задачу лінійного програмування завжди можна звести до процедури максимізації L , якщо для L у (5.1) стояла вимога мінімізації. Так само в (5.2) множенням на “-” правої та лівої частини нерівності, у якій стоїть знак “ $\geq$ ” можна досягнути стандарту (5.2). Якщо в нерівностях (5.2) є знак “ $=$ ”, наприклад, при m -ій нерівності, тоді можна записати дві еквівалентні нерівності:

$$\begin{aligned}a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_1 \\-a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 \dots - a_{mn}x_n &\leq -b_2\end{aligned}$$

Слід зазначити, що ОЗЛП може не мати розв’язку в таких випадках:

- якщо система (5.2) несумісна, тобто її рівняння-обмеження суперечать одне одному;
- якщо існує розв’язок системи (5.2), але при цьому серед отриманої сукупності $x_1, x_2, \dots, x_n$ є від’ємні значення;

– якщо є допустимі розв’язки, але цільова функція не обмежена знизу (немає оптимального розв’язку), тобто цільову функцію можна покращувати (мінімізувати) нескінченно.

Окремим випадком ОЗЛП є ситуація, коли кількість n змінних дорівнює кількості m незалежних рівнянь; у цьому випадку, якщо розв’язок задачі (системи рівнянь-обмежень) існує, то він буде єдиним і оптимальним.

Основним же є випадок, коли кількість n змінних більше кількості m рівнянь-обмежень. Як відомо з алгебри, з m рівнянь можна знайти значення тільки m змінних; ці змінні в лінійному програмуванні називають

базисними, а решту $n-m$ змінних називають *вільними*. Розподіл змінних на вільні й базисні довільний.

Якщо вільним змінним x_j присвоїти деякі довільні значення (наприклад, нульові), то решту – базисні змінні y_i – можна однозначно визначити з m рівнянь:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij} x_j + b_i \quad (i=1, 2, \dots, m).$$
 Очевидно, що

така система рівнянь має безліч розв'язків; при цьому розв'язання ОЗЛП зводиться до знаходження таких значень вільних змінних x_j , за яких умови рівнянь-обмежень (5.2) є дотриманими, а цільова функція L досягає мінімуму. Для розв'язання цієї задачі використовується математичний апарат лінійного програмування.

Звичайно, може виникнути питання, а чи потрібен спеціальний математичний апарат для розв'язання задач лінійного програмування, адже для пошуку екстремуму в математичному аналізі прийнято просто продиференціювати цільову функцію L за аргументами $x_1, x_2, \dots, x_n$, а потім, прирівнявши частинні похідні до нуля, розв'язати отриману систему рівнянь. Однак виявляється, у випадку задачі лінійного програмування знайти розв'язок таким чином неможливо. Оскільки функція L лінійна, то частинні похідні за усіма її аргументами постійні й на нуль не перетворюються. Як буде показано нижче, екстремум цільової функції L (якщо він взагалі існує) завжди досягається на границі можливих значень M .

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте задачу лінійного програмування.
2. Які існують основні класи задач математичного програмування?
3. Які існують основні класи задач лінійного програмування?
4. Які задачі серед задач нелінійного програмування є найбільш вивченими?

6. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Якщо після приведення задачі лінійного програмування до системи рівнянь-обмежень кількість вільних змінних $n - m = 2$, то в цьому випадку задача лінійного програмування може бути розв'язана графічно в такому порядку.

1. У системі рівнянь-обмежень необхідно обрати дві вільні змінні (наприклад, x_1 та x_2) та виразити всі інші (базисні змінні) через вільні.

2. На координатній площині побудувати область допустимих розв'язків (ОДР); при цьому одній з вільних змінних поставити у відповідність вісь абсцис, а іншій – вісь ординат.

3. Прирівняти кожне рівняння (базисну змінну) до нуля ($y_i = 0$) та за двома точками побудувати відповідну пряму на координатній площині.

4. Для кожного рівняння (прямої) визначити півплощину, де відповідна базисна змінна набуває додатних значень ($y_i > 0$). Визначити знак півплощини можна, якщо підставити координати будь-якої точки (наприклад, точки початку координат) до рівняння відповідної прямої $y_i = 0$.

5. На основі отриманих півплощин, які відповідають рівнянням-обмеженням ($y_i = 0$), побудувати ОДР, що представляє собою багатокутник, усередині та на границях якого лежить множина допустимих розв'язків, а за його межами хоча б одна базисна змінна набуває від'ємних значень.

6. Нехай цільова функція задана виразом $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Тоді напрям її зростання (градієнт) збігається з напрямком вектора, що побудований з початку координат в точку з координатами (c_1, c_2) .

Максимум цільової функції досягається в тій вершині ОДР, яка є найвіддаленішою в напрямку градієнта, а мінімум – у вершині границі ОДР, яка є найвіддаленішою в протилежному напрямку.

7. Координати вказаної (екстремальної) вершини ОДР визначають значення вільних змінних при оптимальному розв'язанні задачі. Для знаходження цих значень необхідно розв'язати систему рівнянь ($y_i = 0$), що відповідають прямим, на перетині яких розташована екстремальна точка. Підставивши отримані значення вільних змінних у рівняння-обмеження, знайти значення всіх базисних змінних, а також оптимальне значення цільової функції.

Наведений алгоритм графічного розв'язання задачі лінійного програмування розглянемо на прикладах.

Приклад 6.1. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування, знайти найменше та найбільше значення функції $L = x_1 - x_2$, $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1,2}$)

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 + x_2 - x_5 = -4 \\ x_2 + x_6 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7 \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо $n = 7$ — кількість змінних, $m = 5$ — кількість обмежень. Виберемо як вільні змінні x_1 та x_2 і виразимо через них всі інші базисні змінні.

З першого рівняння маємо:

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 4 \quad (6.1.1)$$

З третього рівняння:

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4 \quad (6.1.2)$$

а з четвертого:

$$x_6 = -x_2 + 5$$

Підставляючи в друге рівняння системи (6.1.2) в останнє, розв'язуємо їх відносно x_4 та x_7 . Отримаємо:

$$\begin{aligned} x_4 &= 3x_1 - 2x_2 + 1; \\ x_7 &= -x_1 + 0,5x_2 + 6. \end{aligned}$$

Далі за алгоритмом беремо $x_1=0$ та $x_2=0$ — координатні осі; інші обмежуючі прямі знаходимо, узявши $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$. Многокутник допустимих розв'язків зображено на рис. 6.1.

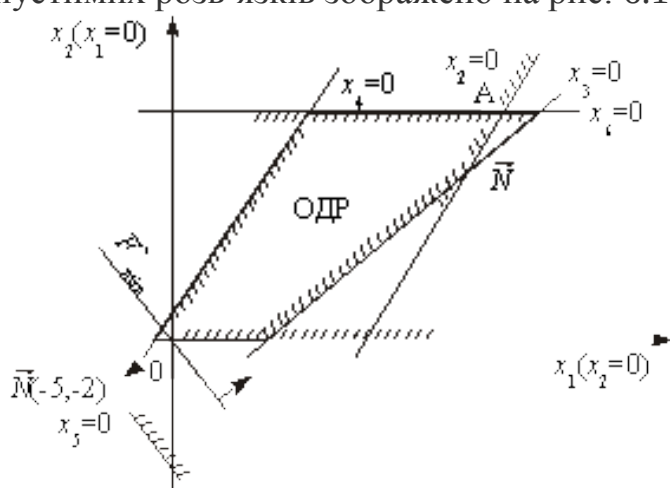


Рис. 6.1

Знайдемо вигляд функціонала, вираженого через x_1 та x_2 . Для цього знайдені щойно вирази для x_3 , x_4 , x_5 , x_6 та x_7 через вільні змінні x_1, x_2 підставимо у функціонал і, звівши подібні члени, отримаємо:

$$L = -5x_1 - 2x_2 - 12. \text{ Відкидаючи вільний член, маємо:}$$

$$L = -5x_1 - 2x_2$$

Будуємо вектор $\bar{N}(-5;-2)$, перпендикулярно до нього — пряму L' . Рухаючи пряму L' в напрямку, протилежному $\bar{N}(-5;-2)$ (необхідно знайти мінімальне значення функції L), отримаємо точку мінімуму — A (рис. 6.1).

У точці A перетинаються дві обмежуючі прямі: $x_6 = 0$ та $x_7 = 0$. Отже, для відшукування її координат необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0 \\ -x_1 - 0,5x_2 + 6 = 0 \end{cases}$$

Розв'язком системи є $x_1 = 8,5$; $x_2 = 5$. Підставивши ці значення у відповідні вирази, знайдемо оптимальні значення базисних змінних:

$$x_3 = 0,5; x_4 = 16,5; x_5 = 17,5; x_6 = 0; x_7 = 0.$$

Підстановкою значень x_1 та x_2 в лінійну функцію L отримуємо значення цільової функції:

$$L = -5 \cdot 8,5 - 2 \cdot 5 - 12 = -64,5$$

Приклад 6.2. Знайти максимум функції $L = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (6.2.1)$$

Розв'язок. На рис. 6.2 зображено область допустимих розв'язків системи нерівностей (6.2.1) (номер прямої відповідає порядковому номеру відповідної нерівності системи обмежень). Це випуклий шестикутник $ABCDEG$ з кутовими точками: $A(0, 1)$, $B(0, 4)$, $C(2, 3)$, $D(3, 2)$, $E(4, 0)$, $G(1, 0)$, координати яких знаходимо розв'язуючи по черзі системи з відповідних двох рівнянь. Очевидно, що множина допустимих розв'язків системи в даному прикладі випукла.

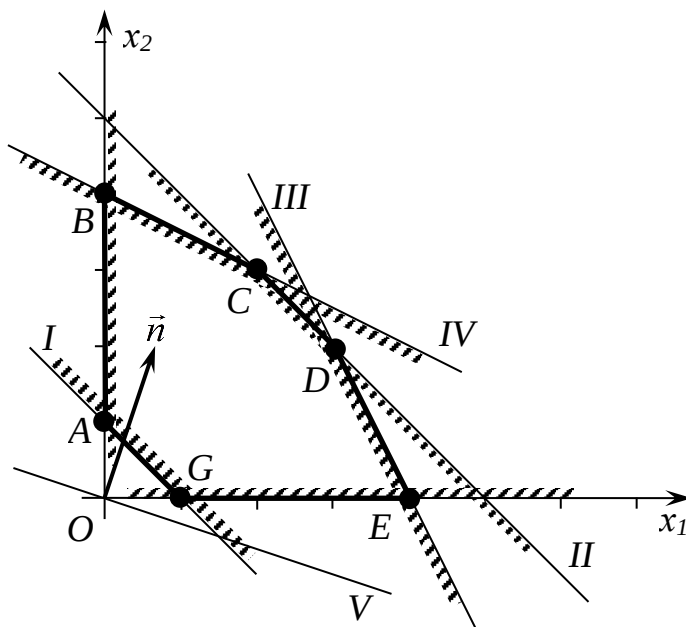


Рис. 6.2

Функція L , максимум якої потрібно знайти, є лінійною функцією координат точок площини. Спочатку вивисимо, як розташовані на площині

точки, в яких дана функція приймає одне й теж довільне значення, тобто точки, в яких має місце рівність

$$L = x_1 + 3x_2 = \text{const} = a. \quad (6.2.2)$$

Рівність (6.2.2) задає рівняння прямої на площині $x_1 + 3x_2 = a$ з вектором нормалі $\vec{n}(1, 3)$. Змінюючи значення параметра a , отримаємо сім'ю паралельних прямих, які називають *лініями рівня*, тобто лініями рівних значень функції. При збільшенні a прямі зміщуються в напрямку вектора $\vec{n}$, а при зменшенні a – в напрямку, протилежному до вектора $\vec{n}$. На рис. 6.2 пряма V відповідає значенню $a = 0$. Очевидно, що значення функції L буде збільшуватись при паралельному зміщенні даної прямої в напрямку вектора $\vec{n}$. Максимальне значення функція L буде приймати в точці $B(0, 4)$, тобто в точці з області допустимих розв'язків системи, найвіддаленішій від початку координат в напрямку вектора $\vec{n}$. Отже,

$$L_{\max} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

при оптимальному плані $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

В прикладі 6.2:

- а) множина розв'язків задачі є замкнутим багатокутником;
- б) система обмежень сумісна;
- в) оптимальний розв'язок єдиний.

Розглянемо приклади, коли ці умови не виконуються.

Приклад 6.3. Знайти максимум функції $L = 3x_1 + 4x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок. На рис. 6.3 зображено необмежену многогранну область $ABCD$ розв'язків заданої системи обмежень, де $A(0, 2)$, $B(0, 1)$, $C(2, 0)$, $D(3, 0)$; та лінію рівня $3x_1 + 4x_2 = 25$ (пряма (IV)) з вектором $\vec{n}(4, 3)$, який вказує напрям руху лінії рівня для знаходження $L_{\max}$. Очевидно, що при заданій системі обмежень функція L може необмежено зростати при збільшенні змінних x_1, x_2 , тобто $L_{\max} = \infty$.

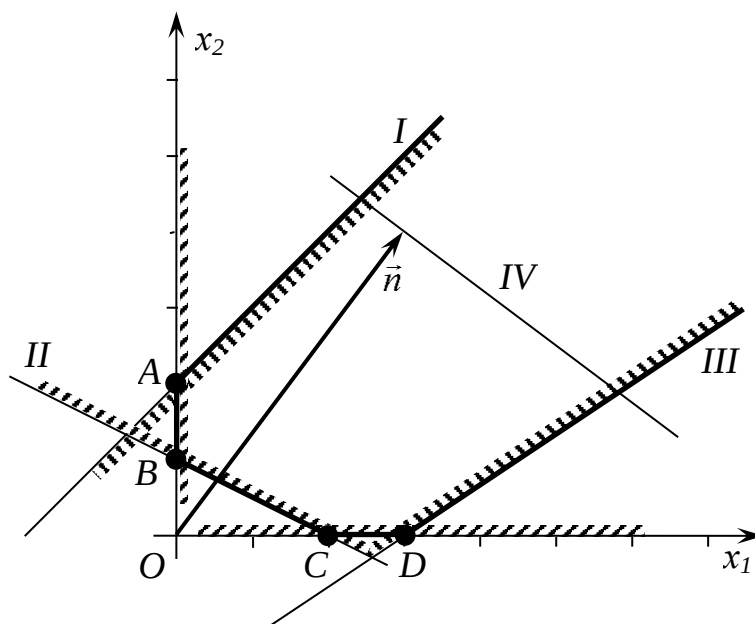


Рис. 6.3

Приклад 6.4. Знайти максимум функції $L = 2x_1 - x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Зображені на рис. 6.4 області, що є розв'язками відповідних нерівностей системи обмежень, не мають спільних точок, тобто немає точок, де одночасно виконувалися б усі нерівності системи обмежень. Це означає, що система обмежень несумісна і не має жодного розв'язку, в тому числі і оптимального.

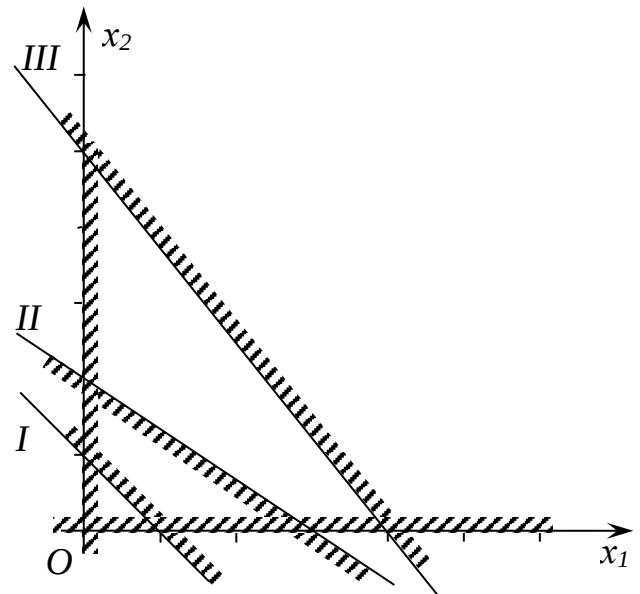


Рис. 6.4

Приклад 6.5. Знайти максимум функції $L = -x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Усім нерівностям системи обмежень задовольняють точки трикутної області ABC (рис. 6.5), де $A(0, 5)$, $B(0, 2)$, $C(1, 4)$. За лінію рівня візьмемо пряму $-x_1 + 3x_2 = 10$ (пряма (V)). Як видно з рисунка, найбільшого значення функція L досягає в точці A і $L_{max} = 15$.

Відмітимо, що при побудові трикутника ABC не використали прямі $x_1 - 2x_2 = 2$ та $x_1 + 3x_2 = 3$, що відповідають 1-й та 4-й нерівностям системи обмежень, хоча всі точки трикутника ABC задовольняють вказаним нерівностям. Таким чином нерівності $x_1 - 2x_2 \leq 2$, $x_1 + 3x_2 \geq 3$ є зайвими в системі обмежень.

Зауваження. Зайві нерівності в системі обмежень можна знайти тільки після побудови області розв'язків. При розв'язанні задач лінійного програмування аналітичними методами питання про зайві обмеження не розглядається, тобто до уваги беруться всі нерівності системи обмежень.

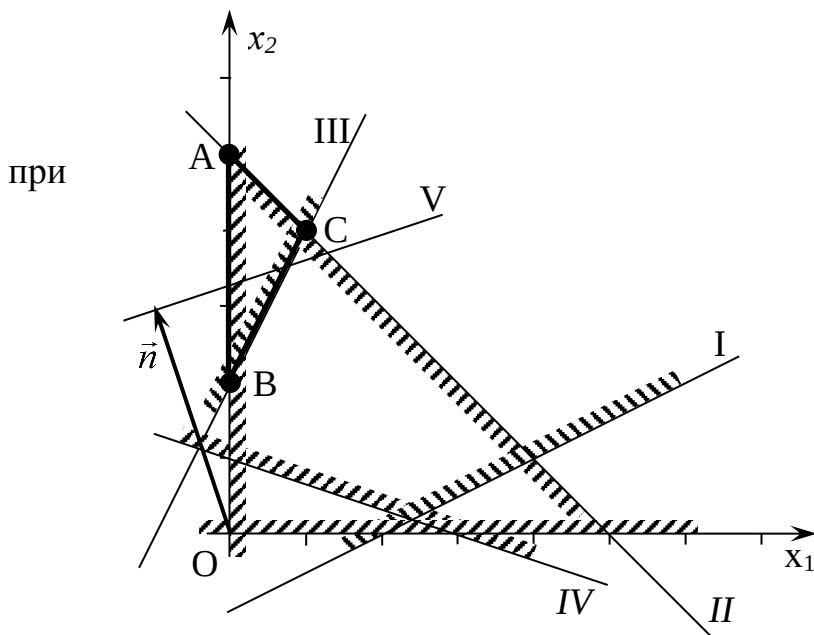


Рис. 6.5

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок. На рис. 6.6 зображено область розв'язків системи обмежень (многокутник $ABCD O$: $A(0, 2)$, $B(2, 4)$, $C(4/3, 14/3)$, $D(2, 0)$, $O(0, 0)$) і лінію рівня, яка відповідає значенню $L = 4$ (лінія IV). Якщо зміщувати лінію рівня паралельно самій собі в напрямку вектора $\vec{n}(2, 2)$, то вона вийде з області розв'язків не в одній точці, як це було в попередніх прикладах, а на відрізку BC , який є однією з границь області розв'язків. Всі точки відрізка BC дають одне й теж значення функції L , яке є її оптимальним значенням. Візьмемо, наприклад, точку $B(2, 4)$: $L_{\max} = 2 + 4 = 6$. Таким чином, є не один, а нескінченна множина оптимальних розв'язків даної задачі, які співпадають з відрізком BC , в тому числі і з кутовими точками B та C .

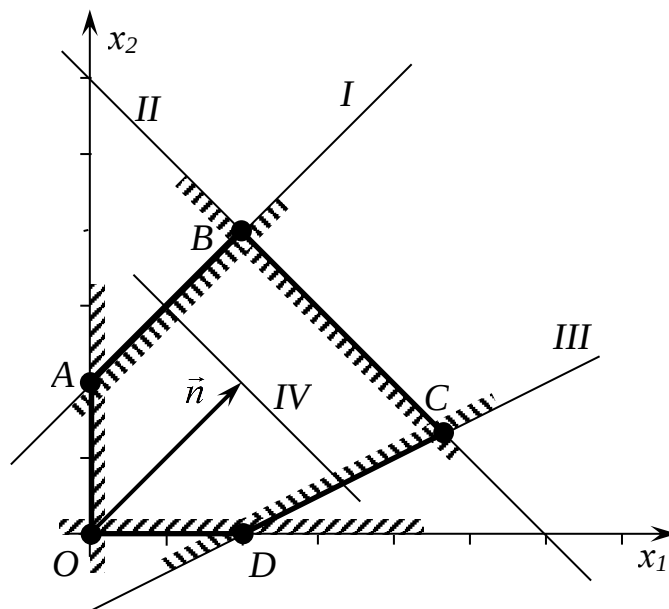


Рис. 6.6

Питання для самоперевірки

1. У якому випадку задача лінійного програмування може бути розв'язана графічно?
2. Що таке область допустимих розв'язків при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом?
3. Як побудувати область допустимих розв'язків при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом?
4. Що визначає градієнт цільової функції при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом?
5. Як побудувати градієнт цільової функції при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом?
6. У якій частині ОДР може бути оптимальний розв'язок при розв'язанні задачі лінійного програмування графічним методом?
7. У якому випадку задача лінійного програмування може мати безліч розв'язків при її розв'язанні графічним методом?
8. У якому випадку задача лінійного програмування може не мати оптимального розв'язку при її розв'язанні графічним методом?
9. Які властивості вершин ОДР у задачах лінійного програмування? Яких значень набувають змінні у вершинах ОДР?
10. Як знайти координати вершини ОДР при графічному розв'язанні задач лінійного програмування?

Вправи для самостійного виконання

Розв'язати графічно задачі математичного програмування:

1.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \leq -1. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 - x_2 \geq -3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2. \end{cases}$$

7. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. ЗАДАЧА ПРО ВИКОРИСТАННЯ СИРОВИНИ (ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА)

Нехай на виготовлення продукції видів $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ використовують сировину видів $S_1, S_2, \dots, S_m$. Відомо, скільки одиниць кожного виду сировини використовується для виготовлення одиниці кожного виду продукції та запас кожної сировини, а також прибуток від реалізації одиниці кожного виду товару. З економічної точки зору задача полягає в наступному: треба організувати виробництво товарів – скласти план так, щоб при використанні даної сировини прибуток від реалізації був найбільшим.

За звичай, постановку таких задач оформляють у вигляді таблиць

(див. табл. 3.1). Тут a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – кількість одиниць сировини S_i , що йде на виготовлення одиниці товару Π_j ; c_j – прибуток від реалізації одиниці товару Π_j ($j = \overline{1, n}$).

Таблиця 7.1

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції					
		Π_1	Π_2	...	Π_j	...	Π_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
S_i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
Прибуток		c_1	c_2	...	c_j	...	c_n

Таблиця 7.2

Види сировини	Запаси сировини	Види продукції	
		Π_1	Π_2
S_1	5	1	1
S_2	8	1	2
S_3	21	1	5
S_4	26	6	1
Прибуток		4	3

Нехай x_j ($j = \overline{1, n}$) – кількість одиниць j -го товару, який планується до виробництва, тоді, очевидно, що повинні виконуватись умови

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (7.1.1)$$

і прибуток підприємства має вигляд

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (7.1.2)$$

Зміст нерівностей (7.1.1) полягає в тому, що при закінченні виробництва деякі з видів сировини будуть використані неповністю.

Отже, математична модель даної задачі формулюється наступним чином: серед

розв'язків системи лінійних нерівностей (7.1.1) потрібно знайти такий, при якому лінійна форма (7.1.2) приймає найбільше значення.

У таблиці 7.2 наведено конкретний приклад задачі про використання сировини для двох видів товару та чотирьох видів сировини. Її математична модель має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 5x_2 \leq 21, \\ 6x_1 + x_2 \leq 26, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (7.1.3)$$

$$L = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \quad (7.1.4)$$

7.2. ЗАДАЧА ПРО ВИКОРИСТАННЯ ПОТУЖНОСТЕЙ ОБЛАДНАННЯ.

Нехай підприємству задано план по часу і по номенклатурі: необхідно за час T випустити N_j одиниць продукції виду Π_j .

Таблиця 7.3

Машина	Види продукції				
	Π_1	...	Π_j	...	Π_n
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
План	N_1	...	N_j	...	N_n

Таблиця 7.4

Машина	Види продукції				
	Π_1	...	Π_j	...	Π_n
A_1	b_{11}	...	b_{1j}	...	b_{1n}
A_2	b_{21}	...	b_{2j}	...	b_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{mn}

Кожен з видів товару може вироблятися m машинами $A_1, A_2, \dots, A_m$ з різними потужностями, які задано таблицею 7.3. Тут a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – кількість одиниць товару виду Π_j , що виробляє машина A_i за одиницю часу. В таблиці 7.4 задано витрати b_{ij} – ціну одиниці робочого часу машини при виготовленні продукції кожного виду.

Потрібно скласти оптимальний (найбільш раціональний) план роботи машин, а саме, знайти скільки часу кожна з машин A_i ($i = \overline{1, m}$) повинна займатися виготовленням кожного з видів продукції Π_j ($j = \overline{1, n}$), щоб вартість всієї продукції будь найменшою і в той же час виконувався план по часу і по номенклатурі.

Введемо невідомі x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – час роботи машини A_i , затрачений на виготовлення товару виду Π_j (табл. 7.5). Вони повинні задовольняти умовам (7.2.1)

Таблиця 7.5

Машина	Види продукції				
	Π_1	...	Π_j	...	Π_n
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
A_2	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \leq T, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \leq T, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \leq T, \\ a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1} = N_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2} = N_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + \dots + a_{mn}x_{mn} = N_n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (7.2.1)$$

Нерівності вказують на те, що деякі з машин будуть працювати не повний час T (можливе перевиконання плану). Якщо вимагати, щоб машини працювали весь час T , то система набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = T, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = T, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = T, \\ a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1} \geq N_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2} \geq N_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + \dots + a_{mn}x_{mn} \geq N_n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (7.2.2)$$

Загальні витрати на виготовлення продукції мають вигляд:

$$L = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \dots + b_{1n}x_{1n} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22} + \dots + b_{2n}x_{2n} + \\ + b_{m1}x_{m1} + b_{m2}x_{m2} + \dots + b_{mn}x_{mn}. \quad (7.2.3)$$

Математична модель даної задачі формулюється наступним чином:

серед розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей (7.2.1) або (7.2.2) знайти такий, при якому функція (7.2.3) приймає найменше значення.

7.3. ЗАДАЧА ПРО ВИКОРИСТАННЯ ОБЛАДНАННЯ.

Виробництву задано план по номенклатурі: потрібно виготовити N_j ($j = \overline{1, m}$) одиниць продукції виду Π_j . Кожний вид продукції виробляється певною кількістю машин A_i ($i = \overline{1, m}$), продуктивність яких (час затрачений на виготовлення одиниці товару певного виду) a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) задана таблицею 7.3. Потрібно знайти x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – кількість продукції Π_j , яку потрібно виготовити на машині A_i (див. табл. 7.5), щоб виконати план по номенклатурі за мінімальний час.

Математична модель задачі про використання обладнання:

серед розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = N_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = N_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = N_n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (7.3.1)$$

знайти такий, при якому функція

$$L = \max\{t_1, t_2, \dots, t_m\} \quad (7.3.2)$$

приймає найменше значення, де

$$\begin{cases} t_1 = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_{1n}, \\ t_2 = a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{2n}x_{2n}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ t_m = a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \dots + a_{mn}x_{mn}. \end{cases} \quad (7.3.3)$$

7.4 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА.

На пунктах відправки(постачань) A_i ($i = \overline{1, m}$) міститься однотипний товар, який потрібно перевезти в пункти призначення(споживання) B_j ($j = \overline{1, n}$). Відомо, що об'єм товару, який міститься на кожному пункті відправки, рівний a_i ($i = \overline{1, m}$) відповідно, а потреба кожного пункту призначення рівна b_j ($j = \overline{1, n}$). Задано c_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – вартість перевезення одиниці вантажу від постачальника A_i ($i = \overline{1, m}$) до споживача B_j ($j = \overline{1, n}$) (див. табл. 7.6).

Таблиця 7.6

Пункти відправки	Пункти призначення					Запас и товару
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Таблиця 7.7

	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
	b_1	...	b_j	...	b_n	

Потрібно скласти такий план перевезень, при якому весь товар вивезений і всі пункти споживання задоволені та загальна вартість перевезень мінімальна.

Позначимо через x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) кількість одиниць товару, які перевезені з пункту A_i в пункт B_j (див. табл. 7.7). Тоді математична модель транспортної задачі матиме вигляд:

серед розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (7.4.1)$$

знайти такий, при якому лінійна форма

$$\begin{aligned} L = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

приймає найменше значення.

8. КАНОНІЧНИЙ ВИГЛЯД ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задача лінійного програмування, яка формулюється у вигляді:

серед розв'язків $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ системи m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \quad (8.1)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (8.2)$$

знайти такий, при якому цільова функція

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (8.3)$$

приймає максимальне значення,

де коефіцієнти a_{ij} , b_i , c_j ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) – задані постійні величини,

називається *канонічною*.

Розв'язок $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, при якому функція F досягає максимуму, називається *оптимальним розв'язком* або *оптимальним планом задачі*.

Формулюючи загальну задачу лінійного програмування, виходимо з того, що

оптимальний розв'язок єдиний, хоча на практиці можуть зустрічатися задачі, де єдиність порушується. (Надалі цей частинний випадок будемо виділяти окремо.)

Систему (4.1) можна записати в більш компактній векторній формі:

розглянемо $n + 1$ вектор в m - вимірному просторі

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (8.4)$$

тоді (4.1) набуде вигляду:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n = P_0. \quad (8.5)$$

Часто для системи обмежень (4.1) використовують матрично-векторний спосіб запису:

$$AX = B, \quad (8.6)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

– відповідно матриця коефіцієнтів біля невідомих, вектор-стовпчик з невідомих та вектор-стовпчик з правих частин рівнянь системи обмежень.

Матрицю A називають *матрицею системи* або *основною матрицею системи обмежень* (4.1).

Розглядають також матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

яку називають *розширеною матрицею системи обмежень* (4.1).

8.1. ПРИВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

У більшості задач лінійного програмування обмеження задаються не у вигляді рівнянь, а у вигляді нерівностей, при чому можливі різні форми таких систем,

наприклад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} \leq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} \leq b_m, \end{cases} \quad (8.1.1)$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases} \quad (8.1.2)$$

Система обмежень може бути також змішаною, тобто в ній частина обмежень записана у вигляді рівнянь (8.1), частина – у вигляді нерівностей (8.1.1) та (8.1.2). Але будь-яку систему обмежень можна привести до системи рівнянь вигляду (8.1). Для цього достатньо в кожній нерівності зліва додати (нерівності (8.1.1)) або відняти (нерівності (8.1.2)) невід’ємне число – *додаткову змінну* такої величини, щоб відповідна нерівність стала рівністю – перетворилась в рівняння.

Нехай система обмежень задана у вигляді нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \geq b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n \leq b_{k+1}, \\ a_{k+21}x_1 + a_{k+22}x_2 + \dots + a_{k+2n}x_n \leq b_{k+2}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad (8.1.3)$$

Від лівої частини кожної з перших k нерівностей (8.1.3) віднімемо відповідну додаткову невід’ємну змінну $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+k}$, а до лівої частини кожної з останніх $m - k$ нерівностей додамо невід’ємну змінну $x_{n+k+1}, x_{n+k+2}, \dots, x_{n+m}$. У результаті, замість системи обмежень (8.1.3), отримаємо еквівалентну систему рівнянь, аналогічну системі (8.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n - x_{n+k} = b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n + x_{n+k+1} = b_{k+1}, \\ a_{k+21}x_1 + a_{k+22}x_2 + \dots + a_{k+2n}x_n + x_{n+k+2} = b_{k+2}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{array} \right. \quad (8.1.4)$$

Отже, якими б не були початкові обмеження задачі лінійного програмування, її завжди можна привести до канонічного вигляду.

Часто в задачах лінійного програмування доводиться шукати найменше значення лінійної форми (8.3). Такі задачі теж легко зводяться до канонічного вигляду. Досить ввести в розгляд функцію $L_1 = -L$, тоді для знаходження найменшого значення функції L потрібно знайти найбільше значення функції L_1 .

8.2. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ОБМЕЖЕНЬ

Нехай ранги основної A та розширеної $\tilde{A}$ матриць (див. (8.7), (8.8)) системи (8.1) рівні r_A та $r_{\tilde{A}}$, відповідно. Відомо, що у випадку

- а) $r_A \neq r_{\tilde{A}}$ система (8.1) несумісна, тобто не має розв'язків;
- б) $r_A = r_{\tilde{A}} = r$ (очевидно, що $r \leq \min(n, m)$) і $r = n$ система (8.1) сумісна і має єдиний розв'язок;
- в) $r_A = r_{\tilde{A}} = r$ і $r < n$ система (8.1) сумісна і має безліч розв'язків.

Якщо система (4.1) несумісна, то відповідна задача лінійного програмування розв'язків не має. Якщо розв'язок системи (8.1) єдиний, то при $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$) він і є розв'язком відповідної задачі лінійного програмування; якщо $x_j < 0$ хоча б для одного значення j ($j = \overline{1, n}$), то відповідна задача лінійного програмування розв'язків не має.

Практичний зміст мають задачі лінійного програмування, в яких система обмежень (4.1) має безліч розв'язків.

Надалі будемо вважати, що система рівнянь (8.1) є лінійно незалежною, тобто $r = m$ і $m < n$. В протилежному випадку, тобто при $r < m$, з системи (8.1) можна виключити $m - r$ рівнянь, так щоб отримана система стала лінійно незалежною.

Нагадаємо, що при розв'язанні сумісної системи рівнянь у випадку нескінченної кількості розв'язків усі невідомі ділять на дві групи: *основні* (базисні)

та неосновні (вільні), їх кількість рівна m та $n - m$, відповідно.

Розв'язок системи лінійних рівнянь називають *базисним розв'язком*, якщо в ньому всі вільні змінні рівні нулю. Загальна кількість базисних розв'язків сумісної системи не перевищує числа C_n^m . Базисний розв'язок системи рівнянь (8.1) називають *допустимим базисним розв'язком*, якщо в ньому всі базисні змінні невід'ємні, в протилежному випадку – *недопустимим*.

Як правило, всі основні змінні в базисному розв'язку відмінні від нуля, тобто є додатними числами. Якщо хоча б одна із основних змінних в допустимому базисному розв'язку рівна нулю, то відповідний розв'язок називають *виродженим*, в протилежному випадку – *невиродженим*.

Оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування (8.1)–(8.2) потрібно шукати серед допустимих базисних розв'язків системи рівнянь (8.1).

8.3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Наведемо теореми, які лежать в основі алгоритму знаходження оптимального розв'язку.

Теорема 1. Множина всіх допустимих розв'язків системи обмежень задачі лінійного програмування є випуклою.

Доведення: Необхідно показати, що, якщо дві точки в n -вимірному просторі є допустимими розв'язками системи обмежень (4.1), то і всі точки відрізка, який з'єднує дані точки, теж є допустимими розв'язками цієї системи.

Нехай $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ та $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ є допустимими розв'язками системи (4.1), тобто $AX^{(1)} = B$ і $AX^{(2)} = B$.

Множину всіх точок X , які належать відрізку $X^{(1)}X^{(2)}$, можна подати у вигляді $X = \alpha X^{(1)} + (1 - \alpha)X^{(2)}$, де $0 \leq \alpha \leq 1$.

Потрібно показати, що:

а) точка X є розв'язком системи обмежень (4.6);

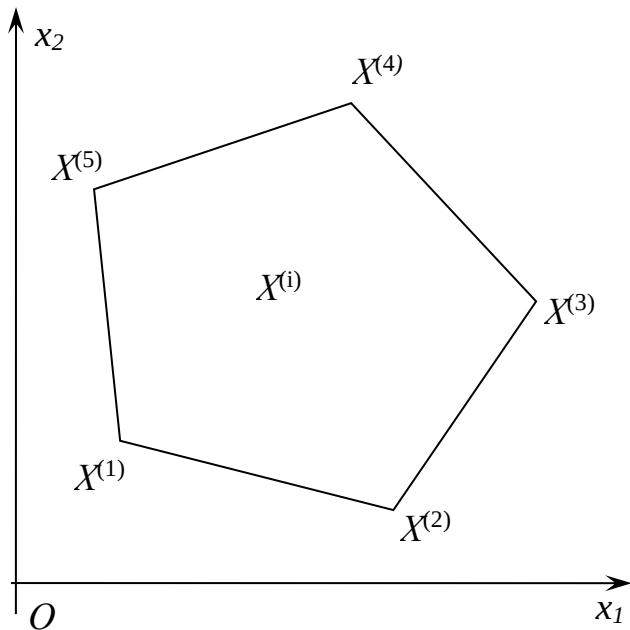


Рис. 4.1

б) усі координати точки X невід'ємні.

Отже, X є допустимим розв'язком задачі лінійного програмування.

Множина розв'язків задачі лінійного програмування визначається скінченною сукупністю лінійних обмежень, тому така множина геометрично задає випуклий многогранник або необмежену многогранну область, за винятком тих випадків, коли система обмежень несумісна.

Випуклий многогранник має скінченну кількість кутових точок, яка не перевищує числа C_n^m .

Теорема 2. Якщо існує, і притому єдиний, оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, то він співпадає з однією з кутових точок множини допустимих розв'язків системи обмежень.

Доведення. Нехай допустимим розв'язком деякої задачі лінійного програмування є випуклий многогранник з кутовими точками $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ (на рис. 4.1 показано приклад такої множини – п'ятикутник $X^{(1)}X^{(2)}X^{(3)}X^{(4)}X^{(5)}$ на площині).

Позначимо шуканий оптимальний розв'язок через $X^{(0)}$. Тоді за умовою $F(X^{(0)}) = F_{\max}$, тобто

$$F(X^{(0)}) \geq F(X^{(i)}), \quad (8.3.1)$$

де $X^{(i)}$ – довільна точка з області многогранника.

Якщо $X^{(0)}$ співпадає з однією з кутових точок $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$, то теорема доведена. Припустимо, що $X^{(0)}$ не є кутовою точкою. Тоді її можна представити у вигляді лінійної комбінації кутових точок многогранника, тобто

$$X^{(0)} = \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \dots + \alpha_k X^{(k)},$$

де

$$\alpha_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, k}) \text{ і } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1. \quad (8.3.2)$$

Використовуючи властивості лінійних функцій, функцію F в (4.3) можна записати у вигляді

$$F = F(X^{(0)}) = F(\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} + \dots + \alpha_k X^{(k)}) =$$

$$= \alpha_1 F(X^{(1)}) + \alpha_2 F(X^{(2)}) + \dots + \alpha_k F(X^{(k)}).$$

Нехай $\max[F(X^{(1)}), F(X^{(2)}), \dots, F(X^{(k)})] = F(X^{(1)})$, тоді враховуючи (8.3.2), маємо

$$\begin{aligned} F(X_0) &\leq \alpha_1 F(X^{(1)}) + \alpha_2 F(X^{(1)}) + \dots + \alpha_k F(X^{(1)}) = \\ &= F(X^{(1)})(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) = F(X^{(1)}). \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

З (8.3.1), (8.3.3) отримуємо дві нерівності $F(X^{(0)}) \geq F(X^{(1)})$ і $F(X^{(0)}) \leq F(X^{(1)})$, які повинні виконуватися одночасно. Отже, точка $X^{(0)}$ співпадає з кутовою точкою $X^{(1)}$.

З доведеної теореми випливає, що пошук оптимального розв'язку можна обмежити перебором скінченного числа кутових точок. Але для відшукування кутових точок потрібно побудувати область допустимих розв'язків системи обмежень (8.1). Це можливо тільки для двох- та трьох вимірних просторів, а в загальному випадку задача залишається нерозв'язною. Таким чином, потрібно мати аналітичний метод, який дозволяє знаходити координати кутових точок. Для цього доведемо наступні дві теореми.

Теорема 3. Кожному допустимому базисному розв'язку задачі лінійного програмування відповідає кутова точка області допустимих розв'язків системи обмежень.

Доведення. Нехай $X = (x_1; x_2; \dots; x_m; 0; 0; \dots; 0)$ – допустимий базисний розв'язок системи обмежень, де перші m компонент – основні змінні, а інші $n - m$ компонент – неосновні змінні, які в базисному розв'язку рівні нулю (це позначення не порушує загальності наших міркувань, так як його можна отримати, наприклад, перепозначивши змінні так, щоб саме перших m змінних були основними).

Доведемо, що вектор X відповідає кутовій точці множини допустимих розв'язків системи обмежень. При цьому будемо припускати, що взятий базисний розв'язок не вироджений, тобто всі основні змінні є додатними.

Припустимо протилежне: нехай точка X не є кутовою. Тоді її завжди можна представити як випуклу комбінацію двох інших різних точок $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ з множини допустимих розв'язків, тобто

$$X = \alpha X^{(1)} + (1 - \alpha) X^{(2)}, \quad (8.3.4)$$

де $0 \leq \alpha \leq 1$. При $\alpha = 0$ і $\alpha = 1$ точка X співпадає з однією з точок $X^{(1)}$ або $X^{(2)}$, тому інтерес представляє випадок, коли $0 < \alpha < 1$.

Для координат точок X , $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ в (2.16) маємо

$$x_j = \alpha x_j^{(1)} + (1 - \alpha)x_j^{(2)} \text{ і } x_j = 0 \text{ (} j = \overline{m+1, n} \text{)}, \quad (8.3.5)$$

$$\text{де } \alpha > 0, 1 - \alpha > 0, x_j^{(1)} \geq 0, x_j^{(2)} \geq 0. \quad (8.3.6)$$

Із співвідношень (4.3.5), (4.3.6) випливає, що

$$x_j^{(1)} = 0, x_j^{(2)} = 0 \text{ (} j = \overline{m+1, n} \text{)}. \quad (8.3.7)$$

Таким чином, точки $X^{(1)}, X^{(2)}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= (x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; \dots; x_m^{(1)}; 0; 0; \dots; 0) \\ X^{(2)} &= (x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; \dots; x_m^{(2)}; 0; 0; \dots; 0). \end{aligned}$$

Так як $X^{(1)}, X^{(2)}$ допустимі розв'язки, то з (4.4) маємо

$$\begin{aligned} P_1 x_1^{(1)} + P_2 x_2^{(1)} + \dots + P_m x_m^{(1)} &= P_0, \\ P_1 x_1^{(2)} + P_2 x_2^{(2)} + \dots + P_m x_m^{(2)} &= P_0. \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Різниця рівностей (4.20) дає

$$P_1 [x_1^{(2)} - x_1^{(1)}] + P_2 [x_2^{(2)} - x_2^{(1)}] + \dots + P_m [x_m^{(2)} - x_m^{(1)}] = 0. \quad (8.3.9)$$

Так як вектори $P_1, P_2, \dots, P_m$ лінійно незалежні, то рівність (4.3.9) має місце тільки при $x_1^{(2)} = x_1^{(1)}, x_2^{(2)} = x_2^{(1)}, x_m^{(2)} = x_m^{(1)}$. Тобто точки $X^{(1)}, X^{(2)}$ співпадають.

Таким чином, точку X не можна представити у вигляді випуклої комбінації яких-небудь двох різних точок $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$, тобто припущення, що точка X не є кутовою – хибне.

Теорема 4. Кожній кутовій точці множини допустимих розв'язків системи обмежень відповідає допустимий базисний розв'язок.

Доведення. Виходячи з попередньої теореми, потрібно встановити, що кожна кутова точка $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ має не більше m додатних компонент, а всі інші рівні нулю.

Покажемо, що для кожної кутової точки вектори P_j в (4.4), які відповідають додатним координатам x_j точки X , є лінійно незалежними векторами.

Нехай відмінними від нуля є перші k компонент вектора X , тобто $X = (x_1; x_2; \dots; x_k; 0; \dots; 0)$, тоді з (4.5) маємо

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_k x_k = P_0. \quad (8.3.10)$$

Припустимо протилежне: вектори $P_1, P_2, \dots, P_k$ є лінійно залежними. Тоді існує лінійна комбінація даних векторів така, що

$$P_1 d_1 + P_2 d_2 + \dots + P_k d_k = 0, \quad (8.3.11)$$

де $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2 \neq 0$, тобто не всі d_j ($j = \overline{1, k}$) одночасно рівні нулю.

Помноживши (8.3.11) на довільне додатне число ε і додавши та віднявши отриману рівність від (8.3.10), отримаємо:

$$P_1(x_1 + \varepsilon d_1) + P_2(x_2 + \varepsilon d_2) + \dots + P_k(x_k + \varepsilon d_k) = P_0,$$

$$P_1(x_1 - \varepsilon d_1) + P_2(x_2 - \varepsilon d_2) + \dots + P_k(x_k - \varepsilon d_k) = P_0.$$

Таким чином, точки

$$X^{(1)} = (x_1 + \varepsilon d_1; x_2 + \varepsilon d_2; \dots; x_k + \varepsilon d_k; 0; \dots; 0),$$

і

$$X^{(2)} = (x_1 - \varepsilon d_1; x_2 - \varepsilon d_2; \dots; x_k - \varepsilon d_k; 0; \dots; 0)$$

є розв'язками системи (8.1), але не обов'язково допустимими. Так як $x_j > 0$ ($j = \overline{1, k}$), то для будь-яких d_j ($j = \overline{1, k}$) завжди можна вибрати число ε настільки малим, що перші k координат точок $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ будуть додатними, тобто $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ стануть допустимими розв'язками (8.1).

Очевидно, що в цьому випадку

$$X = \frac{1}{2} X^{(1)} + \frac{1}{2} X^{(2)},$$

а це означає, що X не є кутовою точкою системи обмежень, тому припущення про лінійну залежність векторів $P_1, P_2, \dots, P_k$ є хибним. Таким чином, вектори $P_1, P_2, \dots, P_k$ є лінійно незалежними.

Так як в m -вимірному просторі будь-яка система з $m+1$ вектора є лінійно залежною, то $k \leq m$.

Наслідок. Якщо існує, і при тому єдиний, розв'язок задачі лінійного програмування, то він співпадає з одним із допустимих базисних розв'язків системи обмежень.

Справедливість останнього твердження впливає безпосередньо з теорем 2, 4.

Отже, оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування потрібно шукати серед скінченного числа допустимих базисних розв'язків системи обмежень. Але навіть в найпростіших задачах (при невеликих значеннях m та n), знаходження оптимального розв'язку шляхом розгляду всіх базисних розв'язків є дуже трудомістким процесом, так як кількість базисних розв'язків може бути досить великою. Тому потрібна яка-небудь обчислювальна схема, яка дозволяє здійснювати перехід від одного допустимого базисного розв'язку до іншого, при якому лінійна форма або наближається до оптимального значення, або не змінює свого значення.

Однією з таких обчислювальних схем є симплексний метод, який буде розглянутий в наступному розділі.

Питання для самоконтролю

1. Який вигляд має канонічна задача лінійного програмування?
2. Що таке оптимальний план задачі?
3. Як звести систему обмежень у вигляді нерівностей до канонічного вигляду?
4. Що таке базисний розв'язок?
5. Що таке допустимий базисний розв'язок?
6. Що таке вироджений розв'язок?
7. Сформулюйте основні теореми лінійного програмування.

Задачі для самостійного розв'язання

Записати задачі лінійного програмування в канонічному вигляді:

$$1) \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ F = -5x_1 - x_2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 7, \\ 11x_1 + x_2 \geq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ F = 9x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

9. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Алгоритм симплекс-методу дозволяє повністю дослідити задачу лінійного програмування. Якщо розв'язок існує, то його буде знайдено симплекс-процедурою, якщо розв'язку немає, то в процесі реалізації симплекс-процедури буде встановлено його відсутності. Суть симплекс-методу полягає у взаємозаміні базових змінних на вільні за спеціальною (описаною нижче) процедурою для одержання спочатку допустимого, а потім і оптимального розв'язку задачі. Використовуючи систему обмежень, приведену до канонічного вигляду, знаходять її довільний базисний розв'язок. Якщо перший базисний розв'язок виявився допустимим, то перевіряють його на оптимальність. Якщо він не оптимальний то переходять до наступного базисного допустимого розв'язку. При цьому лінійна форма якщо і не досягне оптимального значення, то наблизиться до нього*. З новим допустимим розв'язком роблять теж саме, до тих пір поки не знайдуть оптимальний розв'язок.

Якщо перший знайдений базисний розв'язок виявиться недопустимим, то за

* У випадку переходу до виродженого розв'язку значення лінійної форми може не змінитися.

допомогою симплексного методу проводять перехід до наступного базисного розв'язку, який дозволяє наблизитися до області допустимих розв'язків, поки на якомусь кроці не отримають допустимий базисний розв'язок. До отриманого розв'язку використовують механізм симплексного методу, описаний вище.

Таким чином, симплексний метод складається з двох етапів: 1) знаходження допустимого базисного розв'язку системи обмежень; 2) знаходження оптимального розв'язку. При цьому кожний з етапів може включати декілька кроків, які відповідають тому чи іншому базисному розв'язку. Так як кількість базисних розв'язків завжди обмежена, то обмежена і кількість кроків симплексного методу.

9.1. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД У ВИПАДКУ ДОПУСТИМОГО ПОЧАТКОВОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Розглянемо алгоритм симплексного методу на конкретному прикладі.

Приклад 5.1. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3 \leq 0, \\ x_1 - 5 \leq 0, \\ x_1 + 3x_2 - 14 \leq 0, \\ x_2 - 4 \leq 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (9.1.1)$$

$$L = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max. \quad (9.1.2)$$

Розв'язок. Приведемо задачу до канонічного вигляду. Спочатку для зручності всі нерівності приводимо до одного знаку $\leq$ (п'яту нерівність множимо на -1). Вільні члени переносимо в праву частину. Потім, перші п'ять обмежень-нерівностей записуємо у вигляді рівнянь. Для цього вводимо п'ять додаткових невід'ємних змінних x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 . Система (9.1.1) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 14, \\ x_2 + x_6 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + x_7 = 2, \\ x_i \geq 0, \quad j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

Для аналізу системи обмежень і знаходження її допустимого базисного

розв'язку, який оптимізує лінійну форму (9.1.2), запишемо отриману систему у вигляді розширеної матриці:

$$\left| \begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow -2 \leftarrow \end{array} \quad (9.1.3)$$

де останній рядок задає коефіцієнти біля невідомих в лінійній формі (в нижньому правому куті будемо записувати вільний член лінійної форми з протилежним знаком).

Очевидно, що система обмежень сумісна і її ранг рівний $r = m = 5$ (визначник складений з елементів, що знаходяться в 1–5 рядку і 3–7 стовпчиках, матриці (5.1.3) відмінний від нуля і рівний 1), тому число основних змінних рівне 5, а неосновних – 2.

Надалі стовпчики основної матриці, в яких один елемент рівний одиниці, а всі інші елементи рівні нулю, будемо називати *основними*, інші стовпчики – *неосновними*. В матриці (9.1.3) перші два стовпчики є неосновними, а стовпчики з третього по сьомий – основними.

Елементи, які знаходяться в крайньому правому стовпчику, тобто вільні члени рівнянь, будемо називати *вільними членами* відповідного рядка.

Вибираємо довільний базисний розв'язок. Для цього достатньо в якості основних вибрати змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 , які відповідають основним стовпчикам. Поклавши в (9.1.3) неосновні змінні x_1, x_2 рівними нулю, отримаємо базисний розв'язок $(0; 0; 3; 5; 14; 4; 2)$, який є допустимим. Тому нема необхідності в проведенні першого етапу симплексного методу. Зразу переходимо до відшукування оптимального розв'язку.

I крок. Основні змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 , неосновні – x_1, x_2 . Базисний розв'язок $(0; 0; 3; 5; 14; 4; 2)$. Лінійна форма (9.1.2) при даному базисному розв'язку рівна 0.

Задача полягає в тому, щоб від початкового допустимого базисного розв'язку перейти до іншого базисного розв'язку, при якому значення лінійної форми збільшиться. На кожному кроці переводимо одну змінну з неосновних в основні і одну змінну з основних в неосновні, тобто дві змінні змінюють свій статус.

Спочатку визначаємо, яку змінну вигідно перевести з неосновних в основні. Для цього оцінюємо лінійну форму – дивимось на знаки елементів останнього рядка матриці (9.1.3). Якщо елемент додатний, то відповідну змінну не вигідно відносити до неосновних, тобто брати рівною нулю (чим більше значення цієї змінної, тим більше значення приймає лінійна форма). Її потрібно переводити в основні змінні. Якщо ж елемент від'ємний, то відповідну змінну потрібно залишити в неосновних змінних (збільшення значення цієї змінної приведе до зменшення значення лінійної форми). У випадку, коли декілька елементів останнього рядка додатні, в основні, за звичай, переводять змінну, коефіцієнт біля якої найбільший. *Коли всі елементи останнього рядка від'ємні або рівні 0, то знайдений базисний розв'язок є оптимальним.*

Переведемо в основні змінну x_2 , так як їй відповідає більший коефіцієнт в лінійній формі, і відповідно другий стовпчик переведемо в основні стовпчики.

Стовпчик, який будемо переводити в основні називатимемо *опорним стовпчиком матриці*.

Тепер потрібно визначити, яку з основних змінних перевести в неосновні, тобто, який з основних стовпчиків перевести в неосновні. Для цього оцінимо на скільки максимально можна збільшити в кожному з рівнянь канонічної системи обмежень змінну x_2 так, щоб відповідна основна змінна залишилась невід'ємною. В першому рівнянні змінну x_2 можна необмежено збільшувати, при цьому основна змінна x_3 зростатиме, так як коефіцієнт біля x_2 від'ємний; в друге рівняння змінна x_2 не входить, тому воно також не дає обмежень на збільшення x_2 ; в третьому рівнянні змінну x_2 можна збільшувати до значення $14/3$, при цьому основна змінна x_5 дорівнюватиме нулю; в четвертому – до 4, при цьому $x_6 = 0$; в п'ятому – до 2, при цьому $x_7 = 0$.

Отже, найсильніше обмеження на збільшення змінної x_2 отримується з п'ятого рівняння, якому відповідає основна змінна x_7 . Таким чином, в неосновні потрібно перевести змінну x_7 і відповідно сьомий стовпчик матриці (9.1.3).

При визначенні, яку з основних змінних потрібно перевести в неосновні, в матриці (9.1.3) знаходимо рядок, в якому відношення вільного члена до відповідного елемента в опорному стовпчику є найменшим при умові, що цей елемент відмінний від нуля і того ж знаку, що й вільний член. (Якщо дві останні умови не виконуються, відношення приймаємо рівним ∞).

Рядок, якому відповідає знайдене найменше відношення, будемо називати *опорним рядком матриці*. Він вказує, яку з основних змінних і відповідно який основний стовпчик потрібно перевести в неосновні.

В даному прикладі

$$x_{2\max} = \min\left(\infty; \infty; \frac{14}{3}; \frac{4}{1}; \frac{2}{1}\right) = 2,$$

що відповідає п'ятому рядку матриці (3.3), тобто п'ятий рядок є опорним рядком матриці. При цьому змінна $x_7 = 0$ і її переводимо в неосновні, а отже в неосновні переводимо і сьомий стовпчик.

Виконаємо елементарні перетворення матриці (9.1.3) так, щоб в ній другий стовпчик став основним, при цьому сьомий стане основним. Для цього п'ятий рядок: додаємо до першого рядка; помноживши його на -3 , додаємо до третього рядка; на -1 – до четвертого; на -2 – до шостого рядка. Зроблені перетворення вказані праворуч матриці (5.1.3).

Отримаємо матрицю

-1	0	1	0	0	0	1	5	← ← ←
1	0	0	1	0	0	0	5	← -1 ←
7	0	0	0	1	0	-3	8	← -7 ←
2	0	0	0	0	1	-1	2	→ 1/2 →
-2	1	0	0	0	0	1	2	← 2 ←
5	0	0	0	0	0	-2	-4	← -5 ←

На першому кроці отримали базисний розв'язок

$$X = (0; 2; 5; 5; 8; 2; 0). \quad (9.1.5)$$

Значення лінійної форми при цьому рівне 4.

Зауваження. На кожному кроці можна зробити перевірку правильності зроблених елементарних перетворень: компоненти отриманого базисного розв'язку підставляємо в лінійну форму $F = x_1 + 2x_2 = 0 + 2 \cdot 2 = 4$, що співпадає з отриманим значенням лінійної форми.

II крок. Так як в останньому рядку матриці (9.1.4) один з елементів, а саме перший, додатний, то розв'язок (9.1.5) не оптимальний. Очевидно, що для наближення до оптимального розв'язку потрібно змінну x_1 , а отже, і перший стовпчик перевести в основні.

Знаходимо опорний рядок матриці (9.1.4), який відповідає першому стовпчику, тобто знаходимо максимально допустиме значення змінної x_1 :

$$x_{1\max} = \min\left(\infty; \frac{5}{1}; \frac{8}{7}; \frac{2}{2}; \infty\right) = 1.$$

Опорним рядком є четвертий рядок з базисною змінною x_6 . Отже, в неосновні

переводимо змінну x_6 і відповідно шостий стовпчик.

Змінюємо матрицю (9.1.4) так, щоб в ній перший стовпчик став основним, а шостий неосновним. Для цього робимо перетворення, вказані праворуч матриці (9.1.4).

Зауваження. Для зручності елементарні перетворення матриці (9.1.4) можна виконати в два етапи:

- 1) так як на перетині опорного стовпчика і опорного рядка стоїть 2, то цей рядок множимо на $\frac{1}{2}$ і записуємо отриману матрицю;
- 2) перший стовпчик робимо основним, записуємо отриману матрицю.

$$\left| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/2 & 1/2 & -9 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow -1/2 \leftarrow \\ \leftarrow -1/2 \leftarrow \\ \rightarrow \\ \leftarrow 1/2 \leftarrow \\ \leftarrow -1/2 \leftarrow \end{array}$$

На другому кроці отримали базисний розв'язок

$$X = (1; 4; 6; 4; 1; 0; 0). \quad (9.1.6)$$

Значення лінійної форми при цьому рівне 9.

III крок. В останньому рядку матриці сьомий елемент додатний, тому відповідні змінну і стовпчик переводимо в основні, і так як

$$x_{7\max} = \min \left(\frac{6}{1/2}; \frac{4}{1/2}; \frac{1}{1/2}; \infty; \infty \right) = 2,$$

то п'ятий стовпчик переводимо в неосновні. Отримаємо матрицю (9.1.7):

$$\left| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -7 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -10 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow -4 \leftarrow \\ \rightarrow 1/3 \rightarrow \\ \leftarrow 7 \leftarrow \\ \leftarrow 3 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \quad (9.1.7)$$

Базисний розв'язок рівний

$$X = (2; 4; 5; 3; 0; 0; 2). \quad (9.1.8)$$

Лінійна форма при цьому приймає значення 10.

IV крок. Розв'язок (9.1.8) теж є не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (9.1.7) шостий елемент додатний. Переводимо в основні шостий стовпчик, а в неосновні – четвертий, тому що

$$x_{6\max} = \min\left(\frac{5}{3}; \frac{3}{3}; \infty; \infty; \frac{4}{1}\right) = 1.$$

За допомогою перетворень, вказаних в (9.8), отримаємо матрицю

$$\left| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7/3 & -1/3 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right| \quad (9.1.9)$$

в якій всі елементи останнього рядка недодатні.

Отже, отриманий в (9.1.9) допустимий розв'язок

$$X = (5; 3; 1; 0; 0; 1; 9) \quad (9.1.10)$$

є оптимальним і $L_{\max} = 11$

$$\text{Перевірка. } L = x_1 + 2x_2 = 5 + 2 * 3 = 11.$$

9.2. ВИПАДОК НЕДОПУСТИМОГО ПОЧАТКОВОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай задача лінійного програмування задана в канонічному вигляді, тобто системою m лінійних рівнянь з n невідомими ($m < n$). Виберемо m основних змінних (не порушуючи загальності можна вважати, що основними змінними є останні m змінних). Тоді систему обмежень можна записати у вигляді матриці (5.2), в якій перші $n - m$ стовпчиків є неосновними, а останні m – основними:

$$\left| \begin{array}{cccccc|cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n-m} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n-m} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in-m} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \quad (9.2)$$

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc|c} a_{m-11} & \dots & a_{m-1j} & \dots & a_{m-1n-m} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b_{m-1} \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn-m} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_m \end{array} \right\|$$

Даному способу розбиття змінних на основні і неосновні відповідає базисний розв'язок

$$X = (\underbrace{0; 0; \dots; 0}_{n-m}; b_1; b_2; \dots, b_i; \dots; b_{m-1}; b_m).$$

Розглянемо випадок, коли цей розв'язок є недопустимим. Від даного базисного розв'язку потрібно перейти до якого-небудь допустимого базисного розв'язку, причому цей перехід не обов'язково відбувається за один крок.

За припущенням, вихідний базисний розв'язок є недопустимим, тобто серед елементів $b_1, b_2, \dots, b_m$ в (9.2) є хоча б один від'ємний. Нехай це елемент b_i . Тоді основна змінна x_{n-m+i} в даному базисному розв'язку є від'ємною.

Для переходу до нового базисного розв'язку необхідно вирішити два питання:

- 1) яку неосновну змінну перевести в основні;
- 2) яку основну змінну перевести в неосновні замість змінної переведеної в основні.

При переході неосновної змінної в основні вона не зменшується, а, як правило, збільшується: замість нуля в вихідному базисному розв'язку в новому базисному розв'язку вона прийме додатне значення (винятком є вироджені розв'язки). Тому при розв'язанні питання про те, яку неосновну змінну перевести в основні, потрібно знайти неосновні змінні, при збільшенні яких зростає основна змінна, яка була від'ємною в вихідному базисному розв'язку. Повернемося до i -го рядка матриці (9.2), в якій b_i від'ємне. Очевидно, що основна змінна x_{n-m+i} зростатиме при зростанні тих неосновних змінних, коефіцієнти при яких в даному рядку від'ємні. Таким чином, *в основні можна переводити ті неосновні змінні, які в рядку з від'ємним вільним членом мають від'ємні коефіцієнти.*

При цьому можливі три випадки:

1) В i -му рядку матриці (9.2) в неосновних стовпчиках немає від'ємних елементів, тобто всі елементи $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in-m}$ додатні. В цьому випадку система обмежень несумісна. Дійсно, через невід'ємність всіх змінних, в тому числі і $x_1, x_2, \dots, x_{n-m}$, з i -го рядка, в якому права частина b_i від'ємна і всі елементи $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in-m}$ додатні, випливає, що змінна x_{n-m+i} не може набути невід'ємного значення.

2) В i -му рядку системи (9.2) є один від'ємний елемент a_{ij} , який належить j -му неосновному стовпчику. В цьому випадку в основні змінні переводиться змінна

x_j .

3) В i -му рядку є декілька від'ємних елементів у неосновних стовпчиках. В цьому випадку в основні можна переводити будь-яку з відповідних неосновних змінних.

Далі необхідно встановити, яку основну змінну перевести в неосновні. Для цього потрібно використати правило, описане в прикладі 5.1: *знаходимо рядок, в якому відношення вільного члена до відповідного елемента в опорному стовпчику є найменшим при умові, що цей елемент відмінний від нуля і того ж знаку, що й вільний член.* (Якщо дві останні умови не виконуються, відношення приймаємо рівним ∞).

Виконавши необхідні елементарні перетворення матриці (9.2), знаходимо наступний базисний розв'язок.

В новій матриці кількість від'ємних вільних членів або співпадає з їх кількістю в попередній матриці (9.2), або на одиницю менша. Це залежить від того, додатний чи від'ємний вільний член в опорному рядку.

Якщо в опорному рядку вільний член від'ємний, то в новому базисному розв'язку кількість від'ємних компонент виявиться на одиницю меншою, ніж у вихідному. Якщо ж в опорному рядку вільний член додатний або рівний нулю, то в новому базисному розв'язку кількість від'ємних компонент залишиться такою ж, як і у вихідному.

Таким чином, отримується новий, поліпшений базисний розв'язок, який є ближчим до області допустимих розв'язків системи обмежень. Якщо він виявиться недопустимим, то до нього потрібно знову застосувати наведену вище схему. В результаті скінченої кількості кроків отримаємо допустимий базисний розв'язок.

Після знаходження допустимого базисного розв'язку, переходимо до другого етапу симплексного методу, описаного в прикладі 9.1.

Розглянемо приклад, в якому перший знайдений базисний розв'язок є недопустимим.

Приклад 9.2. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0, \\ x_1 - x_2 + 4 \geq 0, \\ x_1 + 6x_2 - 6 \leq 0, \\ x_1 - 5 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (9.2.1)$$

$$L = x_1 + x_2 \rightarrow \max. \quad (9.2.2)$$

Розв'язок. Приведемо систему обмежень (9.2.1) до одного знаку $\leq$ і запишемо її в канонічній формі, ввівши додаткові змінні $x_j \geq 0, j = \overline{3, 7}$:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\ x_1 + 6x_2 + x_6 = 6, \\ x_1 + x_7 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}. \end{cases} \quad (9.2.3)$$

Отримана система в матричній формі матиме вигляд:

$$\left| \begin{array}{ccccccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow -1/2 \rightarrow & & \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow -1 & \leftarrow & \\ \leftarrow -1 & \leftarrow & \\ \leftarrow -1 & \leftarrow & \end{array} \right|$$

Очевидно, що в якості базисного розв'язку даної системи обмежень можна взяти розв'язок, який відповідає основним змінним $x_j, j = \overline{3, 7}$, і неосновним – x_1, x_2 , і рівний

$$X = (0; 0; -4; -4; 4; 6; 5). \quad (9.2.5)$$

I крок. Розв'язок (9.2.5) недопустимий (дві його компоненти від'ємні).

Для того, щоб вирішити, яку змінну потрібно перевести з неосновних в основні, розглянемо будь-який з двох рядків матриці (9.2.4) з від'ємним вільним членом, наприклад перший. Він показує, що в основні змінні можна перевести як x_1 , так і x_2 , так як перший та другий елементи вибраного рядка від'ємні і при збільшенні кожної з указаних змінних змінна x_3 збільшуватиметься. Подивимось, що відбувається при переведенні в основні кожної з неосновних змінних x_1 та x_2 .

1) В основні переводимо змінну x_1 . Щоб вияснити, яку основну змінну треба перевести в неосновні, знайдемо опорний рядок матриці (5.2.4), що відповідає опорному першому стовпчику:

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-4}{-1}; \frac{-4}{-2}; \infty; \frac{6}{1}; \frac{5}{1}\right) = 2.$$

Отримане значення відповідає другому рядку, в якому вільний член від'ємний. Таким чином, перевівши в основні змінну x_1 , в неосновні перейде змінна x_4 , яка в вихідному базисному розв'язку була від'ємною. В результаті отримаємо новий базисний розв'язок, в якому від'ємних компонент буде на одну менше в порівнянні з вихідним.

2) В основні переведемо змінну x_2 . Для визначення опорного рядка знаходимо значення $x_{2\max}$:

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-4}{-2}; \frac{-4}{-1}; \frac{4}{1}; \frac{6}{6}; \infty\right) = 1.$$

Воно відповідає четвертому рядку, тобто в неосновні потрібно перевести змінну x_6 , яка в вихідному базисному розв'язку була додатною. Таким чином, отриманий новий базисний розв'язок, як і початковий, буде містити дві від'ємні компоненти.

Отже, вигідніше в основні змінні перевести змінну x_1 .

Переходимо до базисного розв'язку, в якому основні змінні x_1, x_3, x_5, x_6, x_7 , а неосновні – x_2, x_4 . Для цього в матриці (9.16) робимо перетворення, які перший стовпчик роблять основним, а четвертий неосновним (опорним рядком є другий):

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -3/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 11/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} -2 & \rightarrow & \\ 1/2 & \leftarrow & \\ 1/2 & \leftarrow & \\ -1/2 & \leftarrow & \\ -1/2 & \leftarrow & \\ -1/2 & \leftarrow & \end{array} \right] \quad (9.2.6)$$

Отримаємо базисний розв'язок

$$X = (2; 0; -2; 0; 6; 4; 3). \quad (9.2.7)$$

II крок. Розв'язок (9.2.7) теж недопустимий: основна змінна x_3 , яка знаходиться з першого рядка матриці (9.2.6), приймає від'ємне значення. Перейдемо до наступного базисного розв'язку. Для цього знову вяснимо, яку з неосновних змінних перевести в основні, а яку з основних – в неосновні.

Обидва елементи, які знаходяться в неосновних стовпчиках першого рядка, від'ємні, тому в основні змінні можна перевести будь-яку із змінних x_2 або x_4 . Проаналізуємо обидва варіанти і виберемо вигідніший з них.

При переведенні в основні змінної x_2 опорним рядком буде четвертий рядок,

так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-2}{-3/2}; \frac{2}{1/2}; \frac{6}{3/2}; \frac{4}{11/2}; \infty\right) = \frac{4}{11/2} = \frac{8}{11}.$$

Тоді в неосновні змінні потрібно переводити змінну x_6 . Але вона була додатною в останньому базисному розв'язку, тобто змінна x_3 залишиться від'ємною.

При переведенні в основні змінної x_4 опорним рядком буде перший рядок, так як

$$x_{4\max} = \min\left(\frac{-2}{-1/2}; \infty; \infty; \frac{4}{1/2}; \frac{3}{1/2}\right) = 4,$$

тобто в неосновні потрібно переводити змінну x_3 , яка є від'ємною в останньому базисному розв'язку.

Отже, переводимо в основні змінну x_4 , а в неосновні – x_3 .

Зробимо перетворення в матриці (9.2.6) такі, щоб четвертий стовпчик став основним, а третій неосновним:

$$\left| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow 2 \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \quad (9.2.8)$$

$$\text{Отримали базисний розв'язок } X = (4; 0; 0; 4; 8; 2; 1) \quad (9.2.9)$$

з основними змінними x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 і неосновними – x_2, x_3 . Лінійна форма приймає значення рівне 4.

III крок. Розв'язок (9.2.9) є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (9.2.8) третій елемент додатний. Отже, змінну x_3 потрібно перевести в основні. Опорним рядком є п'ятий рядок:

$$x_{3\max} = \min\left(\infty; \infty; \infty; \frac{2}{1}; \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Таким чином, в основні переводимо змінну x_3 , а в неосновні – x_7 . Для цього в матриці (5.2.8) третій стовпчик робимо основним, а сьомий стане неосновним:

$$\left| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow 2 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \quad (9.2.10)$$

$$\left| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \rightarrow 1/6 \rightarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array}$$

Отримуємо базисний розв'язок

$$X = (5; 0; 1; 6; 9; 1; 0), \quad (9.2.11)$$

який відповідає основним змінним x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 і неосновним – x_2, x_7 . Лінійна форма приймає значення 5.

IV крок. Базисний розв'язок (9.2.11) не оптимальний, так як другий елемент останнього рядка матриці (9.2.10) є додатним. Знаходимо новий базисний розв'язок: в основні переводимо змінну x_2 , а в неосновні – x_6 , так як

$$x_{2\max} = \min\left(\infty; \infty; \frac{9}{1}; \frac{1}{6}; \infty\right) = \frac{1}{6}$$

відповідає четвертому рядку матриці (9.2.10). Для цього в матриці (9.2.10) другий стовпчик робимо основним, а шостий – неосновним (опорним рядком є четвертий):

$$\left| \begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 11/6 & 37/6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/6 & 7/6 & 53/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & -5/6 & -31/6 \end{array} \right| \quad (9.2.12)$$

Отриманий з (9.2.12) базисний розв'язок $(5; 1/6; 4/3; 37/6; 53/6; 0; 0)$, який відповідає основним змінним x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 і неосновним – x_6, x_7 , є оптимальним так як обидва елементи в вільних стовпчиках останнього рядка від'ємні.

Максимальне значення лінійної форми рівне $L_{\max} = 31/6$.

Перевірка. $L = x_1 + x_2 = 5 + 1/6 = 31/6$

Як приклад розглянемо задачу про складання оптимального раціону.

Приклад 9.3. На підприємстві заготовляють сировину: не менше 8 од. виду сировини А, не менше 12 од. виду сировини В, не менше 6 од. виду сировини С. Для виконання плану можна закупити три основні види сировини, занумеруємо їх: I, II, III. Вартість одиниці кожного виду сировини наведена в таблиці 2.1.

Потрібно забезпечити мінімальні затрати підприємства.

Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2, x_3 – кількість одиниць I, II і III видів сировини відповідно. Потрібно знайти мінімум лінійної форми $L = 2x_1 + 12x_2 + 4x_3$ або максимум форми

$$L_1 = -L = -2x_1 - 12x_2 - 4x_3 \quad (5.3.1)$$

Таблиця 5.1

Поживні речовини	Норма (мін. добова потреба)	Види сировини		
		I	II	III
A	8	1	8	3
B	12	8	1	6
C	6	2	10	2
Вартість		2	12	4

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 \geq 8, \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 \geq 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (9.3.2)$$

Приведемо систему обмежень (9.3.2) до одного знаку $\leq$ і запишемо її в канонічній формі, ввівши додаткові змінні x_4, x_5, x_6 :

$$\begin{cases} -x_1 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = -8, \\ -8x_1 - x_2 - 6x_3 + x_5 = -12, \\ -2x_1 - 10x_2 - 2x_3 + x_6 = -6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases} \quad (9.3.3)$$

Представимо модель задачі у вигляді розширеної матриці:

$$\left| \begin{array}{cccccc|c} -1 & -8 & -3 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ -8 & -1 & -6 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ -2 & -10 & -2 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ -2 & -12 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & -1/8 & \rightarrow \\ \leftarrow & 2 & \leftarrow \\ \leftarrow & 2 & \leftarrow \end{array} \right| \quad (9.3.4)$$

Очевидно, що в якості основних змінних можна взяти x_4, x_5, x_6 , а в якості неосновних x_1, x_2, x_3 . Тоді базисний розв'язок $X = (0; 0; 0; -8; -12; -6)$. Отриманий базисний розв'язок є недопустимим.

I крок. В основні можна переводити будь-яку із змінних x_1, x_2, x_3 . Переведемо в основні змінну x_1 . Так як

$$X_{\max} = \min\left(\frac{-8}{-1}; \frac{-12}{-8}; \frac{-6}{-2}\right) = \frac{3}{2}$$

то опорним є другий рядок і в неосновні потрібно перевести змінну x_5 .

Отримаємо:

$$\left| \begin{array}{cccccc|c} 0 & -63/8 & -9/4 & 1 & -1/8 & 0 & -13/2 \\ 1 & 1/8 & 3/4 & 0 & -1/8 & 0 & 3/2 \\ 0 & -39/4 & -1/2 & 0 & -1/4 & 1 & -3 \\ \hline 0 & -47/4 & -5/2 & 0 & -1/4 & 0 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \rightarrow -8/63 \rightarrow \\ \leftarrow -1/8 \leftarrow \\ \leftarrow 39/4 \leftarrow \\ \leftarrow 47/4 \leftarrow \end{array} \quad (9.3.5)$$

Основні змінні x_1, x_4, x_6 , неосновні x_2, x_3, x_5 . Базисний розв'язок

$$X = \left(\frac{88}{63}, \frac{52}{63}, 0, 0, 0, \frac{106}{21} \right) \text{ є недопустимим.}$$

II крок. Проаналізуємо перший і третій рядки матриці (9.3.5), з яких визначаються змінні x_4, x_6 , що є від'ємними в останньому базисному розв'язку.

З обох рядків випливає, що в основні змінні можна переводити одну з неосновних змінних x_2, x_3, x_5 :

$$x_{21},$$

$$x_{3\max} = \min \left(\frac{-13/2}{-9/4}, \frac{3/2}{3/4}, \frac{-3}{-1/2} \right) = \min \left(\frac{26}{9}, 2, 6 \right) = 2,,$$

$$x_{5\max} = \min \left(\frac{-13/2}{-1/8}, \infty, \frac{-3}{-1/4} \right) = \min(52; \infty; 12) = 12.$$

В неосновні при цьому потрібно перевести змінні x_6, x_1 і x_6 відповідно.

Так як шоста компонента останнього базисного розв'язку від'ємна, то переводити в основні змінні доцільно або x_2 , або x_5 . Переведемо, наприклад, змінну x_2 за допомогою перетворень, вказаних в матриці (5.3.6):

$$\left| \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2/7 & -8/63 & 1/2 & 0 & 52/63 \\ 1 & 0 & 5/7 & 1/63 & -8/63 & 0 & 88/63 \\ 0 & 0 & 16/7 & -26/63 & -2/21 & 1 & 106/21 \\ \hline 0 & 0 & 6/7 & -94/63 & -4/63 & 0 & 800/63 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow -2/7 \leftarrow \\ \rightarrow 7/5 \rightarrow \\ \leftarrow -16/7 \leftarrow \\ \leftarrow -6/7 \leftarrow \end{array} \quad (9.3.6)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_4 , неосновні x_3, x_5, x_6 , базисний розв'язок

$$X = \left(\frac{88}{63}, \frac{52}{63}, 0, 0, 0, \frac{106}{21} \right). \quad (9.3.7)$$

III крок. Розв'язок (9.3.7) є допустимим і лінійна форма приймає значення $-800/63$. Але він не оптимальний (в останньому рядку третій елемент додатний).

В основні переводимо змінну x_3 , а в неосновні – x_1 , так як

$$x_{3\max} = \min\left(\frac{52/63}{2/7}, \frac{88/63}{5/7}, \frac{106/21}{16/7}\right) = \min\left(\frac{26}{9}, \frac{88}{45}, \frac{53}{24}\right) = \frac{88}{45}.$$

Робимо це за допомогою перетворень, вказаних в матриці (5.3.6):

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -2/5 & 1 & 0 & -2/15 & 1/15 & 0 & 4/15 \\ 7/5 & 0 & 1 & 1/45 & -8/45 & 0 & 88/45 \\ -16/5 & 0 & 0 & -58/45 & 14/45 & 1 & 26/45 \\ \hline -6/5 & 0 & 0 & -68/45 & 4/45 & 0 & 496/45 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow -1/15 \leftarrow \\ \leftarrow 8/45 \leftarrow \\ \rightarrow 45/14 \rightarrow \\ \leftarrow -4/45 \leftarrow \end{array} \quad (9.3.8)$$

Основні змінні x_2, x_3, x_6 , неосновні x_1, x_4, x_5 . Базисний розв'язок

$$X = \left(0; \frac{4}{15}; \frac{88}{45}; 0; 0; \frac{26}{45} \right), \quad (9.3.9)$$

значення лінійної форми рівне $-496/45$.

VI крок. Розв'язок (9.3.9) теж не оптимальний (в останньому рядку п'ятий елемент додатний).

В основні переводимо змінну x_5 , в неосновні – x_6 , так як

$$x_{5\max} = \min\left(\frac{4/15}{1/15}; \infty; \frac{26/45}{14/45}\right) = \min\left(4; \frac{13}{7}\right) = \frac{13}{7}.$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2/7 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3/14 & 1/7 \\ -3/7 & 0 & 1 & -5/7 & 0 & 4/7 & 16/7 \\ -72/7 & 0 & 0 & -29/7 & 1 & 45/14 & 13/7 \\ \hline -2/7 & 0 & 0 & -8/7 & 0 & -2/7 & 76/7 \end{array} \right] \quad (9.3.10)$$

Основні змінні x_2, x_3, x_5 , неосновні x_1, x_4, x_6 . Отримуємо розв'язок

$$X = \left(0; \frac{1}{7}; \frac{16}{7}; 0; \frac{13}{7}; 0 \right),$$

який є оптимальним (в останньому рядку нема додатних елементів).

Отже, $L_{\max} = 76/7$ і $L_{\min} = 76/7$.

Перевірка $L = 2x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 2 \cdot 0 + 12 \cdot 1/7 + 4 \cdot 16/7 = 76/7$.

9.4 ДЕЯКІ ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

В розглянутих вище задачах, розв'язаних за допомогою симплексного методу, система обмежень була сумісною, допустимі базисні розв'язки не виродженими і лінійна форма досягала скінченного оптимального значення, причому єдиного.

Проілюструємо на прикладах випадки, коли ці умови порушуються.

Приклад 9.4. Знайти максимум функції $L = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ 4x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.4.1)$$

Розв'язок. Приведемо систему обмежень (9.4.1) до знаку $\leq$ і запишемо її в канонічній формі, ввівши додаткові змінні:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 - 4x_2 + x_4 = -4, \\ -4x_1 - x_2 + x_5 = -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (9.4.2)$$

Запишемо задачу в матричному вигляді

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow -1/4 \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \quad (9.4.3)$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5 , неосновні x_1, x_2 . Базисний розв'язок $(0; 0; -2; -4; -4)$. Отриманий розв'язок є недопустимим.

I крок. Переведемо в основні змінну x_1 , а в неосновні – x_5 , так як

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-2}{-1}; \frac{-4}{-1}; \frac{-4}{-4}\right) = 1.$$

В результаті отримаємо матрицю:

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 0 & -3/4 & 1 & 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & -15/4 & 0 & 1 & -1/4 & -3 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 1 \\ \hline 0 & 11/4 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow 3/4 \leftarrow \\ \rightarrow -4/15 \rightarrow \\ \leftarrow -1/4 \leftarrow \\ \leftarrow -11/4 \leftarrow \end{array} \quad (9.4.4)$$

з основними змінними x_1, x_3, x_4 , неосновними x_2, x_5 і базисним розв'язком $(1; 0; -1; -3; 0)$. Отриманий розв'язок теж недопустимий.

II крок. В основні переводимо змінну x_2 , а в неосновні – x_4 , так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{-1}{-3/4}; \frac{-3}{-15/4}; \frac{1}{1/4}\right) = \frac{4}{5}.$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/15 & 1/15 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 1/15 & -4/15 & 4/5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11/15 & 1/15 & -16/5 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow -5 \rightarrow \\ \leftarrow 4/15 \leftarrow \\ \leftarrow -1/15 \leftarrow \\ \leftarrow -11/15 \leftarrow \end{array} \quad (9.4.5)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_3 , неосновні x_4, x_5 , базисний розв'язок недопустимий:

$$\left(\frac{4}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{2}{5}; 0; 0 \right).$$

III крок. В основні переводимо змінну x_4 , а в неосновні – x_3 , так як

$$x_{4\max} = \min\left(\frac{-2/5}{-1/5}; \infty; \frac{4/5}{1/15}\right) = 2.$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & 11/3 & 0 & -2/3 & -14/3 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow 5 \leftarrow \\ \leftarrow 4/3 \leftarrow \\ \rightarrow 3 \rightarrow \\ \leftarrow -11/3 \leftarrow \end{array} \quad (9.4.6)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_4 , неосновні x_3, x_5 , базисний розв'язок

$$\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 0; 2; 0 \right), \text{ лінійна форма рівна } 14/3.$$

IV крок. Отриманий розв'язок є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (5.4.6) третій елемент додатний. В основні переводимо змінну x_3 , а в неосновні – x_1 , так як

$$x_{3\max} = \min\left(\infty; \infty; \frac{2/3}{1/3}\right) = 2.$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 15 & 0 & 0 & 1 & -4 & 12 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ \hline -11 & 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \end{array} \right\| \quad (9.4.7)$$

Основні змінні x_2, x_3, x_4 , неосновні x_1, x_5 , базисний розв'язок $(0; 4; 2; 12; 0)$, лінійна форма рівна 12.

V крок. Отриманий розв'язок не оптимальний (в останньому рядку матриці

(5.4.7) п'ятий елемент додатний). Змінну x_5 потрібно перевести в основні, але в опорному стовпчику всі елементи від'ємні, тобто жодне з рівнянь не обмежує зростання змінної x_5 – вона може бути нескінченною:

$$x_{5\max} = \min(\infty; \infty; \infty) = \infty.$$

При цьому функція L , яка в вибраному базисі має вигляд

$L = 12 + 3x_5 - 11x_1$, теж може необмежено зростати. Тому можна записати, що $L_{\max} = \infty$. Геометрично це означає, що дана система обмежень має необмежену область розв'язків, і вектор $\vec{n}(1,3)$ направлений в сторону, де немає обмежень області.

Приклад 9.5. Знайти максимум функції $L = 4x_1 + 5x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.5.1)$$

Розв'язок. Помножимо другу нерівність на -1 . Введемо додаткові змінні і приведемо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ \hline 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \\ \leftarrow -5 \leftarrow \end{array} \quad (9.5.2)$$

Основні змінні x_3, x_4 , неосновні x_1, x_2 , базисний розв'язок $(0; 0; 1; -4)$. Отриманий базисний розв'язок є недопустимим.

I крок. В основні переводимо змінну x_2 , а в неосновні – x_3 , так як

$$x_{2\max} = \min\left(\frac{1}{1}; \infty; \frac{-4}{-2}\right) = 1.$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ \hline -1 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{array} \right\| \quad (9.5.3)$$

Основні змінні x_2, x_4 , неосновні x_1, x_3 , базисний розв'язок $(0; 1; 0; -2)$.

II крок. Отриманий розв'язок недопустимий. Але в другому рядку вільний член від'ємний, а всі елементи неосновних стовпчиків невід'ємні, тобто немає можливості

покращити отриманий базисний розв'язок. Це означає, що початкова система обмежень є несумісною, тобто вона не має жодного допустимого розв'язку, в тому числі і оптимального.

Приклад 9.6. Знайти максимум функції $L = x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.6.1)$$

Розв'язок. Приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \end{array} \quad (9.6.2)$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5 , неосновні x_1, x_2 , базисний розв'язок $(0; 0; 1; 4; 1)$.

I крок. Отриманий розв'язок є допустимим, але не оптимальним (в останньому рядку матриці (5.6.2) два додатних елементи). В основні переводимо змінну x_1 , а в неосновні – x_3 :

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow 1/2 \rightarrow \\ \\ \leftarrow -2 \leftarrow \end{array} \quad (9.6.3)$$

Основні змінні x_1, x_4, x_5 , неосновні x_2, x_3 , базисний розв'язок $(1; 0; 0; 3; 2)$.

II крок. Розв'язок не оптимальний. В основні переводимо змінну x_2 , а в неосновні – x_4 :

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow -1/2 \leftarrow \\ \leftarrow 1/2 \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \end{array} \quad (9.6.4)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_5 , неосновні x_3, x_4 , базисний розв'язок

$$\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 0; 0; 2\right).$$

III крок. Отриманий розв'язок є оптимальним, так як виконується критерій оптимальності – в останньому рядку матриці (5.6.4) всі елементи недодатні.

Але в лінійній формі матриці (5.6.4) відсутня одна з неосновних змінних – змінна x_3 входить з нульовим коефіцієнтом. Це означає, що дана змінна не є вигідною і не вигідною. Попробуємо перевести її в основні змінні, при цьому в неосновні, очевидно, перейде змінна x_5 . В результаті перетворень отримаємо матрицю:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right\| \quad (9.6.5)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_3 , неосновні x_4, x_5 , базисний розв'язок

$$\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 2; 0; 0\right).$$

IV крок. Критерій оптимальності виконаний, тобто даний базисний розв'язок теж є оптимальним.

Ми отримали два оптимальних розв'язки

$$X^{(1)} = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 0; 0; 2\right) \text{ і } X^{(2)} = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 2; 0; 0\right),$$

при яких лінійна форма приймає одне й теж саме значення $L_{\max} = 4$.

$$\text{Перевірка. } L = x_1 + x_2 = 5/2 + 3/2 = 4, L = x_1 + x_2 = 3/2 + 5/2 = 4$$

Таким чином, єдиність оптимального розв'язку порушується. Задача має безліч розв'язків, які запишуться у вигляді

$$X = \alpha X^{(1)} + (1 - \alpha) X^{(2)},$$

де $0 < \alpha < 1$.

Це відбувається тоді, коли на деякому кроці виконується критерій оптимальності і в лінійній формі відсутня хоча б одна з неосновних змінних.

Приклад 9.7. Знайти максимум функції $L = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.7.1)$$

Розв'язок. Вводимо додаткові змінні і приводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \end{cases}$$

або

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow -1 \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow -2 \leftarrow \end{array}$$

Основні змінні x_3, x_4, x_5 , неосновні x_1, x_2 , базисний розв'язок $(0; 0; 2; 2; 4)$.

I крок. Базисний розв'язок є допустимим, але не оптимальним. В основні переводимо змінну x_2 , а в неосновні – x_4 :

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \\ \leftarrow -5 \leftarrow \end{array} \quad (9.7.3)$$

Основні змінні x_2, x_3, x_5 , неосновні x_1, x_4 , базисний розв'язок $(0; 2; 0; 0; 2)$, лінійна форма рівна 4.

II крок. Отриманий базисний розв'язок є допустимим виродженим розв'язком, так як одна з основних змінних, а саме x_3 , рівна нулю. В основні змінні переводимо x_1 , а в неосновні – x_3 :

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & -4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow 1/2 \rightarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \quad (9.7.4)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_5 , неосновні x_3, x_4 , базисний розв'язок $(0; 2; 0; 0; 2)$, лінійна форма рівна 4.

III крок. Отриманий розв'язок теж є допустимим виродженим розв'язком (базисний розв'язок і значення лінійної форми не змінились в порівнянні з (9.7.5)). Переводимо в основні змінну x_4 , а в неосновні – x_5 :

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1/2 & 0 & -3/2 & -7 \end{array} \right\| \quad (9.7.5)$$

Основні змінні x_1, x_2, x_4 , неосновні x_3, x_5 , базисний розв'язок $(1; 3; 0; 1; 0)$ є оптимальним розв'язком і $L_{\max} = 7$.

Перевірка. $L = x_1 + 2x_2 = 1 + 2 * 3 = 7$.

9.5 АЛГОРИТМ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ

1. Записуємо задачу лінійного програмування в стандартному вигляді.

$$L_1 = 0 - (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n) \Rightarrow \min$$

$$y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n)$$

$$y_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n)$$

...

$$y_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n)$$

$$x_i \geq 0, y_i \geq 0$$

Якщо потрібно знайти мінімум лінійної форми L , то задачу зводимо до задачі знаходження максимуму лінійної форми. $L_1 = -L$

2. Записуємо систему обмежень і лінійну форму задачі у вигляді розширеної матриці. В останньому рядку (виділяємо його горизонтальною лінією) в лівій частині матриці записуємо коефіцієнти біля відповідних невідомих лінійної форми, а в правій частині – її вільний член з протилежним знаком.

3. Знаходимо довільний базисний розв'язок системи обмежень. Для цього достатньо в якості основних вибрати змінні, які відповідають основним стовпчикам, а неосновні змінні прирівняти до нуля.

4. Якщо знайдений базисний розв'язок є допустимим, то переходимо до п. 7, якщо ж – недопустимим, то попередньо виконуємо п. 6.

5. Від отриманого недопустимого базисного розв'язку переходимо до

допустимого базисного розв'язку або встановлюємо, що система обмежень є несумісною. При цьому аналізуємо рядок з від'ємним вільним членом і в основні переводимо змінну з від'ємним коефіцієнтом.

6. Отримавши допустимий базисний розв'язок, перевіряємо критерій оптимальності. *Якщо всі елементи останнього рядка розширеної матриці є недодатними, то отриманий розв'язок є оптимальним і розв'язання закінчено.*

7. Якщо в останньому рядку розширеної матриці є один або декілька додатних елементів, то отриманий допустимий базисний розв'язок не є оптимальним і переходимо до нового базисного розв'язку.

З неосновних змінних, які входять в лінійну форму з додатними коефіцієнтами, вибирають ту, якій відповідає найбільший коефіцієнт (хоча можна брати будь-яку з них), і переводять її в основні.

8. Для визначення основної змінної, яку потрібно перевести в неосновні, знаходять опорний рядок розширеної матриці, якому відповідає найменше відношення вільного члена рядка до відповідного елемента неосновного стовпчика, який переводиться в основні, при умові, що цей елемент відмінний від нуля і того ж знаку, що й вільний член.

Основна змінна з опорного рядка переводиться в неосновні змінні.

9. Робимо елементарні перетворення розширеної матриці так, щоб основним змінним відповідали основні стовпчики.

10. Повторюємо п. 8 – п. 10 до тих пір, поки не буде виконуватися критерій оптимальності. Після цього виписуємо оптимальний розв'язок і оптимальне значення лінійної форми.

11. Якщо критерій оптимальності виконується і в лінійній формі хоча б один елемент в неосновних стовпчиках рівний нулю, то отриманий оптимальний розв'язок неєдиний.

12. Якщо в лінійній формі є додатний елемент, але всі елементи відповідного неосновного стовпчика недодатні, то вона необмежена: $F_{\max} = \infty$.

Питання для самоконтролю

1. В чому суть симплексного методу?
2. З яких двох основних етапів складається симплекс-метод?
3. Який стандартний вигляд системи обмежень при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом?
4. Який стандартний вигляд цільової функції при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом?
5. У якому випадку при розв'язанні задачі лінійного програмування

- симплекс-методом отриманий розв'язок вважається допустимим?
6. У якому випадку при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом отриманий розв'язок вважається оптимальним?
 7. Як за симплекс-методом визначити, що система обмежень задачі є несумісною?
 8. Як за симплекс-методом визначити, що задача не має оптимального розв'язку?
 9. Які стовпчики основної матриці називаються основними?
 10. Що таке опорний рядок матриці?
 11. Як розв'язується задача у випадку недопустимого базисного розв'язку?

Задачі для самостійного розв'язання

Розв'язати задачі лінійного програмування симплекс методом:

$$\begin{array}{ll}
 1) \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ F = -5x_1 - x_2. \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 7, \\ 11x_1 + x_2 \geq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ F = 9x_1 + 3x_2. \end{array} \right.
 \end{array}$$

10. ДВОЇСТА ЗАДАЧА

10.1. СКЛАДАННЯ ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧИ

Розглянемо дві задачі лінійного програмування.

Знайти максимум функції

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Знайти мінімум функції

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n, \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Ці задачі мають наступні властивості:

1°. В одній задачі знаходиться максимум функції, а в іншій – мінімум.

2°. Коефіцієнти біля змінних в лінійній формі однієї задачі є вільними членами системи обмежень іншої задачі і, навпаки, вільні члени системи обмежень однієї задачі – коефіцієнтами біля змінних в лінійній формі іншої задачі.

3°. В кожній задачі система обмежень задається у вигляді системи нерівностей, при чому всі вони одного змісту, а саме: при знаходженні максимуму лінійної форми ці нерівності мають вигляд $\leq$, а при знаходженні мінімуму – вигляд $\geq$.

4°. Коефіцієнти біля змінних в системах обмежень описуються матрицями

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

які є транспонованими одна по відношенню до іншої.

5°. Кількість нерівностей в системі обмежень однієї задачі співпадає з кількістю змінних іншої задачі.

6°. Умова невід’ємності змінних присутня в обох задачах.

Дві задачі лінійного програмування, які задовольняють умовам 1° – 6° називають симетричними взаємно двоїстими задачами. Будемо розглядати тільки симетричні двоїсті задачі, а тому називатимемо їх коротко – *двоїстими задачами*.

Таким чином, кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність двоїсту їй задачу. Початкову задачу будемо називати вихідною (або прямою). Пряма і двоїста їй задача, взяті разом, утворюють пару взаємно двоїстих задач, причому будь-яку з них можна розглядати як вихідну, тоді інша буде двоїстою до неї.

Із сказаного випливає наступне правило складання задачі, двоїстої по відношенню до вихідної:

1. Приводимо всі нерівності системи обмежень вихідної задачі до нерівностей одного змісту: якщо в початковій задачі шукається максимум лінійної форми – до вигляду $\leq$; якщо ж мінімум – до вигляду $\geq$. Для цього нерівності, в яких ця вимога не виконується помножаємо на -1 .

2. Випишуємо матрицю A коефіцієнтів біля змінних вихідної задачі, отриманих після перетворень п. 1, і складаємо матрицю A^T , транспоновану до матриці A .

3. Складаємо систему обмежень двоїстої задачі, взявши в якості коефіцієнтів біля змінних елементи матриці A^T , а в якості вільних членів – коефіцієнти біля змінних в лінійній формі вихідної задачі, і записуємо нерівності протилежного

змісту в порівнянні з нерівностями, отриманими в п. 1.

4. Складаємо лінійну форму двоїстої задачі, взявши в якості коефіцієнтів біля змінних вільні члени системи обмежень вихідної задачі, отримані в п. 1.

5. Вказуємо що необхідно знайти при розв'язанні двоїстої задачі, а саме: мінімум лінійної форми, якщо в вихідній задачі знаходиться максимум, і максимум – якщо в вихідній задачі знаходиться мінімум.

6. Записуємо умову невід'ємності змінних двоїстої задачі.

Приклад. 10.1. Скласти задачу, двоїсту до задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (10.1.1)$$

$$L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max. \quad (10.1.2)$$

Розв'язок. Перша нерівність системи обмежень (10.1.1) не задовольняє п. 1 правила складання двоїстої задачі. Тому помножимо її на -1 :

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5. \end{cases} \quad (10.1.3)$$

Для зручності складання двоїстої задачі систему обмежень (6.1.3) та лінійну форму (10.1.2) запишемо у вигляді розширеної матриці B . Матрицю B транспонуємо і за допомогою транспонованої матриці B^T складаємо задачу двоїсту до вихідної. Матриці B і B^T в даному випадку мають вигляд

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 & F \end{array} \right), \quad B^T = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & 4 & 2 & 5 & Z \end{array} \right). \quad (10.1.4)$$

Отже, двоїста задача зводиться до знаходження мінімуму функції

$$Z = -y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 5y_4 \quad (10.1.5)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \geq 2 \\ y_i \geq 0 \quad i = \overline{1,4}. \blacktriangleleft \end{cases} \quad (10.1.6)$$

10.2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДВОЇСТОСТІ

Теорія двоїстості в лінійному програмуванні будується на двох наступних теоремах, які ми наведемо без доведення.

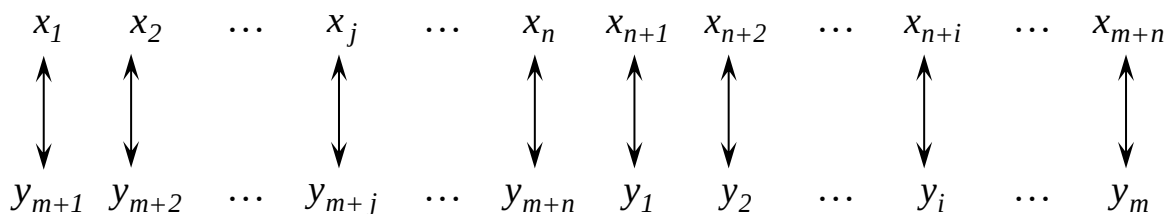
Теорема 1. *Якщо одна з задач лінійного програмування має скінченне оптимальне значення, то і двоїста до неї задача теж має скінченне оптимальне значення, причому оптимальні значення лінійних форм обох задач співпадають, тобто $F_{\max} = Z_{\min}$ або $F_{\min} = Z_{\max}$. Якщо лінійна форма однієї з задач необмежена, то система обмежень іншої задачі несумісна.*

Перед формулюванням іншої теореми, встановимо відповідність між змінними в вихідній та двоїстій задачах.

Повернемося до формулювання прямої і двоїстої задач. При розв'язанні симплексним методом вихідної задачі для приведення системи обмежень-нерівностей до еквівалентної до неї системи обмежень-рівнянь потрібно ввести m додаткових невід'ємних змінних (по кількості нерівностей в системі обмежень) $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$, де $i, i = \overline{1, m}$, означає номер нерівності, в якій була введена додаткова змінна x_{n+i} .

Система обмежень двоїстої задачі складається з n нерівностей, які містять m змінних. Якщо розв'язувати цю задачу симплексним методом, то потрібно ввести n додаткових невід'ємних змінних $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+j}, \dots, y_{m+n}$, де $j, j = \overline{1, n}$, означає номер нерівності системи обмежень двоїстої задачі, в якій була введена додаткова змінна y_{m+j} .

Встановимо наступну відповідність між змінними в вихідній та двоїстій задачах:



Іншими словами, кожній початковій змінній x_j ($j = \overline{1, n}$) вихідної задачі ставиться у відповідність додаткова змінна y_{m+j} , введена в j -у нерівність двоїстої задачі, а кожній додатковій змінній x_{n+i} ($i = \overline{1, m}$) вихідної задачі, введений в i -у

нерівність вихідної задачі, – початкова змінна u_i двоїстої задачі.

Теорема 2. Компоненти оптимального розв’язку однієї з задач (прямої або двоїстої) рівні абсолютним величинам коефіцієнтів при відповідних змінних у виразі лінійної форми другої задачі (двоїстої або прямої) при досягненні нею оптимального значення і при умові, що отриманий оптимальний розв’язок не є виродженим.

З теорем 1 і 2 випливає, що якщо розв’язати одну з взаємно двоїстих задач, тобто знайти її оптимальний розв’язок і оптимальне значення лінійної форми, то можна записати оптимальний розв’язок і оптимальне значення лінійної форми іншої задачі.

Пересвідчимось у справедливості сформульованих теорем на прикладах.

Приклад 10.2. Розв’язати симплексним методом пряму і двоїсту задачі, наведені в прикладі 6.1.

Розв’язок. Розв’язуємо пряму задачу. Зведемо систему обмежень-нерівностей в задачі (10.1), (10.2) до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}, \end{cases} \quad (10.2.1)$$

або у вигляді розширеної матриці

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{-1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array} \quad (10.2.2)$$

I крок. Основні змінні x_3, x_4, x_5, x_6 , неосновні – x_1, x_2 . Базисний розв’язок $(0; 0; -1; 4; 2; 5)$ є недопустимим. Переведемо в основні змінну x_1 (можна і x_2), а в неосновні – x_3 , так як

$$x_{1\max} = \min\left(\frac{-1}{-1}; \infty; \frac{2}{1}; \frac{5}{1}\right) = 1$$

відповідає першому рядку. Зробивши відповідні перетворення матриці (10.2.2), отримаємо:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \end{array} \quad (10.2.3)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -3 \leftarrow \end{array}$$

II крок. Основні змінні x_1, x_4, x_5, x_6 , неосновні – x_2, x_3 . Базисний розв’язок $(1; 0; 0; 5; 1; 4)$ є допустимим, але не оптимальним, так як в останньому рядку матриці (6.2.3) є додатний елемент (третій). Переведемо в основні змінну x_3 , а в неосновні – x_5 , так як

$$x_{3\max} = \min\left(\infty; \infty; \frac{1}{1}; \frac{4}{1}\right) = 1$$

відповідає третьому рядку:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -3 & 0 & -6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \\ \rightarrow 1/2 \rightarrow \\ \leftarrow -5 \leftarrow \end{array} \quad (10.2.4)$$

III крок. Основні змінні x_1, x_3, x_4, x_6 , неосновні – x_2, x_5 . Базисний розв’язок $(2; 0; 1; 6; 0; 3)$ не є оптимальним. Переводимо в основні змінну x_2 , а в неосновні – x_6 , так як

$$x_{2\max} = \min\left(\infty; \frac{6}{1}; \infty; \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

відповідає четвертому рядку:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -5/2 & -27/2 \end{array} \right] \quad (10.2.5)$$

IV крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4 , неосновні – x_5, x_6 . Базисний розв’язок $(7/2; 3/2; 4; 9/2; 0; 0)$ є оптимальним. Максимальне значення лінійної форми рівне $L_{\max} = 27/2$.

Розв’язання двоїстої задачі. Приведемо двоїсту задачу (10.1.5), (10.1.6) до канонічного вигляду:

$$Z_1 = -Z = y_1 - 4y_2 - 2y_3 - 5y_4 \rightarrow \max, \quad (10.2.6)$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 3, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 - y_6 = 2, \\ y_i \geq 0 \quad i = \overline{1,6}. \end{cases} \quad (10.2.7)$$

або у вигляді розширеної матриці

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -4 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow 2 \leftarrow \end{array} \quad (10.2.8)$$

I крок. Основні змінні y_5, y_6 , неосновні – y_1, y_2, y_3, y_4 . Базисний розв'язок $(0; 0; 0; 0; -3; -2)$ є недопустимим (обидві основні змінні є від'ємними). Переводимо в основні змінну y_3 , а в неосновні – y_5 :

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -5 \\ \hline -1 & -6 & 0 & -3 & -2 & 0 & 6 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow 6 \leftarrow \end{array} \quad (10.2.9)$$

II крок. Основні змінні y_3, y_6 , неосновні – y_1, y_2, y_4, y_5 . Базисний розв'язок $(0; 0; 3; 0; 0; -5)$ теж є недопустимим (основна змінна y_6 від'ємна). Переводимо в основні змінну y_2 , а в неосновні – y_6 :

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} -3 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ \hline -13 & 0 & 0 & 9 & -8 & -6 & 36 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -3 \leftarrow \\ \rightarrow 1/2 \rightarrow \\ \leftarrow -9 \leftarrow \end{array} \quad (10.2.10)$$

III крок. Основні змінні y_2, y_3 , неосновні – y_1, y_4, y_5, y_6 . Базисний розв'язок $(0; 5; 8; 0; 0; 0)$ є допустимим, але не оптимальним (четвертий елемент в останньому рядку додатний). Переводимо в основні змінну y_4 , а в неосновні – y_2 , так як

$$y_{4\max} = \min\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

отримане з другого рядка:

$$\left\| \begin{array}{cccccc|c} 0 & -3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 5/2 \\ \hline -4 & -9/2 & 0 & 0 & -7/2 & -3/2 & 27/2 \end{array} \right\| \quad (10.2.11)$$

IV крок. Основні змінні y_3, y_4 , неосновні – y_1, y_2, y_5, y_6 . Базисний розв'язок

$$\left(0; 0; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 0; 0\right)$$

є оптимальним (всі елементи лівої частини останнього рядка матриці (10.2.11) недодатні), при цьому

$$Z_{1\max} = -\frac{27}{2} \text{ і } Z_{\min} = \frac{27}{2}.$$

Очевидно, що перша частина теореми 1 справджується:

$$L_{\max} = Z_{\min} = \frac{27}{2}.$$

Пересвідчимось також в справедливості теореми 2. Для цього запишемо змінні прямої і двоїстої задач, дотримуючись їх відповідності:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$$

Лінійну форму, отриману на останньому кроці розв'язку двоїстої задачі, виразимо через усі змінні цієї задачі:

$$Z = \frac{27}{2} + 4y_1 + \frac{9}{2}y_2 + 0y_3 + 0y_4 + \frac{7}{2}y_5 + \frac{3}{2}y_6.$$

Враховуючи коефіцієнти при змінних y_i ($i=\overline{1,6}$) в цій лінійній формі і враховуючи відповідність між змінними y_i ($i=\overline{1,6}$) і x_j ($j=\overline{1,6}$), отримаємо розв'язок

$$\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; 4; \frac{9}{2}; 0; 0 \right),$$

який співпадає з оптимальним розв'язком прямої задачі.

Зауваження. Розв'язавши пряму задачу, можна зразу ж отримати розв'язок двоїстої задачі. Якщо виразити лінійну форму L , отриману на третьому кроці розв'язування прямої задачі, через всі змінні цієї задачі, то отримаємо

$$L = \frac{27}{2} + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{5}{2}x_6.$$

На основі теореми 2, враховуючи відповідність між змінними в прямій та двоїстій задачах та беручи абсолютні величини коефіцієнтів при змінних у виразі лінійної форми прямої задачі, знайдемо оптимальний розв'язок двоїстої задачі $(0; 0; 1/2; 5/2; 0; 0)$. При цьому $Z_{\min} = L_{\max} = 27/2$.

Цим результатом зручно користуватися, якщо розв'язок однієї з задач, наприклад прямої, супроводжується певними труднощами. Достатньо згадати

приклад 5.3 з попереднього параграфу, де чотири кроки було витрачено на пошуки допустимого базисного розв'язку. Згідно теореми 2 цей розв'язок можна отримати, розв'язавши двоїсту задачу. Зробимо це.

Приклад 10.3. Скласти і розв'язати симплексним методом задачу, двоїсту до задачі в прикладі 9.3.

Розв'язок. Так як всі нерівності системи (9.26) мають вигляд $\geq$, що відповідає знаходженню мінімуму лінійної форми $L = 2x_1 + 12x_2 + 4x_3$, то п. 1 правила складання двоїстої задачі виконано.

Запишемо матриці B і B^T відповідно для прямої та двоїстої задач:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 8 \\ 8 & 1 & 6 & 12 \\ 2 & 10 & 2 & 6 \\ \hline 2 & 12 & 4 & F \end{array} \right), \quad B^T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ \hline 8 & 12 & 6 & Z \end{array} \right). \quad (10.3.1)$$

Двоїста задача полягає в знаходженні максимуму функції

$$Z = 8y_1 + 12y_2 + 6y_3 \quad (10.3.2)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 + 8y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ 8y_1 + y_2 + 10y_3 \leq 12, \\ 3y_1 + 6y_2 + 2y_3 \leq 4, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases} \quad (10.3.3)$$

Зведемо систему нерівностей до системи рівнянь, ввівши додаткові невід'ємні змінні

$$\begin{cases} y_1 + 8y_2 + 2y_3 + y_4 = 2, \\ 8y_1 + y_2 + 10y_3 + y_5 = 12, \\ 3y_1 + 6y_2 + 2y_3 + y_6 = 4, \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 6}, \end{cases} \quad (10.3.4)$$

і запишемо задачу (6.3.2), (6.3.4) у вигляді розширеної матриці :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 10 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 8 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow -8 \leftarrow \\ \rightarrow 1/3 \rightarrow \\ \leftarrow -8 \leftarrow \end{array}$$

I крок. Основні змінні y_4, y_5, y_6 , неосновні – y_1, y_2, y_3 . Базисний розв'язок

$(0; 0; 0; 2; 12; 4)$ є допустимим, але не оптимальним (в останньому рядку три додатних елементи). Переводимо в основні змінну y_1 , а в неосновні – y_6 , так як значення

$$y_{1\max} = \min\left(\frac{2}{1}; \frac{12}{8}; \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

відповідає третьому рядку

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 6 & 4/3 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -15 & 14/3 & 0 & 1 & -8/3 & 4/3 \\ 1 & 2 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ \hline 0 & -4 & 2/3 & 0 & 0 & -8/3 & -32/3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow -4/3 \leftarrow \\ \rightarrow 3/14 \rightarrow \\ \leftarrow -2/3 \leftarrow \\ \leftarrow -2/3 \leftarrow \end{array} \quad (10.3.5)$$

II крок. Основні змінні y_1, y_4, y_5 , неосновні – y_2, y_3, y_6 . Базисний розв'язок $(4/3; 0; 0; 2/3; 4/3; 0)$ не є оптимальним. Переводимо в основні змінну y_3 , а в неосновні – y_5 , так як значення

$$y_{3\max} = \min\left(\frac{2/3}{4/3}; \frac{4/3}{14/3}; \frac{4/3}{2/3}\right) = \frac{2}{7}$$

відповідає другому рядку

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 72/7 & 0 & 1 & -2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & -45/14 & 1 & 0 & 3/14 & -4/7 & 2/7 \\ 1 & 29/7 & 0 & 0 & -1/7 & 5/7 & 8/7 \\ \hline 0 & -13/7 & 0 & 0 & -1/7 & -16/7 & -76/7 \end{array} \right] \quad (10.3.6)$$

III крок. Основні змінні y_1, y_3, y_4 , неосновні – y_2, y_5, y_6 . Базисний розв'язок $(8/7; 0; 2/7; 2/7; 0; 0)$ є оптимальним (в останньому рядку всі елементи недодатні). При цьому $Z_{\max} = 76/7$.

Порівняємо результати, отримані при розв'язанні прямої і двоїстої задач.

Запишемо відповідність між змінними:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Виражаючи лінійну форму Z , отриману на останньому кроці розв'язку, через усі невідомі, маємо:

$$Z = \frac{76}{7} + 0y_1 - \frac{13}{7}y_2 + 0y_3 + 0y_4 - \frac{1}{7}y_5 - \frac{16}{7}y_6.$$

Таким чином, оптимальний розв'язок прямої задачі має вигляд

$$\left(0; \frac{1}{7}; \frac{16}{7}; 0; \frac{13}{7}; 0\right)$$

і $F_{\min} = Z_{\max} = 76/7$, що повністю співпадає з результатом розв'язку прямої задачі.

Приклад 10.4. Скласти і розв'язати симплексним методом двоїсту задачу до задачі в прикладі 5.5.

Розв'язок. Для формулювання двоїстої задачі запишемо систему обмежень у вигляді нерівностей одного знака, наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -4 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (10.4.1)$$

і складемо матриці B, B^T :

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \\ 4 & 5 & F \end{array} \right), \quad B^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & Z \end{array} \right).$$

Таким чином, в двоїстій задачі потрібно знайти мінімальне значення функції $Z = y_1 - 4y_2$ або максимальне – $Z_1 = -y_1 + 4y_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \geq 4 \\ y_1 - 2y_2 \geq 5 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (10.4.2)$$

Приведемо систему (10.4.2) до канонічного вигляду

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 = -4 \\ -y_1 + 2y_2 + y_4 = -5 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, 4 \end{cases} \quad (10.4.3)$$

і запишемо розширену матрицю системи

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -5 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} \quad (10.4.4)$$

I крок. Основні змінні y_3, y_4 , неосновні – y_1, y_2 . Базисний розв'язок $(0; 0; -4; -5)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_1 , а в неосновні – y_3 , так як значення

$$y_{1 \max} = \min\left(\frac{-4}{-1}; \frac{-5}{-1}\right) = 4$$

отримується з першого рядка:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \leftarrow \leftarrow \\ \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} \quad (10.4.5)$$

II крок. Основні змінні y_1, y_4 , неосновні – y_2, y_3 . Базисний розв’язок $(4; 0; 0; -1)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_3 , а в неосновні – y_4 :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \quad (10.4.6)$$

III крок. Основні змінні y_1, y_3 , неосновні – y_2, y_4 . Базисний розв’язок $(5; 0; 1; 0)$ є допустимим, але не оптимальним (другий елемент в останньому рядку матриці (6.4.6) додатний).

В основні змінні потрібно перевести змінну y_2 , але обидва елементи другого стовпчика від’ємні, що означає відсутність обмежень на зростання змінної y_2 , тобто вона, а отже і лінійна форма можуть необмежено зростати:, отже $Z_{\min} = -Z_{1\max} = -\infty$

Таким чином, в прямій задачі система обмежень несумісна, а в двоїстій лінійна форма необмежена, що відповідає твердженням першої теореми.

Приклад 6105. Скласти і розв’язати симплексним методом двоїсту задачу до задачі в прикладі 9.6.

Розв’язок. Складемо матриці B, B^T :

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & F \end{array} \right), \quad B^T = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & Z \end{array} \right).$$

Двоїста задача формулюється наступним чином: знайти мінімум функції:

$$Z = y_1 + 4y_2 + y_3 \quad (10.5.1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \quad (10.5.2)$$

Приведемо систему (10.5.1), (10.5.2) до канонічного вигляду: знайти максимум функції $Z_1 = -y_1 - 4y_2 - y_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = -1 \\ y_1 - y_2 - y_3 + y_5 = -1 \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

і запишемо розширену матрицю задачі

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \leftarrow -1 \leftarrow \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \end{array} \quad (10.5.3)$$

I крок. Основні змінні y_4, y_5 , неосновні – y_1, y_2, y_3 . Базисний розв'язок $(0; 0; 0; -1; -1)$ є недопустимим. Переводимо в основні змінну y_1 , а в неосновні – y_4 :

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow -1 \leftarrow \\ \rightarrow -1/2 \rightarrow \\ \leftarrow 3 \leftarrow \end{array} \quad (10.5.4)$$

II крок. Основні змінні y_1, y_5 , неосновні – y_2, y_3, y_4 . Базисний розв'язок $(1; 0; 0; 0; -2)$ недопустимий. Переводимо в основні змінну y_2 , а в неосновні – y_5 :

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5/2 & -3/2 & 4 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rightarrow -1 \rightarrow \\ \\ \leftarrow 2 \leftarrow \end{array} \quad (10.5.5)$$

III крок. Основні змінні y_1, y_2 , неосновні – y_3, y_4, y_5 . Базисний розв'язок $(0; 1; 0; 0; 0)$ є допустимим та оптимальним і $Z_{\min} = -Z_{1\max} = 4$, але виродженням (базисна змінна y_1 рівна нулю). Переведемо в основні змінну y_3 , а в неосновні – y_1 :

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -3/2 & -5/2 & 4 \end{array} \right\| \quad (10.5.6)$$

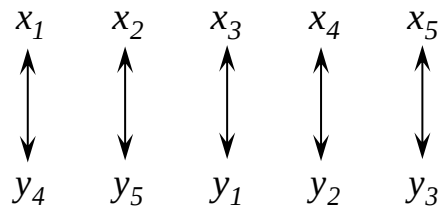
IV крок. Основні змінні y_2, y_3 , неосновні – y_1, y_4, y_5 . Базисний вироджений розв'язок не змінився – $(0; 1; 0; 0; 0)$.

На двох останніх кроках отримали один і той же базисний розв'язок

$(0; 1; 0; 0; 0)$, який є оптимальним. Відрізняються вони тільки записом лінійної форми через змінні

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= 4 + 0y_1 + 0y_2 - 2y_3 - \frac{5}{2}y_4 - \frac{3}{2}y_5, \\ Z^{(2)} &= 4 - 2y_1 + 0y_2 + 0y_3 - \frac{3}{2}y_4 - \frac{5}{2}y_5. \end{aligned} \quad (10.5.7)$$

Враховуючи відповідність між змінними прямої та двоїстої задач,



можна записати оптимальні розв'язки вихідної задачі

$$, X^{(1)} \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 0; 0; 2 \right), X^{(2)} \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 2; 0; 0 \right)$$

що повністю відповідає результатам, отриманим при розв'язанні прямої задачі (див. (9.7.1), (9.7.2)).

Отже, якщо оптимальний розв'язок прямої задачі не єдиний (хоча б одна з неосновних змінних оптимального розв'язку відсутня в запису лінійної форми), то оптимальний розв'язок двоїстої задачі є виродженим (хоча б одна з основних змінних оптимального розв'язку рівна нулю).

10.3. ОБ'ЄКТИВНО ОБУМОВЛЕНІ ОЦІНКИ

Як відмічалось в попередньому параграфі, кожній додатковій змінній x_{n+i} прямої задачі ставиться у відповідність початкова змінна y_i , $i = \overline{1, m}$, двоїстої задачі.

Аналізуючи розв'язані приклади, можна зробити наступні висновки:

1) Якщо i -а компонента оптимального розв'язку двоїстої задачі перетворюється в нуль, то відповідна додаткова змінна в оптимальному розв'язку прямої задачі додатна і при підстановці в i -у нерівність системи обмежень прямої задачі компонент оптимального розв'язку ця нерівність не перетворюється в строгу рівність.

2) Якщо i -а компонента оптимального розв'язку двоїстої задачі додатна, то відповідна додаткова змінна в оптимальному розв'язку прямої задачі рівна нулю і при підстановці в i -у нерівність системи обмежень прямої задачі компонент

оптимального розв'язку ця нерівність перетворюється в строгу рівність.

Зауваження. Відмічений порядок в зміні відповідних змінних дещо порушується, якщо оптимальний розв'язок прямої задачі є виродженим. В цьому випадку одна з додаткових змінних прямої задачі рівна нулю через виродження, хоча відповідна їй змінна двоїстої задачі теж рівна нулю.

Перші m компонент оптимального розв'язку двоїстої задачі називають *об'єктивно обумовленими оцінками*. Така назва пов'язана з економічним змістом змінних двоїстої задачі.

Якщо прямою є задача про використання ресурсів, об'єми яких задані, то об'єктивно обумовлені оцінки двоїстої задачі відображають значимість кожного виду цих ресурсів для досягнення цілі, поставленої в прямій задачі: отримання найбільшого прибутку. Оцінки виступають у вигляді розрахункових об'єктивно обумовлених оптимальним планом цін за одиницю кожного виду ресурсів.

Питання для самоконтролю

1. Як записати задачу, двоїсту до даної?
2. Сформулювати теореми двоїстості.
3. Яка відповідність існує між змінними в вихідній та двоїстій задачах?
4. Що таке об'єктивно обумовлені оцінки?

Задачі для самостійного розв'язання

Скласти і розв'язати симплексним методом двоїсті задачі до задач:

$$\begin{array}{ll} 1) \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ F = -5x_1 - x_2. \end{array} \right. & 2) \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 7, \\ 11x_1 + x_2 \geq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ F = 9x_1 + 3x_2. \end{array} \right. \end{array}$$

11. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Викладений у попередніх розділах симплекс-метод універсальний для задач лінійного програмування і може використовуватися для задач будь-яких задач такого типу. Проте існують окремі випадки задач лінійного програмування, які

через внутрішні особливості задачі (властивості коефіцієнтів цільової функції, обмеженням) допускають розв'язання простішими методами. До них належить і задача транспортного типу.

11.1. КЛАСИЧНА ЗАДАЧА ТРАНСПОРТНОГО ТИПУ

Найпростішими транспортними задачами є задачі про перевезення деякого однорідного вантажу з пунктів відправки (від постачальників) в пункти призначення (до споживачів) при забезпеченні мінімальних затрат на перевезення.

За звичай початкові умови таких задач записують у вигляді таблиці. Наприклад, для m постачальників і n споживачів така таблиця має наступний вигляд:

Таблиця 11.1

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби					
		1	2	...	j	...	n
		B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
1	A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
2	A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
i	A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...
m	A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

Тут показники c_{ij} означають затрати на перевезення одиниці вантажу від i -го постачальника ($i = 1, 2, \dots, m$) до j -го споживача ($j = 1, 2, \dots, n$), A_i – потужність i -го постачальника в запланований період (запаси вантажу), B_j – потреба j -го споживача в запланований період.

Позначимо через x_{ij} постачання (кількість вантажу), яке заплановано для перевезення від i -го постачальника до j -го споживача. Математично задача зводиться до знаходження мінімуму цільової функції, яка задає сумарні затрати на перевезення всього вантажу, тобто функції

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn} \quad (11.1.1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = A_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = A_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = A_m, \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = B_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = B_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = B_n. \end{cases} \quad (11.1.2)$$

Якщо в транспортній задачі виконується рівність

$$\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n B_j, \quad (11.1.3)$$

тобто сумарна потужність постачальників рівна сумарній потребі споживачів, то відповідну математичну модель задачі називають *закритою*. В протилежному випадку, тобто, коли

$$\sum_{i=1}^m A_i \neq \sum_{j=1}^n B_j, \quad (11.1.4)$$

відповідну модель називають *відкритою*.

Відмітимо деякі особливості економіко-математичної моделі транспортної задачі в порівнянні з моделями, які розглядалися в попередніх розділах:

- система (11.1.2) має вигляд рівнянь, тому відпадає необхідність вводити додаткові змінні;
- матриця коефіцієнтів при змінних в системі (11.1.2) складається тільки з одиниць та нулів;
- система (11.1.2) є системою $n + m$ рівнянь з nm невідомими. Зауважимо, що n, m – кількість рядків та стовпчиків у таблиці, відповідно.

Специфічність економіко-математично моделі транспортної задачі привела до появи особливого методу її розв'язку – *розподільного методу*, а в подальшому – до різних модифікацій цього методу.

При цьому всі теоретичні передумови, які лежать в основі симплексного методу, зберігаються.

Будь-який розв'язок транспортної задачі $(x_{11}; x_{12}; \dots; x_{mn})$ називається *розподілом постачань*. Так як постачання не може бути від'ємним, то мова йде

тільки про допустимі розв'язки.

Оптимальному розв'язку транспортної задачі відповідає оптимальний розподіл поставань, при якому цільова функція (11.1.1) досягає свого мінімуму.

В процесі розв'язку задачі потрібно отримати цей оптимальний розподіл поставань, якому відповідає якийсь допустимий базисний розв'язок системи обмежень (11.1.2).

При розподільному методі розв'язку транспортної задачі послідовно використовують розрахункові таблиці, які відповідають тому чи іншому кроку розв'язку. Кожна така таблиця включає визначення розподілу поставань. Так як розподіл поставань повинен відповідати базисному розв'язку, то клітинки таблиці повинні відповідати основним (базисним – додатним) і неосновним (вільним – рівним нулю) змінним.

На практиці це зводиться до того, що в клітинки, які відповідають основним змінним, записують поставання, а клітинки, які відповідають неосновним змінним, залишають не заповненими (вільними).

Зауваження. Домовимось використовувати наступний спосіб заповнення клітинок: у верхньому лівому куті записуємо показник затрат на перевезення одиниці вантажу від i -го поставальника ($i = 1, 2, \dots, m$) до j -го споживача ($j = 1, 2, \dots, n$), а в нижньому правому – поставання.

Число заповнених клітинок визначається числом основних змінних системи обмежень (11.1.2), а останнє рівне числу лінійно незалежних рівнянь системи.

Якщо розв'язок задач симплексним методом полягає в переході від одного базисного розв'язку до іншого, поки не буде знайдено оптимальний розв'язок або не буде зроблено висновок про несумісність системи обмежень, то розв'язок транспортної задачі полягає в переході від одного розподілу поставань до іншого: від однієї таблиці до іншої. Новий розподіл поставань повинен знижувати або, в будь-якому випадку, не збільшувати загальну вартість затрат на перевезення. Перерозподіл поставань потрібно здійснювати до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний розподіл поставань.

Щоб здійснити перехід від одного розподілу поставань до іншого, потрібно мати вихідний (початковий) розподіл поставань.

11.2. ПОЧАТКОВИЙ РОЗПОДІЛ ПОСТАЧАНЬ

Перед тим, як розпочати заповнювати клітинки поставаннями, потрібно встановити кількість таких клітинок. Як відмічалось вище, вона визначається кількістю лінійно незалежних рівнянь системи обмежень (11.1.2).

На першому етапі розглянемо ті задачі, які мають закриту модель, тобто для яких виконується рівність (11.1.3). У цьому випадку, хоча в системі обмежень (11.1.2) міститься $n + m$ рівнянь, кількість її лінійно незалежних рівнянь на одиницю менша.

Дійсно, якщо скласти всі m перших рівнянь, що стосуються потужностей постачальників, і всі n рівнянь, що стосуються потреб споживачів, та врахувати (11.1.3), то отримаємо тотожність. Це свідчить про те, що система (11.1.2) в закритих моделях лінійно залежна. Якщо ж системи виключити одне з рівнянь, будь-яке, то вона стане лінійно незалежною.

Звідси випливає, що *кількість лінійно незалежних рівнянь і кількість заповнених клітинок рівна $n + m - 1$* . При цьому *кількість незаповнених клітинок складає $nm - (n + m - 1)$* .

Яким чином заповнити постачаннями $n + m - 1$ клітинок таблиці 11.1? Існують різні способи такого заповнення, а отже і отримання початкового розподілу постачань. Розглянемо два з них: правило врахування найменших затрат і правило „північно-західного кута”.

Нехай потрібно отримати початковий розподіл постачань в наступній транспортній задачі (табл. 11.2):

Таблиця 11.2

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	2	3	4	5
		60	150	50	40	80
1	120	7	6	5	4	6
2	70	1	5	2	5	2
3	90	6	4	3	2	5
4	100	4	3	1	3	3

Спочатку перевіримо, що задача має закриту модель: дійсно,

$$\sum_{i=1}^4 A_i = 380, \quad \sum_{j=1}^5 B_j = 380,$$

тобто рівність (7.1.3) виконується. Тут кількість постачальників $m = 4$; кількість споживачів $n = 5$; кількість всіх клітинок $nm = 20$; кількість заповнених клітинок $m + n - 1 = 8$; кількість вільних клітинок $nm - (m + n - 1) = 12$.

11.3. ПРАВИЛО „ПІВНІЧНО-ЗАХІДНОГО КУТА”

Кожній клітинці поставимо у відповідність подвійний номер, який співпадає з

індексами відповідної цій клітинці змінної (перший номер співпадає з номером постачальника, другий – з номером споживача). Наприклад, номер [3.4] відповідає клітинці, що розташована в таблиці на перетині 3-го рядка і 4-го стовпчика.

За правилом „північно-західного кута” заповнення клітин починають з клітинки [1.1] – „північно-західного кута” таблиці, потім сходянками спускаються вниз до клітинки $[m.n]$, виключаючи при заповненні чергової клітинки з подальшого розгляду або один рядок, або один стовпчик. На останньому кроці виключається останній m -й рядок і останній n -й стовпчик.

Дамо постачання в клітинку [1.1] (див табл. 11.3). Щоб вирішити питання про величину даного постачання, зауважимо, що 1-й постачальник має запас 120 од. вантажу, а 1-му споживачеві потрібно 60 од. вантажу. Очевидно, що розмір постачання визначається меншим з цих двох чисел, тобто в клітинку [1.1] потрібно записати постачання рівне 60 од. вантажу. 1-й споживач повністю задовольнив свої потреби, тобто він (1-ий стовпчик) в подальшому розподілі постачань участі не приймає, а потужність другого постачальника складатиме тепер 60 од. вантажу.

Переходимо на одну клітинку в право і заповнюємо клітинку [1.2]. Враховуючи, що $\min\{60;150\}=60$, даємо в цю клітинку постачання, яке рівне 60. При цьому з подальшого розподілу виключається 1-й рядок таблиці, а потреби 2-го споживача складатимуть 90 од. вантажу.

Опускаємось на одну клітинку вниз і заповнюємо клітинку [2.2], давши їй постачання, яке рівне $\min\{70;90\}=70$ од. вантажу, що співпадає з потужності 2-го постачальника, і виключаємо з таблиці 2-й рядок. Залишок потреб другого споживача тепер складає 20 од. вантажу.

Аналогічно заповнюються інші 5 клітинок. В клітинку [3.2] даємо постачання рівне $\min\{90;20\}=20$ од. вантажу і виключаємо 2-й стовпчик таблиці. При цьому в 3-го постачальника залишається 70 од. вантажу. В клітинку [3.3] даємо постачання, яке рівне $\min\{70;50\}=50$, і виключаємо 3-й стовпчик таблиці, в 3-го постачальника залишається 20 од. вантажу. В клітинку [3.4] даємо постачання, яке рівне $\min\{20;40\}=20$ од. вантажу, і виключаємо 3-й рядок, в 4-го споживача нестача – 20 од. вантажу. В клітинку [4.4] даємо постачання, яке рівне $\min\{100;20\}=20$ од. вантажу і виключаємо 4-й стовпчик, в 4-го постачальника залишилось 80 од. вантажу. В клітинку [4.5] даємо постачання, яке рівне $\min\{80;80\}=80$ од. вантажу і виключаємо 5-й стовпчик і 4-ий рядок.

Зауважимо, що тільки при заповненні останньої клітинки відбулось виключення і рядка, і стовпчика, а заповнення усіх попередніх клітинок супроводжувалось виключенням або одного рядка, або одного стовпчика.

Таблиця 11.3

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	2	3	4	5
		60	150	50	40	80
1	120	7 60	5 60	5	4	6
2	70	1	5 70	2	5	2
3	90	6	4 20	3 50	2 20	5
4	100	4	3	1	3 20	3 80

Підрахуємо кількість заповнених клітинок. Їх виявилось 8, тобто якраз стільки як і повинно біти. Можна також пересвідчитись, що по кожному рядку і по кожному стовпчику зберігається баланс: від кожного постачальника планується вивезти весь вантаж, який в нього є, і кожному споживачу планується завезти ту кількість вантажу, яку він потребує.

Загальні затрати на перевезення при такому розподілі будуть рівні (7.3.1)

$$L_1 = 420 + 300 + 350 + 80 + 150 + 40 + 60 + 240 = 1640$$

11.4. ПРАВИЛО ВРАХУВАННЯ НАЙМЕНШИХ ЗАТРАТ

Суть цього правила полягає в тому, що в першу чергу заповнюють клітинки, які мають найменший показник затрат на перевезення одиниці вантажу. В таблиці вибираємо клітинки з найменшим показником затрат. Такий показник рівний 1 і знаходиться в клітинках [2.1] та [4.3]. Розпочати заповнення можна з будь-якої з цих клітин.

Дамо постачання в клітинку [2.1] (див табл. 7.4). Так як 2-й постачальник має запас 70 од. вантажу, а 1-му споживачеві потрібно 60 од. вантажу, то в клітинку [2.1] потрібно записати постачання рівне 60 од. вантажу. 1-й споживач повністю задовольнив свої потреби, тобто він в подальшому розподілі постачань участі не приймає і на наступному етапі нам потрібно заповнити таблицю розміром 4×4 , при чому потужність другого постачальника складатиме тепер 10 од. вантажу.

Заповнимо клітинку [4.3]. Враховуючи, що $\min\{100; 50\} = 50$, даємо в цю клітинку постачання, яке рівне 50. При цьому заповненні з подальшого розподілу виключається 3-й стовпчик таблиці, і потужність 4-го постачальника складатиме 50 од. вантажу.

З клітинок, які залишилися, найменший показник затрат, рівний 2, мають клітинки [3.4] та [2.5] (клітинка [2.3] до уваги не береться, оскільки вона знаходиться в уже виключеному стовпчику).

Заповнимо клітинку [2.5], давши їй постачання $\min\{10;80\}=10$ од. вантажу, який залишився у 2-го постачальника, і виключимо з таблиці 2-й рядок. Клітинці [3.4] даємо постачання $\min\{90;40\}=40$ од. вантажу і виключаємо 4-й стовпчик.

В таблиці розмірами 3×2 , яка залишилася нерозподіленою, найменший показник затрат, рівний 3, мають клітинки [4.2] та [4.5]. В клітинку [4.2] даємо постачання рівне $\min\{50;150\}=50$ од. вантажу і виключаємо 4-й рядок таблиці. При цьому в 2-го споживача нестача 100 од. вантажу.

З чотирьох клітинок, які залишилися, найменший показник затрат, рівний 4, має клітинка [3.2]. Даємо їй постачання рівне $\min\{50;100\}=50$. При цьому виключаємо 3-й рядок таблиці і 2-му споживачеві не вистачає 50 од. вантажу.

З двох клітинок, які залишилися, спочатку заповнюємо клітинку з номером [1.2] (у неї менший показник затрат – 5), а потім – клітинку [1.5]. У першу даємо 50 од. вантажу і виключаємо 2-й стовпчик, а в другу – 70 од. вантажу і виключаємо 1-й рядок і 5-й стовпчик.

Як і в попередньому методі, тільки при заповненні останньої клітинки відбулось виключення і рядка, і стовпчика, а на всіх попередній етапах заповнення клітинки супроводжувалось виключенням або одного рядка, або одного стовпчика. Кількість заповнених клітинок рівна теж рівна 8 і по кожному рядку та стовпчику зберігається баланс.

Підрахуємо загальні затрати на перевезення при даному розподілі постачань:

$$L_2 = 300 + 420 + 60 + 20 + 200 + 80 + 150 + 50 = 1280 \quad (11.4.1)$$

Очевидно, що розподіл постачань, отриманий за правилом врахування найменших затрат є набагато кращим від розподілу постачань, отриманого за правилом „північно-західного кута”, хоча останній отриманий дещо простіше.

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
		1	2	3	4	5
		60	150	50	40	80
1	120	7	5 50	5	4	6 70
2	70	1 60	5	2	5	2 10
3	90	6	4 50	3	2 40	5
4	100	4	3	1	3	3

			50	50		
--	--	--	----	----	--	--

Коли здійснюють початковий розподіл постачань, то не ставлять за ціль отримати оптимальний розподіл. Це досягається на наступних етапах розв'язання задачі, які полягають в переходах до нових розподілів до тих пір, поки не буде отримано оптимальний розподіл постачань.

11.5. ПЕРЕРОЗПОДІЛ ПОСТАЧАНЬ

Повернемось до табл. 11.4. Відмітимо, що в ній 8 заповнених клітинок і 12 вільних. При кожному перерозподілі постачань одна із заповнених клітинок буде ставати вільною, а одна із вільних – заповненою. Залишимо поки що питання про те, яку з вільних клітин вигідніше переводити в заповнені і дамо постачання, наприклад, в клітинку [1.1].

Очевидно, що довільне постачання величиною Δ в цю клітинку порушить баланс постачань в 1-му рядку та 1-му стовпчику. Відновити баланс в 1-му стовпчику можна тільки зменшивши на Δ постачання в клітинці [2.1], а це порушує баланс в 2-му рядку. Для відновлення цього балансу потрібно на величину Δ збільшити постачання в клітинці [2.5], що порушує баланс в 5-му стовпчику. Зменшення на Δ постачання в клітинці [1.5] відновить баланс як в 5-му стовпчику, так і в 1-му рядку, тобто в таблиці в цілому. Отже, при заповненні клітинки [1.1] відбувається перерозподіл постачань в клітинках [2.1], [2.5], [1.5].

Якщо ж заповнити клітину [4.1], то для відновлення балансу в таблиці потрібно буде перерозподілити постачання в наступних клітинках: [2.1], [2.5], [1.5] [1.2], [4.2]. Аналогічна картина має місце і при заповненні будь-якої іншої вільної клітинки.

Таким чином, надання постачання в одну з вільних клітинок приводить до перерозподілу постачань в деяких заповнених клітинках. Надалі будемо говорити про перерозподіл постачань в циклі.

Циклом називається замкнутий багатокутник (не обов'язково випуклий), сторонами якого є горизонтальні і вертикальні відрізки, одна вершина якого співпадає з вільною клітинкою, для якої утворюється цикл, а всі інші – із заповненими клітинками.

Якщо розподіл в таблиці такий, що заповнено рівно $m + n - 1$ клітинок, то для кожної вільної клітинки можна скласти цикл, причому тільки один.

На рис. 11.1 показано цикли для клітин [1.1], [4.1], про які згадувалось вище, а також – для клітинок [2.3], [3.5] та [4.5]. Для всіх інших вільних клітинок цикли будуються аналогічно.

Крім номерів клітинок циклу введемо послідовну нумерацію клітинок, починаючи з тієї, для якої утворено цикл, у довільному напрямку (проти чи за годинниковою стрілкою). Поряд з цими номерами запишемо постачання, які відповідають даним клітинкам, взяті з табл. 11.4. Надалі будемо розрізняти парні та непарні клітинки циклу в залежності від того, який номер їм відповідає – парний чи непарний. У будь-якому циклі кількість парних і непарних клітинок однакова.

При перерозподілі постачання по циклу воно додається до всіх непарних клітинок і віднімається з усіх парних. Так як при будь-якому розподілі постачань кількість основних змінних (кількість заповнених клітин) повинна бути однаковою і рівною $m+n-1$, то надання постачання у вільну клітинку повинно супроводжуватися звільненням однієї з клітинок циклу. Очевидно, що це буде парна клітинка з найменшим постачанням (всі постачання невід'ємні). Для циклів приведених на рис. 6.1 маємо: для клітинки $[1.1]$ постачання рівне 60 од. і вільною стає клітинка $[2.1]$; для клітинки $[4.1]$ – 50 од. і вільною стає – $[4.2]$; для клітинки $[2.3]$ – 10 од. і вільною стає – $[2.5]$; для клітинки $[3.5]$ – 50 од. і вільною стає – $[3.2]$; для клітинки $[4.5]$ – 50 од. і вільною стає – $[4.2]$.

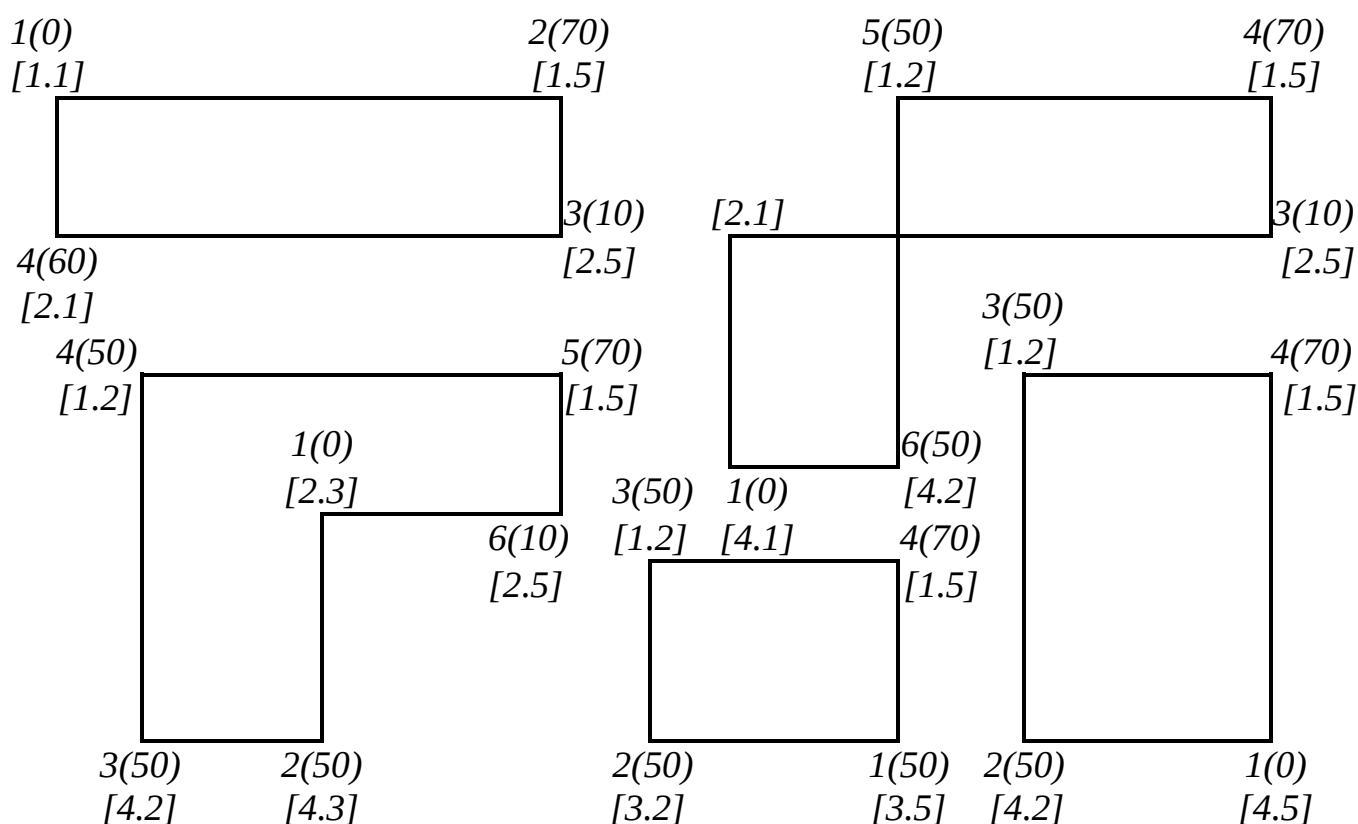


Рис. 11.1

Для циклу будь-якої вільної клітинки $[i.j]$ можна обчислити оцінку цього циклу β_{ij} , яка рівна різниці між сумами показників затрат на перевезення одиниці вантажу в непарних та парних клітинках.

Наприклад, для вже згаданих циклів маємо:

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= (7 + 2) - (1 + 6) = 2, & \beta_{41} &= (4 + 2 + 5) - (1 + 6 + 3) = 1, \\ \beta_{23} &= (2 + 3 + 6) - (1 + 5 + 2) = 3, & \beta_{35} &= (5 + 5) - (4 + 6) = 0, \\ \beta_{45} &= (3 + 5) - (3 + 6) = -1.\end{aligned}\tag{11.5.1}$$

Обчислюючи оцінки п'яти циклів, можна зробити висновок, що ці оцінки можуть бути додатні (β_{11} , β_{41} , β_{23}), від'ємні (β_{45}) та рівні нулю (β_{35}).

Передача постачання в будь-яку вільну клітинку приводить до зміни вартості

загальних затрат на перевезення на величину, яка рівна добутку величини оцінки на розмір постачання.

Наприклад, заповнення клітинки [4.5] приведе до зменшення затрат на $1 \cdot 50 = 50$ грош. од. Перерозподіл постачання в циклі для клітинки [1.1] приведе до збільшення загальних затрат на перевезення на величину $2 \cdot 60 = 120$ грош. од.; заповнення клітинки [2.3] приведе до збільшення затрат на $3 \cdot 10 = 30$ грош. од.; заповнення клітинки [3.5] не змінить загальних затрат.

Таким чином, можна зробити висновок, що клітинка, яка має від'ємну оцінку циклу, є вигідною і її слід заповнити, а клітинки, які мають додатну оцінку є невигідними. Вільні клітинки, які мають нульову оцінку циклу, не є вигідними і не є невигідними.

Отже, побудувавши цикли для всіх вільних клітинок даного розподілу постачань і обчисливши їх оцінки, можна всі клітинки розбити на вигідні і невигідні. Серед вигідних клітинок вибрати саму вигідну і перерозподілити постачання в циклі для цієї клітинки. Отримаємо новий розподіл постачань.

Зауваження. Сама вигідна клітинка – це та, заповнення якої приводить до найбільшої економії. Але це не завжди клітинка з найменшою оцінкою циклу, адже економія залежить від розміру постачання, яке передається по циклу.

При початковій розробці розподільного методу передбачалась саме така схема пошуку оптимального розв'язку. Громіздкість такої схеми очевидна, оскільки на кожному кроці потрібно будувати цикли для всіх вільних клітинок і обчислювати оцінки цих циклів. Тому з'явилися різні модифікації розподільного методу.

Одній з таких модифікацій, а саме методу оцінки клітинок, присвячений наступний параграф.

Зауважимо, що цикли перерозподілу постачань в різних транспортних задачах можуть мати різноманітні конфігурації. Крім уже розглянутих цикли можуть мати, наприклад, вигляд, зображений на рис.11.2.

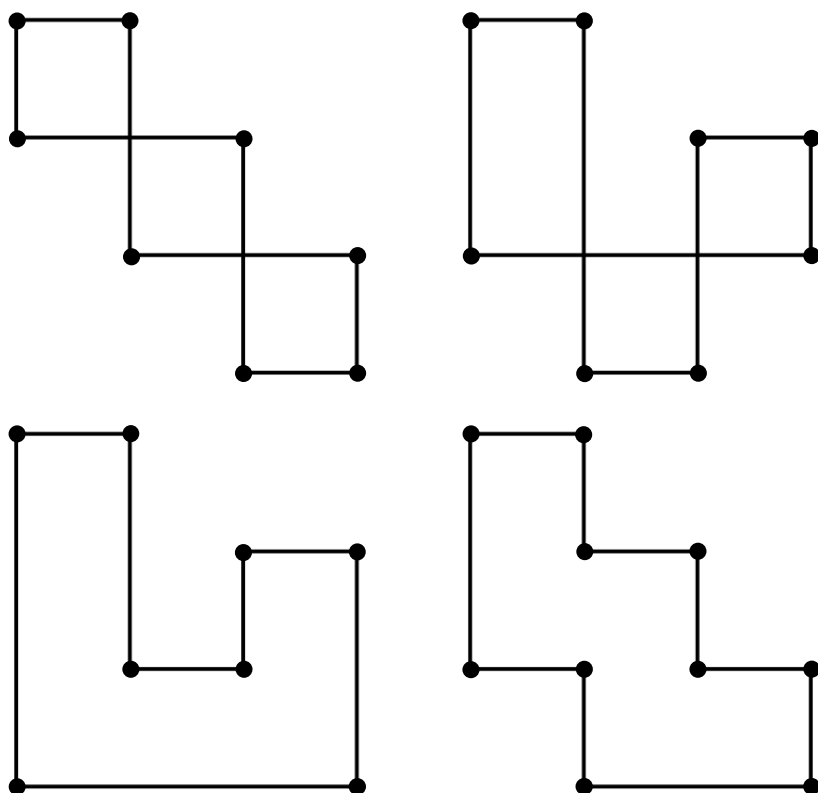


Рис.11.2

11.6. ОЦІНКА КЛІТИНОК.

ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ПОСТАЧАЇ

Кожній клітинці таблиці поставимо у відповідність оцінку, отриману як алгебраїчну суму показника затрат клітинки і відповідних чисел, записаних в додаткових рядку і стовпчику, розміщених внизу і справа від таблиці. Ці числа підбираються таким чином, щоб оцінка заповнених клітинок дорівнювала нулю. Оцінки вільних клітинок при цьому можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю.

Встановлення таких оцінок для всіх заповнених і вільних клітинок означатиме оцінку даного розподілу постачань.

Оцінимо, наприклад, розподіл постачань приведений в таблиці 11.4. Для цього перепишемо дану таблицю з додатковими рядком і стовпчиком у вигляді таблиці 11.5.

В будь-якій з додаткових клітинок записуємо довільне число, найзручніше 0. Нехай це буде перший рядок додаткового стовпчика. Для того, щоб при цьому оцінки в клітинках $[1.2]$ і $[1.5]$ були рівні нулю, в 2-му і 5-му стовпчиках додаткового рядка потрібно записати числа -5 та -6 , відповідно. В цьому випадку оцінки вказаних клітинок дійсно рівні нулю: $(5 + 0 - 5) = 0$, $(6 + 0 - 6) = 0$. Далі робимо нульовими оцінки в клітинках $[3.2]$ і $[4.2]$, для цього в 3-му і 4-му рядках додаткового стовпчика записуємо числа 1 та 2 , відповідно. Для нульових оцінок в клітинках $[4.3]$ і $[3.4]$ записуємо в 3-му і 4-му стовпчиках додаткового рядка число -3 . І, на кінець, щоб клітинки $[2.5]$ і $[2.1]$ мали нульові оцінки потрібно в 2-му рядку додаткового стовпчика та в 1-му стовпчику додаткового рядка записати числа 4 та -5 , відповідно. Таким чином, ми повністю заповнили додатковий рядок та стовпчик. Зауважимо, що кожна з $n + m - 1$ базисних клітинок дає можливість знайти одне з чисел в додаткових $n + m$ клітинках, тому вибравши в одній з додаткових клітинок значення 0 ми завжди зможемо знайти всі інші.

Складемо таблицю 7.6, в якій в правому верхньому куті кожної клітинки, де були записані показники затрат, запишемо її оцінку. Порівняємо отримані оцінки клітинок з оцінками відповідних циклів в (11.7). Як бачимо, ці оцінки співпадають. Таким чином, ми отримали можливість обчислювати оцінки циклів, не будуючи самі цикли, і вирішувати питання про вигідність чи не вигідність тієї чи іншої клітинки за допомогою оцінки цієї клітинки. В табл. 11.6 оцінки вільних клітин, крім клітинок $[3.5]$ і $[4.5]$, є додатними.

Таблиця 11.5

7	5 50	5	4	6 70	0
1 60	5	2	5	2 10	4
6	4 50	3	2 40	5	1
4	3 50	1 50	3	3	2
-5	-5	-3	-3	-6	

Таблиця 11.6

2	0 100	2	1	0 20	
0 60	4	3	6	0 10	
2	0 50	1	0 40	0	
1	0	0 50	2	-1 50	+1
		-1			

Даний розподіл не є оптимальним, так як клітинка [4.5] має від'ємну оцінку і її потрібно перевести в заповнені (базисні) клітини. Цикл для цієї клітинки зображений на рис. 6.1, його мінімальне постачання рівне 50 од. Перерозподіляємо це постачання по циклу: в клітинці [4.5] записуємо постачання 50 од., в парних клітинках [4.2] та [1.5] зменшуємо постачання на 50 од., а в клітинці [1.2] збільшуємо постачання на 50 од. При цьому клітинка [4.2] стає вільною. Новий розподіл постачань заносимо в табл. 11.6.

Для оцінки нового розподілу постачань зробимо перерахунок оцінки клітинок. Потрібно підправити оцінку клітинки [4.5] (зробити її нульовою). Для цього додамо до оцінок усіх клітинок четвертого рядка 1. Але при цьому порушується нульова оцінка клітинки [4.3], тому від оцінок усіх клітинок третього стовпчика віднімемо 1.

Таблиця 11.7

2	0	1	1	0
0	4	2	6	0
2	0	0	0	0
2	1	0	3	0

Таблиця 11.8

7	5 100	5	4	6 20
1 60	5	2	5	2 10
6	4 50	3	2 40	5
4	3	1	3	3 50

Нові оцінки клітин запишемо в табл. 11.7. Отримана таблиця уже не містить від'ємних оцінок. А це є критерієм того, що розподіл постачань, отриманий в табл. 7.7 є оптимальним. Наявність нульової оцінки у вільній клітинці [3.5] вказує на те, що даний оптимальний розподіл не є однозначним. Можна здійснити перерозподіл постачань по циклу клітинки [3.5] і отримати ще один оптимальний розподіл постачань при тих же загальних затратах на перевезення.

Для остаточного розв'язку даної транспортної задачі потрібно обчислити самі затрати. Складемо остаточну таблицю 11.8, в яку включимо показники затрат з табл. 7.3 і розподіл поставчань з табл. 7.6. Отримаємо

$$L_{min} = 500 + 120 + 60 + 20 + 200 + 80 + 50 + 150 = 1180 \text{ грош. од.}$$

Таким чином, економія в порівнянні з початковим розподілом склала $1230 - 1180 = 50$ грош. од. Цей же результат можна було отримати і як добуток оцінки клітинки [4.5] на перерозподіл поставчання по циклу: $-1 \cdot 50 = -50$.

11.7. ВІДКРИТА МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Як було відмічено раніше, якщо сумарна потужність постачальників не рівна сумарним потребам споживачів, тобто коли має місце умова (11.1.4), то модель транспортної задачі називається відкритою. Можливі два випадки:

а) сумарна потужність постачальників менша за сумарні потреби споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^m A_i < \sum_{j=1}^n B_j; \quad (11.7.1)$$

б) сумарна потужність постачальників перевищує сумарні потреби споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^m A_i > \sum_{j=1}^n B_j. \quad (11.7.2)$$

В обох випадках модель замикають шляхом введення або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача.

Для замикання моделі у випадку а) вводять фіктивного постачальника, потужність якого рівна A_{m+1} :

$$A_{m+1} = \sum_{j=1}^n B_j - \sum_{i=1}^m A_i. \quad (11.7.3)$$

В якості показників затрат на перевезення від фіктивного постачальника можна взяти довільні однакові числа по всьому рядку фіктивного постачальника. Зручніше всього вибрати їх рівними нулю.

Після введення вказаним чином фіктивного постачальника модель задачі стає закритою і її можна розв'язувати методом, викладеним в підрозділі 11.4.

Після знаходження оптимального розподілу поставчань, виявиться, що деяку частину потреб споживачів не можуть задовольнити реальні постачальники.

У випадку б) вводиться фіктивний споживач, потреби якого рівні

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^m A_i - \sum_{j=1}^n B_j.$$

Показниками затрат на перевезення в стовпчику фіктивного споживача можуть бути довільні однакові числа, наприклад, нулі.

Приклад 11.1. Знайти оптимальний розподіл поставчань в наступній транспортній задачі:

Таблиця 11.9

Постачальники	Потужності поставчальників	Споживачі та їх потреби			
		1	2	3	4
		100	70	85	60
1	90	4	5	3	1
2	50	3	1	1	6
3	130	2	5	2	4

Розв'язок. Сумарна потужність поставчальників і споживачів відповідно рівні:

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 270 \text{ од.}, \quad \sum_{j=1}^4 B_j = 315 \text{ од.},$$

тобто, потреби споживачів на 45 од. перевищують можливості поставчальників. Введемо фіктивного поставчальника з потужністю, рівною 45 од. Початкову таблицю доповнимо рядком з показниками затрат, рівними 0. В новій таблиці (табл. 7.10) зразу ж розмістимо додатковий рядок та стовпчик для запису в них чисел, які роблять оцінки базисних (заповнених) клітин нульовими. В цій же таблиці проведемо початковий розподіл поставчань з урахуванням найменших затрат.

Таблиця 11.10

Постачальники	Потужності поставчальників	Споживачі та їх потреби				
		1	2	3	4	
		100	70	85	60	
1	90	4	5 20	3 10	1 60	-2
2	50	3	1 50	1	6	2
3	130	2 55	5	3 75	4	-2
Φ	45	0 45	0	0	0	0
		0	-3	-1	1	

Кількість заповнених клітинок відповідає нормі: $4 + 4 - 1 = 7$.

В табл. 7.11 проведена оцінка початкового розподілу поставчань:

Таблиця 11.11

Таблиця 11.12

1	0	0	0	
		30	60	
5	0	0	4	-3
	50			
5	75	0	0	
		55		
	50			
25	20			
	+3			

1	3	0	0	
		30	60	
2	0	-3	1	+3
	25	25		
0	3	0	0	
		30		
100				
0	0	0	2	
	45			
	+3			

З таблиці 11.11 випливає, що розподіл поставок в таблиці 11.10 не є оптимальним, так як клітинка [4.2],[4.3] мають від'ємну оцінку і є вигідними. Дано поставання клітинці [4.2]. Цикл для даної клітинки показано на рис 11.3 а).

Мінімальне поставання парних клітинок рівне 20 од. (клітинка [1.2]). Перерозподіляємо дане поставання по циклу. Новий розподіл поставок запишемо в таблиці 11.11.

Щоб отримати оцінку даного розподілу, до всіх оцінок другого стовпчика

додамо 3 і від усіх оцінок другого рядка віднімемо 3. Новий розподіл оцінюється в табл. 11.12, з якої видно, що розподіл поставок в табл. 11.11 не оптимальний, так як клітинки [2.3],[4.3] в табл. 11.12 мають від'ємну оцінку і їх вигідно заповнити. Заповнимо клітинку [2.3]. Цикл для даної клітинки показано на рис. 11.3 б). Мінімальне поставання парних клітинок рівне 25 од. (клітинка [4.1]).

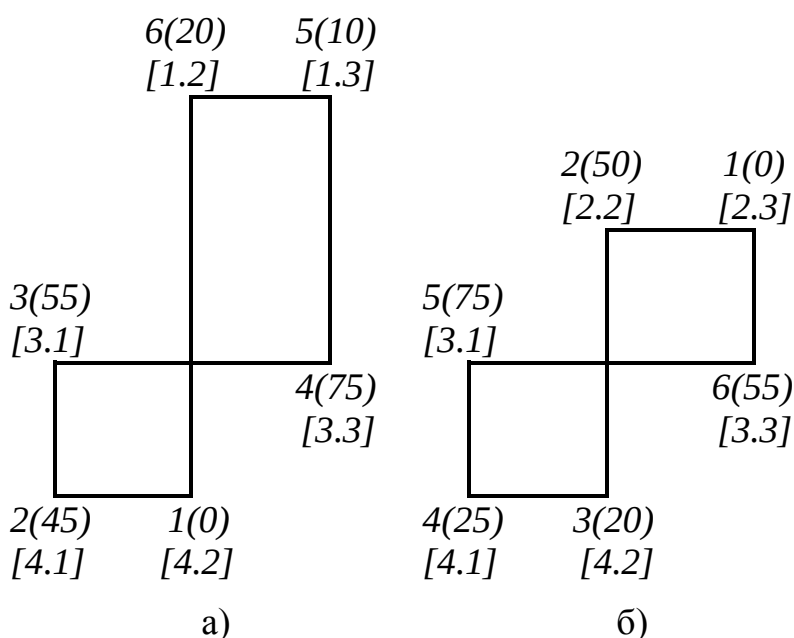


Рис. 11.3

Перерозподіляємо дане поставання по циклу. Результат перерозподілу показано в таблиці 11.12.

В табл. 11.12 не нульова оцінка в заповненій клітинці [2.3]. Для того, щоб її підправити і не порушити баланс в інших заповнених клітинках, додамо до всіх оцінок 2-го та 3-го рядків 3, а від оцінок 2-го стовпчика віднімемо 3. Отримаємо

оціночну таблицю 11.13. Так як у ній всі оцінки невід’ємні, то розподіл поставань, приведений в табл.11.12 є оптимальним.

При оптимальному розподілі 2-ий споживач недоотримає 45 од. вантажу. Для підрахунку мінімальних затрат на перевезення складемо остаточну таблицю 11.14.

Таблиця 11.13

1	0	0	0
5	0	2	9
0	0	0	0
3	0	2	4

Таблиця 11.14

4	5	3 30	1 60
3	1 25	1 25	6
2 100	5	3 30	4

Таким чином,

$$L_{min} = 90 + 60 + 25 + 25 + 200 + 90 = 490 \text{ грош. од.}$$

Приклад 11.2. Знайти оптимальний розподіл поставань в транспортній задачі, виконавши початковий розподіл за правилом „північно-західного кута” (табл. 11.15).

Таблиця 11.15

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби			
		1	2	3	4
		90	60	100	70
1	120	1	3	3	4
2	150	5	2	2	7
3	100	3	6	5	4

Розв’язок. Так як

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 370 \text{ од.}, \quad \sum_{j=1}^4 B_j = 320 \text{ од.}, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^3 A_i > \sum_{j=1}^4 B_j.$$

Надлишок потужностей в 50 од. заплануємо фіктивному споживачеві. Побудуємо табл. 11.16, в якій початковий розподіл зроблено за правилом „північно-західного кута” і визначено числа в додаткових стовпчику і рядку:

Таблиця 11.16

	90	60	100	70	50	
120	1 90	3 30	3	4	0	0
150	5	2 30	2 100	7 20	0	1
100	3	6	5	4 50	0 50	4
	-1	-3	-1	-8	-4	

Таблиця 11.17

0 90	0 10	0	-4	-4 20	
5	0 50	0 100	0	-3	
6	7	6	0 70	0 30	-4
			+4	+4	

Таблиця 11.18

0	0	0	0	0
5	0	0	4	1
2	3	2	0	0

Складаємо оціночну таблицю 11.17. Найменша оцінка -4 належить клітинкам $[1.4]$, $[1.5]$. Дано постачання клітинці $[1.5]$. В циклі цієї клітинки (див. рис. 7.4) найменше постачання парних клітинок рівне 20 і належить клітинці $[2.4]$. Робимо перерозподіл постачань і підправляємо оцінки в заповнених клітинках (табл. 11.17).

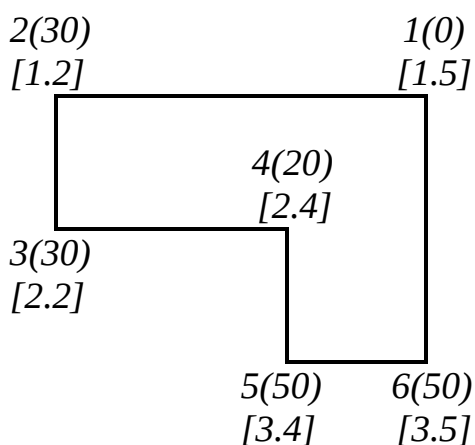


Рис. 11.4

Таблицю 11.19

1 90	3 10	3	4
5	2 50	2 100	7
3	6	5	4 70

Будуємо наступну оціночну табл. 11.18. Всі оцінки в даній таблиці невід'ємні, отже розподіл постачань в табл. 11.17 є оптимальним. В 1-го і 3-го постачальників залишається 20 та 30 од. вантажу, відповідно.

Для знаходження мінімальних затрат на перевезення складаємо остаточну табл. 11.19. Отже,

$$L_{min} = 90 + 30 + 100 + 200 + 280 = 700 \text{ грош. од.}$$

11.8. ВИРОДЖЕННЯ В ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧАХ

Виродженням в лінійному програмуванні називають перетворення в нуль хоча

б однієї з основних змінних базисного розв'язку. Розглянемо, як це відбувається на конкретному прикладі.

Приклад 11.3. Знайти оптимальний розподіл поставчань транспортної задачі (табл. 11.20), взявши в якості початкового розподіл, виконаний за правилом „північно-західного кута”.

Таблиця 11.20

Постачальники	Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби		
		1	2	3
		90	120	80
1	80	7	2	1
2	70	4	5	3
3	60	3	3	2
4	80	1	2	8

Розв'язок. Так як

$$\sum_{i=1}^4 A_i = \sum_{j=1}^3 B_j = 290 \text{ од.},$$

то модель задачі замкнута. В таблиці 11.21 проведено початковий розподіл поставчань за правилом „північно-західного кута”.

Таблиця 11.21

	90	120	80
80	7 80	2	1
70	4 10	5 60	3
60	3	3 60	2
80	1	2	8 80

Таблиця 11.22

7	2	1	
80			-7
4	5	3	-4
3	3	2	-2
1	2	8	-1
0	-1	-7	

В цій таблиці витримано баланс по рядках та стовпчиках і розподіл поставчань закінчено. Але при спробі побудувати цикли для клітинок [1.3], [2.3], [3.3], [4.1], [4.2], виявиться, що це неможливо. Останнє суперечить тому факту, що для будь-якої вільної клітинки можна побудувати цикл. Що ж відбулося?

В даній транспортній задачі кількість постачальників $m=4$, кількість споживачів $n=3$, таким чином кількість заповнених клітинок повинна бути рівна $4+3-1=6$. В таблиці 11.21 заповнених клітинок 5, тобто менше, ніж потрібно. Для доведення кількості заповнених клітинок до потрібного числа, дамо поставчання ще в одну клітинку. Так як баланс по всіх рядках та стовпчиках установлений, то розмір цього поставчання приймаємо рівним нулю. Це нульове поставчання на відміну від

вільних клітинок, постачання яких теж рівне нулю, записується в одну з незаповнених клітинок, і ця клітинка стає заповненою. При встановленні оцінок розподілу постачань даній клітинці повинна відповідати нульова оцінка, як оцінка будь-якої заповненої клітинки.

Вияснимо, в яку клітинку записати нульове постачання. Для цього подивимось ще раз, як виконувався початковий розподіл. Нагадаємо, що при заповненні тієї чи іншої клітинки (крім останньої) з подальшого процесу виключається або один рядок, або один стовпчик. В даному ж прикладі при заповненні клітинки [3.2] з подальшого розподілу випали одночасно 3-й рядок і 2-й стовпчик (до цього були умовно викреслені 1-й і 2-й рядок та 1-й стовпчик). Тому виключимо, наприклад, 3-й рядок, а в 2-му стовпчику клітинці [4.2] дамо нульове постачання і тільки після цього виключимо із подальшого заповнення другий стовпчик.

Можна було б спочатку виключити 2-й стовпчик, а нульове постачання дати в клітинку [3.3].

Зауважимо, що при початковому розподілі була порушена ступінчастість розподілу постачань, яка є характерною для розподілення постачань за правилом „північно-західного кута”. Запис нульового постачання в клітинку [4.2] відновив дану ступінчастість.

Зауваження. Кількість заповнених клітинок при початковому розподілі може відрізнятись від потрібної кількості $m + n - 1$ не на 1, як в приведеній задачі, а на 2, 3 і т.д. Тому в таблиці може бути одне, дві, три і т.д. нульових постачань.

Розподіл постачань, який містить нульове постачання називають *виродженням розподілом*. Він відповідає виродженому базисному розв’язку (частина базисних змінних рівна нулю).

Таблиця 11.23

0 20	-6	-13 60	+13
0 70	0	-8	+13
1	0 60	-7	
0	0 60	0 20	
-13			

Таблиця 11.24

0	7	0 80	
0 70	13	5	-13
-12	0 60	-7	
-13 20	0 60	0 0	
+13			

Остаточний початковий розподіл (кількість заповнених клітинок – 6), приведений в табл. 11.22, там же є додаткові рядок і стовпчик з спеціальними числами, які перетворюють в нуль оцінки заповнених клітинок. В табл. 11.23

проведена оцінка початкового розподілу. Тут нульову оцінку має також клітинка [4.1], але вона не є заповненою, тому при перерахунку оцінок не вимагається зберігання цього нуля.

Найвигіднішою клітинкою для заповнення є клітинка [1.3], її цикл показано на рис. 11.5 а). Найменше постачання парних клітинок рівне 60 од. (клітинка [2.2]). Перерозподіляємо це постачання по циклу. Новий розподіл постачань показано в табл. 7.23: клітинка [2.2] стала вільною, а в клітинці [4.2] постачання уже не нульове.

Для відновлення нульових оцінок в заповнених клітинках в табл. 7.23 до всіх оцінок 1-го і 2-го рядка додамо число 13, а потім від усіх оцінок першого стовпчика віднімемо число 13. Оцінка останнього розподілу показана в табл. 11.24.

Найвигідніша клітинка [4.1]. Цикл цієї клітинки показано на рис. 11.5 б). Найменше постачання парних клітинок рівне 20 од., але воно знаходиться в двох клітинках [1.1] та [4.3]. Тобто після перерозподілу даного постачання по циклу обидві клітинки будуть мати нульове постачання, тобто звільняються зразу дві клітинки. Для збереження кількості заповнених клітинок звільняємо тільки одну з них, наприклад, [1.1], а іншу залишаємо заповненою нульовим постачанням. Отриманий розподіл постачання показаний в табл. 11.24.

Для відновлення нульових оцінок у заповнених клітинках до всіх оцінок першого стовпчика додамо число 13, а потім від усіх оцінок другого рядка віднімемо 13. При цьому отримаємо оціночну табл. 11.25.

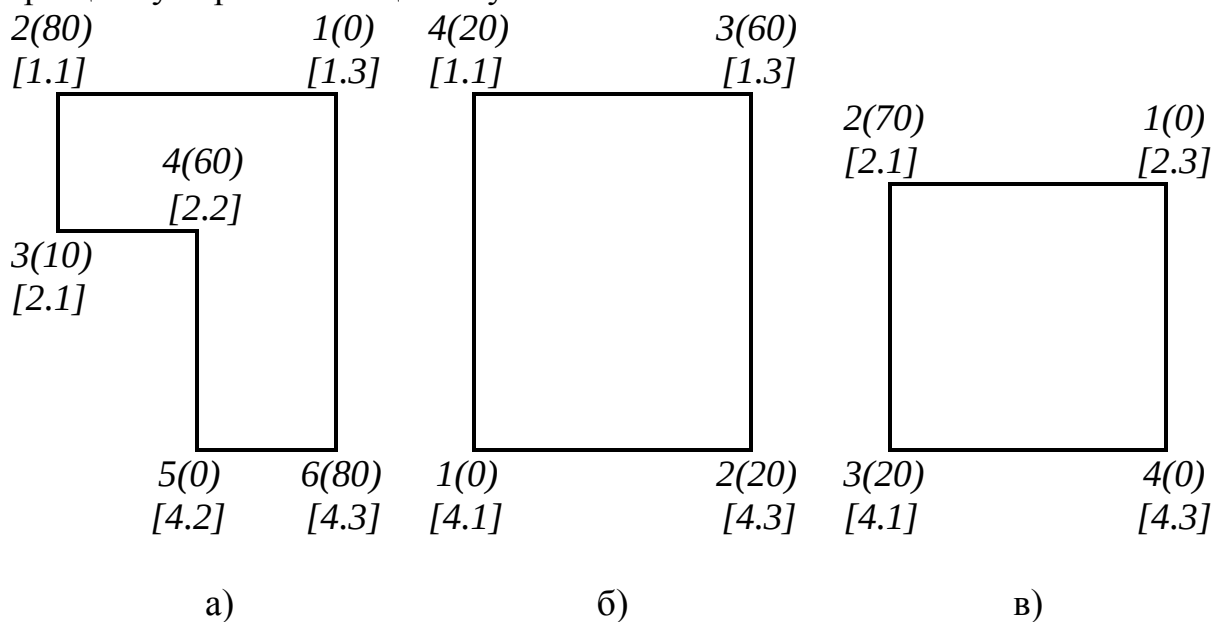


Рис. 11.5

Найменшу оцінку –8 має клітинка [2.3]. Найменше постачання парних клітинок циклу даної клітинки (див. рис. 11.5 в)) рівне нулю і знаходиться в клітинці [4.3]. Таким чином, при перерозподілі нульового постачання по даному циклу постачання в клітинках [2.1], [4.1] не зміниться, а нульове постачання перейде з клітини [4.3] в – [2.3]. Розподіл постачань набуде вигляду, показаного в табл. 11.25. Для відновлення нульових оцінок в заповнених клітинках до всіх оцінок третього

стовпчика додамо число 8 і від усіх оцінок першого рядка віднімемо 8. Отримаємо оціночну табл. 11.26.

Таблиця 11.25				Таблиця 11.26			
13	7	0	-8	5	-1	0	+1
		80			60	20	
0	0	-8		0	0	0	+1
70		0		10		60	
1	0	-7		1	0	1	
	60				60		
0	0	0		0	0	8	+1
20	60			80			
		+8		-1		-1	

Залишилась одна від’ємна оцінка -1 в клітинці [1.2]. Перерозподіляємо по її циклу (див. рис. 11.6) постачання, рівне 60 од. Отримаємо розподіл постачань, показаний в табл. 11.26. Для отримання оціночної таблиці додаємо до всіх оцінок 1-го, 2-го та 3-го рядків останньої таблиці число 1 і віднімаємо від усіх оцінок 1-го та 3-го стовпчиків число 1. Результат показано в таблиці 11.27. Всі оцінки невід’ємні, тобто останній розподіл постачань (див. табл. 11.26) є оптимальним.

Таблиця 11.27			Таблиця 11.28			Рис. 11.6	
5	0	0	7	2	1	1(0)	6(80)
				60	20	[1.2]	[1.3]
0	1	0	4	5	3	4(70)	5(0)
			10		60	[2.1]	[2.3]
0	0	0	3	3	2		
				60			
0	1	8	1	2	8	3(20)	2(60)
			80			[4.1]	[4.2]

Для знаходження мінімальних затрат на перевезення запишемо остаточний розподіл постачань (табл. 11.28). Отже,

$$L_{min} = 120 + 20 + 40 + 180 + 80 = 610 \text{ грош. од.}$$

11.9. АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

1. Визначають модель задачі. У випадку відкритої моделі вводять або фіктивного споживача (якщо потреби менші від пропозиції), або фіктивного постачальника (якщо потреби перевищують пропозицію). Потреби фіктивного споживача встановлюються рівними перевищенню пропозиції над потребами, а потужність фіктивного постачальника – перевищенню потреб над пропозицією. Затрати на перевезення до фіктивного споживача і від фіктивного постачальника вважаються рівними нулю (або довільному однаковому числу).

2. За тим чи іншим методом складають початковий розподіл постачань: за правилом урахування найменших затрат або за правилом „північно-західного кута”, заповнюючи при цьому $m+n-1$ клітинок, де m – кількість постачальників, n – кількість споживачів. Якщо кількість заповнених клітинок виявиться меншою вказаного числа, то у відповідну кількість вільних клітинок вводять нульові постачання.

3. Оцінюють отриманий розподіл постачань. Для цього в додаткові рядок та стовпчик таблиці вводять числа, які приводять до нульових оцінок заповнених клітинок. Перше з них вибирають довільно (зручніше всього рівним нулю), а інші визначаються однозначно. Підраховують оцінки всіх клітинок, в тому числі і вільних, як алгебраїчну суму показника затрат клітинки і відповідних чисел з додаткових рядка та стовпчика. Отримані оцінки записують в наступну таблицю. Якщо серед оцінок вільних клітинок не виявиться від’ємних, то отриманий в попередній таблиці розподіл є оптимальним. В протилежному випадку (є хоча б одна від’ємна оцінка) отриманий розподіл не є оптимальним.

4. Для отримання нового поліпшеного розподілу постачань будують цикл перерозподілу для клітинки, яка має найменшу від’ємну оцінку. По циклу перерозподіляють найменше постачання з парних клітинок циклу. Під час перерозподілу постачань клітинка, для якої утворений цикл, отримує постачання, а парна клітинка, якій відповідало найменше постачання, звільняється. Цикл будується на попередній таблиці.

Якщо виявиться, що звільняється декілька клітинок (якщо найменше постачання виявиться в декількох парних клітинках), то звільняють тільки одну з таких клітинок (довільну), а інші залишають заповненими нульовим постачанням. Якщо найменше постачання в парних клітинках виявиться рівним нулю, то по циклу перерозподіляють нульове постачання. Це приводить до того, що клітинка, яка має нульове постачання, звільняється, а колишня вільна клітинка заповнюється нульовим постачанням; постачання в інших клітинках цього циклу не змінюються. Новий розподіл постачань записують в таблицю, куди вже внесені оцінки

попереднього розподілу.

5. Проводять перерахунок оцінок, переводячи перш за все в нуль оцінку нової заповненої клітинки. Якщо при цьому „псується” нульові оцінки в інших заповнених клітинках, то напроти відповідного рядка або стовпчика записують спеціально підібране число.

6. Рухаючись від однієї таблиці до іншої, повторюють п. 3, 4, 5 до тих пір, поки на якомусь етапі у відповідній таблиці не виявиться від’ємних оцінок. Тоді розподіл постачань в попередній таблиці є оптимальним. Якщо в останній оціночній таблиці нульові оцінки крім заповнених клітинок має хоча б одна вільна клітинка, то оптимальний розподіл постачань не є єдиним.

7. Обчислюють мінімальні затрати на перевезення, для цього в підсумкову таблицю заносять показники затрат на перевезення з таблиці, заданої в умові, і оптимальний розподіл.

Питання для самоконтролю

1. Сформулювати постановку класичної транспортної задачі.
2. Навести приклади транспортних задач.
3. Які дані є вихідними для транспортної задачі?
4. Якими особливостями транспортна задача відрізняється відосновної задачі лінійного програмування?
5. Чому дорівнюють коефіцієнти при всіх змінних в обмеженнях транспортної задачі?
6. Що представляє собою змінна в транспортній задачі?
7. Що називають «перевезенням» у транспортній задачі?
8. Що називають «планом перевезень» транспортної задачі?
9. Що називають «допустимим», «опорним» та «оптимальним» планом перевезень при розв’язанні транспортної задачі?
10. Що являє собою транспортна таблиця? Навести приклад.
11. Яким даним відповідають рядки та стовпчики транспортної таблиці?
12. Які дані записують в останні рядок та стовпчик транспортної таблиці?
13. Де в транспортній таблиці записують вартості перевезень та кількість вантажу, що перевозиться з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення?
14. Які клітини транспортної таблиці називають базисними, а які вільними?
15. Скільки у транспортній таблиці має бути базисних і вільних клітин в опорному плані перевезень?
16. Коли транспортна задача є «закритою», а коли – «відкритою»?

17. Як перейти від «відкритої» транспортної задачі до «закритої», якщо загальні запаси вантажу перевищують потреби в цьому вантажі?
18. Як перейти від «відкритої» транспортної задачі до «закритої», якщо загальні запаси вантажу менші, ніж потреби в цьому вантажі?
19. У якому випадку в транспортну таблицю вводять фіктивний пункт відправлення, а в якому – фіктивний пункт призначення?
20. Яка вартість перевезення одиниці вантажу з фіктивного пункту відправлення або до фіктивного пункту призначення?
21. Які є методи знаходження опорного плану перевезень при розв'язанні транспортної задачі?
22. Який загальний принцип усіх методів знаходження опорного плану перевезень транспортної задачі?
23. Поясніть, на чому заснований метод потенціалів.
24. Перелічіть основні етапи методу потенціалів.
25. Які умови повинні бути дотримані під час побудови ланцюжка перетворення плану в методі потенціалів?
26. Що треба робити під час виникнення ситуації виродженості поточного плану в транспортній задачі?

Задачі для самостійного розв'язання

Розв'язати транспортні задачі:

1.

$b_j \backslash a_i$	100	70	165	90
65	7	1	3	8
140	5	8	4	1
120	7	6	2	3
60	5	2	4	2
40	1	6	5	3

2.

$b_j \backslash a_i$	70	130	120	75
125	8	7	6	5
150	1	8	7	4
95	6	3	2	3

12. ПРИНЦИП ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ Р. БЕЛЛМАНА. БАГАТОКРОКОВІ ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Динамічне програмування – це математичний метод оптимізації рішень, спрямований на отримання максимального ефекту від реалізації багатоетапних (багатокрокових) керованих процесів. Задачами динамічного програмування є задачі поетапного планування капітальних вкладень, заміни обладнання, вибору раціональних режимів руху транспортних одиниць на маршруті, знаходження найкоротших (найбільш раціональних) маршрутів на транспортній мережі тощо.

До характерних особливостей задач динамічного програмування можна

віднести: – неоднозначність результатів (багатоваріантність рішення); – можливість поділу загального процесу на етапи; – керованість процесу, тобто на кожному етапі є можливість прийняття рішення щодо розвитку процесу на даному етапі; – адитивність критерію ефективності, який являє собою суму часткових критеріїв, отриманих на кожному з етапів.

Якщо кількість етапів, на які розбивається процес, та кількість можливих рішень на кожному етапі порівняно не великі, то задачу можна розв'язати простим перебором варіантів. Однак у більшості випадків такий шлях є неприйнятним через великий обсяг необхідних розрахунків. Використання методів динамічного програмування дозволяє здійснювати цілеспрямований відбір варіантів розв'язання задачі та за рахунок цього суттєво скоротити обсяг розрахунків.

Розв'язання багатокрокових задач базується на використанні принципу Беллмана. Його суть сформулюємо так: *якщо деяка послідовність розв'язків оптимальна, то окремі наступні розв'язки в середині неї оптимальні по відношенню до попередніх*. Іншими словами, *оптимальність чергових етапів розв'язку не залежить від попередніх*. Яким би шляхом ми не прийшли до фіксованого етапу, подальші кроки можна вибирати оптимальними. З цієї причини пошук оптимального розв'язку слід починати з останнього етапу. Далі переходити до аналізу попереднього, відкидаючи можливі альтернативи, які суперечать вже проаналізованому розв'язку.

Задача динамічного програмування формулюється так:

Знайти максимум

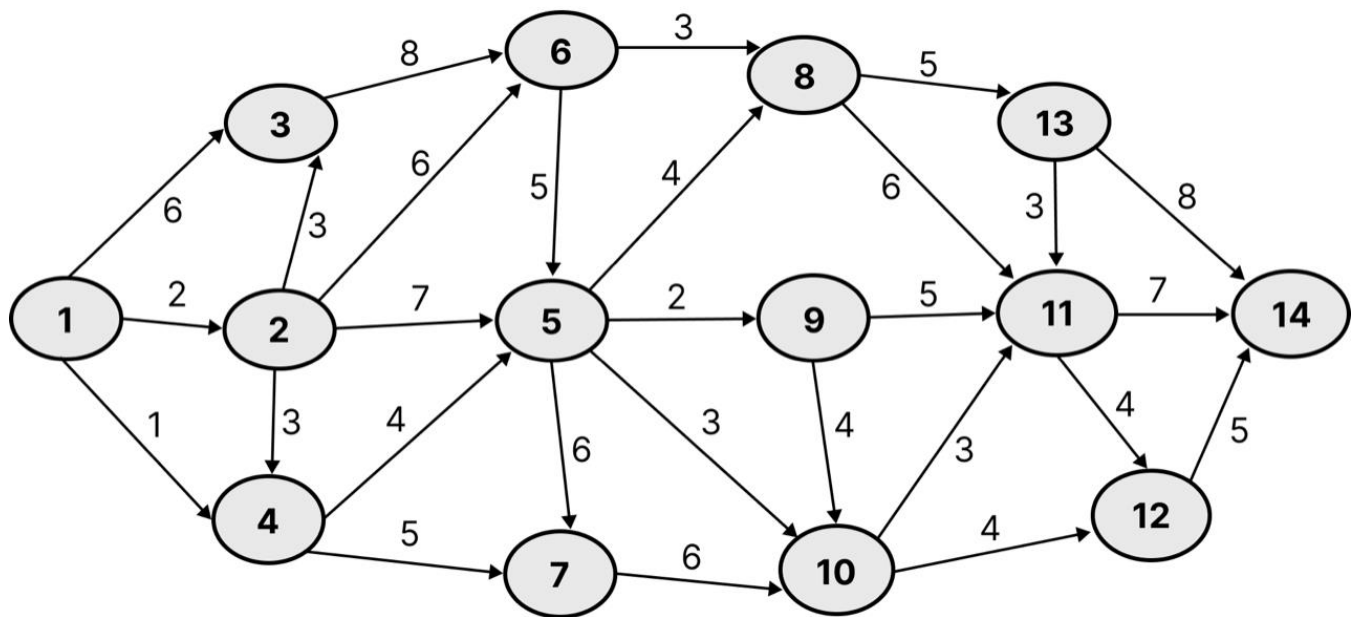
$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b_i, \quad a_i > 0, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Цільова функція Z є сумою функцій від однієї змінної (кожний доданок від своєї змінної). Така функція називається *адитивно-рекурсивною*.

Приклад. Будемо вважати, що є потреба вибрати найдешевший (з мінімальними затратами) профіль дороги. Вся дорога складається з 14 ділянок. Вартість будівництва кожної з них задано графічно.



Згідно з принципом оптимальності Беллмана, аналіз треба починати з кінцевого моменту (14). В пункт 14 можна потрапити з пунктів 11, 12, 13. При цьому затрати складуть $11 \rightarrow 14 \Rightarrow 7$; $12 \rightarrow 14 \Rightarrow 5$; $13 \rightarrow 14 \Rightarrow 8$. До пункту 13 можна потрапити лише з пункту 8: $8 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \Rightarrow 13$. Через пункт 11 в 14 можна потрапити з пунктів:

$8 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \Rightarrow 13$
 $9 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \Rightarrow 12$
 $13 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \Rightarrow 10$
 $10 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \Rightarrow 10$
 $10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \Rightarrow 9$
 $9 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \Rightarrow 13$

Очевидно, що профіль дороги з пункту 10 ефективніше будувати через пункт 12, оскільки вартість його будівництва найменша – 9 гр. од.

З пункту 9 будівництво розумно буде вести через пункт 11, вартість складе 12 гр. од.; з пункту 8 – через пункти 13 чи 11, вартість будівництва однакова – 13 гр. од.

В пункт 8 можна будувати дорогу через пункти 6 та 5, з вартістю відповідно

$6 \rightarrow 8 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \Rightarrow 16$ гр. од.,
 $5 \rightarrow 8 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \Rightarrow 17$ гр. од.,
 $5 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \Rightarrow 17$ гр. од.,
 $6 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \Rightarrow 22$ гр. од., або
 $6 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \Rightarrow 22$ гр. од.

В пункт 9 можна потрапити лише з пункту 5:

$5 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \Rightarrow 14$ гр. од.

В пункт 10 розумно будувати дорогу з

$5 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \Rightarrow 12$ гр. од., або
 $7 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \Rightarrow 15$ гр. од.

Вартість $5 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \Rightarrow 21$ гр. од. значно дорожча і підлягає виключенню.

В пункт 6 можна потрапити з пунктів 3 і 2. Вартість цих маршрутів складе

$$3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \Rightarrow 24 \text{ гр. од.}$$

$$2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \Rightarrow 27 \text{ гр. од.}$$

$$2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \Rightarrow 22 \text{ гр. од.}$$

Останній маршрут дає перевагу в 5 гр. од.

До пункту 5 можна вести будівництво через пункти 2 і 4, при цьому вартість складе відповідно:

$$2 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \dots \rightarrow 14 \Rightarrow 7 + 14 = 21 \text{ гр. од.}$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \dots \rightarrow 14 \Rightarrow 3 + 4 + 14 = 21 \text{ гр. од.}$$

$$4 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \dots \rightarrow 14 \Rightarrow 4 + 14 = 18 \text{ гр. од.}$$

В пункт 7 можна потрапити з $4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 14 \Rightarrow 20 \text{ гр. од.}$

До пункту 3 можна прокласти маршрут через :

$$1 \rightarrow 3 \dots \rightarrow 14 \Rightarrow 6 + 24 = 30 \text{ гр. од.}$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \dots \rightarrow 14 \Rightarrow 2 + 27 = 29 \text{ гр. од.}$$

В пункт 2:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \dots \rightarrow 14 \Rightarrow 2 + 21 = 23 \text{ гр. од.}$$

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \dots \rightarrow 14 \Rightarrow 2 + 21 = 23 \text{ гр. од.}$$

В пункт 4:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \dots \rightarrow 14 \Rightarrow 1 + 18 = 19 \text{ гр. од.}$$

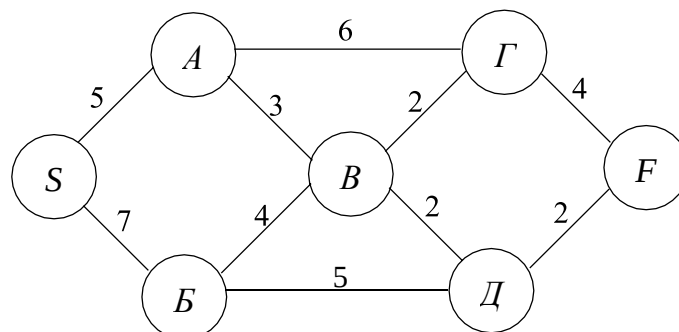
З аналізу видно, що останній маршрут $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 14$ оптимальний, оскільки забезпечує мінімальну вартість будівництва (19 гр. од.).

Питання для самоконтролю

1. В яких випадках застосовують апарат динамічного програмування?
2. Сформулювати принцип Беллмана.
3. Як формулюється задача динамічного програмування?
4. Що таке адитивно-рекурсивна функція?

Задачі для самостійного розв'язання

Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0,$$

$$g_2 = 2x_1 - 3x_2 - 12 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 8, \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 97, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = x_1 + 4x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом.

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ 7x_1 - x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

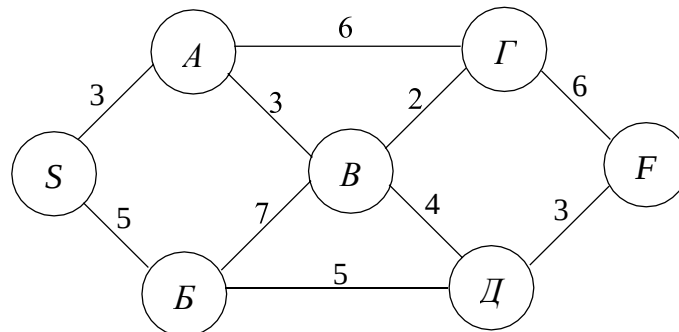
5.1.

$b_j \backslash a_i$	70	90	80	110
60	1	2	3	4
100	6	5	4	5
40	7	4	3	6
30	8	3	2	7
120	1	2	1	8

5.2.

$b_j \backslash a_i$	90	115	85	120
75	1	2	7	6
110	4	3	8	5
150	5	6	7	4

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 2.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = 2x_1 x_2 + x_2 x_3 - 12 = 0,$$

$$g_2 = 2x_1 - x_2 - 8 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \geq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -3x_1 - x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 19, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

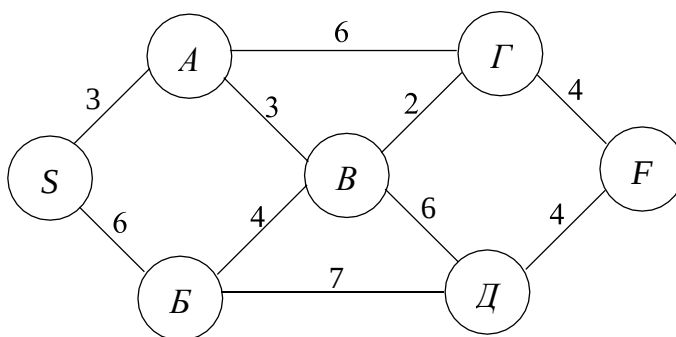
5.1.

$b_j \backslash a_i$	100	80	60	150
130	1	7	8	1
70	6	2	6	2
50	1	5	3	5
80	5	2	4	4
60	6	4	3	3

5.2.

$b_j \backslash a_i$	95	110	135	70
200	1	7	2	6
180	8	1	5	3
120	7	4	2	5

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 3.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0,$$

$$g_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 - 8 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 13, \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 29, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 8x_1 + 2x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 7, \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 50, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

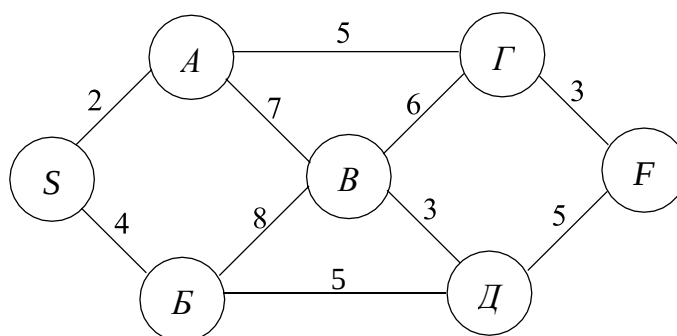
5.1.

$b_j \backslash a_i$	40	80	70	140
50	1	2	3	4
100	2	1	4	3
30	3	8	5	2
60	4	7	6	1
90	5	6	7	8

5.2.

$b_j \backslash a_i$	110	105	70	160
85	8	7	6	5
120	5	6	7	4
140	4	2	8	3

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 4.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1^2 x_2^3 x_3^4 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 18 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 \geq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -2x_1 - 5x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_1 - 3x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

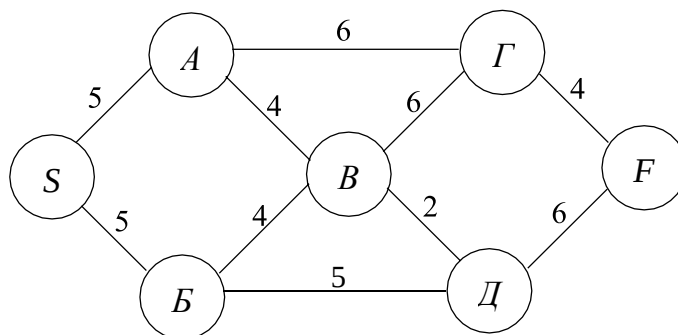
5.1.

$b_j \backslash a_i$	75	85	40	90
65	1	3	5	7
30	8	6	4	2
60	2	4	6	8
80	7	5	3	1
55	1	3	4	2

5.2.

$b_j \backslash a_i$	100	70	115	90
160	1	3	4	6
130	2	7	8	1
145	5	2	3	8

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 5.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = 4x_1^2 + 48x_2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 - 300 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 28, \\ 6x_1 + 5x_2 \geq 41, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = x_1 + 3x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 19, \\ 4x_1 - x_2 \leq 14, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

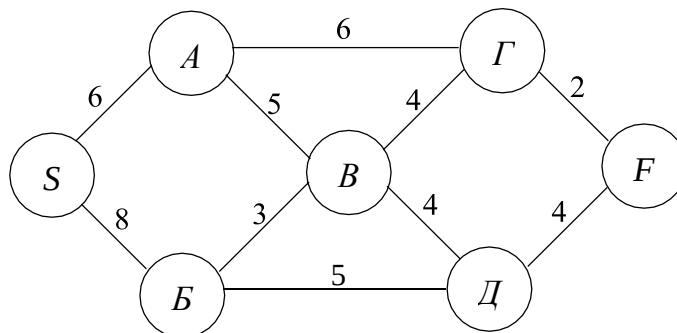
5.1.

$b_j \backslash a_i$	130	145	85	60
80	3	2	4	1
65	2	3	1	5
75	3	2	4	4
80	1	2	3	4
120	6	7	8	9

5.2.

$b_j \backslash a_i$	130	95	55	155
95	5	1	3	4
125	6	2	7	4
160	1	5	8	3

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 6.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x + 1 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 35, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 4x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 4x_2 \leq 21, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

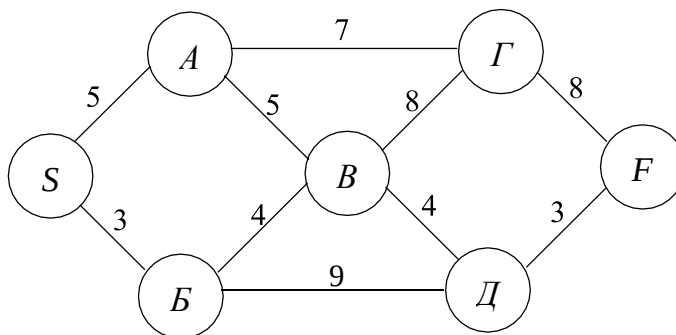
5.1.

$b_j \backslash a_i$	70	160	55	90
60	2	4	1	3
80	4	6	5	4
45	3	7	9	5
110	2	3	4	1
80	4	5	6	7

5.2.

$b_j \backslash a_i$	105	90	125	130
170	2	4	1	3
200	4	6	3	7
175	5	1	2	5

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 7.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 16 = 0,$$

$$g_2 = x_1 - x_2 - 4 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \leq 27, \\ 7x_1 + 4x_2 \geq 46, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 5x_1 + x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 3x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + x_2 \leq 21, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

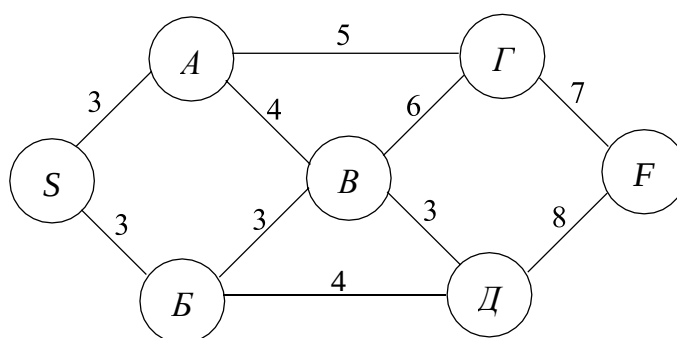
5.1.

$b_j \backslash a_i$	30	90	160	95
55	1	5	3	4
100	2	4	5	8
80	3	3	6	4
60	7	2	1	5
80	3	1	6	2

5.2.

$b_j \backslash a_i$	150	65	85	125
105	6	2	5	1
110	3	4	2	6
85	1	4	1	8

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 8.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0,$$

$$g_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 - 12 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 26, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 3x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 22, \\ 7x_1 - 5x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$3x_1 - 4x_2 \rightarrow \min.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

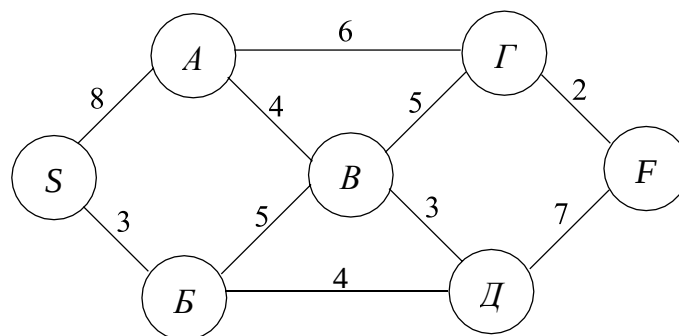
5.1.

$b_j \backslash a_i$	75	150	95	100
85	1	2	3	4
50	8	7	6	5
65	2	4	6	8
90	6	5	3	1
130	9	2	6	3

5.2.

$b_j \backslash a_i$	110	80	55	130
150	1	7	6	5
170	2	2	3	4
65	3	6	7	1

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 9.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 x_4 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 0,$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 4}$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \geq 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 4x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + 6x_2 \leq 31, \\ x_1 + x_2 \leq 11, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

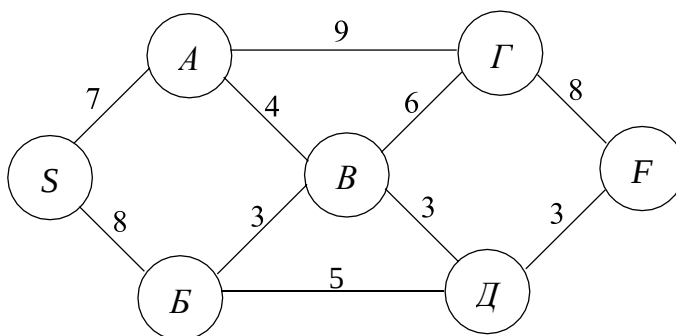
5.1.

$b_j \backslash a_i$	50	110	145	85
65	3	2	4	1
75	2	3	1	5
70	3	2	4	4
80	1	2	3	4
100	6	7	8	9

5.2.

$b_j \backslash a_i$	140	85	115	95
95	1	3	5	7
190	6	1	5	3
110	4	2	4	6

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 10.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 8 = 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 \leq 19, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -6x_1 - x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 6, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 44, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

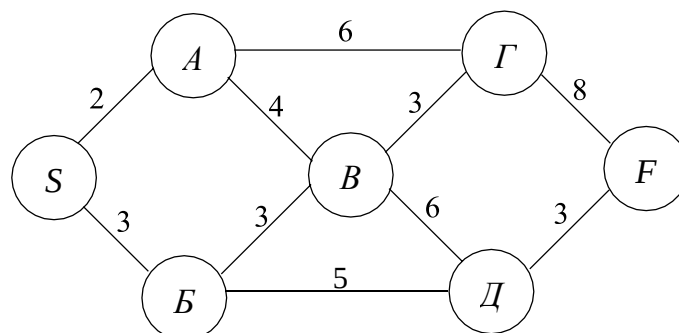
5.1.

$b_j \backslash a_i$	80	140	65	30
90	2	4	1	3
40	4	6	5	4
55	3	7	9	5
70	2	3	4	1
60	4	5	6	7

5.2.

$b_j \backslash a_i$	115	70	175	90
160	8	1	3	2
145	7	6	1	5
175	3	5	4	4

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 11.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0,$$

$$g_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 - 8 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 6, \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 17, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 3x_1 + x_2 \leq 11, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

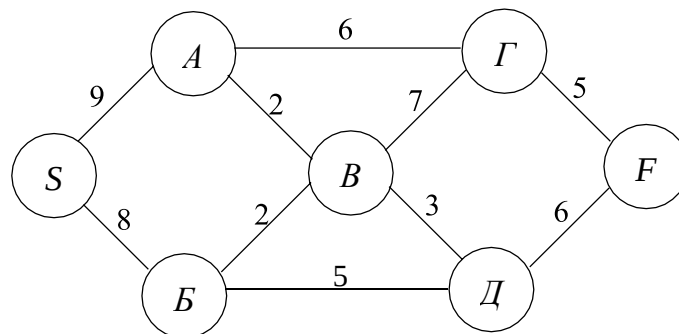
5.1.

$b_j \backslash a_i$	70	130	120	75
65	8	7	6	5
50	7	8	7	4
95	6	3	6	3
100	5	4	5	2
85	4	3	2	1

5.2.

$b_j \backslash a_i$	120	75	145	65
115	1	8	2	1
185	3	7	6	2
180	5	3	5	4

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 12.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0,$$

$$g_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 - 8 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 7x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 26, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

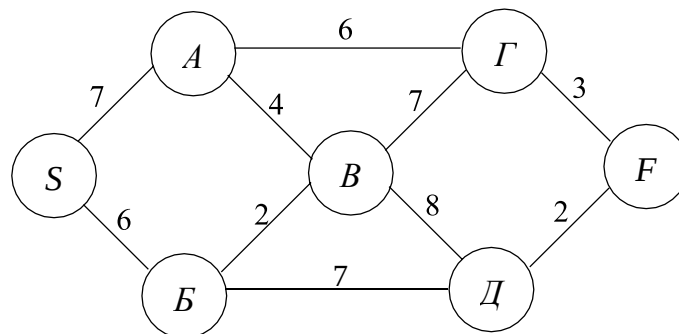
5.1.

$b_j \backslash a_i$	85	130	95	110
120	1	7	6	5
65	2	8	5	4
75	3	8	4	3
60	4	7	3	2
100	5	6	2	1

5.2.

$b_j \backslash a_i$	120	60	145	70
150	1	3	8	5
90	4	1	2	7
175	6	5	3	2

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 13.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 - 4 = 0,$$

$$g_2 = x_2 + x_3 - 4 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 7, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 29, \\ 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

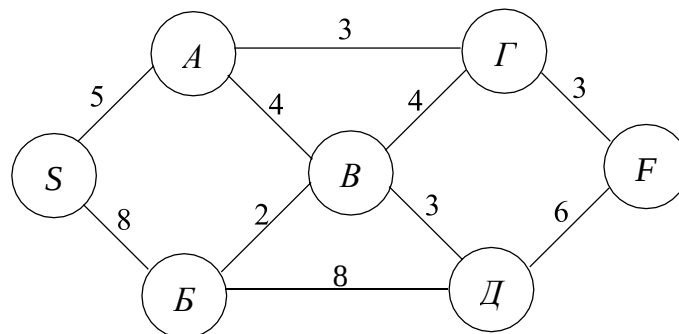
5.1.

$b_j \backslash a_i$	30	125	105	80
45	6	4	3	1
90	5	2	2	8
60	1	3	7	7
70	4	6	6	3
75	5	5	4	2

5.2.

$b_j \backslash a_i$	100	70	165	90
65	7	1	3	8
140	5	8	4	1
120	7	6	2	3

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 14.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_1^2 + 4x_2^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + 2x_2 - 4 = 0,$$

$$g_2 = 4x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 3x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \leq 31, \\ 3x_1 + x_2 \leq 29, \\ 2x_1 - x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

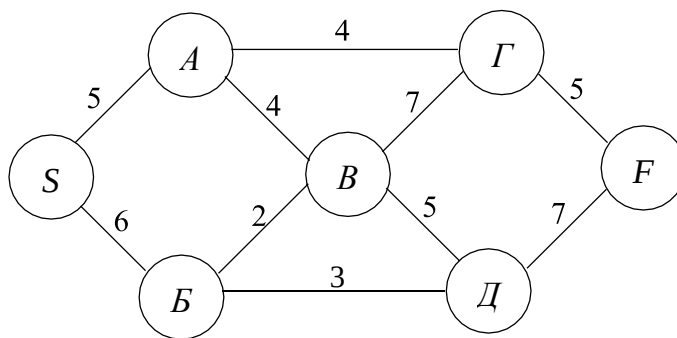
5.1.

$b_j \backslash a_i$	90	120	85	60
100	3	4	5	6
70	2	3	2	7
85	1	4	1	8
80	2	5	6	7
20	3	4	5	6

5.2.

$b_j \backslash a_i$	125	50	165	80
60	6	7	1	3
80	8	8	5	4
110	1	2	7	6

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 15.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = 2x_1 + 4x_2 - 8 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \leq 29, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 2x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 5x_2 \leq 41, \\ 4x_1 + x_2 \leq 31, \\ 3x_1 - x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

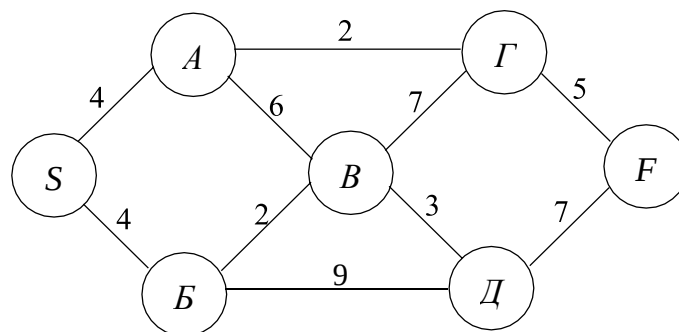
5.1.

$b_j \backslash a_i$	90	115	85	120
75	1	2	7	6
110	4	3	8	5
50	5	6	7	4
95	2	1	2	3
80	3	4	5	6

5.2.

$b_j \backslash a_i$	80	60	140	115
130	5	6	7	8
95	1	3	8	5
105	2	1	4	7

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 16.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = 2x_1 - 3x_2 - 5 = 0,$$

$$g_2 = x_1 + 4x_2 - 7 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 7, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 23, \\ 2x_1 + x_2 \geq 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -2x_1 - 3x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 38, \\ 4x_1 + x_2 \leq 36, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

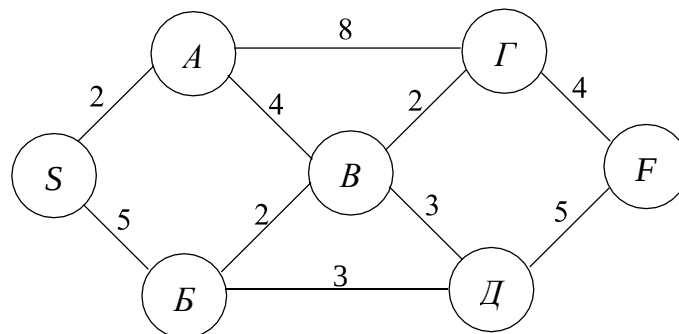
5.1.

$b_j \backslash a_i$	95	110	135	70
100	1	7	2	6
80	8	1	5	3
120	7	4	2	5
60	2	3	6	4
50	6	3	5	4

5.2.

$b_j \backslash a_i$	130	40	155	100
150	8	5	6	7
190	2	1	3	8
125	5	4	1	2

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 17.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0,$$

$$g_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 8 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ x_1 + 8x_2 \geq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 16, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \\ 9x_1 + x_2 \leq 54, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

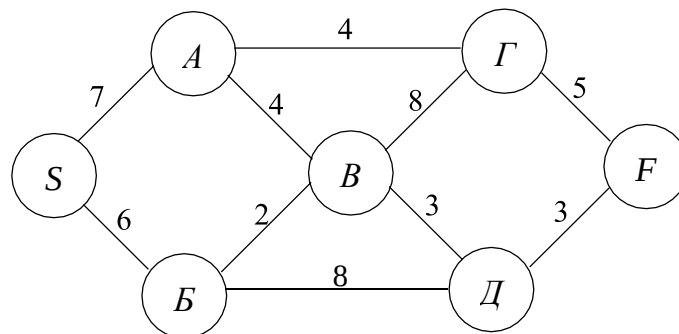
5.1.

$b_j \backslash a_i$	110	105	70	160
85	8	7	6	5
140	5	6	7	4
40	4	2	8	3
120	3	2	1	2
60	4	3	1	2

5.2.

$b_j \backslash a_i$	70	90	80	110
60	1	2	3	4
100	6	5	4	5
105	7	1	3	6

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 18.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

2.. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -3x_1 - 2x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 68, \\ x_1 - x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

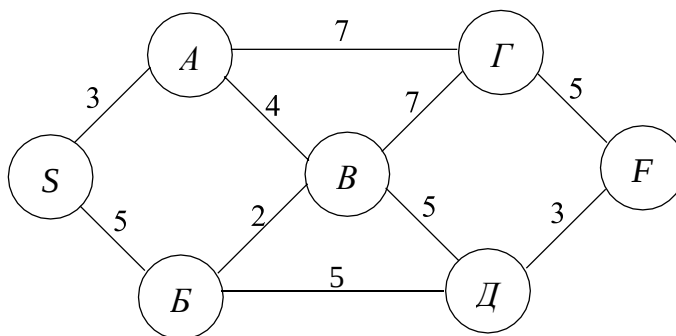
5.1.

$b_j \backslash a_i$	100	70	115	90
60	1	3	4	6
90	2	7	8	1
75	5	2	3	8
110	1	3	5	4
40	7	6	2	5

5.2.

$b_j \backslash a_i$	100	80	60	150
130	1	7	8	1
170	6	2	6	2
120	3	5	3	5

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 19.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x + 1 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 24, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 29, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ F = 2x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 4x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

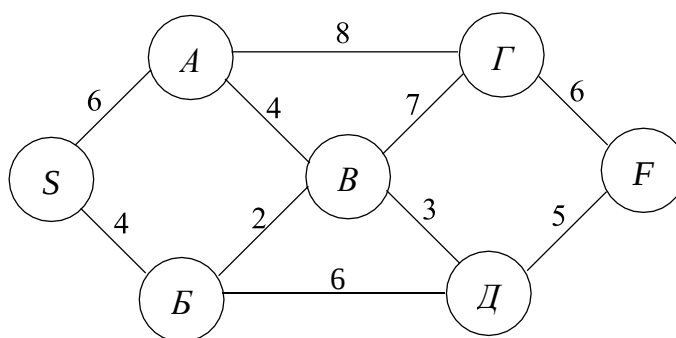
5.1.

$b_j \backslash a_i$	130	95	55	155
95	5	1	3	4
125	6	1	7	3
60	1	5	8	3
105	2	2	8	5
50	4	7	6	2

5.2.

$b_j \backslash a_i$	40	80	70	140
90	1	5	3	4
100	2	1	4	3
110	6	8	5	2

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 20.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \text{extr} \\ g_1 &= x_1 + x_2 - 7 = 0, \\ 0 &\leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 10. \end{aligned}$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -4x_1 - 3x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 11, \\ 5x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

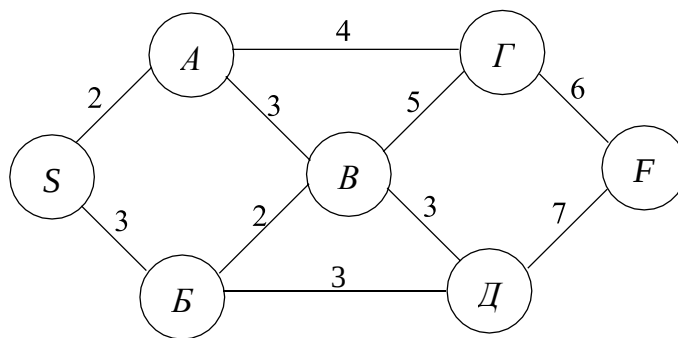
5.1.

$b_j \backslash a_i$	105	90	125	130
70	1	5	1	3
100	4	6	3	7
75	5	1	3	5
90	4	2	8	8
115	2	2	7	6

5.2.

$b_j \backslash a_i$	75	85	40	90
105	1	3	5	7
130	8	6	4	2
80	2	4	6	8

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 21.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 - 6 = 0,$$

$$x_1 + x_2 \leq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ 9x_1 + 5x_2 \geq 77, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 4x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 22, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

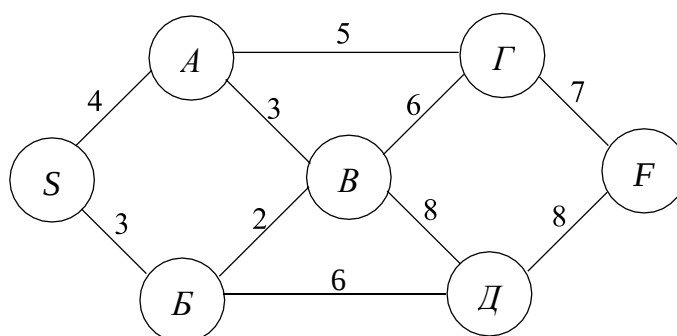
5.1.

$a_i \backslash b_j$	150	65	85	125
105	6	2	5	1
110	3	4	2	6
80	7	3	1	1
90	5	3	5	8
40	8	4	2	7

5.2.

$a_i \backslash b_j$	130	145	85	60
80	6	2	4	1
165	2	3	1	5
115	3	7	5	4

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 22.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 = 0,$$

$$0 \leq x_1 \leq 6, 0 \leq x_2 \leq 4.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 8, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 18, \\ 8x_1 + 5x_2 \geq 58, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 2x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ 10x_1 + x_2 \leq 32, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

3

$$7x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

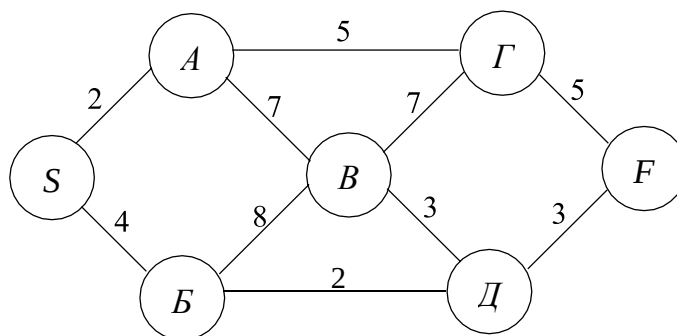
5.1.

$b_j \backslash a_i$	110	80	55	130
50	1	7	6	5
70	1	2	3	4
65	3	6	7	1
100	3	5	2	5
90	8	8	4	2

5.2.

$b_j \backslash a_i$	70	160	55	90
140	2	4	1	3
130	1	6	5	4
145	3	7	9	5

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 23.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1^2 + x_2^2 \leq 52.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 7, \\ 6x_1 + 7x_2 \geq 68, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 16, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

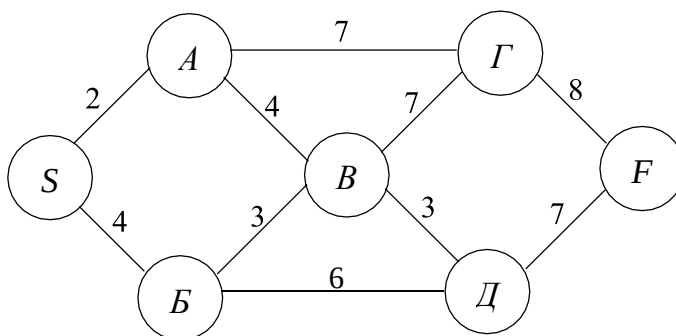
5.1.

$b_j \backslash a_i$	140	85	115	95
115	1	3	5	7
90	6	1	5	3
100	4	2	4	6
70	1	7	5	3
60	2	8	2	8

5.2.

$b_j \backslash a_i$	30	90	160	95
125	1	5	3	4
100	2	4	5	8
80	3	1	6	2

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 24.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + x_2 + x_3 \leq 4.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ x_1 + 2x_2 \geq 13, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 - 2x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

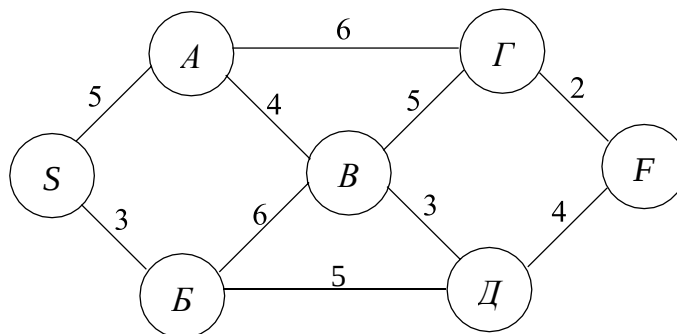
5.1.

$b_j \backslash a_i$	115	70	175	90
60	8	1	3	2
85	7	6	1	5
75	3	5	4	4
100	6	1	3	5
130	7	2	2	8

5.2.

$b_j \backslash a_i$	75	150	95	100
185	1	2	3	4
130	8	7	6	5
165	2	4	6	8

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



Варіант 25.

1. Розв'язати задачу оптимізації методом множників Лагранжа:

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$g_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0,$$

$$g_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

2. Знайти $F_{\max}$ і $F_{\min}$ в задачі лінійного програмування;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 28, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 5x_1 + 3x_2.$$

3. Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 11, \\ 13x_1 + 2x_2 \leq 56, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$5x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

4. Розв'язати задачу, двоїсту до задачі 3.

5. Розв'язати транспортні задачі:

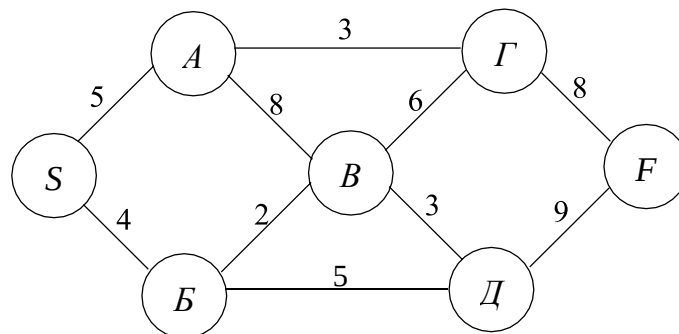
5.1.

$b_j \backslash a_i$	120	75	145	65
115	1	8	2	1
85	3	7	6	2
80	5	3	5	4
55	4	3	1	6
70	5	7	8	2

5.2.

$b_j \backslash a_i$	50	110	145	85
165	3	2	4	1
75	7	3	1	5
130	6	2	5	4

6. Розв'язати задачу динамічного програмування (S – початковий пункт, F – кінцевий пункт):



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

1.1.1. У якому вигляді записується система обмежень в канонічній задачі лінійного програмування?

Відповідь: А. Нерівностей. Б. Частина обмежень записана у вигляді нерівностей, частина – у вигляді рівнянь. В. Строгих нерівностей. Г. Рівнянь.

Д. Інша відповідь.

1.1.2. Якою є множина всіх допустимих розв'язків будь-якої системи обмежень

задачі лінійного програмування?

Відповідь: А. Замкненою. Б. Необмеженою. В. Випуклою. Г. Порожньою.
Д. Інша відповідь.

1.1.3. Лінійна форма прямої задачі $F_{\max} = 25$. Знайти $Z_{\min}$ двоїстої задачі.

Відповідь: А. $Z_{\min} = -25$. Б. $Z_{\min} = 25$. В. Не можливо визначити.

Г. Система обмежень двоїстої задачі несумісна. Д. Інша відповідь.

1.2.1. Скільки клітин треба заповнити при початковому розподілі поставчань в транспортній задачі:

	60	150	50	40	80
120	7	6	5	4	6
70	1	5	2	5	2
90	6	4	3	2	5
10	3	3	1	3	3
90	4	2	5	1	7

Відповідь: А. 8. Б. 25. В. 9. Г. 5. Д. Інша відповідь.

1.2.2. Знайти базисний розв'язок задачі лінійного програмування у випадку основних змінних x_3, x_4 , неосновних – x_1, x_2 :

$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 - 6x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} F = -2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

Відповідь: А. $X = (0; 0; 5; 2)$. Б. $X = (5; 2; 0; 0)$. В. $X = (0; 0; -2; 2)$.

Г. $X = (-4; -3; -2; -6)$. Д. Інша відповідь.

1.2.3. Чи є розв'язок $X = (0; 0; 7; 4)$ оптимальним, якщо $F_{\max} = 155 - 7x_1 - 9x_2$?

Відповідь: А. Ні. Б. Не можливо визначити. В. Розв'язок не єдиний. Г. Так.

Д. Інша відповідь.

1.3.1. Застосовуючи геометричний метод, визначити скільки розв'язків має задача:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} F = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

Відповідь: А. Безліч. Б. Жодного. В. Один. Г. Два. Д. Інша відповідь.

1.3.2. Розв'язати задачу симплексним методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min.$$

Відповідь: А. $F_{\min} = 4$. Б. $F_{\min} = 2$. В. $F_{\min} = 5$. Г. $F_{\min} = 8$. Д. Інша відповідь.

1.3.3. Виконати початковий розподіл поставчань за правилом врахування найменших затрат в транспортній задачі і підрахувати загальні затрати на перевезення при цьому розподілі:

	140	55	65
--	-----	----	----

90	6	1	3
100	4	9	2
70	5	7	8

Відповідь: А. $F = 885$. Б. $F = 1655$. В. $F = 1000$. Г. $F = 580$. Д. Інша відповідь.

Варіант 2

2.1.1. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називають базисним?

Відповідь: А. Розв'язок, в якому всі неосновні змінні рівні нулю.

Б. Розв'язок, в якому всі неосновні змінні відмінні від нуля.

В. Розв'язок, в якому всі основні змінні рівні нулю.

Г. Розв'язок, в якому всі основні змінні відмінні від нуля.

Д. Інша відповідь.

2.1.2. Якщо існує, і притому єдиний, оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування, то він співпадає:

Відповідь: А. з однією з кутових точок множини допустимих розв'язків системи обмежень.

Б. з однією з внутрішніх точок множини допустимих розв'язків системи обмежень.

В. з початком координат.

Г. з точкою множини допустимих розв'язків системи обмежень, найвіддаленішою від початку координат в напрямку нормального вектора.

Д. Інша відповідь.

2.1.3. Що називають розподілом постачань в транспортній задачі?

Відповідь: А. Кількість заповнених клітинок.

Б. Будь-який розв'язок транспортної задачі.

В. Потужності постачальників.

Г. Потреби споживачів.

Д. Інша відповідь.

2.2.1. Скільки додаткових змінних треба ввести, щоб систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_3 \leq 4, \\ x_1 + x_2 - x_4 \leq 3 \end{cases}$$

привести до канонічного вигляду?

Відповідь: А. Одну. Б. Дві. В. Три. Г. Чотири. Д. Інша відповідь.

2.2.2. Знайти потужність фіктивного постачальника в транспортній задачі:

Потужності постачальників	Споживачі та їх потреби				
	60	150	50	40	80
В					

120	7	6	5	4	6
70	1	5	2	5	2
90	6	4	3	2	5

Відповідь: А. 50. Б. 170. В. 100. Г. 80. Д. Інша відповідь.

2.2.3. Вибрати недопустимий вироджений розв'язок $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ задачі у випадку основних змінних x_3, x_4 , неосновних – x_1, x_2 :

Відповідь: А. $X = (0; 0; 5; 2)$. Б. $X = (5; 2; 0; 0)$. В. $X = (0; 0; 0; 2)$.

Г. $X = (0; 0; -2; 0)$. Д. Інша відповідь.

2.3.1. Застосовуючи геометричний метод, визначити скільки розв'язків має задача:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$

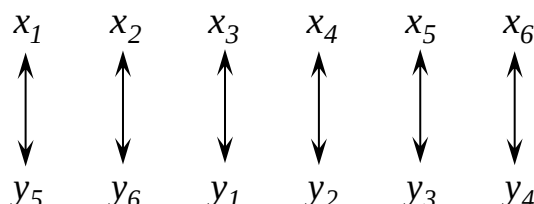
Відповідь: А. Безліч. Б. Жодного. В. Один. Г. Два. Д. Інша відповідь.

2.3.2. Розв'язати задачу симплексним методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

Відповідь: А. $F_{\max} = 4$. Б. $F_{\max} = 2$. В. $F_{\max} = 5$. Г. $F_{\max} = 8$. Д. Інша відповідь.

2.3.3. Лінійна форма, отримана на останньому кроці розв'язку двоїстої задачі, має вигляд $Z_{\min} = 27 + 4y_1 + 9y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 7y_5 + 3y_6$. Знайти $F_{\max}$ і оптимальний розв'язок прямої задачі при відповідності змінних:



Відповідь: А. $F_{\max} = 27, (7; 3; 4; 9; 0; 0)$. Б. $F_{\max} = 27, (4; 9; 0; 0; 7; 3)$.

В. $F_{\max} = -27, (-7; -3; -4; -9; 0; 0)$. Г. $F_{\max} = -27, (7; 3; 4; 9; 0; 0)$.

Д. Інша відповідь.

Варіант 3

3.1.1. Для яких систем обмежень можна застосовувати геометричний метод розв'язання задач лінійного програмування?

Відповідь: А. З двома змінними. Б. З трьома змінними.

В. З двома або трьома змінними. Г. З довільною кількістю змінних.

Д. Інша відповідь.

3.1.2. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називають виродженим?

Відповідь: А. Базисний розв'язок, в якому всі неосновні змінні додатні.

- Б. Базисний розв'язок, в якому хоча б одна з основних змінних рівна нулю.
 В. Базисний розв'язок, в якому всі неосновні змінні відмінні від нуля.
 Г. Базисний розв'язок, в якому хоча б одна з неосновних змінних рівна нулю.
 Д. Інша відповідь.

3.1.3. Яку математичну модель транспортної задачі називають закритою?

Відповідь: А. Сумарна потужність постачальників не перевищує сумарної потреби споживачів.

- Б. Сумарна потужність постачальників рівна сумарній потребі споживачів.
 В. Сумарна потужність постачальників більша сумарної потреби споживачів.
 Г. Сумарна потужність постачальників менша сумарної потреби споживачів.
 Д. Інша відповідь.

3.2.1. Скільки додаткових змінних треба ввести, щоб систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \end{cases}$$

привести до канонічного вигляду?

Відповідь: А. Одну. Б. Дві. В. Три. Г. Чотири. Д. Інша відповідь.

3.2.2. Знайти потреби фіктивного споживача в транспортній задачі:

Потужності постачальни ків	Споживачі та їх потреби			
	60	50	50	40
120	7	6	5	4
70	1	5	2	5
90	6	4	3	2

Відповідь: А. 50. Б. 170. В. 100. Г. 80. Д. Інша відповідь.

3.2.3. Знайти базисний розв'язок задачі лінійного програмування у випадку основних змінних x_3, x_4 , неосновних – x_1, x_2 :

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = -8, \\ -8x_1 - 6x_2 + x_4 = -12, F = -2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

Відповідь: А. $X = (0; 0; -8; -12)$. Б. $X = (-8; -12; 0; 0)$. В. $X = (0; 0; 8; 12)$.

Г. $X = (-1; -3; -8; -6)$. Д. Інша відповідь.

3.3.1. Розв'язати задачу геометричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

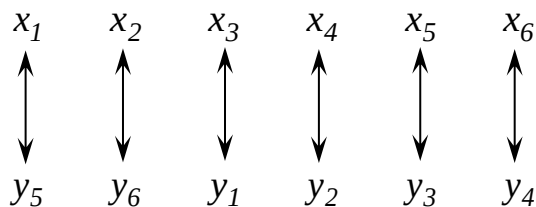
Відповідь: А. $F_{\max} = 4$. Б. $F_{\max} = 2$. В. $F_{\max} = 5$. Г. $F_{\max} = 8$. Д. Інша відповідь.

3.3.2. Розв'язати задачу симплексним методом:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

Відповідь: А. $F_{\min} = 0$. Б. $F_{\min} = 2$. В. $F_{\min} = 1$. Г. $F_{\min} = -\infty$. Д. Інша відповідь.

3.3.3 Лінійна форма, отримана на останньому кроці розв'язку прямої задачі, має вигляд $F_{\max} = 25 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 - 5x_6$. Знайти $Z_{\min}$ і оптимальний розв'язок двоїстої задачі при відповідності змінних:



Відповідь: А. $Z_{\min} = 25, (0; 0; 1; 5; 0; 0)$. Б. $Z_{\min} = -25, (0; 0; 1; 5; 0; 0)$.

В. $Z_{\min} = 25, (0; 0; 0; 0; -1; -5)$. Г. $Z_{\min} = 25, (0; 0; 0; 0; 1; 5)$.

Д. Інша відповідь.

Варіант 4

4.1.1. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називають допустимим?

Відповідь: А. Базисний розв'язок, в якому всі основні змінні від'ємні.

Б. Базисний розв'язок, в якому всі основні змінні невід'ємні.

В. Базисний розв'язок, в якому всі неосновні змінні додатні.

Г. Базисний розв'язок, в якому всі неосновні змінні відмінні від нуля.

Д. Інша відповідь.

4.1.2. Симплексний метод складається з двох етапів:

Відповідь: А. 1) знаходження допустимого розв'язку системи обмежень;

2) знаходження оптимального розв'язку.

Б. 1) знаходження допустимого базисного розв'язку системи обмежень;

2) знаходження оптимального розв'язку.

В. 1) знаходження довільного базисного розв'язку системи обмежень;

2) знаходження оптимального розв'язку.

Г. 1) знаходження довільного базисного розв'язку системи обмежень;

2) знаходження допустимого базисного розв'язку системи обмежень.

Д. Інша відповідь.

4.1.3. Що називають циклом перерозподілу поставок в транспортній задачі?

Відповідь: А. Замкнутий багатокутник, сторонами якого є горизонтальні і вертикальні відрізки, одна вершина якого співпадає з заповненою клітинкою, для якої утворюється цикл, а всі інші – з вільними клітинками.

Б. Оптимальний розподіл поставок.

В. Будь-який розв'язок транспортної задачі.

Г. Замкнутий багатокутник, сторонами якого є горизонтальні і вертикальні відрізки, одна вершина якого співпадає з вільною клітинкою, для якої утворюється цикл, а всі інші – з заповненими клітинками.

Д. Інша відповідь.

4.2.1. Знайти скільки клітин треба заповнити при початковому розподілі поставок в транспортній задачі:

Потужності	Споживачі та їх потреби
------------	-------------------------

постачальники в	60	10	50	40	80
200	7	6	5	4	6
170	1	5	2	5	2

Відповідь: А. 5. Б. 7. В. 6. Г. 10. Д. Інша відповідь.

4.2.2. Лінійна форма прямої задачі $F_{\max} = +\infty$. Знайти $Z_{\min}$ двоїстої задачі.

Відповідь: А. $Z_{\min} = -\infty$. Б. $Z_{\min} = +\infty$. В. Не можливо визначити.

Г. Система обмежень двоїстої задачі несумісна. Д. Інша відповідь.

4.2.3. Вибрати допустимий вироджений розв'язок $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ задачі у випадку основних змінних x_3, x_4 , неосновних – x_1, x_2 :

Відповідь: А. $X = (0; 0; 5; 2)$. Б. $X = (5; 2; 0; 0)$. В. $X = (0; 0; 0; 2)$.

Г. $X = (0; 0; -2; 0)$. Д. Інша відповідь.

4.3.1. Розв'язати задачу геометричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} \quad F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min.$$

Відповідь: А. $F_{\min} = 4$. Б. $F_{\min} = 2$. В. $F_{\min} = 5$. Г. $F_{\min} = 8$. Д. Інша відповідь.

4.3.2. Розв'язати задачу симплексним методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} \quad F = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

Відповідь: А. $F_{\max} = 4$. Б. $F = 4x_1 + 5x_2$. В. $F_{\max} = +\infty$. Г. $F_{\max} = 0$. Д. Інша відповідь.

4.3.3. Виконати початковий розподіл постачань за правилом „північно-західного кута” в транспортній задачі і підрахувати загальні затрати на перевезення при цьому розподілі:

	140	55	65
90	6	1	3
100	4	9	2
70	5	7	8

Відповідь: А. $F = 1745$. Б. $F = 655$. В. $F = 1000$. Г. $F = 1580$. Д. Інша

Нарахування балів:

за правильний приклад першого рівня	– 4 бали
за правильний приклад другого рівня	– 6 балів
за правильний приклад третього рівня	– 10 балів
за неправильний приклад довільного рівня	– 0 балів

Оцінювання роботи:

0 – 30 балів оцінка „незадовільно”
 32 – 40 балів оцінка „задовільно”
 42 – 50 балів оцінка „добре”
 52 – 60 балів оцінка „відмінно”

Відповіді:

Варіант 1

I 1.1	A	B	B	F	D
I 1.2	A	B	B	Г	D
I 1.3	A	B	B	Г	D
I 2.1	A	B	B	Г	D
I 2.2	A	B	B	Г	D
I 2.3	A	B	B	F	D
I 3.1	A	B	B	Г	D
I 3.2	A	B	B	Г	D
I 3.3	A	B	B	Г	D

Варіант 2

2 1.1	A	B	B	Г	D
2 1.2	A	B	B	Г	D
2 1.3	A	B	B	Г	D
2 2.1	A	B	B	Г	D
2 2.2	A	B	B	Г	D
2 2.3	A	B	B	F	D
2 3.1	A	B	B	Г	D
2 3.2	A	B	B	F	D
2 3.3	A	B	B	Г	D

Варіант 3

3 1.1	A	B	B	Г	D
3 1.2	A	B	B	Г	D
3 1.3	A	B	B	Г	D
3 2.1	A	B	B	Г	D
3 2.2	A	B	B	F	D
3 2.3	A	B	B	Г	D
3 3.1	A	B	B	F	D
3 3.2	A	B	B	Г	D
3 3.3	A	B	B	Г	D

Варіант 4

4 1.1	A	B	B	Г	Д
4 1.2	A	B	B	Г	Д
4 1.3	A	B	B	Г	Д
4 2.1	A	B	B	Г	Д
4 2.2	A	B	B	Г	Д
4 2.3	A	B	B	Г	Д
4 3.1	A	B	B	Г	Д
4 3.2	A	B	B	Г	Д
4 3.3	A	B	B	Г	Д

ЛІТЕРАТУРА

1. Математичне програмування: Навч. посібник./Романюк Т.П., Терещенко Т.О., Присенко Г.В., Городкова І.М. – К.: ІЗМН, 1996.–312 с.
2. Лінійне програмування./Цегелик Г.Г – Львів, Світ, 1995.– 256 с.
3. Системний аналіз: Навч. посібник./Шарапов О.Д., Терехов Л.Л., Сіднев С.П. – К.: Вища шк., 1993.– 136 с.
4. Математичне програмування. Кредитно-модульна система: Навчальний посібник / Гончаров В.В., Гончарова С.Я., Кривоблоцька Л.М. – Кіровоград: КНТУ, 2012 р. – 151 с.
5. Математичне програмування : навч. посіб. / Наконечний С.І., Савіна С. С. – Київ : КНЕУ, 2003. – 452 с.
6. Методи оптимізації в прикладах і задачах : навчальний посібник /Нефьодов Ю. М., Балицька Т. Ю.. – Київ : Кондор, 2011. – 324 с.
7. Математичне програмування : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / Толбатов Ю. А. , Толбатов Є. Ю. – Тернопіль : Підручник, 2008. – 432 с.
8. Електронні підручники з математичного програмування [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.is.svitonline.com/vcg/maternal.html#mathprog>.