МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

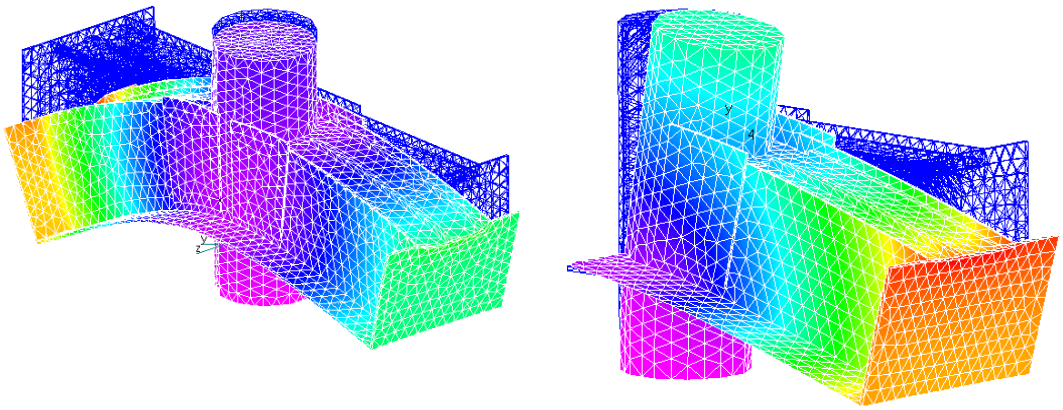
Кафедра будівельних, дорожніх машин і будівництва

“Будівельна механіка”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково – проектувального завдання РПЗ №5 «Розрахунок статично невизначених стержневих конструкцій методом сил»

для здобувачів І (бакалавр) рівня вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» усіх форм навчання



Кропивницький 2022 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра будівельних, дорожніх машин і будівництва

“Будівельна механіка”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково – проектувального завдання РПЗ №5 «Розрахунок статично невизначених стержневих конструкцій методом сил»

для здобувачів І (бакалавр) рівня вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» усіх форм навчання

Затверджено
на засіданні кафедри будівельних, дорожніх машин і будівництва.
Протокол № 8 від 12.01.2022 р.

Кропивницький 2022 р.

УДК 624.04: (075.8)

“Будівельна механіка”. Методичні вказівки до виконання розрахунково – проектувального завдання РПЗ №5 «Розрахунок статично невизначених стержневих конструкцій методом сил» для здобувачів І (бакалавр) рівня вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» усіх форм навчання / Укл.: Портнов Г.Д., Тихий А.А., Дарієнко В.В. – Кропивницький: ЦНТУ, 2022. – 34 с.

Укладачі – к.т.н., доцент Портнов Г.Д., к.т.н., доцент Тихий А.А., к.т.н., доцент Дарієнко В.В.

Рецензент – к.т.н., доцент Яцун В.В.

Відповідальний за випуск – завідувач кафедри будівельних,
дорожніх машин і будівництва,
професор Настоящий В.А.

© ЦНТУ, Кропивницький, пр. Університетський, 8
© Портнов Г.Д., Тихий А.А., Дарієнко В.В.

Введение

Методические указания составлены с целью облегчения самостоятельной работы студентов при выполнении расчетно-графического задания на тему: «Расчет статически неопределимых стержневых конструкций методом сил» по дисциплине «Строительная механика (спец. курс)».

Основными целями задания являются:

- рассмотрение понятия степени статической неопределимости;
- знакомство с разновидностями статически неопределимых стержневых конструкций и их свойствами;
- знакомство с общей и частной задачей расчета статически неопределимых стержневых конструкций;
- изучение решения частной задачи расчета статически неопределимых стержневых конструкций методом сил.

Структура задания включает следующие учебные элементы:

1. Введение в расчет статически неопределимых стержневых конструкций.
2. Расчет статически неопределимых стержневых конструкций методом сил.

При разработке методических указаний использовались материалы /4/.

1. Требования к выполнению задания

1. Исходные данные к выполнению задания принимаются по указанию преподавателя, исходя из рис.1 и табл. 1.
2. Работы выполняются (варианты):

2.1 Вариант 1: на стандартных листах писчей бумаги (формата А4) на одной стороне листа (другая остается чистой для возможных исправлений) или в тетради; на обложке должны быть указаны: фамилия, имя и отчество студента (полностью), название факультета, шифр группы. Задание следует выполнять чернилами (не красными) четким почерком с полями: слева – 20 мм, справа – 10 мм. Рисунки выполняются карандашом или чернилами.

2.2 Вариант 2: распечатка файла Word с использованием средств графики ПК на бумажном носителе.

3. Работа должна содержать тему задания, техническое задание с числовыми данными, расчетную схему в масштабе с числовым указанием величин, необходимых для расчета.

4. Решение должно сопровождаться краткими, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в числах.

5. При вычислениях в формулы подставляются значения входящих в них параметров в системе СИ, а затем приводятся окончательные результаты с указанием единиц измерения найденных величин.

6. Расчет выполнять с двумя значащими цифрами после запятой.

7. Эпюры и другой графический материал должны выполняться в соответствии с требованиями ЕСКД (единой системы конструкторской документации). На всех эпюрах необходимо указывать масштаб, знаки и числовые значения характерных ординат. Эпюры изгибающих моментов строятся на растянутом волокне.

8. После проверки преподавателем расчетного задания студент должен исправить в нем все отмеченные ошибки.

2. Техническое задание

Для рам, показанных на рис. 1, найти внутренние усилия, построить эпюры этих усилий и проверить их правильность.

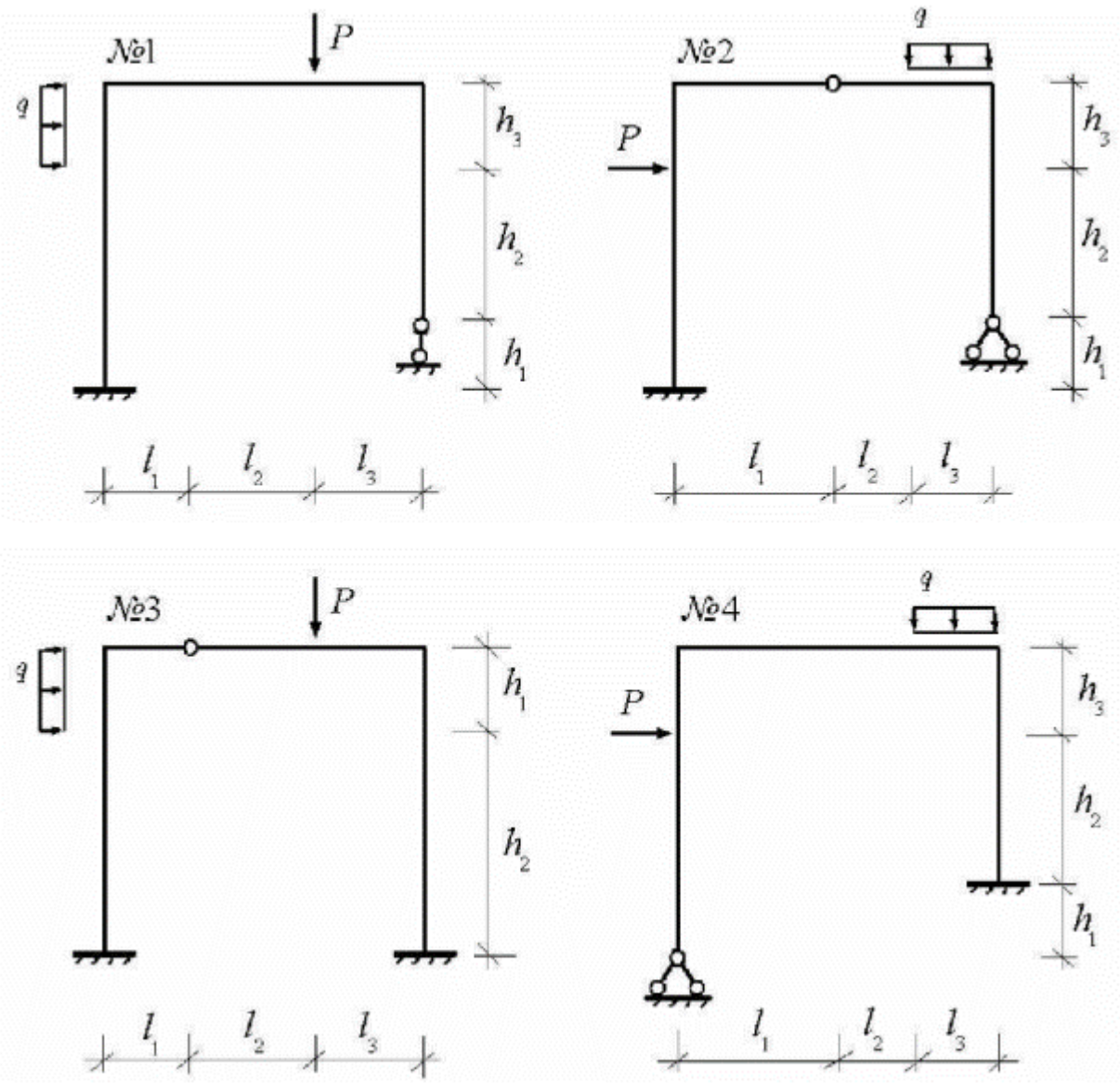


Рис. 1

Размеры рам и значения нагрузок приведены в табл. 1.

Поперечные сечения элементов всех рам имеют одинаковую изгибную жесткость EI_z.

Таблица 1.

№ задачи	Нагрузки		Размеры рам в м					
	P в кН	q в кН/м	l_1	l_2	l_3	h_1	h_2	h_3
1	14,2	18	2	3	7	1	2	1
2	16,3	21	4	6	4	1	2	2
3	17,8	28	5	8	3	2	4	-
4	19,5	24	9	3	6	2	3	2

3. Этапы выполнения РПЗ

3.1 Обработка исходных данных

1. Изображение расчетной схемы рамы.
2. Задание параметров внешних воздействий.
3. Задание параметров физических свойств материала рамы.

3.2 Кинематический анализ

1. Подсчет числа степеней свободы.
2. Анализ геометрической структуры.
3. Вывод о кинематических и статических свойствах расчетной схемы рамы.

3.3 Аналитическое определение внутренних усилий

1. Составить каноническое уравнение метода сил.
2. Выбрать основную систему метода сил.
3. Последовательно загрузить основную систему безразмерными силами $\tilde{X}_j = 1 (j = 1,...,n)$, приложив их по направлению удалённых связей, найти для каждого загружения изгибающие моменты m_j и построить их эпюры.
4. Построить эпюру моментов M_P^0 в основной системе от заданной нагрузки.

5. С помощью формулы Мора - Максвелла определить коэффициенты при неизвестных δ_{ij} и свободные члены уравнения Δ_{iP}.

6. Решить канонические уравнения.

7. Построить эпюры $m_j \cdot X_j$, умножив все ординаты эпюры m_j на величину X_j с учетом знака X_j.

8. Построить окончательную эпюру моментов $M_X^0 = m_1 X_1 + \ldots + m_n X_n$

9. Произвести проверку равновесия узлов эпюры M_X^0

10. Построить эпюру поперечных сил с помощью дифференциальной зависимости $Q = \frac{dM}{dx} = \mathrm{tg}\alpha$.

11. Построить эпюру продольных сил, рассматривая равновесие узлов.

12. Определить опорные реакции.

13. Выполнить статическую проверку расчета:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0$$

4. Теоретическая часть

4.1. Введение в расчет статически неопределимых стержневых конструкций

4.1.1. Степень статической неопределимости

Расчетная схема стержневой конструкции считается статически неопределимой системой, если уравнений статики недостаточно для однозначного определения опорных реакций и внутренних усилий, возникающих в конструкции при произвольной статической нагрузке.

Статически неопределимые стержневые конструкции всегда являются геометрическими неизменяемыми системами с избыточным числом связей. Необходимым количественным признаком такой разновидности геометрической неизменяемости конструкции является следующее соотношение для числа степеней свободы:

$$W < 0.$$

Следовательно, количество лишних или избыточных связей в конструкции, которые можно удалить, сохраняя ее геометрическую неизменяемость, равняется

$$Л = -W \qquad (4.1)$$

Число таких связей называется степенью статической неопределимости, и эта величина является важной количественной характеристикой,
с помощью которой принято различать статически неопределимые стержневые конструкции. Например, при $Л = I$ конструкция называется один

раз статически неопределимой, при *Л = 2* - два раза статически неопределимой и так далее.

Понятию лишней связи в статически неопределимой стержневой конструкции противостоит понятие необходимой связи - абсолютно необходимой и условно необходимой.

4.1.2. Разновидности статически неопределимых конструкций

Формула (4.1) позволяет правильно определять степень статической неопределимости стержневой конструкции, если она не имеет лишних связей внутри конструкции, а все они расположены в опорных закреплениях и, следовательно, являются для конструкции внешними. Причиной появления внутренних лишних связей служат замкнутые контуры. Каждый замкнутый контур приносит 3 лишних связи. Поэтому если конструкция содержит *К* замкнутых контуров, то общее число внутренних лишних связей равняется *3К*.

В тех случаях, когда в замкнутые контуры врезаны шарниры, то каждый такой шарнир на единицу уменьшает число внутренних лишних связей. Следовательно, если общее число шарниров, врезанных в *К* замкнутых
контуров, равняется *Ш*, то число внутренних лишних связей определяется соотношением *3К-Ш*.

Таким образом, в общем случае степень статической неопределимости определяется по формуле

$$Л=Л_1+Л_2, \quad (4.2)$$

где $Л_1 = -W$ - число внешних лишних связей, определяющих степень внешней статической неопределимости конструкции, $Л_2 = 3К - Ш$ - число

внутренних лишних связей, определяющих степень внутренней статической неопределимости конструкции.

В зависимости от значений, принимаемых $Л_1$ и $Л_2$, принято различать следующие разновидности статически неопределимых стержневых конструкций:

- $Л_1 \neq 0$, и $Л_2 = 0$ - внешне статически неопределимые стержневые конструкции;

- $Л_1 = 0$ и $Л_2 \neq 0$ - внутренне статически неопределимые стержневые конструкции;

- $Л_1 \neq 0$ и $Л_2 \neq 0$ - произвольные статически неопределимые стержневые конструкции.

4.1.3. Свойства статически неопределимых конструкций

Статически неопределимые стержневые конструкции обладают рядом специфических свойств, существенным образом отличающих их от статически определимых конструкций:

1. Внутренние усилия в статически неопределимых стержневых конструкциях зависят от числа лишних связей, а также их геометрических и физических параметров.

2. Несущая способность статически неопределимых стержневых конструкций больше по сравнению со статически определимыми конструкциями, которые могут быть получены из статически неопределимых удалением лишних связей.

3. В статически неопределимых стержневых конструкциях возникающие перемещения, как правило, меньше перемещений статически

определимых конструкций, которые могут быть получены из статически неопределимых удалением лишних связей.

4. В статически неопределимых стержневых конструкциях, как правило, возникают дополнительные внутренние усилия от осадки опор и изменений температуры.

5. В статически неопределимых стержневых конструкциях могут возникать монтажные внутренние усилия в случае неточностей изготовления отдельных элементов этих конструкций.

6. Внутренние усилия, возникающие в статически неопределимых стержневых конструкциях от действия нагрузки, зависят от соотношения жесткостей (*EI, EA, GA*) поперечных сечений отдельных элементов конструкции, а внутренние усилия, возникающие от кинематических воздействий, - от самих величин этих жесткостей.

4.1.4. Классификация методов расчета статически неопределимых конструкций

Формулировка задачи расчета стержневых статически неопределимых конструкций, имеющая наибольшее значение для их проектирования, звучит следующим образом: при заданной геометрической схеме системы и действующей на нее нагрузке подобрать оптимальные поперечные сечения (форму и размеры) всех конструктивных элементов и обеспечить ее достаточную надежность и жесткость. В общем виде такая задача пока не решена.

Поэтому строительная механика предлагает методы решения частной задачи: определить внутренние усилия и перемещения в стержневой статически неопределимой конструкции при заданных геометрической схеме системы, поперечных сечениях стержней и действующей нагрузке.

Поскольку внутренние усилия в статически неопределимой конструкции зависят от геометрических и физических параметров системы, а те, в свою очередь, влияют на качественную и количественную стороны процесса ее деформирования, то для решения частной задачи используются дополнительные уравнения, отражающие особенности деформирования конструкции. Такие уравнения называются каноническими, а входящие в них неизвестные величины - основными неизвестными задачи и подлежат первоочередному определению.

В зависимости от природы неизвестных величин, входящих в дополнительные уравнения, существуют различные методы решения частной задачи расчета стержневых статически неопределимых конструкций, главными из которых являются метод сил и метод перемещений. В первом случае основными неизвестными являются внутренние усилия в лишних связях конструкции, во втором - характерные узловые перемещения (линейные и угловые) конструкции.

4.2. Расчет статически неопределимых стержневых конструкций методом сил

4.2.1. Постановка задачи

Задана произвольная плоская статически неопределимая стержневая конструкция (рис. 4.1), для которой считаются известными все размеры геометрической схемы и поперечных сечений стержней.

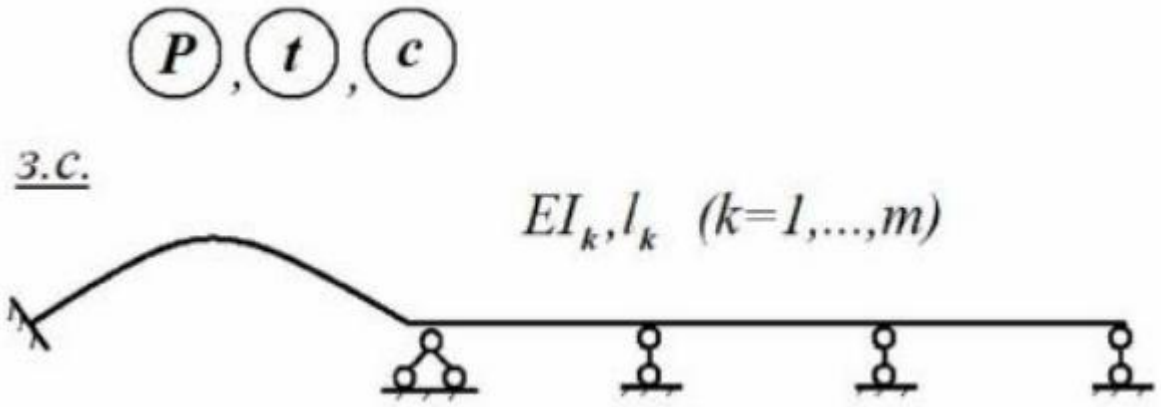


Рис. 4.1

Степень статической неопределимости заданной системы равняется

$$Л = n.$$

На заданную систему действуют произвольная нагрузка, температурные изменения (температура) и осадка опор, показанные на рис. 4.1 условными буквенными обозначениями: P -нагрузка, t -температура, c - осадка опор. Заданная конструкция считается линейно деформируемой системой.

4.2.2. Основная система н канонические уравнения

В основе расчета стержневых конструкций методом сил лежит переход от заданной статически неопределимой системы к расчету эквивалентной статически определимой системы. Эквивалентность двух систем должна выражается в одинаковости внутренних усилий (статическая эквивалентность) и одинаковости перемещений (кинематическая эквивалентность). Такая эквивалентная система и называется основной системой метода сил.

Для получения основной системы из заданной системы сначала удаляют все лишние связи (рис. 4.2) так, чтобы преобразованная система была

геометрически неизменяемой с необходимым числом связей и, следовательно, статически определимой. Поскольку возможны различные схемы удаления лишних связей в заданной системе, то возможно получение нескольких вариантов статически определимых систем.

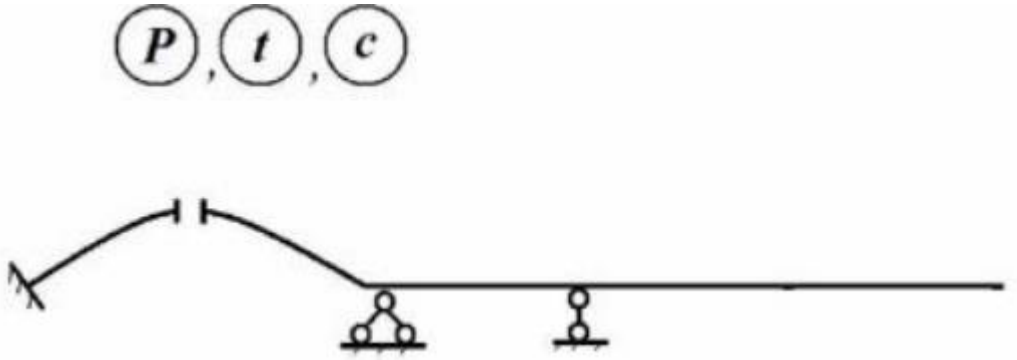


Рис. 4.2

Статическая эквивалентность полученной статически определимой системы заданной системе достигается приложением к ней в качестве дополнительных внешних воздействий реакций удаленных лишних связей $X_1,\ldots,X_n$ (рис. 4.3, а)

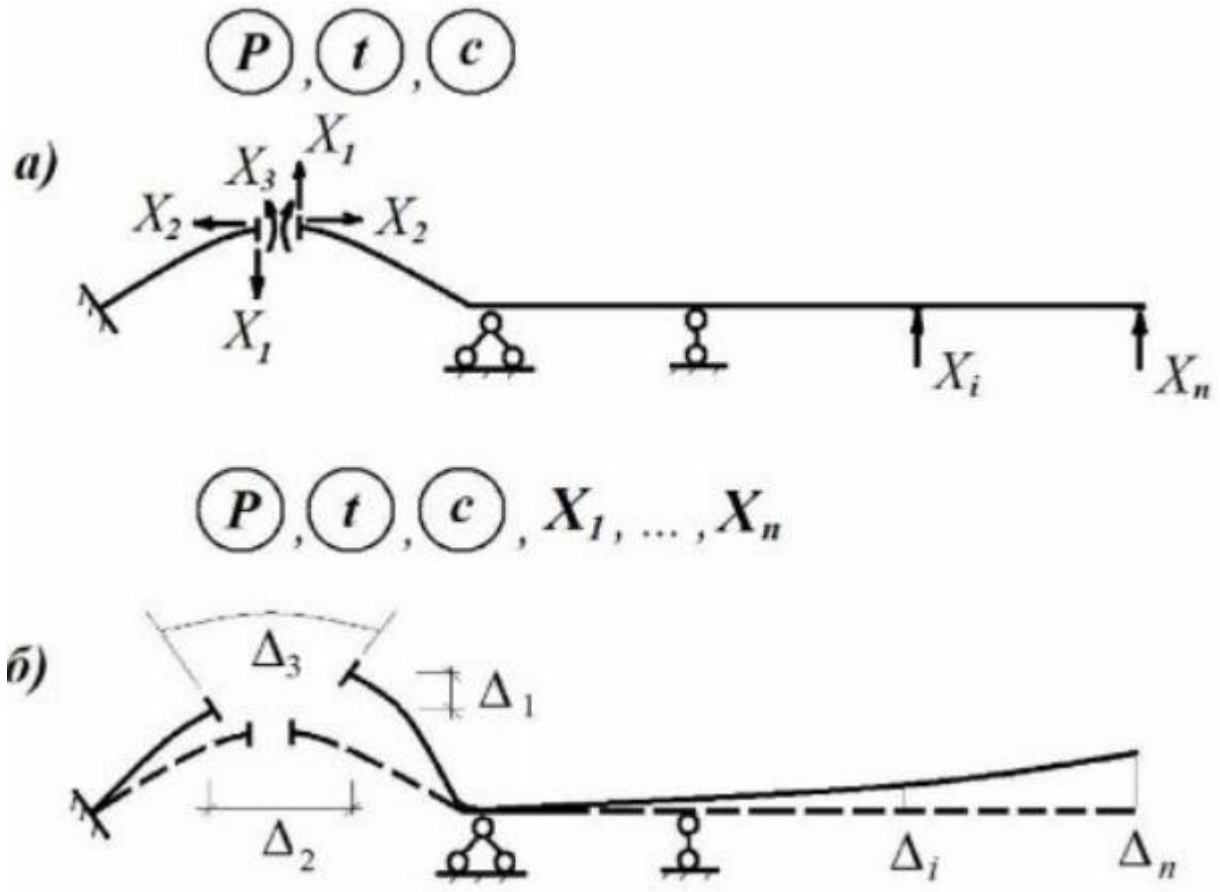


Рис. 4.3

При дальнейшем расчете эти реакции подлежат первоочередному определению и поэтому они называются основными неизвестными метода сил.

Для достижения кинематической эквивалентности двух систем вводятся условия обращения в ноль полных перемещений (рис. 4.3, б)

$$\Delta_1 = 0, \ldots, \Delta_n = 0 \quad , \qquad (4.3)$$

возникающих в статически определимой системе по направлению основных неизвестных. Так как эти перемещения порождаются основными неизвестными и заданными внешними воздействиями, то они являются функциям этих величин и условия (4.3) можно записать в следующем виде:

$$\Delta_1(X_1,...,X_n,P,t,c)=0,$$

.....

$$\Delta_n(X_1,...,X_n,P,t,c)=0. \quad (4.4)$$

Поскольку заданная стержневая конструкция считается линейно деформируемой системой, то дополнительные условия (4.4), согласно принципу суперпозиции, принимают вид

$$\Delta_{1X_1}+...+\Delta_{1X_n}+\Delta_{1P}+\Delta_{1t}+\Delta_{1c}=0,$$

.....

$$\Delta_{nX_1}+...+\Delta_{nX_n}+\Delta_{nP}+\Delta_{nt}+\Delta_{nc}=0. \quad (4.5)$$

Входящие в (4.5) величины имеют следующий смысл: $\Delta_{iX_j}\ (i,j=1,...,n)$ - частичное перемещение (простое или обобщенное) в основной системе по направлению основного неизвестного номера *i*, вызванное действием основного неизвестного X_j; Δ_{iP}, Δ_{it}, Δ_{ic} $(i=1,...,n)$ - частичное перемещение (простое или обобщенное) в основной системе по направлению основного неизвестного номера *i*, вызванное действием, соответственно, нагрузки, температуры или осадки опор.

Так как изменения частичного перемещения Δ_{iX_j} основного неизвестного X_j связаны прямой пропорциональной зависимостью, то

$$\Delta_{iX_j}=\delta_{ij}X_j, \quad (4.6)$$

где δ_{ij} - единичное перемещение (простое или обобщенное) в основной системе но направлению основного неизвестного номера *i* от действия безразмерной силы (простой или обобщенной) $\tilde{X}_j = 1$.

С учетом (4.6) соотношения (4.5) принимают вид уравнений

$$\delta_{11}X_1 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1c} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_{n1}X_1 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} + \Delta_{nc} = 0. \qquad (4.7)$$

Полученные уравнения (4.7) представляют собой систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно основных неизвестных $X_1,\ldots,X_n$ и называются каноническими уравнениями метода сил. Они имеют кинематическую природу, так как каждое такое уравнение выражает равенство нулю полного перемещения в основной системе по направлению соответствующего основного неизвестного от действия всех основных неизвестных, а также нагрузки, температуры и осадки опор.

Входящие в эти уравнения единичные перемещения δ_{ij} в качестве множителей при основных неизвестных называются коэффициентами канонических уравнений метода сил. В зависимости от соотношений между индексами различают два вида таких коэффициентов. В случае если $i = j$, то соответствующие коэффициенты называются главными коэффициентами, и они удовлетворяют условию строгой положительности

$$\delta_{ii} > 0 \ (i = 1,\ldots,n).$$

В случае если $i \neq j$, то соответствующие коэффициенты называются побочными коэффициентами, и они удовлетворяют условию взаимности

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \ \ (i, j = 1, \ldots, n)$$

Входящие в канонические уравнения частичные перемещения $\Delta_{iP},\ \Delta_{it},\ \Delta_{ic} \ \ (i = 1, \ldots, n)$ от действия, соответственно, нагрузки, температуры или осадки опор называются свободными членами канонических
уравнений.

4.2.3. Определение коэффициентов и свободных членов

Для определения коэффициентов канонических уравнений метода сил нужно последовательно загрузить основную систему безразмерными силами $\tilde{X}_j = 1 (j = 1, \ldots, n)$, найти для каждого загружения внутренние усилия $m_j,\ q_j,\ n_j$ и построить их эпюры. Такие внутренние усилия и их эпюры называются единичными, а соответствующие им схемы нагружения считаются единичными состояниями основной системы.

После нахождения единичных внутренних усилий $m_j,\ q_j,\ n_j$ и построения их эпюр производится вычисление коэффициентов δ_{ij} по формуле Максвелла - Мора. При этом роль нагрузки играют безразмерные силы $\tilde{X}_j = 1 (j = 1, \ldots, n)$, а соответствующие им единичные внутренние усилия $m_j,\ q_j,\ n_j$ играют роль внутренних усилий действительного состояния. Тогда формула Максвелла - Мора для определения δ_{ij} принимает вид

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_l \frac{m_i m_j}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i n_j}{EA} ds + \sum_k k \int_l \frac{q_i q_j}{GA} ds$$

Необходимость учета отдельных слагаемых зависит от вида стержневой конструкции.

Для определения свободных членов канонических уравнений $\Delta_{iP}\ \ (i=1,\ldots,n)$ необходимо рассмотреть основную систему под действием нагрузки, найти внутренние усилия M_P^0, Q_P^0, N_P^0 и построить их эпюры. Такие внутренние усилия и их эпюры называются грузовыми, а соответствующая им схема нагружения считается грузовым состоянием основной системы.

После нахождения грузовых внутренних усилий M_P^0, Q_P^0, N_P^0 и построения их эпюр производится вычисление свободных членов Δ_{iP} по формуле Максвелла Мора, которая с учетом введенных обозначений принимает вид

$$\Delta_{iP}=\sum_k\int_l\frac{m_iM_P^0}{EI_z}ds+\sum_k\int_l\frac{n_iN_P^0}{EA}ds+\sum_k k\int_l\frac{q_iQ_P^0}{GA}ds$$

Для определения свободных членов канонических уравнений $\Delta_{it}\ \ (i=1,\ldots,n)$ необходимо рассмотреть основную систему под действием температуры, найти для каждого стержня удельный температурный перепад $\Delta t'$, приращение температуры на оси Δt_o и построить эпюры этих величин. После нахождения величин $\Delta t'$ и Δt_o производится вычисление свободных членов Δ_{it} по формуле температурных перемещений для плоских статически определимых стержневых конструкций

$$\Delta_{it}=\sum_k\alpha\int_l\left(n_i\Delta t_o+m_i\Delta t'\right)ds$$

Для вычисления свободных членов канонических уравнений $\Delta_{ic} = (i = 1,...,n)$ используется формула определения перемещений в плоских статически определимых стержневых конструкциях от заданных смещений опор c_j

$$\Delta_{ic} = -\sum_j r_{ji} c_j$$

Входящие в эту формулу единичные опорные реакции r_{ji} считаются найденными при рассмотрении единичных состояний основной системы.

4.2.4. Решение канонических уравнений

Математической формой канонических уравнений метода сил является система неоднородных линейных алгебраических уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2;$$
$$.....$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n,$$

где $a_{ij} = \delta_{ij}$, $x_j = X_j$, $b_i = -(\Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{ic})$.

Для решения канонических уравнений метода сил применяют численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

4.2.5. Определение внутренних усилий заданной системы

Для определения внутренних усилий, которые возникают в заданной системе от приложенных к ней внешних воздействий, используются основная система метода сил и результаты ее расчета.

При нахождении коэффициентов канонических уравнений δ_{ij} основная система загружалась безразмерными силами $\tilde{X}_i = 1 (j = 1,...,n)$, для каждого загружения были получены единичные внутренние усилия m_j, q_j, n_j. Поскольку приложенные к основной системе в качестве дополнительных внешних воздействий основные неизвестные $X_1, \ldots, X_n$ найдены и основная система считается линейно деформируемой, то внутренние усилия, возникающие в ней от действия $X_1, \ldots, X_n$, будут равны

$$M_X^0 = m_1 X_1 + \ldots + m_n X_n,$$
$$Q_X^0 = q_1 X_1 + \ldots + q_n X_n,$$
$$N_X^0 = n_1 X_1 + \ldots + n_n X_n. \qquad (4.8)$$

При определении свободных членов канонических уравнений $\Delta_{iP} \ (i = 1,...,n)$ к основной системе прикладывалась заданная нагрузка, и были найдены грузовые внутренние усилия M_P^0, Q_P^0, N_P^0.

Для определения свободных членов канонических уравнений $\Delta_{it} \ (i = 1,...,n)$ и $\Delta_{ic} \ (i = 1,...,n)$ основная система рассматривалась под действием, соответственно, температуры и осадки опор. При этом в соответствии со свойствами статически определимых систем в основной системе не возникают внутренние усилия от этих внешних воздействий. Следовательно

$$M_t^0 \equiv 0,\ Q_t^0 \equiv 0,\ N_t^0 \equiv 0 \qquad (4.9)$$

и

$$M_c^0 \equiv 0,\ Q_c^0 \equiv 0,\ N_c^0 \equiv 0 \qquad (4.10)$$

Таким образом, для определения внутренних усилий в заданной системе необходимо, в соответствии с принципом суперпозиции, сложить внутренние усилия, полученные в основной системе от основных неизвестных $X_1,\ldots,X_n$, заданной нагрузки, температуры и осадки опор. Следовательно, при совместном действии на заданную систему нагрузки, температуры и осадки опор формулы для определения внутренних усилий, с учетом (4.9) и (4.10), имеют вид

$$\begin{aligned} M &= m_1 X_1 + \ldots + m_n X_n + M_P^0, \\ Q &= q_1 X_1 + \ldots + q_n X_n + Q_P^0, \\ N &= n_1 X_1 + \ldots + n_n X_n + N_P^0. \end{aligned} \qquad (4.11)$$

В случае раздельного действия нагрузки, температуры и осадки опор формулы (4.11) принимают вид:

- для нагрузки

$$\begin{aligned} M_P &= m_1 X_1 + \ldots + m_n X_n + M_P^0, \\ Q_P &= q_1 X_1 + \ldots + q_n X_n + Q_P^0, \\ N_P &= n_1 X_1 + \ldots + n_n X_n + N_P^0. \end{aligned}$$

- для температуры или осадки опор

$$M = m_1 X_1 + \ldots + m_n X_n,$$
$$Q = q_1 X_1 + \ldots + q_n X_n,$$
$$N = n_1 X_1 + \ldots + n_n X_n.$$

5. Практическая часть

Расчет методом сил плоских статически неопределимых рам на действие нагрузки

5.1 Исходные уравнения, рабочие формулы и правила.

В основе расчета стержневых конструкций методом сил лежит переход от заданной статически неопределимой системы к расчету основной статически определимой системы, которая получается из заданной удалением всех лишних связей.

Реакции удаленных связей называются основными неизвестными метода сил. Для их определения составляются канонические уравнения, которые при расчете на действие нагрузки имеют вид:

$$\delta_{11} X_1 + \ldots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1P} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_{n1} X_1 + \ldots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nP} = 0.$$

Канонические уравнения представляют собой систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно основных неизвестных $X_1, \ldots, X_n$. Для решения канонических уравнений необходимо определить коэффициенты при основных неизвестных δ_{ij}, и свободные члены Δ_{iP} .

Для определения коэффициентов δ_{ij} нужно образовать единичные состояния основной системы, загрузив ее последовательно безразмерными силами $\tilde{X}_j = 1 (j = 1,...n)$, найти для каждого загружения внутренние усилия m_j, q_j, n_j и построить их эпюры. Такие внутренние усилия и их эпюры называются единичными. Вычисление коэффициентов δ_{ij}, осуществляется по формуле Максвелла - Мора, в которой учитывается одно слагаемое, учитывающее влияние изгибающих моментов:

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_l \frac{m_i m_j}{EI_z} ds .$$

Для определения свободных членов канонических уравнений Δ_{iP} необходимо рассмотреть основную систему под действием нагрузки, найти внутренние усилия M_P^0, Q_P^0, N_P^0 и построить их эпюры. Такие внутренние усилия и их эпюры называются грузовыми, а соответствующая им схема нагружения считается грузовым состоянием основной системы. Вычисление свободных членов Δ_{iP} осуществляется по формуле Максвелла - Мора, в которой удерживается одно слагаемое, учитывающее влияние изгибающих моментов:

$$\Delta_{iP} = \sum_k \int_l \frac{m_i M_P^0}{EI_z} ds$$

После решения канонических уравнений и нахождения основных неизвестных метода сил внутренние усилия, возникающие в заданной системе от нагрузки, определяются по формулам:

$$M = m_1 X_1 + \ldots + m_n X_n + M_P^0,$$

$$Q = q_1 X_1 + \ldots + q_n X_n + Q_P^0,$$

$$N = n_1 X_1 + \ldots + n_n X_n + N_P^0.$$

Для проверки правильности найденных внутренних усилий выполняются статические и кинематические поверки. Статические поверки заключаются в проверке равновесия узлов, стержней и заданной системы в целом по тем же правилам, что и для статически определимых систем. Кинематические поверки заключаются в проверке выполнения условий

$$\sum_k \int_s \frac{m_i M}{EI_Z} ds = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

5.2. Пример выполнения задания

Для рамы, показанной на рис. 5.1, определить внутренние усилия, построить эпюры внутренних усилий и проверить их правильность.

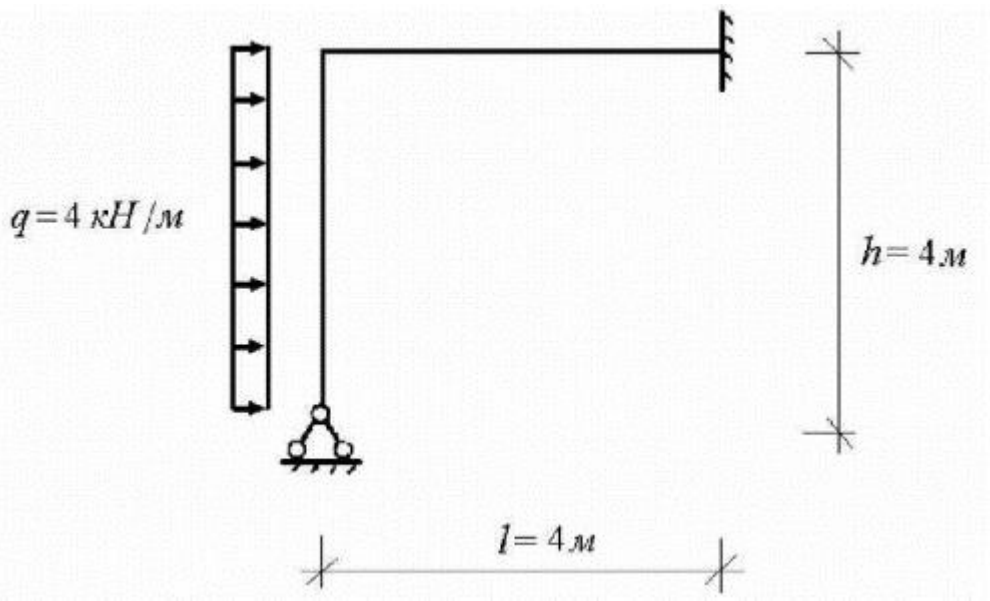


Рис. 5.1

Поперечные сечения всех элементов рамы имеют одинаковую изгибную жесткость EI_Z.

Так как у рамы отсутствуют замкнутые контуры, то степень ее статической неопределимости определяется по формуле

$$Л = -W$$

и равняется

$Л = -3-1 + 5 = 2.$

Для образования основной системы метода сил отбросим два опорных стержня на левой опоре. Выбранный вариант основной системы показан на рис. 5.2.

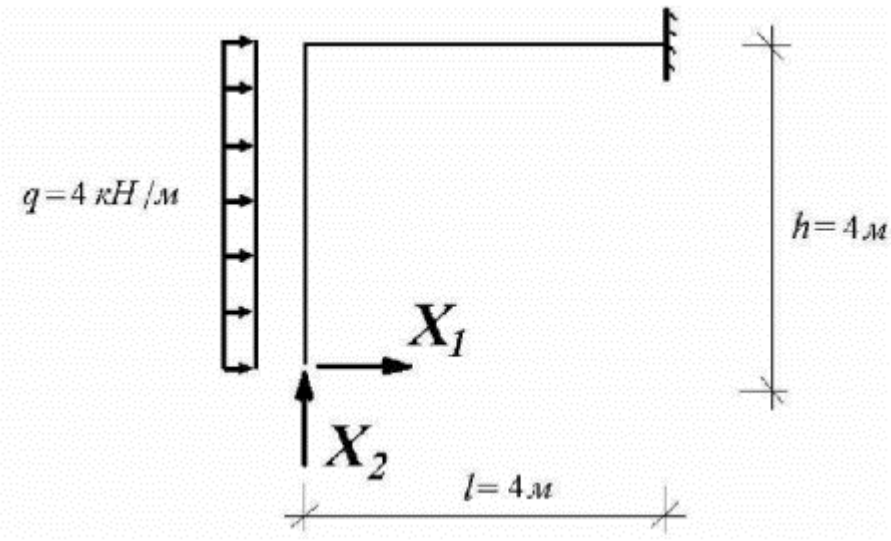


Рис. 5.2

Канонические уравнения метода сил для рассчитываемой рамы, с учетом ее степени статической неопределимости, имеют вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Для определения коэффициентов и свободных членов образуем единичные и грузовое состояния и строим для них эпюры внутренних усилий как для статически определимых рам.

Первое единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рис. 5.3.

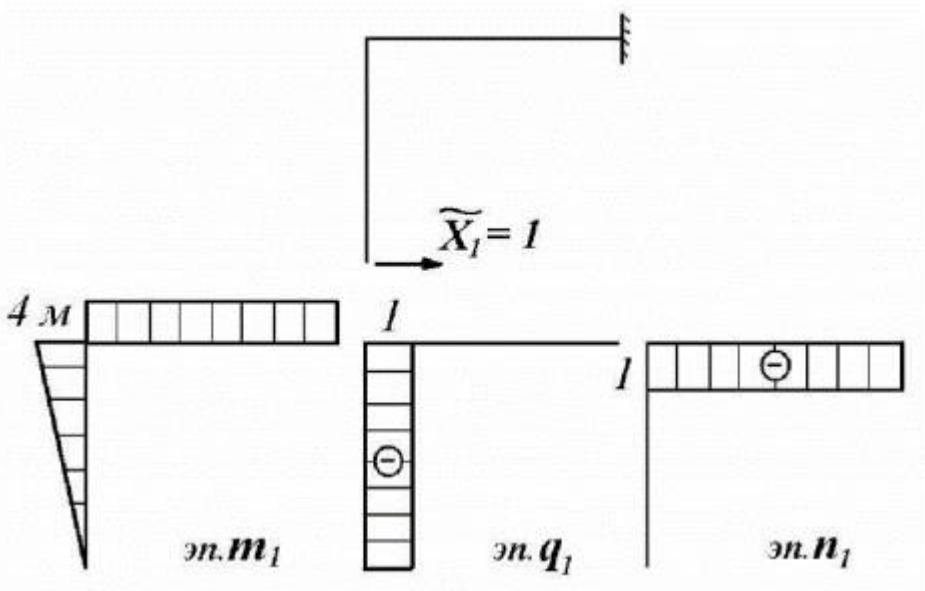


Рис. 5.3

Находим свободные члены канонических уравнений по формуле Максвелла - Мора с использованием правила Верещагина.

$$\Delta_{1P} = \sum_{k=1}^{2} \int_l \frac{m_1 M_P^0}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 32 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{640}{EI_z},$$

$$\Delta_{2P} = \sum_{k=1}^{2} \int_l \frac{m_2 M_P^0}{EI_z} ds = -\frac{1}{EI_z} \cdot 32 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{256}{EI_z}.$$

Таким образом, канонические уравнения метода сил для рассчитываемой рамы, с учетом найденных значений коэффициентов и свободных членов, принимают вид

$$85{,}333X_1 - 32X_2 + 640 = 0,$$
$$-32X_1 + 21{,}333X_2 - 256 = 0.$$

Решая систему канонических уравнений, получим следующие значения основных неизвестных:

$$X_1 = -6{,}857 \text{ кН}, \quad X_2 = 1{,}714 \text{ кН}.$$

Формулы для определения окончательных внутренних усилий рассчитываемой рамы принимают вид:

$$M = m_1X_1 + m_2X_2 + M_P^0,$$
$$Q = q_1X_1 + q_2X_2 + Q_P^0,$$
$$N = n_1X_1 + n_2X_2 + N_P^0.$$

Построенные в соответствии с этими формулами эпюры окончательных внутренних усилий приведены на рис. 5.6.

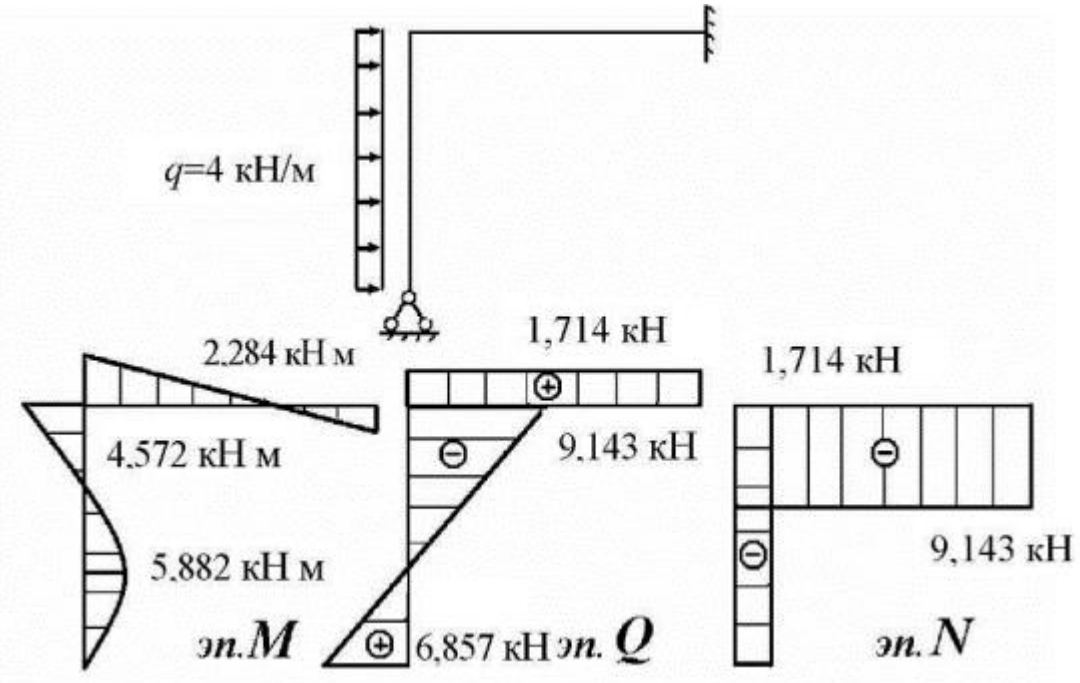


Рис. 5.6

Для проверки правильности найденных внутренних усилий сначала выполним статические поверки. С этой целью проверим равновесие узлов и стержней рамы согласно схемам, приведенным на рис. 5.7 и проверку равновесия рамы в целом согласно схеме, приведенной на рис. 5.8.

Составляя уравнения равновесия для узла В (рис. 5.7, а):

$$\sum M = 0;\ \ 4{,}572 - 4{,}572 \equiv 0,$$

$$\sum y = 0;\ \ 1{,}714 - 1{,}714 \equiv 0,$$

$$\sum x = 0;\ \ 9{,}143 - 9{,}143 \equiv 0,$$

Для стержня *AB* (рис.5.7, б)

$$\sum M_A = 0;\ \ 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4{,}572 - 9{,}143 \cdot 4 = 36{,}572 - 36{,}572 = 0,$$

$$\sum M_B = 0;\ \ 6{,}857 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4{,}572 = 32 - 32 = 0,$$

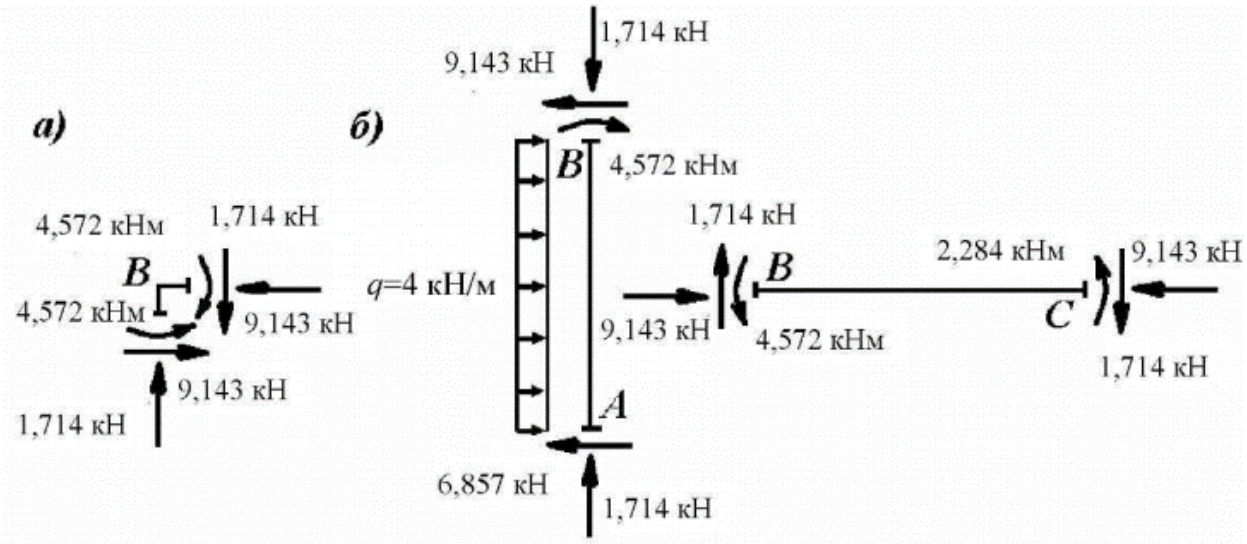


Рис. 5.7

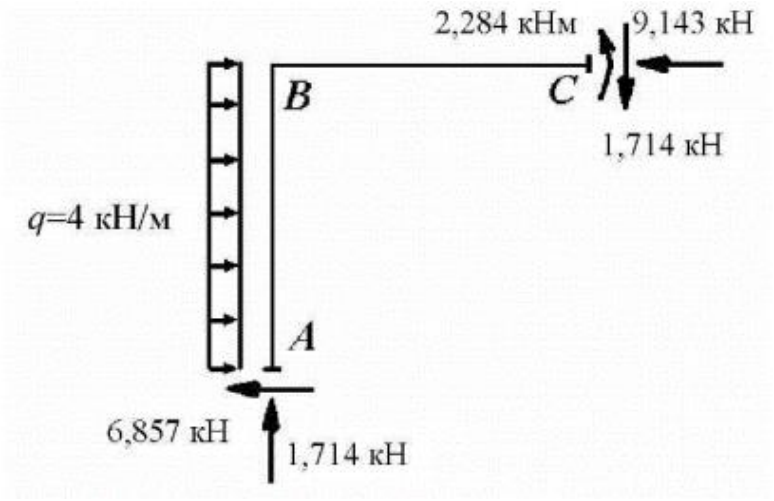


Рис. 5.8

Для стержня BC (рис.5.7, б)

$$\sum M_B = 0;\ \ 1,714 \cdot 4 - 2,284 - 4,572 = 6,856 - 6,856 = 0,$$
$$\sum M_C = 0;\ \ 1,714 \cdot 4 - 4,572 - 2,284 = 6,856 - 6,856 = 0,$$

Для рамы в целом (рис. 5.8)

$$\sum M_A = 0;\ \ 4 \cdot 4 \cdot 2 + 1,714 \cdot 4 - 2,284 - 9,143 \cdot 4 = 38,856 - 38,856 = 0,$$
$$\sum M_C = 0;\ \ 6,857 \cdot 4 + 1,714 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 2,284 = 34,284 - 34,284 = 0,$$

Все статические поверки для заданной рамы выполняются.

Кинематические поверки правильности найденных внутренних усилий для заданной рамы имеют вид

$$\sum_{k=1}^{2} \int_s \frac{m_i M}{EI_Z} ds = 0 \quad (i = 1,2),$$

для их осуществления необходимо последовательно перемножить эпюру окончательных изгибающих моментов с эпюрами изгибающих моментов единичных состояний.

В результате осуществления первой кинематической поверки получим

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{s}\frac{m_1 M}{EI_Z}ds=\frac{1}{EI_Z}\left(\frac{1}{2}\cdot 4{,}572\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{2}{3}\cdot\frac{4\cdot 4^2}{8}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 4{,}572\cdot 4\cdot 4\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot 2{,}284\cdot 4\cdot 4\right)=\frac{1}{EI_Z}(60{,}960-60{,}939)=\frac{0{,}021}{EI_Z}.$$

Отличие от ожидаемого значения «0»

$$\frac{0{,}021\cdot 100}{60{,}939}=0{,}034\ \%,$$

,

что меньше допустимой погрешности 1%.

В результате осуществления второй кинематической поверки получим

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{s}\frac{m_1 M}{EI_Z}ds=\frac{1}{EI_Z}\left(-\frac{1}{2}\cdot 4{,}572\cdot 4\cdot\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 2{,}284\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 4\right)$$

$$=\frac{1}{EI_Z}(-12{,}192+12{,}181)=-\frac{0{,}011}{EI_Z}.$$

Отличие от ожидаемого значения «0»

$$\frac{0{,}011\cdot 100}{12{,}181}=0{,}09\ \%$$

.

Таким образом, выполненные статические и кинематические поверки показывают, что эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для заданной рамы построены правильно.

6. Выполнение расчетов на ПК

Расчеты выполняются в соответствии с инструкцией, представленной в /5, 6/.

Библиографический список

1. Дарков, А. В. Строительная механика/ А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. - М.: Высш. шк., 1986. - 607 с.

2. Клейн, Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики/ Г. К. Клейн, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат. - М. : Высш. шк., 1978. -318 с.

3. Снитко, Н. К. Строительная механика/ Н. К. Снитко. - М.: Высш. шк., 1989.- 187 с.

4. Строительная механика: Учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1-70 02 01. В 3-х ч. Ч. 11. Статически неопределимые системы / Сост. и общ. ред. Л.С. Турищева.– Новополоцк: ПГУ, 2005. – 224 с.

5. Метод скінчених елементів і автоматизовані системи розрахунків на міцність. Методичні вказівки до вивчення теми «Розрахунок зусиль в елементах рами в ПОК «Лира» за вимогами кредитно-модульної системи навчання для магістрів спеціальності 8.06010101 – “Промислове і цивільне будівництво” / Укл.: Г.Д. Портнов, А.А. Тихий – Кіровоград: ЦНТУ, 2014. – 46 с.

Содержание

Введение 4

1. Требования к выполнению задания 4

2. Техническое задание 6

3. Этапы выполнения РПЗ 7

4. Теоретическая часть 9

4.1. Введение в расчет статически неопределимых стержневых конструкций 9

4.2. Расчет статически неопределимых стержневых
конструкций методом сил 13
5. Практическая часть 23
5.1. Исходные уравнения, рабочие формулы и правила 23
5.2. Пример выполнения задания 26
6. Выполнение расчета на ПК 32
Библиографический список 32