

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

**ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ПО
КРАТНИМ ТА КРИВОЛІНІЙНИМ ІНТЕГРАЛАМ
ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

Методичні вказівки для студентів технічних
спеціальностей

КРОПИВНИЦЬКИЙ
2017

Приклади розв'язання завдань по кратним та криволінійним інтегралам. Методичні вказівки для студентів технічних спеціальностей/ Укл.: В.І.Гуцул – Кропивницький: КНТУ, 2017. – 32 с.

Методичні вказівки містять приклади розв'язання задач з розділів „Кратні інтеграли”, „Криволінійні інтеграли”, курсу „Вища математика”. Призначені для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої
математики та фізики.
Протокол № 8 від 29.03.2017р.

© В.І.Гуцул, 2017

Завдання 1. Обчислити подвійний інтеграл двома способами:

а) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній y , а зовнішній - по x ; б) внутрішній інтеграл у двократному береться по змінній x , а зовнішній - по y .

Приклад 1. $\iint_G (4xy - 3y^2) dx dy$; $G: y = x^2, y = -2x + 8, y = 0$.

Розв'язання. а) Будемо спочатку область інтегрування, тобто

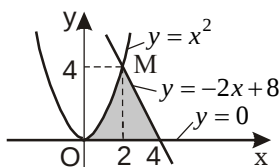


Рис. 1

область, яка обмежена заданими лініями (рис. 1). Знайдемо координати точки перетину прямої і параболи (координати точки M). Шукані координати є розв'язком системи

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2x + 8. \end{cases}$$

Прирівнявши праві частини, отримуємо квадратне рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$. Нагадаємо, що корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ визначаються за формулами

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

У нашому випадку $x_1 = 2, x_2 = -4$. Очевидно, що абсцисою точки M є перший корінь. Підставивши $x = 2$ в одне з рівнянь системи, дістаємо $y = 4$.

У відповідності з умовою потрібно застосувати формулу

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Оскільки область інтегрування G обмежена зверху двома лініями, то

розбиваємо її на дві частини вертикальною прямою, яка проходить через точку перетину M . Ліву частину позначимо через G_1 , а праву – через G_2 . Можемо записати

$$\iint_G (4xy - 3y^2) dx dy = \iint_{G_1} (4xy - 3y^2) dx dy + \iint_{G_2} (4xy - 3y^2) dx dy.$$

Обчислюємо спочатку інтеграл по G_1 . Знизу і зверху вказану область відповідно обмежують вісь Ox (пряма $y = 0$) і парабола $y = x^2$, отже внутрішній інтеграл береться від 0 до x^2 . Найменше і найбільше значення величини x в області G_1 визначають межі інтегрування у зовнішньому інтегралі.

Переходимо до двократного інтеграла і розставляємо межі інтегрування:

$$\iint_{G_1} (4xy - 3y^2) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (4xy - 3y^2) dy.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл (величина x вважається сталою):

$$\int_0^{x^2} (4xy - 3y^2) dy = (2xy^2 - y^3) \Big|_0^{x^2} = 2x \cdot x^4 - x^6 = 2x^5 - x^6.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int_0^2 (2x^5 - x^6) dx = \left(2 \cdot \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{21}.$$

Обчислюємо інтеграл по G_2 :

$$\iint_{G_2} (4xy - 3y^2) dx dy = \int_2^4 dx \int_0^{-2x+8} (4xy - 3y^2) dy;$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{-2x+8} (4xy - 3y^2) dy &= (2xy^2 - y^3) \Big|_0^{-2x+8} = 2x(8-2x)^2 - (8-2x)^3 = \\
&= 128x - 64x^2 + 8x^3 - (8-2x)^3; \\
\int_2^4 (128x - 64x^2 + 8x^3 - (8-2x)^3) dx &= \\
&= \left(64x^2 - \frac{64}{3} \cdot x^3 + 2x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(8-2x)^4}{4} \right) \Big|_2^4 = \\
&= 1024 - \frac{4096}{3} + 512 - \left(256 - \frac{512}{3} + 32 + 32 \right) = \frac{64}{3}.
\end{aligned}$$

Можемо записати

$$\iint_G (4xy - 3y^2) dx dy = \frac{64}{21} + \frac{64}{3} = \frac{512}{21}.$$

б) Застосовуємо формулу

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Нижню і верхню межі інтегрування у внутрішньому інтегралі визначають лінії, які обмежують область G зліва і справа відповідно. Рівняння вказаних ліній необхідно представити у вигляді $x = \psi(y)$, тобто розв'язати їх відносно x . Межі інтегрування у зовнішньому інтегралі визначають найменше і найбільше значення величини y в області G .

Переходимо до двократного інтеграла і розставляємо межі інтегрування:

$$\iint_G (4xy - 3y^2) dx dy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} (4xy - 3y^2) dx .$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл (величина y вважається сталою):

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} (4xy - 3y^2) dx &= (2yx^2 - 3y^2x) \Big|_{\sqrt{y}}^{4-\frac{1}{2}y} = 2y(4 - \frac{1}{2}y)^2 - 3y^2(4 - \frac{1}{2}y) - \\ &- (2y \cdot y - 3y^2\sqrt{y}) = 2y^3 - 22y^2 + 32y + 3y^{5/2} . \end{aligned}$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^4 (2y^3 - 22y^2 + 32y + 3y^{5/2}) dy &= \left(\frac{1}{2}y^4 - \frac{22}{3}y^3 + 16y^2 + \frac{6}{7}y^{7/2} \right) \Big|_0^4 = \\ &= 128 - \frac{22}{3} \cdot 64 + 16 \cdot 16 + \frac{6}{7} \cdot 4^{7/2} = \frac{512}{21} . \end{aligned}$$

Як бачимо, результати співпали.

Приклад 2. $\iint_G (2x^2y + x) dx dy$; $G: y = \frac{3}{x}, y = 3x, x = 3$.

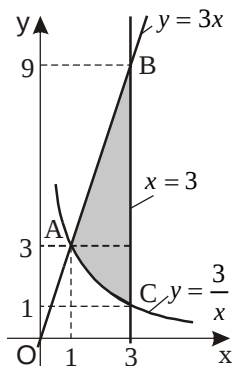


Рис. 2

Розв'язання. а) Будуємо область інтегрування G , (рис. 2). Для визначення координат точок перетину А, В, С складемо відповідні системи:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ y = 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ x = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ x = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши їх, дістаємо: А(1;3), В(3;9), С(3;1).

Переходимо від подвійного до двократного інтеграла та розставляємо межі інтегрування:

$$\iint_G (2x^2y + x) dx dy = \int_1^3 dx \int_{3/x}^{3x} (2x^2y + x) dy.$$

Обчислюємо послідовно внутрішній та зовнішній інтеграли:

$$\int_{3/x}^{3x} (2x^2y + x) dy = (x^2y^2 + xy) \Big|_{\frac{3}{x}}^{3x} = 9x^4 + 3x^2 - 12;$$

$$\int_1^3 (9x^4 + 3x^2 - 12) dx = \left(\frac{9}{5} x^5 + x^3 - 12x \right) \Big|_1^3 =$$

$$1,8 \cdot 243 + 27 - 36 - (1,8 + 1 - 12) = 437,6.$$

б) Так як область G обмежена зліва двома лініями, то розбиваємо її на дві частини горизонтальною прямою, яка проходить через точку перетину A . Нижню частину позначимо через G_1 , а верхню – через G_2 . Можемо записати

$$\iint_G (2x^2y + x) dx dy = \iint_{G_1} (2x^2y + x) dx dy + \iint_{G_2} (2x^2y + x) dx dy.$$

Обчислюємо послідовно інтеграли правої частини:

$$\iint_{G_1} (2x^2y + x) dx dy = \int_1^3 dy \int_{3/y}^3 (2x^2y + x) dx,$$

$$\int_{3/y}^3 (2x^2y + x) dx = \left(\frac{2}{3} yx^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{\frac{3}{y}}^3 = \frac{2}{3} \cdot y \cdot 27 + \frac{1}{2} \cdot 9 -$$

$$- \left(\frac{2}{3} \cdot y \cdot \frac{27}{y^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{y^2} \right) = 18y - \frac{45}{2y^2} + \frac{9}{2},$$

$$\int_1^3 \left(18y - \frac{45}{2y^2} + \frac{9}{2} \right) dy = \left(9y^2 + \frac{45}{2y} + \frac{9}{2} y \right) \Big|_1^3 =$$

$$= 9 \cdot 9 + \frac{45}{2 \cdot 3} + \frac{9}{2} \cdot 3 - \left(9 + \frac{45}{2} + \frac{9}{2} \right) = 66;$$

$$\iint_{G_2} (2x^2y + x) dx dy = \int_3^9 dy \int_{y/3}^3 (2x^2y + x) dx,$$

$$\int_{y/3}^3 (2x^2y + x) dx = \left(\frac{2}{3} yx^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{\frac{y}{3}}^3 = 18y + \frac{9}{2} - \frac{2}{81} y^4 - \frac{1}{18} y^2,$$

$$\begin{aligned} \int_3^9 \left(18y + \frac{9}{2} - \frac{2}{81} y^4 - \frac{1}{18} y^2 \right) dy &= \left(9y^2 + \frac{9}{2} y - \frac{2}{81 \cdot 5} y^5 - \frac{1}{18 \cdot 3} y^3 \right) \Big|_3^9 = \\ &= 729 + \frac{81}{2} - \frac{2}{9^2 \cdot 5} \cdot 9^5 - \frac{1}{6 \cdot 9} \cdot 9^3 - \left(81 + \frac{27}{2} - \frac{2}{3^4 \cdot 5} \cdot 3^5 - \frac{1}{2 \cdot 3^3} \cdot 3^3 \right) = 371,6. \end{aligned}$$

У підсумку отримуємо

$$\iint_G (2x^2y + x) dx dy = 66 + 371,6 = 437,6.$$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат.

Приклад 1. $\iint_G \left(3\sqrt{x^2 + y^2} + 4 \right) dx dy$; $G: x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0$.

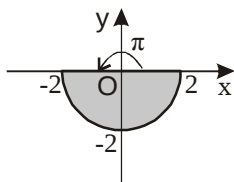


Рис. 3

Розв'язання. Будуємо лінії

$x^2 + y^2 = 4, y = 0$ та визначаємо область інтегрування (рис. 3). Нагадаємо, що зв'язок між декартовими та полярними координатами задається співвідношеннями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Запишемо рівняння заданого кола в полярних координатах:

$$(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = 4, \quad \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 4, \quad \rho = 2.$$

До полярної системи координат у подвійному інтегралі переходимо за формулою

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

З наведеного рисунка легко бачити, що $0 \leq \rho \leq 2$, $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$. Можемо записати:

$$\begin{aligned} \iint_G \left(3\sqrt{x^2 + y^2} + 4 \right) dx dy &= \iint_{G^*} \left(3\sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} + 4 \right) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \iint_{G^*} (3\rho + 4) \rho d\rho d\varphi = \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (3\rho + 4) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл:

$$\int_0^2 (3\rho + 4) \rho d\rho = \int_0^2 (3\rho^2 + 4\rho) d\rho = \left(\rho^3 + 2\rho^2 \right) \Big|_0^2 = 8 + 8 = 16.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int_{\pi}^{2\pi} 16 d\varphi = 16\varphi \Big|_{\pi}^{2\pi} = 16\pi.$$

Приклад 2. $\iint_G (y\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$; $G: y = \sqrt{3}x, y = -x, x = 1$.

Розв'язання. Будуємо область інтегрування G (рис.4). Використовуючи залежності $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ запишемо рівняння потрібної нам півпрямой $y = \sqrt{3}x$ в полярній системі координат:

$$\rho \sin \varphi = \sqrt{3} \rho \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}, \quad \varphi = \pi/3.$$

Рівняння $y = -x, x = 1$ в полярній системі координат відповідно

приймають вигляд: $\varphi = -\pi/4$ (знак мінус обумовлений тем, що кут відкладається за рухом годинникової стрілки), $\rho = 1/\cos \varphi$.

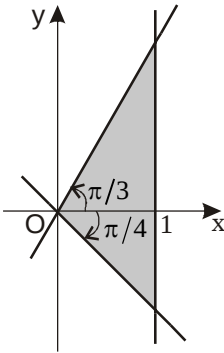


Рис. 4

Переходимо до полярної системи координат у подвійному інтегралі та розставляємо межі інтегрування:

$$\begin{aligned} \iint_G (y\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy &= \\ &= \iint_{G^*} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \iint_{G^*} \rho^3 \sin \varphi d\rho d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} \rho^3 \sin \varphi d\rho. \end{aligned}$$

Обчислюємо внутрішній та зовнішній інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\cos \varphi} \rho^3 \sin \varphi d\rho &= \sin \varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{1/\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{4 \cos^4 \varphi}; \\ \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin \varphi}{4 \cos^4 \varphi} d\varphi &= -\frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{d \cos \varphi}{\cos^4 \varphi} = -\frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \cos^{-4} \varphi d \cos \varphi = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos^{-3} \varphi}{-3} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\cos^3(\pi/3)} - \frac{1}{\cos^3(-\pi/4)} \right) = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

Завдання 3. Обчислити потрійний інтеграл.

Приклад 1. $\iiint_T (4xy + 2z) dx dy dz;$

$$T: z = 4 - x, \quad y = x, \quad y = 3x, \quad z = 0.$$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Оху (рис. 5). Застосовуємо формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Нагадаємо, що нижня і верхня межі інтегрування у внутрішньому інтегралі по змінній z визначаються відповідно поверхнями, які обмежують область знизу і зверху. Межі інтегрування у двох інших інтегралах (по змінним x і y) визначаються як межі інтегрування для подвійного інтеграла по області G .

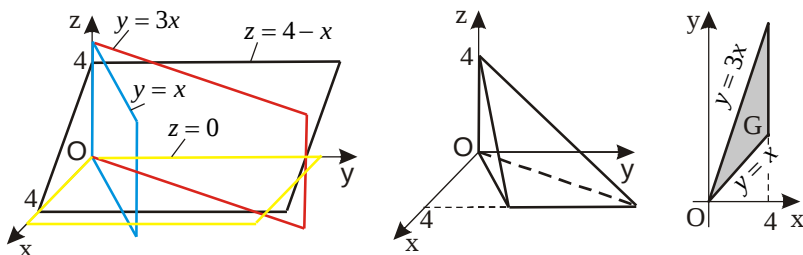


Рис. 5

Можемо записати

$$\iiint_T (4xy + 2z) dx dy dz = \int_0^4 dx \int_x^{3x} dy \int_0^{4-x} (4xy + 2z) dz.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл по z (x і y вважаються сталими):

$$\int_0^{4-x} (4xy + 2z) dz = (4xyz + z^2) \Big|_0^{4-x} = 4xy(4-x) + (4-x)^2.$$

Обчислюємо інтеграл по y (x вважається сталою):

$$\begin{aligned} \int_x^{3x} (4xy(4-x) + (4-x)^2) dy &= \left(2x(4-x)y^2 + (4-x)^2 y \right) \Big|_x^{3x} = \\ &= 2x(4-x) \cdot 8x^2 + (4-x)^2 \cdot 2x = 66x^3 - 16x^4 + 32x - 16x^2. \end{aligned}$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл:

$$\int_0^4 (66x^3 - 16x^4 + 32x - 16x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{33x^4}{2} - \frac{16x^5}{5} + 16x^2 - \frac{16x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 861,8(6) .$$

Приклад 2. $\iiint_T (6xz + 3) dx dy dz;$

$$T: y = x^2, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 4, \quad z = 0 .$$

Розв'язання. Будемо область інтегрування та її проекцію на площину Оху (рис. 6).

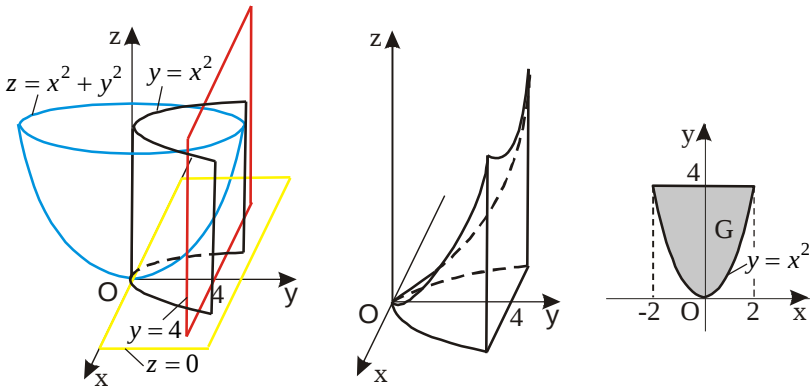


Рис. 6

Переходимо до трьохкратного інтеграла та розставляємо межі інтегрування:

$$\iiint_T (6xz + 3) dx dy dz = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 dy \int_0^{x^2+y^2} (6xz + 3) dz .$$

Обчислюємо внутрішні інтеграли:

$$\int_0^{x^2+y^2} (6xz + 3) dz = (3xz^2 + 3z) \Big|_0^{x^2+y^2} = 3x(x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2) =$$

$$= 3x^5 + 6x^3y^2 + 3xy^4 + 3x^2 + 3y^2;$$

$$\int_{x^2}^4 (3x^5 + 6x^3y^2 + 3xy^4 + 3x^2 + 3y^2) dy =$$

$$= \left(3x^5y + 2x^3y^3 + \frac{3}{5}xy^5 + 3x^2y + y^3 \right) \Big|_{x^2}^4 =$$

$$= 12x^5 + 128x^3 + 614,4x + 12x^2 + 64 - 3x^7 - 2x^9 - 0,6x^{11} - 3x^4 - x^6.$$

Межі інтегрування у зовнішньому інтегралі симетричні відносно нуля. При його обчисленні зручно використовувати наступну властивість визначеного інтеграла:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, \text{ якщо } f(x) \text{ непарна,} \\ 2 \int_0^a f(x), \text{ якщо } f(x) \text{ парна} \end{cases}.$$

Маємо:

$$\int_{-2}^2 (12x^5 + 128x^3 + 614,4x + 12x^2 + 64 - 3x^7 - 2x^9 - 0,6x^{11} - 3x^4 - x^6) dx =$$

$$= 2 \int_0^2 (12x^5 + 64 - 3x^4 - x^6) dx = 2 \left(4x^3 + 64x - \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \right) \Big|_0^2 = \frac{8576}{35}.$$

Завдання 4. Обчислити потрійний інтеграл, перейшовши до циліндричних або сферичних координат.

$$\text{Приклад 1. } \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz;$$

$$T: x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z \geq 0.$$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проекцію на площину Оху (рис. 7). Система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

визначає лінію перетину поверхонь (сфери і конічної поверхні). Для знаходження проєкції цієї лінії на площину Oxy виключаємо змінну z із записаної системи (додаємо рівняння):

$$2x^2 + 2y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 9/2.$$

Отже, проєкцією області інтегрування на площину Oxy є круг, радіус якого дорівнює $3/\sqrt{2}$.

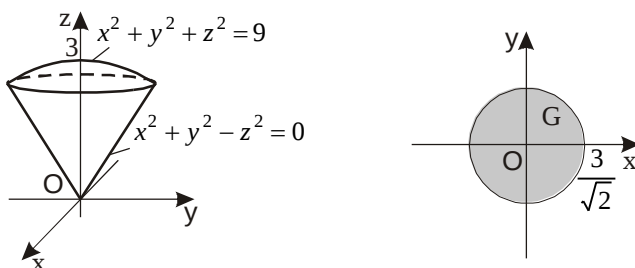


Рис. 7

Обчислюємо інтеграл, перейшовши до сферичних координат. Запишемо рівняння заданої сфери та заданої конічної поверхні в сферичних координатах. Застосовуємо формули переходу:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Рівняння сфери:

$$(\rho \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \theta)^2 = 9,$$

$$\rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta = 9, \quad \rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 9, \quad \rho = 3.$$

Рівняння конічної поверхні:

$$(\rho \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \varphi)^2 - (\rho \cos \theta)^2 = 0,$$

$$\rho^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 0, \cos 2\theta = 0, 2\theta = \pi/2, \theta = \pi/4.$$

Перейдемо до сферичних координат у потрійному інтегралі за допомогою формули

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{V^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} & \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \\ & = \iiint_{T^*} \sqrt{(\rho \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \theta)^2} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ & = \iiint_{T^*} \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Розставляємо межі інтегрування та інтегруємо:

$$\begin{aligned} \iiint_{T^*} \rho^3 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^3 \rho^3 \sin \theta d\rho; \\ \int_0^3 \rho^3 \sin \theta d\rho &= \sin \theta \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^3 = \frac{81}{4} \sin \theta; \\ \int_0^{\pi/4} \frac{81}{4} \sin \theta d\theta &= -\frac{81}{4} \cos \theta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{81(2 - \sqrt{2})}{8}; \\ \int_0^{2\pi} \frac{81(2 - \sqrt{2})}{8} d\varphi &= \frac{81(2 - \sqrt{2})}{8} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{81(2 - \sqrt{2})\pi}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 2. $\iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz;$

$$T: x^2 + y^2 + z^2 = 25, x^2 + y^2 = 16.$$

Розв'язання. Будуємо область інтегрування та її проєкцію на площину Оху (рис. 8). Перейдемо до циліндричних координат.

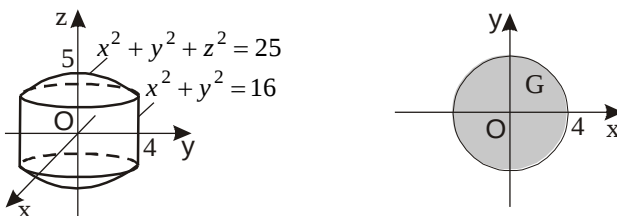


Рис. 8

Використовуючи формули переходу

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

запишемо рівняння заданих поверхонь (сфери та кругового циліндра) в циліндричних координатах:

$$(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 + z^2 = 25, \quad z^2 = 25 - \rho^2, \quad z = \pm \sqrt{25 - \rho^2};$$

$$(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = 16, \quad \rho = 4.$$

До циліндричних координат у заданому інтегралі переходимо за формулою

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

Можемо записати

$$\begin{aligned} \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{T^*} ((\rho \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \theta \sin \varphi)^2) \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \iiint_{T^*} \rho^3 d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 d\rho \int_{-\sqrt{25-\rho^2}}^{\sqrt{25-\rho^2}} \rho^3 dz. \end{aligned}$$

Інтегруємо:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{25-\rho^2}}^{\sqrt{25-\rho^2}} \rho^3 dz &= \rho^3 z \Big|_{-\sqrt{25-\rho^2}}^{\sqrt{25-\rho^2}} = 2\rho^3 \sqrt{25-\rho^2}; \\ \int_0^4 2\rho^3 \sqrt{25-\rho^2} d\rho &= \int_0^4 \rho^2 \sqrt{25-\rho^2} \cdot 2\rho d\rho = -\int_0^4 \rho^2 \sqrt{25-\rho^2} d(25-\rho^2) = \\ &= \left| 25-\rho^2 = t^2, \rho^2 = 25-t^2, \right|_{\rho=0 \rightarrow t=5, \rho=4 \rightarrow t=3} = -\int_5^3 (25-t^2) t dt = \int_5^3 (t^3 - 25t) dt = \\ &= \left(\frac{t^4}{4} - 25\frac{t^2}{2} \right) \Big|_5^3 = 64; \quad \int_0^{2\pi} 64 d\varphi = 64\varphi \Big|_0^{2\pi} = 128\pi. \end{aligned}$$

Завдання 5. Знайти об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями (застосувати подвійний інтеграл).

Приклад 1. $z = x^2$, $z = 0$, $y = 0$, $2x + y = 4$.

Будуємо тіло, об'єм якого потрібно знайти та його проекцію на площину Oxy (рис. 9).

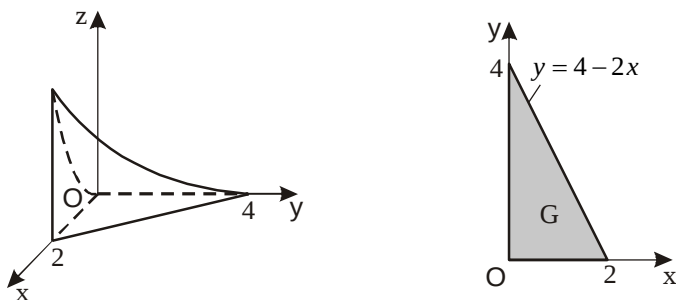


Рис. 9

Застосовуємо формулу

$$V = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

Нагадаємо, що підінтегральна функція визначається з рівняння

поверхні $z = f(x, y)$, яка обмежує тіло зверху. Задане тіло обмежене зверху параболічним циліндром $z = x^2$, отже $f(x, y) = x^2$. Маємо:

$$V = \iint_G x^2 dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} x^2 dy,$$

$$\int_0^{4-2x} x^2 dy = x^2 y \Big|_0^{4-2x} = x^2(4-2x) = 4x^2 - 2x^3,$$

$$V = \int_0^2 (4x^2 - 2x^3) dx = \left(\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}.$$

Приклад 2. $z = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}, z = 0, x^2 + y^2 = 9$.

Розв'язання. Будуємо тіло та його проекцію на площину Oxy (рис. 10).



Рис. 10

У даному прикладі при обчисленні подвійного інтеграла зручно перейти до полярної системи координат. Можемо записати:

$$V = \iint_G \left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} \right) dx dy = \frac{1}{3} \iint_{G^*} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 d\rho,$$

$$\int_0^3 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^3 = \frac{81}{4},$$

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} d\varphi = \frac{27}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{27\pi}{2}.$$

Завдання 6. Знайти центр ваги однорідного тіла, яке обмежене вказаними поверхнями.

Приклад 1. $4z = -x^2 - y^2, \quad z = -5.$

Розв'язання. Будуємо тіло, центр ваги якого потрібно знайти та його проекцію на площину Oxy (рис. 11).

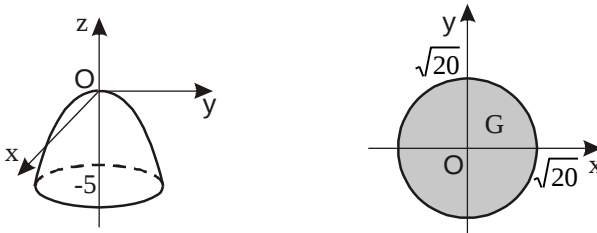


Рис. 11

Система рівнянь $4z = -x^2 - y^2, z = -5$ визначає рівняння кола у просторі, по якому перетинаються задані параболоїд обертання і площина. Для знаходження проекції цієї лінії на площину Oxy виключаємо змінну z із вказаної системи:

$$-x^2 - y^2 = -20, \quad x^2 + y^2 = 20.$$

Отже, проекцією заданого тіла на площину Oxy є круг, радіус якого дорівнює $\sqrt{20}$.

Застосовуємо формули

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m},$$

$$m = \iiint_T \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad M_{yz} = \iiint_T x \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xz} = \iiint_T y\gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad M_{xy} = \iiint_T z\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

де m – маса тіла, M_{yz} , M_{xz} , M_{xy} – статичні моменти тіла відносно відповідних площин. Так як тіло однорідне, то $\gamma(x, y, z) = 1$. Крім того, задане тіло симетричне відносно вісі Oz , отже, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. При обчисленні потрібних інтегралів зручно перейти до циліндричної системи координат. Рівняння заданого параболоїда обертання приймає вигляд $z = -0,25\rho^2$, а рівняння площини $z = -5$ не змінюється. Обчислюємо спочатку масу:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_T dx dy dz = \iiint_{T^*} \rho d\varphi d\rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{20}} d\rho \int_{-5}^{-0,25\rho^2} \rho dz, \\ &\int_{-5}^{-0,25\rho^2} \rho dz = \rho z \Big|_{-5}^{-0,25\rho^2} = \rho(-0,25\rho^2 + 5) = 5\rho - 0,25\rho^3, \\ &\int_0^{\sqrt{20}} (5\rho - 0,25\rho^3) d\rho = \left(\frac{5}{2}\rho^2 - \frac{0,25}{4}\rho^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{20}} = 25, \\ &m = \int_0^{2\pi} 25 d\varphi = 25\varphi \Big|_0^{2\pi} = 50\pi. \end{aligned}$$

Обчислюємо статичний момент:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_T z dx dy dz = \iiint_{T^*} z \rho d\varphi d\rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{20}} d\rho \int_{-5}^{-0,25\rho^2} z \rho dz, \\ &\int_{-5}^{-0,25\rho^2} z \rho dz = \frac{1}{2} \rho \cdot z^2 \Big|_{-5}^{-0,25\rho^2} = \frac{1}{32} \rho^5 - \frac{25}{2} \rho, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{20}} \left(\frac{1}{32} \rho^5 - \frac{25}{2} \rho \right) d\rho = \left(\frac{1}{192} \rho^6 - \frac{25}{4} \rho^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{20}} = \frac{125}{3} - 125 = -\frac{250}{3},$$

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{250}{3} \right) d\varphi = -\frac{250}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = -\frac{500\pi}{3}.$$

Обчислюємо $\bar{z}$ (нагадаємо, що $\bar{x} = \bar{y} = 0$):

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = -\frac{500\pi}{3 \cdot 50\pi} = -3, (3).$$

Приклад 2. $y = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad y = \sqrt{36 - x^2 - z^2}.$

Розв'язання. Маємо рівняння півконуса і півсфери. Будемо тіло у просторі та його проекцію на площину Oxz (рис. 12).

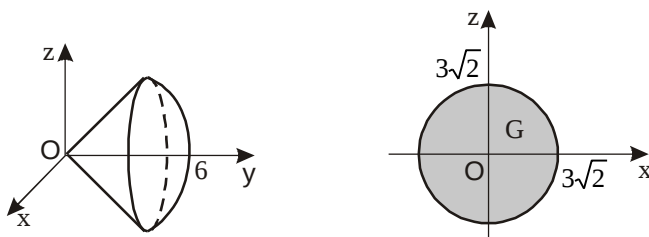


Рис. 12

Для визначення границі проекції виключаємо змінну y з системи рівнянь $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = \sqrt{36 - x^2 - z^2}$. Маємо:

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{36 - x^2 - z^2}, \quad x^2 + z^2 = 36 - x^2 - z^2, \quad x^2 + z^2 = 18.$$

Проекцією заданого тіла на площину Oxz є круг з радіусом $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Координати центру ваги обчислюємо за формулами, які наведені у попередньому прикладі. Так як тіло однорідне, то $\gamma(x, y, z) = 1$. Вісь Oy є віссю симетрії, отже, $\bar{x} = \bar{z} = 0$. Обчислюємо масу (у подвійному інтегралі переходимо до полярних координат):

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_T dx dy dz = \iint_G dx dz \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} dy, \\
\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} dy &= y \Big|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} = \sqrt{36-x^2-z^2} - \sqrt{x^2+z^2}, \\
\iint_G \left(\sqrt{36-x^2-z^2} - \sqrt{x^2+z^2} \right) dx dz &= \iint_{G^*} \left(\sqrt{36-\rho^2} - \rho \right) \rho d\rho d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-\rho^2} - \rho \right) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{3\sqrt{2}} \left(\rho \sqrt{36-\rho^2} - \rho^2 \right) d\rho, \\
\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\rho \sqrt{36-\rho^2} - \rho^2 \right) d\rho &= -\frac{1}{2} \int_0^{3\sqrt{2}} \sqrt{36-\rho^2} d(36-\rho^2) - \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(36-\rho^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^{3\sqrt{2}} = 36(2-\sqrt{2}), \\
m &= \int_0^{2\pi} 36(2-\sqrt{2}) d\varphi = 36(2-\sqrt{2}) \varphi \Big|_0^{2\pi} = 72(2-\sqrt{2})\pi.
\end{aligned}$$

Обчислюємо статичний момент:

$$\begin{aligned}
M_{xz} &= \iiint_T y dx dy dz = \iint_G dx dz \int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} y dy, \\
\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} y dy &= \frac{1}{2} y^2 \Big|_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{36-x^2-z^2}} = 18 - x^2 - z^2, \\
\iint_G (18 - x^2 - z^2) dx dz &= \iint_{G^*} (18 - \rho^2) d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{3\sqrt{2}} (18 - \rho^2) \rho d\rho,
\end{aligned}$$

$$\int_0^{3\sqrt{2}} (18 - \rho^2) \rho d\rho = \left(9\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right) \Big|_0^{3\sqrt{2}} = 162 - 81 = 81,$$

$$M_{xz} = \int_0^{2\pi} 81 d\varphi = 81\varphi \Big|_0^{2\pi} = 162\pi.$$

Обчислюємо $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{162\pi}{72(2 - \sqrt{2})\pi} \approx 3,841.$$

Завдання 7. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду.

Приклад 1. $\int_K (y+1)dl$, де K – дуга астроїди $x = 4\cos^3 t$,

$$y = 4\sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Розв'язання. Так як контур інтегрування заданий параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то застосовуємо формулу

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Знайдемо спочатку диференціал дуги кривої:

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{((4\cos^3 t)')^2 + ((4\sin^3 t)')^2} dt = \\ &= \sqrt{(-12\cos^2 t \sin t)^2 + (12\sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= \sqrt{144\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 12\cos t \sin t dt. \end{aligned}$$

Обчислюємо інтеграл:

$$\int_K (y+1)dl = \int_0^{\pi/2} 12(4\sin^3 t + 1)\cos t \sin t dt = 48 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t d\sin t +$$

$$+ 12 \int_0^{\pi/2} \sin t d\sin t = \left(\frac{48}{5} \sin^5 t + 6 \sin^2 t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{48}{5} + 6 = 15,6.$$

Приклад 2. $\int_K \frac{y}{x^2+1} dl$, де К – менша дуга кола $x^2 + y^2 = 6x$, яка

відтинається прямою $y = -\sqrt{5}$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння заданої кривої:

$$(x^2 - 6x + 9) + y^2 = 9, (x-3)^2 + y^2 = 9.$$

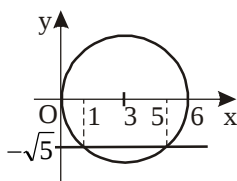


Рис. 13

Маємо рівняння кола з центром в точці (3;0) і радіусом $r = 3$ (рис. 13). Знайдемо точки перетину кола і прямої:

$$x^2 - 6x + 5 = 0, x_1 = 1, x_2 = 5.$$

Розв'язавши рівняння кола відносно y ,

отримуємо $y = -\sqrt{6x - x^2}$, ($1 \leq x \leq 5$). Контур інтегрування заданий рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Застосовуємо формулу

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Обчислюємо диференціал дуги кривої:

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}} \right)^2} dx = \frac{3dx}{\sqrt{6x-x^2}}.$$

Обчислюємо інтеграл:

$$\begin{aligned}\int_K \frac{y}{x^2+1} dl &= -\int_1^5 \frac{3\sqrt{6x-x^2} dx}{(x^2+1)\sqrt{6x-x^2}} = -3\int_1^5 \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= -3\operatorname{arctg} x \Big|_1^5 = -3\operatorname{arctg} 5 + \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Приклад 3. $\int_K xdl$, де K – дуга кардіоїди $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Розв'язання. Крива K задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ в полярних координатах. Обчислюємо криволінійний інтеграл за формулою

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho(\varphi)^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Знаходимо диференціал дуги кривої:

$$\begin{aligned}dl &= \sqrt{\rho(\varphi)^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi = \sqrt{25(1 + \cos \varphi)^2 + 25(-\sin \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 5\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 5\sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 10 \cos \frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Перейдемо до визначеного інтегралу (замість x підставляємо $\rho(\varphi) \cos \varphi = 5(1 + \cos \varphi) \cos \varphi$):

$$\begin{aligned}\int_K xdl &= \int_0^{\pi} 50(1 + \cos \varphi) \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 50 \int_0^{\pi} \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi + 50 \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi.\end{aligned}$$

Кожен з інтегралів обчислюємо окремо. Нижче буде застосована тригонометрична формула

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Маємо:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{3\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \sin \frac{3\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3}, \\
 \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi + \\
 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2\varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{5\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{10} \sin \frac{5\varphi}{2} + \frac{1}{6} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{6} = \frac{14}{15}, \\
 \int_K x dl &= 50 \left(\frac{2}{3} + \frac{14}{15} \right) = 80.
 \end{aligned}$$

Приклад 4. $\int_K (x^2 y + yz) dl$, де K – дуга гвинтової лінії $x = 4 \cos t$,

$$y = 4 \sin t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Розв'язання. Дуга просторової кривої задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; $\alpha \leq t \leq \beta$. Застосовуємо формулу

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Дістаємо:

$$\begin{aligned}
 dl &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \sqrt{(-4 \sin t)^2 + (4 \cos t)^2 + 1^2} dt = \\
 &= \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} dt = \sqrt{17} dt,
 \end{aligned}$$

$$\int_K (x^2 y + yz) dl = \int_0^{\pi} (16 \cos^2 t \cdot 4 \sin t + 4 \sin t \cdot t) \sqrt{17} dt =$$

$$= 64\sqrt{17} \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t dt + 4\sqrt{17} \int_0^{\pi} t \sin t dt ,$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t dt = - \int_0^{\pi} \cos^2 t d \cos t = - \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} ,$$

$$\int_0^{\pi} t \sin t dt = \left| \begin{array}{l} u = t, dv = \sin t dt \\ du = dt, v = -\cos t \end{array} \right| = -t \cos t \Big|_0^{\pi} + \sin t \Big|_0^{\pi} = \pi ,$$

$$\int_K (x^2 y + yz) dl = 64\sqrt{17} \cdot \frac{2}{3} + 4\sqrt{17} \cdot \pi = \frac{4\sqrt{17}(32 + 3\pi)}{3} .$$

Завдання 8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду.

Приклад 1. $\int_{AB} xy dx + (x + y) dy$, де АВ – дуга кривої $y = \sqrt[3]{x}$ від

точки А(8;2) до В(1;1).

Розв'язання. Контур інтегрування АВ задається рівнянням $y = y(x)$. Обчислюємо інтеграл за формулою

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)) dx ,$$

де a, b – абсиси точок А і В відповідно. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_{AB} xy dx + (x + y) dy &= \int_8^1 \left(x \sqrt[3]{x} + (x + \sqrt[3]{x}) \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} \right) dx = \\ &= \int_8^1 \left(x^{4/3} + \frac{1}{3} x^{1/3} + \frac{1}{3} x^{-1/3} \right) dx = \left(\frac{3}{7} x^{7/3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} x^{4/3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{2/3} \right) \Big|_8^1 = -\frac{1671}{28} . \end{aligned}$$

Приклад 2. $\int_{AB} 2xydx + x^2dy$, де АВ – відрізок прямої від точки

A(0;1) до B(3;7).

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої АВ. Використовуємо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Маємо:

$$\frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y - 1}{7 - 1}, \quad \frac{x}{3} = \frac{y - 1}{6}, \quad y = 2x + 1.$$

Обчислюємо криволінійний інтеграл за формулою, яка наведена у попередньому прикладі:

$$\begin{aligned} \int_{AB} 2xydx + x^2dy &= \int_0^3 (2x(2x+1) + x^2 \cdot 2)dx = \int_0^3 (6x^2 + 2x)dx = \\ &= (2x^3 + x^2) \Big|_0^3 = 54 + 9 = 63. \end{aligned}$$

Приклад 3. $\int_{AB} ydx + xdy$, де АВ – дуга кола $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$

від $t = 0$ до $t = \pi/4$.

Розв'язання. Крива АВ задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Обчислюємо інтеграл за формулою

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt,$$

де α , β – значення параметра t в точках А і В відповідно. Отримуємо:

$$\begin{aligned}\int_{AB} ydx + xdy &= \int_0^{\pi/4} (\sin t \cdot (-4\sin t) + 4\cos t \cdot \cos t)dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt = 4 \int_0^{\pi/4} \cos 2t dt = 4 \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/4} = 2.\end{aligned}$$

Приклад 4. $\int_{AB} y^2 z dx + z^2 x dy + x^2 y dz$, де АВ – дуга кривої $x = t$,

$y = t^2$, $z = t^3$ від $t = 0$ до $t = 1$.

Розв'язання. Просторова крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Застосовуємо формулу (в точці А параметр t дорівнює α , а в точці В – t дорівнює β):

$$\begin{aligned}\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \\ &+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt.\end{aligned}$$

Дістаємо:

$$\begin{aligned}\int_{AB} y^2 z dx + z^2 x dy + x^2 y dz &= \int_0^1 (t^4 t^3 \cdot 1 + t^6 t \cdot 2t + t^2 t^2 \cdot 3t^2)dt = \\ &= \int_0^1 (t^7 + 2t^8 + 3t^6)dt = \left(\frac{1}{8}t^8 + \frac{2}{9}t^9 + \frac{3}{7}t^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{3}{7} = \frac{391}{504}.\end{aligned}$$

Завдання 9. Показати, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, та обчислити його для заданих точок А(1;1), В(2;3) і С(2;1) по двом контурам інтегрування: а) по відрізку прямої АВ; б) по ламаній АСВ.

Приклад 1. $\int_K (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy.$

Розв'язання. Умовою незалежності криволінійного інтеграла

$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ від шляху інтегрування є наступна тотожна

рівність

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

У нашому випадку маємо:

$$P(x, y) = 8xy + 6x, Q(x, y) = 4x^2 + 15y^2, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 8x, \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 8x.$$

Умова виконана.

а) Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки, записуємо рівняння прямої АВ:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1}, \quad y = 2x - 1; \quad 1 \leq x \leq 2.$$

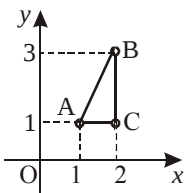


Рис. 14

Обчислюємо інтеграл по відрізку АВ:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy = \\ &= \int_1^2 (8x(2x-1) + 6x + (4x^2 + 15(2x-1)^2) \cdot 2)dx = \\ &= \int_1^2 (144x^2 - 122x + 30)dx = (48x^3 - 61x^2 + 30x) \Big|_1^2 = 48 \cdot 7 - 61 \cdot 3 + 30 = 183. \end{aligned}$$

б) Очевидно, що $\int_{ACB} = \int_{AC} + \int_{CB}$. Відрізок АС описується

співвідношеннями: $y = 1, 1 \leq x \leq 2; dy = 0$. Можемо записати:

$$\int_{AC} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy = \int_1^2 (8x \cdot 1 + 6x)dx = 7x^2 \Big|_1^2 = 21.$$

Відрізок СВ: $x = 2, 1 \leq y \leq 3; dx = 0$. Дістаємо:

$$\int_{CB} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy = \int_1^3 (4 \cdot 4 + 15y^2)dy = (16y + 5y^3) \Big|_1^3 = 162,$$

$$\int_{ACB} (8xy + 6x)dx + (4x^2 + 15y^2)dy = 21 + 162 = 183.$$

Завдання 10. Показати, що заданий вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом для деякої функції $U(x, y)$ та знайти цю функцію.

Приклад 1. $(4x^3y + 2)dx + (x^4 + 6y)dy$.

Розв'язання. Вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом в деякій області, якщо в кожній точці цієї області виконується рівність

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

Перевіряємо виконання вказаної умови:

$$P(x, y) = 4x^3y + 2, \quad Q(x, y) = x^4 + 6y, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 4x^3, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 4x^3.$$

Умова виконується. Функцію $U(x, y)$ шукаємо за формулою

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C,$$

де x_0, y_0 – координати фіксованої точки (вибирається довільно), у який функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ та їхні частинні похідні неперервні. При інтегруванні у другому інтегралі по змінній y величина x вважається сталою. Нехай $x_0 = y_0 = 0$. Отримуємо:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_0^x 2dx + \int_0^y (x^4 + 6y)dy + C = 2x \Big|_0^x + (x^4 y + 3y^2) \Big|_0^y + C = \\
 &= 2x + x^4 y + 3y^2 + C.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. $\left(-\frac{6}{x^3} + ye^{xy}\right)dx + \left(xe^{xy} - \frac{2}{y^2}\right)dy.$

Розв'язання. Застосовуємо формули, які наведені у попередньому прикладі. Перевіряємо умову:

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = e^{xy} + yxe^{xy}.$$

Умова виконана. Відмітимо, що брати початок координат у якості фіксованої точки не можна, так як у цій точці функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ терплять розрив (нулі у знаменниках). Нехай $x_0 = y_0 = 1$. Дістаємо:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_1^x \left(-\frac{6}{x^3} + e^x\right)dx + \left(xe^{xy} - \frac{2}{y^2}\right)dy + C = \\
 &= \left(\frac{3}{x^2} + e^x\right) \Big|_1^x + \left(e^{xy} + \frac{2}{y}\right) \Big|_1^y + C = \frac{3}{x^2} + e^x - 3 - e + e^{xy} + \frac{2}{y} - e^x - 2 + C = \\
 &= \frac{3}{x^2} + e^{xy} + \frac{2}{y} + C_1,
 \end{aligned}$$

де C_1 – довільна стала ($C_1 = -3 - e - 2 + C$).