

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ**

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ
ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

КРЕДИТНО-МОДУЛЬНА СИСТЕМА

**Методичні вказівки та індивідуальні завдання
для студентів технічних спеціальностей**

**КІРОВОГРАД
2007**

Диференціальне числення функції декількох змінних. Диференціальні рівняння. Кредитно-модульна система. Методичні вказівки та індивідуальні завдання для студентів технічних спеціальностей/ Укл.: В.І.Гуцул, С.М.Якименко, І.І. Філімоніхіна – Кіровоград: КНТУ, 2007. – 100с.

Методичні вказівки та індивідуальні завдання по вивченню розділів „Диференціальне числення функції декількох змінних” та „Диференціальні рівняння” курсу „Вища математика”. Призначені для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. По кожній темі наведена теоретична база, розглянуті типові приклади та розроблені індивідуальні завдання. Дані рекомендації по організації навчального процесу за кредитно-модульною системою навчання.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої
математики та фізики.
Протокол №7 від 8.02.2006 р.

© В.І.Гуцул, 2007
© С.М.Якименко, 2007
© І.І.Філімоніхіна, 2007

Зміст

Організація навчального процесу за кредитно-модульною системою	5
I. Диференціальне числення функції декількох змінних.....	8
§ 1.1. Поняття функції декількох змінних.....	8
§ 1.2. Границя та неперервність функції декількох змінних.....	9
§ 1.3. Частинні похідні функції декількох змінних.....	11
§ 1.4. Диференціал функції декількох змінних.....	13
§ 1.5. Похідна складної функції. Похідна функції заданої неявно...	15
§ 1.6. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.....	18
§ 1.7. Похідна за напрямом. Градієнт.....	19
§ 1.8. Частинні похідні та диференціали вищих порядків.....	22
§ 1.9. Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення в заданій області.....	26
§ 1.10. Метод найменших квадратів.....	30
II. Диференціальні рівняння.....	34
§ 2.1. Поняття диференціального рівняння. Загальні означення.....	34
§ 2.2. Диференціальні рівняння першого порядку.....	36
§ 2.3. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку.....	42
§ 2.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття. Метод варіації довільних сталих.....	45
§ 2.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	49
§ 2.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	52
§ 2.7. Поняття про системи диференціальних рівнянь.....	58

§ 2.8. Приклади задач на складання та розв'язування	
диференціальних рівнянь.....	60
Індивідуальні завдання.....	66
Функція декількох змінних.....	66
Диференціальні рівняння.....	79
Рекомендована література.....	100

Організація навчального процесу за кредитно-модульною системою

Модуль 1. Диференціальне числення функції декількох змінних.

№ теми	Теми занять	Методичні вказівки	Індивідуальні завдання
1	2	3	4
1	Означення функції декількох змінних. Область визначення. Границя функції декількох змінних. Неперервність.	§ 1.1, 1.2	№ 1
2	Частинні похідні. Похідна складної й неявної функції. Повний диференціал. Застосування повного диференціалу до наближених обчислень.	§ 1.3, 1.4, 1.5	№ 2, 3
3	Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні. Похідна за напрямом. Градієнт.	§ 1.6, 1.7	№ 4
4	Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Екстремум функції декількох змінних. Необхідні та достатні умови екстремуму функції двох змінних.	§ 1.8, 1.9	№ 5, 6

1	2	3	4
5	Абсолютний екстремум функції двох змінних у замкненій області. Метод найменших квадратів.	§ 1.9, 1.10	№ 7, 8

Модуль 2. Диференціальні рівняння.

№ теми	Теми занять	Методичні вказівки	Індивідуальні завдання
1	2	3	4
1	Диференціальні рівняння. Основні поняття (порядок диференціального рівняння, розв'язок, загальний та частинний розв'язки, початкові умови). Диференціальні рівняння першого порядку (рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними; однорідні рівняння першого порядку; лінійні рівняння; рівняння Бернуллі).	§ 2.1, 2.2	№ 1
2	Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку.	§ 2.3	№ 2

1	2	3	4
3	Лінійні диференціальні рівняння (означення та загальні властивості). Метод варіації довільних сталих. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.	§ 2.4, 2.5, 2.6	№ 3, 4, 7
4	Системи диференціальних рівнянь. Зведення системи до одного диференціального рівняння.	§ 2.7	№ 5
5	Застосування диференціальних рівнянь до задач фізики та геометрії.	§ 2.8	№ 6

I. Диференціальне числення функції декількох змінних

§ 1.1. Поняття функції декількох змінних

Теорія функції однієї змінної, яка вивчалася раніше, дозволяє дослідити взаємозв'язок між двома змінними величинами, але на практиці часто виникає ситуація, коли взаємозалежними є вже не дві, а три і більше величин. Наприклад, сила току в провіднику залежить від напруги й опору; об'єм прямокутного паралелепіпеда визначається трьома лінійними розмірами; кількість витраченого автомобілем палива залежить від пройденої відстані, швидкості, рельєфу дороги, ваги вантажу і т. д. У зв'язку зі сказаним виникла необхідність введення поняття функції декількох змінних.

Нехай задано множину Z , елементами якої є дійсні числа z й множину D , елементами якої є упорядковані пари дійсних чисел (x, y) . Якщо кожній парі чисел (x, y) із множини D за певним законом ставиться у відповідність єдине число z із множини Z , то кажуть, що z є *функцією двох незалежних змінних* x і y . Для вказаної функціональної залежності прийнято позначення $z = f(x, y)$ (або $z = z(x, y)$). Множина D називається *областю визначення* або *областю існування* функції z , а множина Z – *областю її значень*.

Область визначення зручно зображати у вигляді сукупності точок на площині у декартовій прямокутній системі координат Oxy (x і y розглядаються як абсциса й ордината точки відповідно). Як правило, областю визначення функції двох змінних є деяка обмежена або необмежена область площини.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \ln(x - y)$.

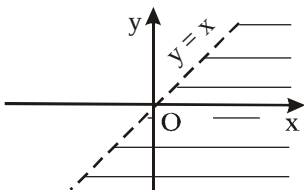


Рис. 1

Розв'язання. Так як логарифмічна функція визначена тільки для додатного аргументу, то необхідно, щоб x та y задовольняли нерівність $x - y > 0$ або $y < x$. Це означає, що область

визначення є напівплощина, що розміщена під прямою $y = x$, за виключенням цієї прямої (рис. 1).

Геометричним зображенням функції двох змінних (її графіком), як правило, є деяка поверхня у просторі. Наприклад, графіками функцій $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ і $z = 1 + 5x - y$ є напівсфера й площина відповідно.

Аналогічно попередньому визначаються функції трьох і більше змінних. Якщо кожній трійки дійсних чисел (x, y, z) із заданої множини Ω (елементами множини є упорядковані трійки чисел) ставиться у відповідність єдине дійсне число u із заданої множини U , то кажуть, що u є *функцією трьох незалежних змінних* x, y і z . Для цієї залежності прийнято позначення $u = f(x, y, z)$. Область визначення Ω для функції трьох змінних можна задати сукупністю точок у просторі в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$.

§ 1.2. Границя та неперервність функції декількох змінних

Число A називається *границею функції* $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $r > 0$ таке, що для всіх точок $M(x, y)$, які

задовольняють умові $|MM_0| < r$, виконується нерівність

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Для вказаної границі прийнято наступне позначення

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Приклад 1. Знайти границі: а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{2 - \sqrt{xy + 4}}$, б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$.

Розв'язання. а) Знаходимо границю за допомогою вказаних очевидних перетворень:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{2 - \sqrt{xy + 4}} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(2 + \sqrt{xy + 4})}{(2 - \sqrt{xy + 4})(2 + \sqrt{xy + 4})} = \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(2 + \sqrt{xy + 4})}{-xy} &= - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (2 + \sqrt{xy + 4}) = 4. \end{aligned}$$

б) Враховуючи, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (перша чудова границя), маємо

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною* в точці $M_0(x_0, y_0)$, яка належить області визначення функції, якщо виконується рівність

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \quad (2.1)$$

Уведемо позначення:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Рівність (2.1) можна подати у наступному вигляді:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0. \quad (2.2)$$

Функція називається неперервною в деякій області, якщо вона

неперервна в кожній точці цієї області.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $z = 3x^2 - y^2$.

Розв'язання. Дана функція визначена на всій площині Oxy . Нехай $M(x, y)$ – довільна точка цієї площини. Перевіримо виконання рівності (2.2) в цій точці. Можемо записати

$$\Delta z = 3(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - y^2) = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2) = 0.$$

Таким чином, дана функція неперервна на всій площині Oxy .

§ 1.3. Частинні похідні функції декількох змінних

Нехай задана функція $z = f(x, y)$ і нехай точка $M(x, y)$ належить області визначення цієї функції разом із деяким своїм околom. *Частинним приростом функції $z = f(x, y)$ по змінній x в точці $M(x, y)$ називається приріст функції z за умови, що незалежна змінна x одержує приріст Δx , а незалежна змінна y зберігає сталі значення, тобто*

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (3.1)$$

Аналогічно визначається *частинний приріст z по змінній y :*

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (3.2)$$

Частинною похідною по x від функції $z = f(x, y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ функції z до приросту Δx аргументу x за умови, що приріст аргументу прямує до нуля. Для вказаної частинної похідної прийняті такі позначення:

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, z'_x, f'_x(x, y)$. Можемо записати

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \quad (3.3)$$

Частинна похідна по y позначається через $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, z'_y, f'_y(x, y)$ і

визначається аналогічно попередньому:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (3.4)$$

Як впливає з означення, при знаходженні частинної похідної по x потрібно вважати, що y є сталою величиною, а x – змінною. При знаходженні частинної похідної по y вважаємо, що x є сталою, а y – змінною.

Приклад 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ від функцій:

$$\text{а) } z = 4x^3 + 3y^2 \operatorname{tg} x; \quad \text{б) } z = 4 \ln \left(\frac{x^2}{y} + 1 \right) + y^x.$$

Розв'язання. а) Вважаючи, що x – змінна, а y – стала, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x^3)'_x + 3y^2(\operatorname{tg} x)'_x = 12x^2 + \frac{3y^2}{\cos^2 x}.$$

Вважаємо, тепер, що y – змінна, а x – стала:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x^3)'_y + 3 \operatorname{tg} x (y^2)'_y = 6y \operatorname{tg} x.$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = \left(4 \ln \left(\frac{x^2}{y} + 1 \right) + y^x \right)'_x = 4 \frac{1}{\frac{x^2}{y} + 1} \left(\frac{x^2}{y} + 1 \right)'_x + y^x \ln y =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4y}{x^2 + y} \cdot \frac{2x}{y} + y^x \ln y = \frac{8x}{x^2 + y} + y^x \ln y; \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \left(4 \ln \left(\frac{x^2}{y} + 1 \right) + y^x \right)'_y = 4 \frac{1}{\frac{x^2}{y} + 1} \cdot \left(\frac{x^2}{y} + 1 \right)'_y + xy^{x-1} = \\
&= \frac{4y}{x^2 + y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2} \right) + xy^{x-1} = -\frac{4x^2}{y(x^2 + y)} + xy^{x-1}.
\end{aligned}$$

§ 1.4. Диференціал функції декількох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Нехай точка $M(x, y)$ належить області визначення цієї функції разом із деяким своїм оточенням. Якщо незалежні змінні x і y отримали в точці $M(x, y)$ приріст Δx і Δy відповідно, то *повний приріст* Δz заданої функції визначається рівністю

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (4.1)$$

Припустимо, тепер, що в деякому оточенні точки $M(x, y)$ існують обидві частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, а у самій точці M вказані похідні неперервні. Можна показати, що при виконанні даних умов повний приріст Δz визначається через частинні похідні наступним чином

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \quad (4.2)$$

де α_1 і α_2 – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$. У цьому випадку функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці $M(x, y)$. Сума перших двох доданків правої частини формули (4.2), яка є

головною частиною приросту, називається *повним диференціалом* і позначається символом dz . Таким чином

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y. \quad (4.3)$$

Для незалежних змінних $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ (диференціал дорівнює приросту). Отже, формулу (4.3) можна переписати у вигляді

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy. \quad (4.4)$$

Перший доданок правої частини формули (4.4) (або (4.3)) називається *частинним диференціалом* по змінній x , а другий – по змінній y . Як бачимо, повний диференціал дорівнює сумі частинних диференціалів.

Подібно до попереднього визначається диференціал функції трьох і більше змінних. Для функції $u = f(x, y, z)$ можемо записати

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (4.5)$$

Приклад 1. Знайти повний диференціал функцій:

$$\text{а) } z = x^2 + y^x, \quad \text{б) } z = u^2 v + w^3 e^{uv}.$$

$$\text{Розв'язання. а) } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1};$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + y^x \ln y) dx + xy^{x-1} dy;$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial u} = 2uv + vw^3 e^{uv}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^2 + uw^3 e^{uv}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = 3w^2 e^{uv};$$

$$dz = (2uv + vw^3 e^{uv}) du + (u^2 + uw^3 e^{uv}) dv + 3w^2 e^{uv} dw.$$

Відповідно до формули (4.2) для малих значень Δx та Δy має місце наближена рівність $\Delta z \approx dz$. Підставивши в останнє співвідношення замість Δz і dz відповідні вирази, одержимо формулу

для наближеного обчислення:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \quad (4.6)$$

Приклад 2. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції z за вказаних значень аргументів x та y , якщо

$$z = \sqrt[3]{x^3 + y^4 + 10}; \quad x = 1,09; \quad y = 1,973.$$

Розв'язання. Застосовуємо формулу (4.6):

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4 + 10}; \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad \Delta x = 0,09, \quad \Delta y = -0,027;$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^4 + 10)^2}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{4y^3}{3\sqrt[3]{(x^3 + y^4 + 10)^2}};$$

$$f(1,2) = \sqrt[3]{1 + 16 + 10} = 3, \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = \frac{1}{9}, \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = \frac{32}{27}.$$

$$\text{Отже, } \sqrt[3]{1,09^3 + 1,973^4 + 10} \approx 3 + \frac{1}{9} \cdot 0,09 - \frac{32}{27} \cdot 0,027 = 2,978.$$

§ 1.5. Похідна складної функції. Похідна функції заданої неявно

Розглянемо функцію $z = f(u, v)$. Нехай u і v – функції незалежних змінних x та y , тобто $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тоді функція z є складною функцією від аргументів x та y (u, v – проміжні змінні).

Частинні похідні функції z можна знайти за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5.2)$$

Приклад 1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = e^{v^2 + u}$; $u = x^2 + y^3$,

$$v = \sin(xy).$$

Розв'язання. Використовуючи формули (5.1), (5.2), маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{v^2+u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2ve^{v^2+u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y \sin(xy), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \sin(xy);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{v^2+u}(x + vy \sin(xy)), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{v^2+u}(3y^2 + 2vx \sin(xy)).$$

Якщо функція однієї змінної задана у вигляді $z = f(x, u, v)$, де u і v також залежать від аргументу x ($u = u(x)$, $v = v(x)$), то її звичайна похідна визначається за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (5.3)$$

Приклад 2. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = x^3 + \frac{u^2}{v}$, $u = \sin x$, $v = \cos x$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (5.3), отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u^2}{v^2}, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad \frac{dv}{dx} = -\sin x;$$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + \frac{2u}{v} \cos x - \frac{u^2}{v^2} (-\sin x) = 3x^2 + \sin x \cdot (2 + \operatorname{tg}^2 x).$$

Розглянемо функцію однієї змінної y від x , яка задана неявно, тобто рівністю $F(x, y) = 0$. Якщо в деякій області функція двох змінних $F(x, y)$ диференційована і $F'_y(x, y) \neq 0$, то звичайна похідна від функції y по аргументу x в цій області визначається за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (5.4)$$

Приклад 3. Функція y від x задана рівністю $y^3x + \sin \frac{x}{y} = 0$.

Знайте похідну $\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Так як функція задана неявно, то застосовуємо формулу (5.4). Можемо записати:

$$F(x, y) = y^3x + \sin \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = y^3 + \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2x - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3 + \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{3y^2x - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}} = -\frac{y^5 + y \cos \frac{x}{y}}{x \cos \frac{x}{y} - 3y^4x}.$$

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, яка задана неявно, тобто рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Якщо в деякій області функція трьох змінних $F(x, y, z)$ диференційована і $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ в цій області знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \quad (5.5)$$

Приклад 4. Функцію двох змінних $z = f(x, y)$ задано рівністю $x^2 + \sin(y^2 + z^3) + e^{4z} = 0$. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (5.5), знайдемо:

$$F(x, y, z) = x^2 + \sin(y^2 + z^3) + e^{4z}, \quad F'_x(x, y, z) = 2x;$$

$$F'_y(x, y, z) = 2y \cos(y^2 + z^3), \quad F'_z(x, y, z) = 3z^2 \cos(y^2 + z^3) + 4e^{4z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{3z^2 \cos(y^2 + z^3) + 4e^{4z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y \cos(y^2 + z^3)}{3z^2 \cos(y^2 + z^3) + 4e^{4z}}.$$

§ 1.6. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

Дотичною площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, яка містить у собі всі дотичні до кривих, що проведені на поверхні через точку M_0 . *Нормаллю* до поверхні називається пряма, яка проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної площини.

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ мають вигляд ((6.1) – дотична площина, (6.2) – нормаль):

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (6.1)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (6.2)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то вказані рівняння записуються в наступній формі ((6.3) – дотична площина, (6.4) – нормаль):

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (6.4)$$

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ в точці $M(1; 2)$.

Розв'язання. Застосовуємо формули (6.1) і (6.2):

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2; \quad z_0 = f(1; 2) = \ln(1^2 + 2^2 + 1) = \ln 6;$$

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad f'_x(1; 2) = \frac{1}{3}; \quad f'_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad f'_y(1; 2) = \frac{2}{3};$$

$$z - \ln 6 = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 2); \quad \frac{z - \ln 6}{-1} = \frac{3(x - 1)}{1} = \frac{3(y - 2)}{2}.$$

§ 1.7. Похідна за напрямом. Градієнт

Розглянемо функцію трьох змінних $u = f(x, y, z)$. Нехай точки $M(x, y, z)$ і $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ належать області визначення цієї функції. Позначимо через Δl довжину вектора $\overline{MM'} = \vec{l}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Відомо, що $\Delta l = |\vec{l}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Величина

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

є приростом функції, якого вона зазнає, переходячи від точки M до

M' , а відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ є величиною приросту, що приходить на

одиницю довжини відстані між точками M і M' (середня швидкість зміни функції при такому переході).

Границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$ (якщо вона існує) називається *похідною функції $u = f(x, y, z)$ в точці M за напрямом вектора $\vec{l}$* і позначається символом $\frac{\partial u}{\partial l}$. Отже

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}. \quad (7.1)$$

Дана похідна характеризує швидкість зміни функції u в напрямі вектора $\vec{l}$. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ диференційована в точці M , то одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (7.2)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $u = x^2 + 2y^2 - xyz$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ у точці $A(1;1;1)$.

Розв'язання. У відповідності з формулою (7.2) можемо записати

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_A = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A \cos \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_A \cos \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_A \cos \gamma.$$

Знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - yz, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y - xz,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_A = 3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -xy, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_A = -1.$$

Нагадаємо, що напрямні косинуси вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ визначаються

за формулами: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$. Знаходимо

$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}$. Можемо записати

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_A = 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + (-1) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}.$$

Одержане значення $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, що означає спадання функції в напрямку вектора $\vec{l}$.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці A називають вектор $\text{grad } u$, координатами якого є значення частинних похідних цієї функції в даній точці:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (7.3)$$

Позначимо через $\vec{l}_0$ одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\vec{l}$. Як відомо, координатами цього вектора будуть напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, тобто

$$\vec{l}_0 = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad (7.4)$$

На основі формул (7.2), (7.3), (7.4) отримуємо зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \vec{l}_0) = |\text{grad } u| \cos \varphi, \quad (7.5)$$

де φ – кут між векторами $\vec{l}$ і $\text{grad } u$.

Зі співвідношень (7.5) випливає, що:

1) похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ дорівнює проекції вектора $\text{grad } u$ на напрям вектора $\vec{l}$;

2) якщо напрям вектора $\vec{l}$ співпадає з напрямом вектора $\text{grad } u$ (у цьому випадку $\varphi = 0$), то похідна за напрямом приймає найбільше значення:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2};$$

3) якщо вектор $\vec{l}$ перпендикулярний до вектора $\text{grad } u$, то похідна за напрямом дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайти напрям і швидкість найшвидшого зростання функції $u = x^2 + 2y^2 - xyz$ в точці $A(1;1;1)$.

Розв'язання. Напрямок найшвидшого зростання визначається напрямом вектора $\text{grad } u$, а швидкість зростання (у цьому напрямі) – його модулем. Тому знайдемо градієнт даної функції в точці A та його модуль:

$$\text{grad } u = (2x - yz)\vec{i} + (4y - xz)\vec{j} + (-xy)\vec{k};$$

$$(\text{grad } u)_A = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}; \quad |(\text{grad } u)_A| = \sqrt{11}.$$

Отже, дана функція максимально зростає в напрямі вектора $\vec{l} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; швидкість зростання при цьому дорівнює $\sqrt{11}$.

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$, аналогічно попередньому:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta; \quad \text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}. \quad (7.7)$$

§ 1.8. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ в деякій області D має частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$. Вказані похідні в загальному випадку також є функціями двох змінних і можна ставити питання про існування їхніх частинних похідних. Частинні похідні від $f'_x(x, y)$ і

$f'_y(x, y)$ (якщо вони існують) називаються *частинними похідними другого порядку* і визначаються наступним чином:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

Дві останні похідні називаються *змішаними частинними похідними другого порядку*.

Приклад 1. Для функції $z = \arctg \frac{x}{y}$ знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Розв'язання.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Аналогічно попередньому визначаються частинні похідні вищих порядків для функцій трьох і більше змінних.

Приклад 2. Задана функція $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Довести, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Розв'язання. Знаходимо потрібні похідні і підставляємо в задану рівність:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right)'_x = -x \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-x \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right)'_x = - \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right)'_y = -y \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(-y \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right)'_y = - \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right)'_z = -z \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(-z \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right)'_z = - \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= - \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{5}{2}} - \\ &- \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{5}{2}} - \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \\ &+ 3z^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-\frac{5}{2}} = - \frac{3}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^3}} + \frac{3 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^5}} = \\ &= - \frac{3}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^3}} + \frac{3}{\sqrt{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^3}} = 0. \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

Якщо змішані частинні похідні неперервні в деякій області, то в цій області вони рівні між собою, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (8.1)$$

Приклад 3. Знайти змішані частинні похідні функції $z = x^4 y^2 + 4x^3 - y^2$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 y^2 + 12x^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8x^3 y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^4 y - 2y$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8x^3 y. \text{ Як бачимо, } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Якщо в деякому околі точки $M(x, y)$ для функції $z = f(x, y)$ існують обидві частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, а у самій точці M вказані похідні неперервні, то, як відомо, у цій точці визначений повний диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

В загальному випадку dz є функцією x та y (величини dx і dy вважаємо сталими). Диференціалом другого порядку (якщо функція dz диференційована) в точці $M(x, y)$ називається диференціал від диференціалу dz . Можемо записати

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Таким чином

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (8.2)$$

Для диференціала n -го порядку має місце наступна символічна формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z \quad (8.3)$$

яка формально розкривається за біноміальним законом Ньютона

Приклад 4. Задана функція $z = \frac{x^2}{y}$. Знайти d^2z .

Розв'язання. На основі формули (8.2) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3};$$

$$d^2z = \frac{2}{y} dx^2 - \frac{4x}{y^2} dx dy + \frac{2x^2}{y^3} dy^2.$$

§ 1.9. Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення в заданій області

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції $z = f(x, y)$, якщо знайдеться такий окіл цієї точки, що для всіх (x, y) із цього околу виконується нерівність $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$). Точки локального мінімуму або максимуму називають також точками *локального екстремуму*.

Наведемо *необхідні умови екстремуму*. Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ диференційована і досягає локального екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці

дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (9.1)$$

Точки, в яких виконуються умови (9.1), називаються *стаціонарними*. Отже, якщо функція може досягати в якійсь точці свого екстремального значення, то така точка – стаціонарна. Іншими словами, точки локального екстремуму функції слід шукати серед її стаціонарних точок.

Проте не всі стаціонарні точки є точками екстремуму. Для цього повинні бути виконані *достатні умови екстремуму*. Наведемо вказані умови. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Припустимо, що в самій точці M_0 і деякому її околі вказана функція має неперервні частинні похідні другого порядку. Складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \quad (9.2)$$

Тоді, якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція має екстремум. А саме, максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (або $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$) та мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (або $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$). Якщо ж $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремум відсутній.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ -3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 + 1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Маємо дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$ і $M_2(-1;1)$. Обчислюємо другі похідні:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -3, \quad f''_{yy}(x, y) = -6y.$$

Перевіряємо виконання достатніх умов у стаціонарних точках. В точці $M_1(0;0)$ маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Так як $\Delta < 0$, то дана точка не є точкою екстремуму. В точці $M_2(-1;1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0.$$

Так як $\Delta > 0$ і $f''_{xx}(-1;1) = -6 < 0$, то дана точка є точкою локального максимуму; $f(-1;1) = 1$.

Нагадаємо, що функція однієї змінної $y = f_1(x)$, яка диференційована на відрізку $[a, b]$, приймає найбільше та найменше значення на цьому відрізку або в стаціонарних точках (стаціонарними точками є розв'язки рівняння $f'_1(x) = 0$), що належать відрізку $[a, b]$, або на його кінцях.

Розглянемо тепер задачу про обчислення найбільшого та найменшого значень функції $z = f(x, y)$ в заданій області D . Нехай вказана функція диференційована в області D , а сама область D замкнена і обмежена. Тоді найбільше та найменше значення досягаються функцією або в стаціонарних точках, що належать області D , або на межі даної області. Нехай область D обмежена лініями, рівняння яких представлені у формі $y = \varphi(x)$ ($a \leq x \leq b$) або $x = \psi(y)$ ($c \leq y \leq d$). Наведемо далі схему розв'язування поставленої задачі.

1. Знаходимо всі стаціонарні точки функції, що лежать в області D , і

визначаємо її значення в цих точках.

2. Досліджуємо функцію на межі області. На лінії $y = \varphi(x)$ ($a \leq x \leq b$) функція z приймає вигляд $z = f(x, \varphi(x)) = f_1(x)$. Розв'язавши рівняння $f'_1(x) = 0$, знаходимо стаціонарні точки функції однієї змінної $f_1(x)$. Обчислюємо значення вказаної функції на кінцях відрізка $[a, b]$ і в стаціонарних точках, що йому належать. На лінії $x = \psi(y)$ ($c \leq y \leq d$) отримаємо функцію однієї змінної $z = f(\psi(y), y) = f_2(y)$. Досліджуємо її на відрізку $[c, d]$ аналогічно попередньому. Виконуємо вказані дії по всій межі області D .

3. Вибираємо з одержаних значень функції найбільше та найменше.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 - y^3 - 3xy$ в області D , що обмежена лініями $y = x + 3$, $x = 0$, $y = 0$.

Розв'язання. Побудуємо область D у системі координат Oxy (рис. 2). В попередньому прикладі були визначені стаціонарні точки даної функції, а саме $M_1(-1;1)$ і $M_2(0;0)$.

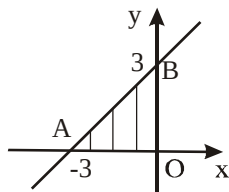


Рис. 2

Обчислюємо значення функції в цих точках

(обидві точки належать області D): $z_1 = f(-1;1) = 1$, $z_2 = f(0,0) = 0$.

Межа області D складається із трьох відрізків AO , OB і AB (див. рис.2). Досліджуємо дану функцію на кожному з них. На відрізку AO ($y = 0$, $-3 \leq x \leq 0$) функція z приймає вигляд $z = f_1(x) = x^3$. Досліджуємо, далі, одержану функцію однієї змінної на відрізку $[-3;0]$. Знаходимо стаціонарні точки:

$$f'_1(x) = 3x^2, \quad 3x^2 = 0, \quad x = 0.$$

Так як значення функції z в точці $(0;0)$ вже знайдено, то обчислюємо її значення лише в точці $A(-3;0)$: $z_3 = f_1(-3) = f(-3;0) = -27$.

На відрітку ОВ:

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq 3; \quad z = f_2(y) = -y^3; \quad f'_2(y) = -3y^2, \quad -3y^2 = 0, \quad y = 0;$$

$$z_4 = f_2(3) = f(0;3) = -27.$$

На відрітку АВ:

$$\begin{aligned} y = x + 3, \quad -3 \leq x \leq 0; \quad z = f_3(x) &= x^3 - (x+3)^3 - 3x(x+3) = \\ &= -12x^2 - 36x - 27, \quad f'_3(x) = -24x - 36, \quad -24x - 36 = 0, \quad x = -1,5; \\ z_5 = f_3(-1,5) &= f(-1,5;1,5) = 0. \end{aligned}$$

Отже, $z_{\text{найб}} = 1$ при $x = -1, y = 1$; $z_{\text{найм}} = -27$ при $x = -3, y = 0$ й при $x = 0, y = 3$.

§ 1.10. Метод найменших квадратів

В багатьох експериментальних дослідженнях для кожного значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ змінної величини x визначаються відповідні значення $y_1, y_2, \dots, y_n$ змінної величини y . Іншими словами, експериментально визначається функція y від аргументу x , причому задається вказана функція табличним способом. Проте, більш зручною для подальшого аналізу є аналітична форма функціональної залежності, тобто виникає потреба представлення знайденої функції у вигляді співвідношення $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – аналітичний вираз. Така

задача може бути розв'язана за допомогою *методу найменших квадратів*.

Конкретна форма виразу $\varphi(x)$ визначається характером отриманої експериментальної залежності та, можливо, теоретичними міркуваннями. У відповідності з методом найменших квадратів функція y задається у вигляді $y = \varphi(x, a, b, \dots, c)$, де $a, b, \dots, c$ – невідомі параметри. Складаємо суму

$$S(a,b,...,c) = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i, a, b, ..., c) - y_i)^2. \quad (10.1)$$

Сума (10.1) характеризує міру відхилення розрахункових значень величини y від експериментальних. Невідомі параметри $a, b, \dots, c$ необхідно визначити таким чином, щоб вказана сума приймала найменше значення, тобто задача зводиться до знаходження мінімуму функції декількох змінних $S(a, b, \dots, c)$. Записуємо необхідні умови екстремуму цієї функції (прирівнюємо до нуля частинні похідні по змінним $a, b, \dots, c$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial a} = 0, \\ \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial b} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i, a, b, \dots, c) - y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, \dots, c)}{\partial c} = 0. \end{array} \right. \quad (10.2)$$

Розв'язком системи (10.2) є значення параметрів $a, b, \dots, c$, при яких функція $S(a, b, \dots, c)$ може приймати мінімальне значення.

У випадку лінійної залежності $y = ax + b$ маємо:

$$\varphi(x_i, a, b) = ax_i + b, \quad \frac{\partial \varphi(x_i, a, b)}{\partial a} = x_i, \quad \frac{\partial \varphi(x_i, a, b)}{\partial b} = 1.$$

Система (10.2) приймає вигляд

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (10.3)$$

У випадку квадратичної залежності $y = ax^2 + bx + c$ одержимо:

$$\varphi(x_i, a, b, c) = ax_i^2 + bx_i + c, \quad \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c)}{\partial a} = x_i^2;$$

$$\frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c)}{\partial b} = x_i, \quad \frac{\partial \varphi(x_i, a, b, c)}{\partial c} = 1.$$

Для визначення параметрів a, b і c отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (10.4)$$

Приклад 1. В таблиці

x	1	3	5	7	10
y	6	5	3	2	1

наведені результати експериментальних досліджень з метою встановлення залежності між величинами x і y . За допомогою методу найменших квадратів визначити аналітичну залежність $y = ax + b$. Зобразити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму в декартовій прямокутній системі координат Oxy .

Розв'язання. Визначаємо числові коефіцієнти системи (10.3):

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2 = 184, \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 10 = 26,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 60, \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 6 + 5 + 3 + 2 + 1 = 17.$$

Складаємо систему (10.3) і розв'язуємо її за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 184a + 26b = 60, \\ 26a + 5b = 17, \end{cases} \quad \begin{cases} 92a + 13b = 30, \\ 26a + 5b = 17; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 92 & 13 \\ 26 & 5 \end{vmatrix} = 122, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 13 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} = -71, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 92 & 30 \\ 26 & 17 \end{vmatrix} = 784;$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{71}{122} \approx -0,58; \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{784}{122} \approx 6,43.$$

Отже, $y = -0,58x + 6,43$. Будемо пряму та зображаємо задані точки.

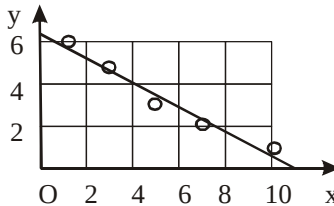


Рис. 3

II. Диференціальні рівняння

§ 2.1. Поняття диференціального рівняння. Загальні означення

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке пов'язує між собою незалежну змінну x , шукану функцію y та її похідні різних порядків. Якщо шукана функція залежить від декількох змінних, то диференціальне рівняння містить вже не звичайні, а частинні похідні і називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. Далі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння (слово „звичайні” у їхній назві будемо опускати).

Порядком диференціального рівняння називається порядок його старшої похідної. Таким чином, у загальному випадку диференціальне рівняння n -го порядку можна представити у вигляді:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Відмітимо, що у частинних випадках деякі з величин $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ можуть явно не входити у диференціальне рівняння n -го порядку. *Розв'язком* диференціального рівняння називається будь-яка функція $y = \varphi(x)$, яка після підстановки у дане рівняння перетворює його у тотожність. Очевидно, що *розв'язування* (або *інтегрування*) диференціального рівняння зводиться до знаходження його розв'язку.

Приклад 1. Показати, що функція $y = x^3 - \sin 2x + 3x$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' + y - x^3 - 9x - 3\sin 2x = 0$.

Розв'язання. Знаходимо другу похідну y'' і підставляємо відповідні вирази у задане рівняння:

$$y' = 3x^2 - 2\cos 2x + 3, \quad y'' = 6x + 4\sin 2x;$$

$$6x + 4\sin 2x + x^3 - \sin 2x + 3x - x^3 - 9x - 3\sin 2x = 0, 0 = 0.$$

Задати *початкові умови* для диференціального рівняння (1.1) означає задати значення функції та її похідних при певному значенні незалежної змінної, а саме:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.2)$$

де $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – числа.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.1) називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ і яка задовольняє наступним двом умовам: а) вона є розв'язком при будь-яких значеннях указаних довільних сталих; б) при будь-яких початкових умовах (1.2) довільні сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$ можуть бути визначені таким чином, що вказані початкові умови будуть задовольнятися.

Якщо у загальному розв'язку всім довільним сталим надати певні числові значення, то отримаємо так званий *частинний розв'язок* диференціального рівняння. *Розв'язати задачу Коші* означає, що необхідно знайти частинний розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє початковим умовам (1.2). Якщо загальний розв'язок знайдено неявно, тобто у вигляді $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, то кажуть, що знайдено *загальний інтеграл* диференціального рівняння (1.1). *Частинний інтеграл* отримується із загального за допомогою надання довільним сталим певних числових значень.

§ 2.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Зробимо спочатку одне зауваження. У теорії диференціальних рівнянь похідна y' часто позначається через $\frac{dy}{dx}$. Указане позначення розглядається як відношення двох диференціалів, які можуть відокремлюватися один від одного.

У загальному випадку диференціальне рівняння першого порядку та його початкова умова мають відповідно вигляд:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.1)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від однієї довільної сталої C . Розглянемо далі деякі основні типи диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальним *рівнянням із відокремленими змінними* називається наступне рівняння:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \quad (2.2)$$

Указане рівняння розв'язується за допомогою безпосереднього інтегрування.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } (x^2 + e^{3x})dx + (2y + \cos 5y)dy = 0; \quad \text{б) } \sqrt{y}y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

$$\text{Розв'язання. а) } \int (x^2 + e^{3x})dx + \int (2y + \cos 5y)dy = 0,$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}e^{3x} + y^2 + \frac{1}{5}\sin 5y + C = 0.$$

б) Замінюємо y' на $\frac{dy}{dx}$, домножуємо отримане рівняння на dx й

інтегруємо: $\sqrt{y} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, $\sqrt{y} dy + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$,

$$\int \sqrt{y} dy + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + \arcsin x + C = 0.$$

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \quad (2.3)$$

Як бачимо, у лівій частині цього рівняння кожен із множників залежить тільки від однієї змінної. Розділивши його на добуток $M_2(y)N_1(x)$, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } 2x(1+y^2)dx + (3+x^2)dy = 0; \quad \text{б) } (y-xy^2)y' = 5x + xy^2.$$

Розв'язання. а) Ділимо рівняння на добуток $(1+y^2)(3+x^2)$ та

$$\text{інтегруємо: } \frac{2xdx}{3+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0, \quad \int \frac{d(3+x^2)}{(3+x^2)} + \int \frac{dy}{1+y^2} = 0,$$

$$\ln |3+x^2| + \arctg y + C = 0.$$

б) Робимо спочатку прості, очевидні перетворення:

$$y(1-x^2) \frac{dy}{dx} = x(5+y^2), \quad y(1-x^2)dy = x(5+y^2)dx.$$

Ділимо останнє рівняння на добуток $(1-x^2)(5+y^2)$ і інтегруємо:

$$\int \frac{ydy}{5+y^2} = \int \frac{xdx}{1-x^2}, \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(5+y^2)}{5+y^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2},$$

$$\frac{1}{2} \ln |5 + y^2| + \frac{1}{2} \ln |1 - x^2| = \frac{1}{2} \ln |C|, \quad \ln |(5 + y^2)(1 - x^2)| = \ln |C|,$$

$$(5 + y^2)(1 - x^2) = C.$$

Звертаємо увагу на те, що з метою спрощення кінцевого результату довільна стала представлена за допомогою логарифма (таке допускається).

Рівняння $y' = f(x, y)$ будемо називати *однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку, якщо для будь-якого відмінного від нуля λ виконується рівність $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Дане рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y = ux$, де u – нова шукана функція.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x - y}$.

Розв'язання. Покажемо, що задане рівняння є однорідним:

$$f(x, y) = \frac{y}{x - y}; \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{\lambda y}{\lambda(x - y)} = \frac{y}{x - y} = f(x, y).$$

Зробимо заміну $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{ux}{x - ux}, \quad u'x = \frac{u}{1 - u} - u, \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1 - u}, \quad \int \frac{1 - u}{u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int (u^{-2} - \frac{1}{u}) du = \int \frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u} - \ln |u| = \ln |x| + C,$$

$$\frac{x}{y} + \ln \left| \frac{y}{x} \right| + \ln |x| + C = 0, \quad x + y \ln |y| + Cy = 0.$$

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке лінійне відносно шуканої функції y та її похідної y' (величини y і y' входять тільки у першому степені і між собою не перемножуються). Указане рівняння завжди можна

представити у стандартній формі

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (2.4)$$

Розв'язок рівняння (2.4) будемо шукати у вигляді $y = uv$, де u, v – нові шукані функції. Знаходимо похідну: $y' = u'v + uv'$. Підставимо y і y' в рівняння (2.4):

$$\begin{aligned} u'v + uv' + P(x)uv &= Q(x), \\ v(u' + P(x)u) + uv' &= Q(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Прирівняємо до нуля вираз у дужках у формулі (2.5) і знайдемо функцію u :

$$\begin{aligned} u' + P(x)u &= 0, \quad \frac{du}{dx} = -P(x)u, \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx, \\ \ln |u| &= -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}. \end{aligned}$$

Звертаємо увагу на те, що при інтегруванні довільна стала береться рівною нулю. Підставимо функцію u в рівняння (2.5) і знайдемо функцію v :

$$e^{-\int P(x)dx} v' = Q(x), \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx, \quad v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Враховуючи, що $y = uv$, отримаємо

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right). \quad (2.6)$$

Формулу (2.6) можна використовувати для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y' - 2xy = e^{x^2} \cos x$.

Розв'язання. Перший спосіб. Здійснюємо підстановку $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ і розв'язуємо рівняння за наведеною вище схемою:

$$u'v + uv' - 2xuv = e^{x^2} \cos x, \quad v(u' - 2xu) + uv' = e^{x^2} \cos x;$$

$$u' - 2xu = 0, \quad \int \frac{du}{u} = 2 \int x dx, \quad \ln |u| = x^2, \quad u = e^{x^2};$$

$$e^{x^2} v' = e^{x^2} \cos x, \quad v' = \cos x, \quad \int dv = \int \cos x dx, \quad v = \sin x + C;$$

$$y = e^{x^2} (\sin x + C).$$

Другий спосіб. Розв'яжемо рівняння за допомогою формули (2.6).

У нашому випадку $P(x) = -2x$, $Q(x) = e^{x^2} \cos x$. Знайдемо потрібні інтеграли (у першому інтегралі довільна стала береться рівною нулю):

$$\int P(x) dx = \int (-2x) dx = -x^2;$$

$$\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int e^{x^2} \cdot \cos x \cdot e^{-x^2} dx = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Підставимо знайдені інтеграли у формулу (2.6):

$$y = e^{x^2} (\sin x + C).$$

Рівнянням Бернуллі називається наступне рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m; \quad m \neq 0, \quad m \neq 1. \quad (2.7)$$

Аналогічно попередньому, воно розв'язується за допомогою підстановки $y = uv$.

Розглянемо рівняння виду

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \quad (2.8)$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – числові коефіцієнти. Очевидно, що якщо $c_1 = c_2 = 0$, то рівняння (2.8) є однорідним. У зв'язку зі сказаним будемо вважати, що хоча б один із коефіцієнтів c_1, c_2 відмінний від нуля. Розглянемо два можливі випадки вказаного рівняння.

1) Коефіцієнти при x і y пропорційні, тобто виконується умова $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. У цьому випадку рівняння (2.8) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $z = a_1x + b_1y$ (або $z = a_2x + b_2y$), де z – нова функція. Продиференціювавши останню рівність, знайдемо $y' : z' = a_1 + b_1y'$, $y' = (z' - a_1)/b_1$.

2) Коефіцієнти при x і y не пропорційні, тобто виконується умова $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. У цьому випадку рівняння (2.8) зводиться до *однорідного* за допомогою підстановки $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, де x_1 – нова незалежна змінна, y_1 – нова функція; h, k – числа, які є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Відмітимо, що при вказаній підстановці $dx = dx_1$, $dy = dy_1$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\text{а) } y' = \frac{x - y + 3}{3x - 3y + 5}; \quad \text{б) } (y - 1)dx = (x - y + 3)dy.$$

Розв'язання. а) Так як коефіцієнти при x і y пропорційні ($\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$), то розв'язок знайдемо за допомогою підстановки $z = x - y$.

З останньої рівності отримуємо: $z' = 1 - y'$, $y' = 1 - z'$. Підставляємо:

$$1 - z' = \frac{z - 3}{3z + 5}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z - 3}{3z + 5}, \quad \frac{3z + 5}{z + 4} dz = 2dx,$$

$$\int \left(3 - \frac{7}{z + 4}\right) dz = \int 2dx, \quad 3z - 7 \ln|z + 4| = 2x + C,$$

$$3(x-y) - 7 \ln |x-y+4| = 2x + C.$$

б) Перепишемо задане рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x-y+3}$.

Коефіцієнти при x і y не пропорційні ($\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$). Складемо систему (2.9)

і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} k-1=0, \\ h-k+3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} k=1, \\ h=-2. \end{cases}$$

Зробимо заміну $x = x_1 - 2$, $y = y_1 + 1$, $dx = dx_1$, $dy = dy_1$:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1+1-1}{x_1-2-(y_1+1)+3}, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1}{x_1-y_1}.$$

Отримане однорідне рівняння інтегрується за допомогою підстановки $y_1 = ux_1$ (див. прикл. 3).

§ 2.3. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку

Розглянемо рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x). \quad (3.1)$$

Враховуючи, що похідна n -го порядку дорівнює похідній від похідної $n-1$ -го порядку, можемо записати

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x), \quad \int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx, \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Одержане диференціальне рівняння $n-1$ -го порядку відноситься до типу рівняння (3.1) і до нього можна застосувати вказані вище дії. Поступово знижуючи порядок рівняння, визначаємо шукану функцію y .

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y''' = 6x + \cos 2x$.

Розв'язання. Поступово знижуємо порядок заданого рівняння і визначаємо функцію y :

$$y'' = \int (6x + \cos 2x) dx = 3x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x + C_1;$$

$$y' = \int (3x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x + C_1) dx = x^3 - \frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int (x^3 - \frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2) dx = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно шукану функцію y , тобто рівняння виду

$$F(x, y', y'') = 0. \quad (3.2)$$

Указане рівняння зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки $y' = p$, $y'' = p'$, де p – функція від x . Після здійснення вказаної заміни отримаємо рівняння $F(x, p, p') = 0$.

Проінтегрувавши його, визначаємо функцію $p = \varphi_1(x, C_1)$.

Враховуючи, що $p = y'$, маємо $y' = \varphi_1(x, C_1)$. Розв'язуємо останнє рівняння і знаходимо функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x^2 + x; \quad y(1) = 0, y'(1) = 1$$

Розв'язання. Так як задане рівняння не містить явно y , то робимо підстановку $y' = p$, $y'' = p'$, де p – функція від x . Одержуємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку $p' - \frac{1}{x} p = x^2 + x$. Його розв'язок шукаємо у вигляді $p = uv$, ($p' = u'v + uv'$):

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2 + x, \quad v(u' - \frac{1}{x}u) + uv' = x^2 + x;$$

$$u' - \frac{1}{x}u = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \quad u = x;$$

$$xv' = x^2 + x, \quad v' = x + 1, \quad v = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1;$$

$$p = x(\frac{1}{2}x^2 + x + C_1), \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x.$$

Використовуючи початкові умови, визначаємо значення довільної сталої C_1 і інтегруємо одержане диференціальне рівняння:

$$1 = \frac{1}{2} + 1 + C_1, \quad C_1 = -\frac{1}{2}; \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x;$$

$$y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + C_2.$$

Визначаємо значення довільної сталої і записуємо кінцеву відповідь:

$$0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + C_2, \quad C_2 = -\frac{5}{24}, \quad y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{24}.$$

Розглянемо далі диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежну змінну x , тобто рівняння виду

$$F(y, y', y'') = 0. \quad (3.3)$$

Зробимо підстановку $y' = p$, де p – функція від y . Друга похідна у

даному випадку визначається рівністю $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ або $y'' = p \frac{dp}{dy}$.

Отже, рівняння (3.3) перетворюється до наступного рівняння першого

порядку $F(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$. Відмітимо, що у цьому рівнянні величина y

виступає як незалежна змінна, а величина p – як шукана функція.

Розв'язавши вказане рівняння, знайдемо функцію $p = \varphi_1(y, C_1)$ або

$y' = \varphi_1(y, C_1)$. Інтегруємо отримане рівняння першого порядку і визначаємо функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' = (y')^2 \operatorname{tg} y$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння типу (3.3). Робимо заміну $y' = p$ (p – функція від y ; $y'' = p \frac{dp}{dy}$) і інтегруємо:

$$p \frac{dp}{dy} = p^2 \operatorname{tg} y, \quad p \left(\frac{dp}{dy} - p \operatorname{tg} y \right) = 0;$$

$$1) \quad p = 0, \quad y' = 0, \quad y = C, \quad C \in \mathbb{R};$$

$$2) \quad \frac{dp}{dy} - p \operatorname{tg} y = 0, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \operatorname{tg} y dy, \quad \ln |p| = -\ln |\cos y| + \ln |C_1|;$$

$$\ln |p| = \ln \left| \frac{C_1}{\cos y} \right|, \quad p = \frac{C_1}{\cos y}, \quad y' = \frac{C_1}{\cos y};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos y}, \quad \int \cos y dy = \int C_1 dx, \quad \sin y = C_1 x + C_2.$$

§ 2.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття. Метод варіації довільних сталих

Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідних y' і y'' , тобто це рівняння виду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (4.1)$$

де a_1, a_2 – функції від x або числові коефіцієнти, $f(x)$ – задана функція. Якщо права частина рівняння (4.1) тотожно дорівнює нулю, то отримаємо

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (4.2)$$

Рівняння (4.1) називається *неоднорідним лінійним рівнянням другого порядку*, а рівняння (4.2) – *однорідним*.

Нехай $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – частинні розв'язки однорідного рівняння (4.2). Якщо існують числові коефіцієнти α і β , які не рівні одночасно нулю і для яких виконується тотожна рівність $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються *лінійно залежними*. Очевидно, що відношення таких розв'язків дорівнює сталому числу. Якщо ж тотожна рівність $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ виконується лише при $\alpha = 0$ і $\beta = 0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються *лінійно незалежними*. Сформульовані означення лінійної залежності і лінійної незалежності справедливі і для довільних функцій y_1 і y_2 .

Припустимо, тепер, що $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є частинними лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння (4.2). У цьому випадку *загальний розв'язок* вказаного рівняння представляється у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (4.3)$$

де C_1 , C_2 – довільні сталі. Отже, знаходження загального розв'язку рівняння (4.2) можна звести до знаходження двох лінійно незалежних частинних розв'язків цього рівняння.

Приклад 1. Показати, що функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{2x}$ є частинними лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. Записати загальний розв'язок вказаного рівняння.

Розв'язання. Підставляємо функції та відповідні похідні в задане рівняння (похідні необхідно попередньо знайти):

$$y_1' = e^x, y_1'' = e^x; e^x - 3e^x + 2e^x = 0, 0 = 0;$$

$$y_2' = 2e^{2x}, y_2'' = 4e^{2x}; 4e^{2x} - 6e^x + 2e^x = 0, 0 = 0.$$

Для з'ясування питання про лінійну незалежність розглянемо відношення заданих розв'язків: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$. Так як відношення не дорівнює сталому числу, то y_1 і y_2 лінійно незалежні. На основі формули (4.3) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) можна представити в наступній формі

$$y = \tilde{y} + y^*, \quad (4.4)$$

де y^* – будь-який *частинний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння, а $\tilde{y}$ – *загальний розв'язок* відповідного однорідного рівняння (рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$).

Нехай задане неоднорідне рівняння (4.1) і нехай функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ є частинними лінійно незалежними розв'язками відповідного однорідного рівняння. Маючи на увазі застосування формули (4.4), знаходимо спочатку складову $\tilde{y}$. Як уже відомо, загальний розв'язок однорідного рівняння визначається рівністю $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Частинний розв'язок y^* може бути знайдений за допомогою *метода варіації довільних сталих*.

Суть вказаного методу полягає у тому, що функція y^* шукається у тій же формі, що і функція $\tilde{y}$, але у останньому випадку величини C_1 і C_2 вважаються вже не довільними сталими, а невідомими

функціями. Таким чином, частинний розв'язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \quad (4.5)$$

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ визначаються за допомогою наступних формул

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (4.6)$$

Відмітимо, що система (4.6) є лінійною відносно невідомих $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, крім того, визначником її основної матриці є функція, яка не дорівнює тотожно нулю (система не вироджена і має єдиний розв'язок). Розв'язавши вказану систему (наприклад, за формулами Крамера), одержимо

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{\Delta}, \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{\Delta}, \quad (4.7)$$

де $\Delta = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$. Інтегруємо рівності (4.7) (довільні стали при інтегруванні покладаються рівними нулю) і визначаємо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$. Після цього можна записати частинний та загальний розв'язки заданого неоднорідного рівняння.

Приклад 2. Використовуючи результати попереднього прикладу, знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$.

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = \tilde{y} + y^*$. Розглядаємо однорідне рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. У попередньому прикладі було показано, що функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{2x}$ є частинними лінійно незалежними розв'язками даного однорідного рівняння і його загальний розв'язок має вигляд $\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Частинний розв'язок

неоднорідного рівняння шукаємо у формі (формула (4.5))
 $y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$. Враховуючи, що $y'_1 = e^x$, $y'_2 = 2e^{2x}$, складаємо систему (4.6) і розв'язуємо її (можна застосовувати формули (4.7)):

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x)e^{2x} = 0, & \begin{cases} C'_1(x) = -3, \\ C'_2(x) = 3e^{-x}. \end{cases} \\ C'_1(x)e^x + 2C'_2(x)e^{2x} = 3e^x, \end{cases}$$

Інтегруємо рівності останньої системи і визначаємо шукані функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ (нагадаємо, що довільні сталі при інтегруванні не пишуться):

$$C_1(x) = -\int 3dx = -3x, \quad C_2(x) = \int 3e^{-x}dx = -3e^{-x}.$$

Запишемо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} = -3xe^x - 3e^{-x}e^{2x} = -3e^x(x+1),$$

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} - 3e^x(x+1).$$

§ 2.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, а саме

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (5.1)$$

де p, q – числові коефіцієнти. Особливістю даного рівняння є те, що його розв'язок може бути знайдений без застосування операції інтегрування.

Частинні розв'язки рівняння (5.1) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, де k – числовий коефіцієнт. Підставивши вказаний розв'язок у задане рівняння і враховуючи, що $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, $e^{kx} \neq 0$, одержимо

$$k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + q e^{kx} = 0,$$

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (5.2)$$

Квадратне рівняння (5.2) відносно невідомої k називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (5.1). Відмітимо, що формально рівняння (5.2) отримується з рівняння (5.1) за допомогою заміни y'', y', y на $k^2, k, 1$ відповідно. Якщо k є розв'язком рівняння (5.2), то функція $y = e^{kx}$ є розв'язком рівняння (5.1).

Нагадаємо, що корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ визначаються формулами

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac. \quad (5.3)$$

Для рівняння (5.2) маємо

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = p^2 - 4q. \quad (5.4)$$

Розглянемо усі можливі випадки для розв'язків характеристичного рівняння.

1. Характеристичне рівняння має дійсні й різні корені k_1 і k_2 (дискримінант додатній). Функції $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ є частинними розв'язками диференціального рівняння (5.1). Так як

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}, \quad (k_1 \neq k_2),$$

то y_1 і y_2 лінійно незалежні. Отже, на основі формули (4.3) попереднього параграфа загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (5.5)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' - 10y = 0$.

Розв'язання. Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$k^2 + 3k - 10 = 0; D = 49; k_1 = -5, k_2 = 2.$$

Так як корені дійсні й різні, то загальний розв'язок визначається за допомогою формули (5.5), а саме $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$.

2. Характеристичне рівняння має дійсні і рівні корені $k_1 = k_2 = k$ (дискримінант дорівнює нулю). У цьому випадку частинними лінійно незалежними розв'язками рівняння (5.1) будуть функції $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x e^{kx}$ і для знаходження загального розв'язку одержимо наступну формулу

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x). \quad (5.6)$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Розв'язання. Складемо й розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 8k + 16 = 0; D = 0; k_1 = k_2 = 4.$$

Оскільки корені дійсні й рівні, то застосувавши формулу (5.6), одержимо $y = e^{4x} (C_1 + C_2 x)$.

3. Коренями характеристичного рівняння є комплексні числа $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (дискримінант від'ємний). Можна показати, що для такого диференціального рівняння частинними лінійно незалежними розв'язками будуть функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Отже, загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (5.7)$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 25 = 0; D = -64, \sqrt{D} = 8i; k_{1,2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i.$$

Так як корені комплексні, то на основі формули (5.7) маємо

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

§ 2.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається наступне рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (6.1)$$

де p, q – числові коефіцієнти; $f(x)$ – функція від x ($f(x)$ не дорівнює тотожно нулю). Загальний розв'язок рівняння (6.1) будемо шукати у вигляді

$$y = \tilde{y} + y^*, \quad (6.2)$$

де y^* – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння; $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а саме

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (6.3)$$

Спочатку за допомогою характеристичного рівняння інтегруємо диференціальне рівняння (6.3) і визначаємо функцію $\tilde{y}$ (див. попередній параграф), а потім знаходимо функцію y^* . Загальна форма останньої залежить від виду функції $f(x)$ та від коренів характеристичного рівняння. Розглянемо, далі, декілька частинних

випадків рівняння (6.1) (розглядаються більш конкретні випадки для функції $f(x)$, яка стоїть в правій частині) і вкажемо методи визначення відповідних частинних розв'язків y^* .

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x), \quad (6.4)$$

де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня відносно x . Частинний розв'язок рівняння (6.4) має вигляд

$$y^* = x^r Q_n(x), \quad (6.5)$$

де $Q_n(x)$ – повний многочлен n -го степеня, тобто

$$Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n; \quad (6.6)$$

r – кратність кореня $k = 0$ в характеристичному рівнянні; $A_0, A_1, \dots, A_n$

– числові коефіцієнти, які необхідно визначити. Відмітимо, $Q_n(x)$ і

$P_n(x)$ є многочленами одного степеня. З метою визначення коефіцієнтів $A_0, A_1, \dots, A_n$ підставляємо розв'язок (6.5) у рівняння (6.1).

Для цього попередньо знаходимо похідні $(y^*)'$, $(y^*)''$ і підставляємо

y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ замість y , y' , y'' відповідно. Многочлен лівої частини

отриманої рівності представляємо в стандартній формі (зводимо

подібні відносно однакових степенів x). Прирівнявши коефіцієнти при

однакових степенях x лівої і правої частин отримуємо систему

лінійних рівнянь відносно невідомих $A_0, A_1, \dots, A_n$. Розв'язуємо

систему і записуємо частинний розв'язок y^* .

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' = 6x^2 + 2x$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (6.4) і розв'язок шукаємо у

формі (6.2). Розглядаємо спочатку відповідне однорідне рівняння і визначаємо складову $\tilde{y}$:

$$y'' - 2y' = 0; k^2 - 2k = 0, k(k - 2) = 0; k_1 = 0, k_2 = 2;$$

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Частинний розв'язок y^* шукаємо за формулою (6.5). У нашому випадку $Q_n(x)$ – многочлен другого степеня (права частина заданого рівняння є многочленом другого степеня) і $r=1$ (число $k=0$ є однократним коренем характеристичного рівняння), отже $y^* = xQ_2(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$. Знаходимо похідні і підставляємо $(y^*)', (y^*)''$ в задане рівняння:

$$(y^*)' = 3A_0x^2 + 2A_1x + A_2, (y^*)'' = 6A_0x + 2A_1;$$

$$6A_0x + 2A_1 - 2(3A_0x^2 + 2A_1x + A_2) = 6x^2 + 2x;$$

$$-6A_0x^2 + (6A_0 - 4A_1)x + 2A_1 - 2A_2 = 6x^2 + 2x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 & -6A_0 = 6, \\ x & 6A_0 + 4A_1 = 2, \\ x^0 & 2A_1 - 2A_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_0 = -1, \\ A_1 = 2, \\ A_2 = 2. \end{cases}$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = x(-x^2 + 2x + 2); y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{2x} + x(-x^2 + 2x + 2).$$

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}, \quad (6.7)$$

де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня відносно x ; α – числовий

коефіцієнт. Частинний розв'язок y^* для рівняння (6.7) визначається за формулою

$$y^* = x^r Q_n(x) e^{\alpha x}, \quad (6.8)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен (6.6), коефіцієнти якого необхідно визначити; r – кратність кореня $k = \alpha$ в характеристичному рівнянні.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (6.7), причому $\alpha = 3$, $P_n(x) = 2$ (многочлен нульового степеня). Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0; k^2 + k - 6 = 0; k_1 = -3, k_2 = 2;$$

$$\tilde{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Частинний розв'язок y^* визначаємо за допомогою формули (6.8). Для даного рівняння $r = 0$ (число $\alpha = 3$ не є розв'язком характеристичного рівняння) і $Q_n(x) = Q_0(x)$ (многочлен нульового степеня). Отже, маємо

$$y^* = x^0 Q_0(x) e^{3x} = A e^{3x}.$$

Підставляємо функцію y^* в задане рівняння і визначаємо невідомий коефіцієнт A :

$$(y^*)' = 3Ae^{3x}, (y^*)'' = 9Ae^{3x}; 9Ae^{3x} + 3Ae^{3x} - 6Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

$$6Ae^{3x} = 2e^{3x}, 6A = 2, A = \frac{1}{3}.$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = \frac{1}{3} e^{3x}; y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} e^{3x}.$$

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (6.9)$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени; α , β – числові коефіцієнти. Частинний розв'язок y^* для рівняння (6.9) має вигляд

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x), \quad (6.10)$$

де $U_s(x)$, $V_s(x)$ – повні многочлени, степінь яких дорівнює більшому зі степенів многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$; r – кратність комплексних коренів $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ у характеристичному рівнянні. Аналогічно попередньому, коефіцієнти многочленів $U_s(x)$ і $V_s(x)$ необхідно визначати.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = 8x \sin 2x$.

Розв'язання. Знаходимо спочатку розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 4y = 0; k^2 + 4 = 0; k_{1,2} = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i;$$

$$\tilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Задане рівняння має форму рівняння (6.9), причому $P_n(x) = 0$ (многочлен нульового степеня), $Q_m(x) = 8x$ (многочлен першого степеня), $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$. Застосовуємо, далі, формулу (6.10). Для нашого прикладу $r = 1$ (числа $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ є однократними коренями характеристичного рівняння), $U_s(x)$ і $V_s(x)$ – многочлени першого степеня (права частина заданого рівняння містить многочлени нульового і першого степенів). Отже, маємо

$$y^* = x((A_0 x + A_1) \cos 2x + (B_0 x + B_1) \sin 2x).$$

Після диференціювання одержимо:

$$(y^*)'' = (-4A_0x^2 + (8B_0 - 4A_1)x + 2A_0 + 4B_1)\cos 2x + \\ + (-4B_0x^2 + (-8A_0 - 4B_1)x - 4A_1 + 2B_0)\sin 2x.$$

Підставивши y^* і $(y^*)''$ в задане рівняння, маємо

$$(8B_0x + 2A_0 + 4B_1)\cos 2x + (-8A_0x - 4A_1 + 2B_0)\sin 2x = 8x\sin 2x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при косинусах і синусах:

$$\begin{cases} \cos 2x & 8B_0x + 2A_0 + 4B_1 = 0, \\ \sin 2x & -8A_0x - 4A_1 + 2B_0 = 8x. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і визначаємо невідомі величини:

$$\begin{cases} x & 8B_0 = 0, \\ x^0 & 2A_0 + 4B_1 = 0, \\ x & -8A_0 = 8, \\ x^0 & -4A_1 + 2B_0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_0 = -1, \\ A_1 = 0, \\ B_0 = 0, \\ B_1 = 0,5. \end{cases}$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = x(-x \cos 2x + 0,5 \sin 2x) = -x^2 \cos 2x + 0,5x \sin 2x,$$

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - x^2 \cos 2x + 0,5x \sin 2x.$$

Інколи диференціальне рівняння (6.1) із більш складною правою частиною $f(x)$ можна звести до розглянутих вище за допомогою наступного твердження: якщо функції $y_1^* = y_1^*(x)$ і $y_2^* = y_2^*(x)$ є частинними розв'язками диференціальних рівнянь $y'' + py' + qy = f_1(x)$ і $y'' + py' + qy = f_2(x)$ відповідно, то функція $y^* = y_1^* + y_2^*$ є частинним розв'язком диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$. Наприклад, частинний розв'язок диференціального рівняння

$y'' + 4y = 8x \sin 2x + x^2 e^x \cos 5x$ може бути знайдений як сума частинних розв'язків диференціальних рівнянь $y'' + 4y = 8x \sin 2x$ і $y'' + 4y = x^2 e^x \cos 5x$.

§ 2.7. Поняття про системи диференціальних рівнянь

Дамо деякі поняття про методи інтегрування систем диференціальних рівнянь на прикладі наступної системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t), \end{cases} \quad (7.1)$$

де t – аргумент; $x = x(t)$, $y = y(t)$ – шукані функції; a_1, b_1, a_2, b_2 – числові коефіцієнти; $f_1(t)$, $f_2(t)$ – функції. Для системи (7.1) можуть бути задані наступні початкові умови

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \quad (7.2)$$

де t_0, x_0, y_0 – певні числові значення аргументу та шуканих функцій відповідно. Один із методів інтегрування заданої системи полягає у тому, що вона зводиться до диференціального рівняння другого порядку, яке містить лише одну невідому функцію. Застосуємо вказаний метод до системи (7.1).

Диференціюємо перше рівняння системи:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1 \frac{dy}{dt} + \frac{df_1}{dt}. \quad (7.3)$$

Використовуючи друге рівняння системи (7.1), перепишемо рівняння (7.3) у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \frac{dx}{dt} + b_1(a_2x + b_2y + f_2(t)) + \frac{df_1}{dt}. \quad (7.4)$$

Розв'язуємо перше рівняння заданої системи відносно функції у:

$$y = \frac{1}{b_1} \left(\frac{dx}{dt} - a_1x - f_1(t) \right). \quad (7.5)$$

Підставляємо (7.5) у (7.4) і дістаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = f(t), \quad (7.6)$$

де

$$p = -(a_1 + b_2); \quad q = a_1b_2 - a_2b_1; \quad f(t) = b_1f_2(t) - b_2f_1(t) + \frac{df_1}{dt}.$$

Як бачимо, одержали лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами (якщо в заданій системі $f_1(t) = f_2(t) \equiv 0$, то рівняння буде однорідним).

Проінтегрувавши його, знаходимо функцію $x = \varphi(t, C_1, C_2)$. Функцію $y = \psi(t, C_1, C_2)$ визначаємо за допомогою формули (7.5).

Приклад 1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 7y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$$

Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння системи й у отриманому співвідношенні замінюємо похідну від функції у правою частиною другого рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3 \frac{dx}{dt} - 7 \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 3 \frac{dx}{dt} - 7(2x - 6y).$$

Знаходимо величину у з першого рівняння заданої системи і підставляємо в друге:

$$y = \frac{1}{7} \left(3x - \frac{dx}{dt} \right); \frac{d^2 x}{dt^2} = 3 \frac{dx}{dt} - 7 \left(2x - \frac{6}{7} \left(3x - \frac{dx}{dt} \right) \right);$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} - 4x = 0.$$

Відмітимо, що отримане лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами могло бути записане на самому початку за допомогою формули (7.6) (у нашому випадку $a_1 = 3, b_1 = -7, a_2 = 2, b_2 = -6, f_1(t) \equiv 0, f_2(t) \equiv 0; p = 3, q = -4, f(t) = 0$). Інтегруємо вказане рівняння та визначаємо функцію x :

$$k^2 + 3k - 4 = 0; k_1 = -4, k_2 = 1; x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^t.$$

Диференціюємо функцію x і знаходимо функцію y :

$$\frac{dx}{dt} = -4C_1 e^{-4t} + C_2 e^t; y = \frac{1}{7} \left(3x - \frac{dx}{dt} \right) = C_1 e^{-4t} + \frac{2}{7} C_2 e^t.$$

§ 2.8. Приклади задач на складання та розв'язування диференціальних рівнянь

Задача 1. Тіло масою m падає вертикально вниз. Знайти закон руху тіла, якщо сила опору повітря пропорційна квадрату його швидкості. Вважати, що на початку руху швидкість v і шлях s дорівнюють нулю.

Розв'язання. Диференціальне рівняння, яке описує рух даного тіла, складається за допомогою другого закону Ньютона $F = ma$, де F – сила; m – маса тіла; a – прискорення. Крім того, нагадаємо, що при прямолінійному русі швидкість дорівнює похідній від шляху, а прискорення – похідній від швидкості. При розв'язанні даної задачі будуть використані наступні гіперболічні функції: гіперболічний синус

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, гіперболічний косинус $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ і гіперболічний

тангенс $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Первісна від $\operatorname{th} x$ дорівнює $\ln \operatorname{ch} x$.

Тіло, яке падає вниз, рухається під дією сили тяжіння $F_1 = mg$ (g – прискорення вільного падіння) і сили опору повітря $F_2 = -kv^2$ (k – коефіцієнт пропорційності; напрям дії сили протилежний до напрямку руху). На основі другого закону Ньютона одержимо

$$ma = mg - kv^2 \text{ або } m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Перепишемо його у зручному для інтегрування вигляді і проінтегруємо (уведено позначення $\beta^2 = \frac{mg}{k}$):

$$\int \frac{dv}{\beta^2 - v^2} = \frac{k}{m} \int dt, \quad \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\beta + v}{\beta - v} \right| = \frac{k}{m} t + C_1.$$

Так як $v(0) = 0$, то $C_1 = 0$. Враховуючи, що $C_1 = 0$ і $v < \beta$ (із фізичних міркувань), можемо записати

$$\frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\beta + v}{\beta - v} \right| = \frac{k}{m} t, \quad \frac{\beta + v}{\beta - v} = e^{\frac{2\beta k}{m} t}.$$

Розв'язуємо останнє рівняння відносно v :

$$v = \beta \frac{e^{\frac{2\beta k}{m} t} - 1}{e^{\frac{2\beta k}{m} t} + 1} = \beta \frac{e^{\frac{\beta k}{m} t} - e^{-\frac{\beta k}{m} t}}{e^{\frac{\beta k}{m} t} + e^{-\frac{\beta k}{m} t}} = \beta \operatorname{th} \left(\frac{\beta k}{m} t \right) \text{ або } \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right).$$

Інтегруємо отримане диференціальне рівняння:

$$s = \frac{m}{k} \ln \frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{2} + C_2 = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t \right) + C_2.$$

Так як $s(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Записуємо шуканий закон руху

$$s = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t \right).$$

Задача 2. Тіло нагріте до температури 100°C і внесене до приміщення з температурою повітря 20°C . Протягом 10 хвилин температура тіла знизилася до 70°C . Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла й середовища (закон Ньютона). Знайти залежність температури тіла T від часу t (підвищенням температури в приміщенні знехтувати). Якою буде температура тіла через 20 хвилин?

Розв'язання. У відповідності із законом Ньютона можемо записати

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20),$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус після знака рівності обумовлений тем, що температура знижається. Відокремлюємо змінні у одержаному рівнянні та інтегруємо:

$$\int \frac{dT}{T - 20} = -k \int dt, \quad \ln |T - 20| = -kt + \ln C, \quad T = 20 + Ce^{-kt}.$$

Використовуючи те, що $T = 100$ при $t = 0$ й $T = 70$ при $t = 10$, визначаємо невідомі коефіцієнти C і k :

$$\begin{cases} 20 + C = 100, \\ 20 + Ce^{-10k} = 70, \end{cases} \quad \begin{cases} C = 80, \\ e^{-k} = 0,625^{0,1}. \end{cases}$$

Шукана залежність має вигляд

$$T = 20 + 80 \cdot 0,625^{0,1t}.$$

Якщо $t = 20$, то $T = 20 + 80 \cdot 0,625^2 = 51,25$ (град.).

Задача 3. Резервуар циліндричної форми з радіусом основи 1 м і висотою 4 м повністю заповнений водою. У дні резервуара утворився круглий отвір радіуса 4 см. За який час уся вода витече з резервуара?

Розв'язання. Застосуємо тут стандартний прийом, який часто використовується при складанні диференціальних рівнянь. Його суть полягає у тому, що нескінченно малий приріст змінної величини замінюється її диференціалом. Іншими словами, ми відкидаємо нескінченно малі більш високого порядку малості. Відмітимо, що при такому підході часто отримуються не наближені, а точні функціональні залежності. Для розв'язання даної задачі нам знадобиться також формула Бернуллі $v = \sigma \sqrt{2gh}$, де v – швидкість витікання рідини через малий отвір; h – рівень води над отвором; $g \approx 9,8$ – прискорення сили тяжіння; σ – сталий коефіцієнт (для води $\sigma \approx 0,6$).

Нехай у деякий момент часу t рівень води дорівнює h . Через нескінченно малий проміжок часу Δt рівень води буде дорівнювати $h + \Delta h$ (зауважимо, що $\Delta h < 0$). З одного боку, за вказаний проміжок часу об'єм води в резервуарі змінився на величину $\Delta V = -\pi R^2 \Delta h$ (R – радіус основи), а з іншого – на величину $\Delta V = \pi r^2 v \Delta t = \pi r^2 \sigma \sqrt{2gh} \Delta t$ (r – радіус отвору). Отже, можемо записати таку рівність

$$-\pi R^2 \Delta h = \pi r^2 \sigma \sqrt{2gh} \Delta t.$$

Замінивши величини Δh і Δt відповідними диференціалами dh і dt ,

отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$-\pi R^2 dh = \pi r^2 \sigma \sqrt{2gh} dt.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma \sqrt{2g} \int dt; \quad h = \frac{1}{4} \left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sigma \sqrt{2g} t + C \right)^2.$$

Так як $h = 4$ при $t = 0$, то $C = 4$. Підставивши в знайдений розв'язок відповідні числові значення ($C = 4$; $r = 0,04$; $R = 1$; $\sigma = 0,6$; $g = 9,8$), отримуємо залежність рівня h від часу t :

$$h = 0,25(4 - 0,00425t)^2.$$

Знаходимо час витікання усієї води (покладаємо $h = 0$):

$$0 = 0,25(4 - 0,00425t)^2; \quad t \approx 941 \text{ (с)}.$$

Задача 4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(3;1)$, якщо довжина відрізка, що відтинається будь-якою її дотичною на осі ординат, дорівнює піднормалі.

Розв'язання. Зробимо спочатку декілька загальних зауважень. В задачах подібного типу, як правило, використовуються рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x = x_0$. Нагадаємо, що вказані рівняння мають відповідно вигляд

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Крім того, в геометричних задачах часто використовуються поняття піднормалі й піддотичної. На наведеному рисунку відрізок NL – це

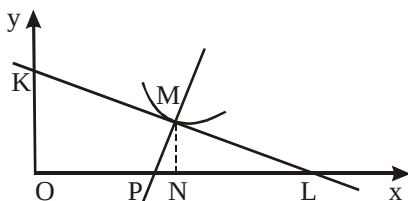


Рис. 4

піддотична, а відрізок PN – це піднормаль (ML – дотична; MP – нормаль; N – проекція точки M на вісь Ox).

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка шуканої кривої. Проведемо у цій точці дотичну ML і нормаль MP (рис. 4). У відповідності з умовою задачі виконується рівність $|OK| = |PN|$.

Визначимо далі довжину відрізків OK і PN в потрібній нам формі. Записуємо рівняння дотичної ML і нормалі MP (оскільки через x і y вже позначено координати точки M , то змінні величини позначаємо через X і Y):

$$Y = y + y'(X - x), \quad Y = y - \frac{1}{y'}(X - x).$$

В рівнянні дотичної покладаємо $X = 0$ й знаходимо $|OK| = |Y| = |y - y'x|$. В рівнянні нормалі покладаємо $Y = 0$ й здобуємо $X = yy' + x$ (абсциса точки P). Враховуючи, що абсциса точки N дорівнює x , знаходимо $|PN| = |yy' + x - x| = |yy'|$. Підставляємо відповідні вирази в рівність $|OK| = |PN|$ і одержуємо

$$|y - y'x| = |yy'|, \quad y - y'x = \pm yy', \quad y' = \frac{y}{x \pm y}.$$

Отримали однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Проінтегрувавши його за відомою схемою (потрібна заміна $y = ux$), можемо записати $x = y(C \mp \ln |y|)$. Використовуючи координати заданої точки $(3;1)$, визначаємо довільну сталу C :

$$3 = 1 \cdot (C \mp \ln |1|), \quad C = 3.$$

Записуємо рівняння шуканої кривої

$$x = y(3 \mp \ln |y|).$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

I. Функція декількох змінних

Завдання 1. Для даних функцій вказати область визначення та побудувати її на координатній площині.

$$1) z = x^2 - y + \frac{\ln x}{\sqrt{x+y-1}}.$$

$$2) z = 5^x - \ln(x^2 + y^2 - 16).$$

$$3) z = \sqrt{2x-3y} + \lg\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right).$$

$$4) z = e^x - \log_x\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} - 1\right).$$

$$5) z = \sqrt{x} + y^3 + e^{\sqrt{2x+y+6}}.$$

$$6) z = \cos y - \lg(y - x^2 + 5x - 6).$$

$$7) z = xy - \sqrt{x-5y} + \frac{6}{\sqrt{4x+y-8}}.$$

$$8) z = 5 - x^2 + 3y^2 + \log_{x-3y+6} x.$$

$$9) z = 3x + \arcsin(2x + 5y - 9).$$

$$10) z = e^{xy} - \arccos(x^2 + y^2).$$

$$11) z = \sqrt{x} + \ln(y-1) - x^2.$$

$$12) z = \frac{\ln y}{\sqrt{2y+3x-6}} + \sqrt[3]{x}.$$

$$13) z = \lg x - \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1}.$$

$$14) z = 3y + \arcsin y - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$15) z = e^x - \log_{x-5y-10} x.$$

$$16) z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} - \ln(x - y).$$

$$17) z = y^5 - \arccos x + \sqrt{y}.$$

$$18) z = xy - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}} + \log_x y.$$

$$19) z = \sin x - \frac{2}{\sqrt{4x^2 - 9y^2 - 36}}.$$

$$20) z = \arcsin x - \arcsin y.$$

$$21) z = y^2 + \sqrt{x-3y-9} - \ln x.$$

$$22) z = 1 - \lg(x^2 + 5y^2 + 1) - \frac{1}{\sqrt{y-1}}.$$

$$\begin{array}{ll}
23) z = \arcsin x - \sqrt{4x + 3y - 12}. & 24) z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}} - \log_x(y - 5). \\
25) z = \operatorname{tg} y + 4\sqrt{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36}} - 1. & 26) z = x^2 + \frac{\sqrt{x + y}}{\lg(x^2 + y^2 - 25)}. \\
27) z = y^3 + \log_x(3x + 5y - 15). & 28) z = \sin y + 4\sqrt{x - 3y + 6} + \frac{1}{\sqrt{x}}. \\
29) z = e^{\sqrt{x}} + \arcsin y. & 30) z = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 4}}.
\end{array}$$

Завдання 2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, диференціал

функції dz та похідну $\frac{dz}{dt}$, якщо

$$\begin{array}{l}
1) z = e^{x^3 + y^2} + xy - \sqrt{x}, \quad x = t^4 + \cos^2 t, \quad y = \arcsin^3(2t + 1). \\
2) z = 3\cos^3(3x + 2y) - \ln x, \quad x = \sqrt{t} + 2^t, \quad y = \sin^4(5x - 1) + e^t. \\
3) z = \arcsin^2(x^2 + y^3) + 3^y, \quad x = t \ln t + \sqrt{t}, \quad y = 3t - \operatorname{tg}^2 t. \\
4) z = \frac{xy}{x^2 + y^2} - x^3 + \sqrt{y}, \quad x = t^2 + \lg t, \quad y = t \cdot 3^t - \cos^2 t. \\
5) z = xe^{xy} + \ln(3x + 4y), \quad x = 3t^2 + \log_2 t, \quad y = \frac{t}{\sin^2 t} + \sqrt{t}. \\
6) z = \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{ctg}(xy) + 2y, \quad x = 5t - \arcsin^2 t, \quad y = t^6 - \lg t. \\
7) z = \sqrt{y} + \operatorname{tg}(x + y) - x^3, \quad x = \ln t + t^5, \quad y = \cos^4(2t - 1) + t. \\
8) z = xe^{xy} + 3y^2 - \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad x = \cos^2 t + 2t, \quad y = 2t - \ln^2 t. \\
9) z = 5x^2 + 3y^2 - \operatorname{ctg}(x - y), \quad x = \sqrt[3]{t} + \frac{1}{t^2} + \sin t, \quad y = \cos 2t - t^2. \\
10) z = \frac{x}{x^2 + y^3} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{y^2}, \quad x = t^4 - \arccos t, \quad y = \sqrt[3]{2t - 1} + 2^t. \\
11) z = \arctg^2 x + e^y - \sin^3(xy), \quad x = 5t - t^2 + \ln t, \quad y = \frac{1}{t^4} - \sqrt{t^3} + t. \\
12) z = (x^2 + y^3)^5 - \lg x + 5y, \quad x = \sqrt[4]{t^3} + \operatorname{tg}^2 t, \quad y = 4t^2 - \ln^2 t.
\end{array}$$

- 13) $z = 5x - 3y^2 + \cos^2(x^3 + y), \quad x = 3t^5 - \sqrt{t} \sin t, \quad y = \sqrt[3]{t^2} - \arcsin t.$
- 14) $z = y^4 - 3^{x+y} - \sin \frac{x}{y}, \quad x = 2t - tg^2 t, \quad y = e^t + 3t - \sqrt{t}.$
- 15) $z = 5x^2 - 4y^5 + \frac{1}{\operatorname{tg}(xy)}, \quad x = \frac{3}{t^4} + \log_2 t, \quad y = t^3 + \frac{1}{t^2} + \frac{5}{t}.$
- 16) $z = x^4 + \cos^2 y - \ln(x+y), \quad x = \sin t - \sqrt[4]{t^3}, \quad y = t^5 + 2\sqrt{t} - 7.$
- 17) $z = \lg(x^2 - y) + \sqrt{x} + 5y^2, \quad x = 6t^2 - \ln(t+1), \quad y = 4t + \ln t^2.$
- 18) $z = \sqrt[5]{y^4} + 3^x - (2x+3y)^{10}, \quad x = \frac{1}{t^2} + \operatorname{tg} t, \quad y = \sqrt[3]{t} + 3t^4 + 5.$
- 19) $z = \sqrt{x^2 + y^3} - x^4 + e^{2y}, \quad x = ctg^2 t - 6t, \quad y = t^5 - \log_3(t-1).$
- 20) $z = 2y - \cos^2 x + \frac{1}{x+3y}, \quad x = t^4 - t^3 + 5, \quad y = \sin^5 t + \sqrt{t}.$
- 21) $z = \arccos(x^2 - y^5) + 3y^4, \quad x = \frac{1}{2+t} - t^4 + 2, \quad y = e^t - \sqrt[3]{t}.$
- 22) $z = (y^2 + 5x)^6 - \frac{1}{x^3}, \quad x = \operatorname{ctg}^3 \frac{1}{t^2 - 1} + 3t, \quad y = 6t - \ln^2 t.$
- 23) $z = \frac{1}{y} + x^4 - \sqrt[3]{4x - 3y}, \quad x = 5t^2 + 8t - \sqrt[4]{t}, \quad y = \cos^5 t - t^5.$
- 24) $z = 6x^7 - \sqrt{y} + \ln(x+y), \quad x = 4^t - t^2, \quad y = \sqrt{t} + \lg t.$
- 25) $z = \operatorname{tg}(xy) + 3x^3 + y^2, \quad x = \frac{1}{t^2 + 1} - \sqrt[4]{t}, \quad y = \sin^4 t + 3t^3.$
- 26) $z = x^5 + \sqrt[4]{y^3} - \ln(x^2 - \sqrt{y}), \quad x = (1+5t)^9 + \sqrt[3]{t}, \quad y = \frac{1}{t^4} + \sqrt{t}.$
- 27) $z = \sqrt[3]{x+6y^2} + e^{x+y} - x, \quad x = \arctg t^2 - t, \quad y = \frac{1}{t-1} + \lg t.$
- 28) $z = 2x^4 - 5\sqrt[3]{y^2} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}, \quad x = t^5 + 2^t, \quad y = \cos^3 t - \sqrt{t}.$
- 29) $z = 5x - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} + \sin^3(xy), \quad x = 4t^2 - \log_5 t, \quad y = t^4 - t^3 + 9.$
- 30) $z = \ln(x^2 + y^2) + \sqrt{x}, \quad x = \operatorname{tg}^4 t - \frac{1}{t}, \quad y = 4^t - t^4.$

Завдання 3. Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції z за вказаних значень аргументів x та y .

- 1) $z = \sqrt{x^3 + y^2}$; $x = 2,05$; $y = 0,98$.
- 2) $z = \sqrt[3]{x^4 + y^3}$; $x = 0,07$; $y = 0,95$.
- 3) $z = x^{2y}$; $x = 1,04$; $y = 2,94$.
- 4) $z = \arctg(x^2 + y^4)$; $x = 0,95$; $y = 0,08$.
- 5) $z = \arcsin(x^3 + y^3 - 9)$; $x = 0,96$; $y = 2,03$.
- 6) $z = \sqrt[4]{x^2 + y^4 + 6}$; $x = 2,97$; $y = 1,05$.
- 7) $z = \arccos(x^3 + y^2 - 17)$; $x = 2,07$; $y = 2,92$.
- 8) $z = \sqrt{x^3 + y^4 + 2}$; $x = 1,06$; $y = 0,91$.
- 9) $z = \arctg(3x + y^4 - 27)$; $x = 3,97$; $y = 2,03$.
- 10) $z = (x - 4)^{3y}$; $x = 4,95$; $y = 3,04$.
- 11) $z = \sqrt[3]{x^4 + y^5 - 21}$; $x = 2,05$; $y = 1,94$.
- 12) $z = \arcsin(x^5 + y - 7)$; $x = 1,06$; $y = 5,98$.
- 13) $z = \sqrt[4]{4x + y^6 - 3}$; $x = 4,94$; $y = 2,03$.
- 14) $z = \arctg(3x^2 - 2y^3 + 6)$; $x = 4,06$; $y = 2,98$.
- 15) $z = (4x - 11)^{y^2}$; $x = 2,93$; $y = 2,05$.
- 16) $z = \operatorname{arcctg} \frac{x^2 - 15}{y^3 + 1}$; $x = 4,04$; $y = 0,07$.
- 17) $z = \sqrt{3y^3 - 4x^5}$; $x = 1,96$; $y = 4,02$.
- 18) $z = \sqrt[3]{4y + x^4 + 32}$; $x = 2,98$; $y = 3,04$.
- 19) $z = (3x - 5)^{y^3}$; $x = 2,05$; $y = 0,96$.
- 20) $z = \arccos(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 3)$; $x = 1,03$; $y = 3,94$.
- 21) $z = \arctg \frac{y^2 - 23}{x^3 - 25}$; $x = 2,97$; $y = 5,06$.
- 22) $z = \sqrt{\frac{x^3 + 2x - 8}{y^2 - 3y + 1}}$; $x = 2,02$; $y = 3,04$.

- | | | |
|---|-------------|-------------|
| 23) $z = (3x - 8)^{2y+3};$ | $x = 3,05;$ | $y = 0,94.$ |
| 24) $z = \ln(y^3 + x^3 - 8);$ | $x = 0,98;$ | $y = 2,03.$ |
| 25) $z = \sqrt[4]{x^4 + y^4 - 1};$ | $x = 1,05;$ | $y = 2,99.$ |
| 26) $z = \arcsin(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} + 1);$ | $x = 0,96;$ | $y = 8,02.$ |
| 27) $z = \arctg(18 - y^3 - x^2);$ | $x = 3,03;$ | $y = 2,04.$ |
| 28) $z = (9 - 2x)^{1-3y};$ | $x = 3,95;$ | $y = 1,03.$ |
| 29) $z = \ln(x^5 - y^3 + 1);$ | $x = 0,98;$ | $y = 1,04.$ |
| 30) $z = \sqrt[3]{2y^3 - x^4 + 17};$ | $x = 1,97;$ | $y = 0,06.$ |

Завдання 4. Задані функція $z = f(x, y)$, точка $M(x_0, y_0)$ й вектор $\vec{a}$. Знайти: 1) похідну в точці M за напрямом вектора $\vec{a}$; 2) градієнт функції z в точці M ; 3) похідну за напрямом $\text{grad } z$ в точці M .

- | | | |
|--|------------|------------------|
| 1) $z = 3x^3 - x^2y^2 + y^3 - 2x + y,$ | $M(2;-1),$ | $\vec{a}(0;3).$ |
| 2) $z = 2x^4 + x^2y^3 + 2y^3 + xy,$ | $M(-1;3),$ | $\vec{a}(1;-2).$ |
| 3) $z = 2x^3 + 3x^2y - 3y^3 - 4xy,$ | $M(0;4),$ | $\vec{a}(3;-3).$ |
| 4) $z = x^3 - 2xy^2 - 4y^3 - y + x,$ | $M(1;4),$ | $\vec{a}(2;0).$ |
| 5) $z = -x^4 + x^3y^2 + 2y^3 - x^2y,$ | $M(2;-2),$ | $\vec{a}(1;3).$ |
| 6) $z = x^4 - 2x^2y^3 + xy^2 - y^3,$ | $M(-3;1),$ | $\vec{a}(2;-2).$ |
| 7) $z = -2x^3 + y^4 - x^2y^2 + y - x,$ | $M(3;-1),$ | $\vec{a}(0;2).$ |
| 8) $z = x^4 + 3xy^3 - 2x^2y + 2y^2,$ | $M(2;-2),$ | $\vec{a}(3;1).$ |
| 9) $z = y^3 + x^2y - x^4 + y,$ | $M(-2;1),$ | $\vec{a}(1;0).$ |
| 10) $z = 2y^3 - 3x^2y + x^3 - xy,$ | $M(1;-3),$ | $\vec{a}(2;-1).$ |
| 11) $z = -y^3 + 2x^3y^2 - x^2 + xy^2,$ | $M(-3;2),$ | $\vec{a}(1;1).$ |
| 12) $z = -2y^3 - 4xy + x^3 + 2xy^2,$ | $M(4;4),$ | $\vec{a}(2;-2).$ |
| 13) $z = y^4 + x^4 - x^2y + xy^2,$ | $M(1;1),$ | $\vec{a}(3;1).$ |
| 14) $z = -y^4 + 2x^3 + x^2y^2 - xy,$ | $M(2;3),$ | $\vec{a}(4;-2).$ |
| 15) $z = 3y^4 + 3x^3 - xy + x - y,$ | $M(1;0),$ | $\vec{a}(2;-2).$ |
| 16) $z = 3y^3 - x^4 + x^2y - x + 3y,$ | $M(2;-1),$ | $\vec{a}(1;-1).$ |

- | | | |
|--|-------------|-------------------|
| 17) $z = 2y^3 + x^3 + x^2y^2 - xy - x$, | $M(3;2)$, | $\bar{a}(1;4)$. |
| 18) $z = -2x^3 + y^2 + x^2y - y + x$, | $M(0;3)$, | $\bar{a}(2;3)$. |
| 19) $z = 3x^2 + 2y^3 + x^2y - x$, | $M(2;-2)$, | $\bar{a}(1;3)$. |
| 20) $z = 5x^2 + y^4 - xy^3 + y$, | $M(1;-1)$, | $\bar{a}(4;2)$. |
| 21) $z = 4x^3 + 2y^3 + x^2y - x$, | $M(1;3)$, | $\bar{a}(3;4)$. |
| 22) $z = x^2y^3 + x^4 - y^2 + xy$, | $M(2;-2)$, | $\bar{a}(2;-4)$. |
| 23) $z = xy^3 + x^2y - x^3 + y$, | $M(1;3)$, | $\bar{a}(3;5)$. |
| 24) $z = x^2y^2 + x^3 + 2y^3 - 3x$, | $M(3;0)$, | $\bar{a}(2;-1)$. |
| 25) $z = x^3y - 3x^2 + 2y^2 - xy + 4x$, | $M(0;-3)$, | $\bar{a}(4;-5)$. |
| 26) $z = 2y^3 + 3y^2 - xy + x - y$, | $M(-2;1)$, | $\bar{a}(3;-1)$. |
| 27) $z = -x^2y + y^3 - xy + x^2 + 2y$, | $M(3;2)$, | $\bar{a}(1;4)$. |
| 28) $z = -xy^2 + x^3 + 2xy - y^2 + x$, | $M(1;4)$, | $\bar{a}(-2;0)$. |
| 29) $z = 3x^2y^2 + 2yx^2 - 3xy - 4y$, | $M(2;-3)$, | $\bar{a}(3;5)$. |
| 30) $z = x^4 + x^3y - xy^2 - 2y^2 + x$, | $M(-2;1)$, | $\bar{a}(3;1)$. |

Завдання 5. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, якщо:

- 1) $u = -\ln x + \frac{1}{2}x^2e^y + x$; $v = \frac{1}{2}xy^2 - xe^y$; $w = -\frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{6}y^3$.
- 2) $u = x \ln x + \frac{1}{6}x^3 \sin y$; $v = -\frac{x}{y} - y \ln x + x$; $w = x \sin y + \ln y$.
- 3) $u = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{tg} y - \frac{1}{4}e^{2x}$; $v = -\frac{y}{x} + x \ln \cos y + 6y$; $w = \frac{1}{2}y^2e^{2x} - \frac{y^2}{2x^2}$.
- 4) $u = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{9}\cos 3x$; $v = \frac{1}{3}y \sin 3x + x \ln y$; $w = -\frac{1}{12}y^4 - y \ln y$.
- 5) $u = \frac{1}{9}e^{3x} + y \cos x$; $v = -\frac{1}{3}ye^{3x} + \frac{x}{2y^2}$; $w = \frac{1}{6}y^3 \cos x + \frac{1}{2y} + 6y$.

$$6) u = -\frac{1}{6}x^3 \operatorname{tg} y + \frac{y}{6x^2}; \quad v = xe^y - \frac{1}{2}x^2 \ln \cos y; \quad w = x^3 - \frac{y^3}{6x^4} - e^y.$$

$$7) u = \frac{4}{15}\sqrt{(x+y)^5} - ye^x; \quad v = \frac{1}{2}y^2e^x + \frac{x}{3y^3}; \quad w = \frac{1}{6y^2} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+y)^5}.$$

$$8) u = -\sin x + \frac{1}{2}x^2 \cos y; \quad v = y \cos x + \frac{1}{3}xe^{3y}; \quad w = \cos y - \frac{1}{9}e^{3y}.$$

$$9) u = \ln \sin x - x^2y^3; \quad v = \frac{1}{2}xy^4 - \frac{1}{2}yx^4; \quad w = x^3y^2 - \frac{y}{2\cos x} + \frac{y^2}{2\sin^2 x}.$$

$$10) u = \sin^2(x+y) - \frac{x^2}{2y}; \quad v = x \ln y + y \ln x; \quad w = \cos^2(x+y) - \frac{y^2}{2x} + \operatorname{tg} x.$$

$$11) u = \arcsin 3x - \frac{1}{2}yx^2; \quad v = \frac{1}{2}x^22^y \ln 2 - \frac{3y}{\sqrt{1-9x^2}}; \quad w = \frac{1}{6}y^3 - x2^y.$$

$$12) u = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{arctg} x; \quad v = \frac{2y}{\sin^2 2x} - \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}}; \quad w = \frac{y^2x}{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{y}.$$

$$13) u = \frac{1}{30}x^6 + y^2 \ln x; \quad v = -\frac{y^3}{3x} + x \cos y; \quad w = -\sin y - \frac{1}{2}x^4y^2 + \operatorname{tg}^3 x^2.$$

$$14) u = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} - \frac{3}{2}e^{2y}x^2; \quad v = \frac{3}{2}e^{2y}x - \frac{1}{20}x^5y^4; \quad w = \frac{1}{20}x^4y^5 - \frac{1}{2}y^2\sqrt{x}.$$

$$15) u = -\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x^2 \sin y; \quad v = \frac{y}{1+x^2} + \frac{1}{12}y^4x^3; \quad w = -\frac{1}{20}y^5x^2 - \sin y.$$

$$16) u = 2\arcsin x + y^2e^x; \quad v = -\frac{2y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3}y^3e^x; \quad w = y \ln^2 x - \frac{1}{6}y^4e^x.$$

$$17) u = \frac{9}{28}\sqrt[3]{x^7} + \frac{e^{xy}}{y^2}; \quad v = -x \cos^2 y; \quad w = \frac{1}{4}\sin 2y - \frac{1}{2}y^2\sqrt[3]{x} - \frac{e^{xy}}{x^2}.$$

$$18) u = \frac{1}{x} + \frac{\cos xy}{y^2}; \quad v = -\frac{\cos 8y}{8y} - 4xy^5; \quad w = \frac{2}{3}y^6 - \frac{y^2}{x^3} + \operatorname{tg} x - \frac{\cos xy}{x^2}.$$

$$19) u = -\frac{\ln x}{y} - \frac{1}{4}e^{2x}; \quad v = \frac{\ln y}{x} - x \operatorname{tg} y - \ln x; \quad w = \frac{1}{2}y^2 e^{2x} - \ln \cos y.$$

$$20) u = -\ln \sin x + \frac{4}{15}\sqrt{x^5 y}; \quad v = y \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3}xe^{3y}; \quad w = -\frac{4}{15}\sqrt{xy^5} - \frac{1}{9}e^{3y}.$$

$$21) u = \frac{\ln x}{y^2} - \operatorname{arctg} x - 2^y; \quad v = 6y^5 x + \frac{y}{1+x^2}; \quad w = \cos x - \frac{\ln y}{x^2} - y^6.$$

$$22) u = \arcsin x + \frac{1}{6}x^3 y; \quad v = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + 5\sqrt{y}; \quad w = \frac{1}{y} - \frac{1}{6}xy^3 + 3.$$

$$23) u = \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{6y^2} - x \operatorname{tg} y; \quad v = e^y \ln x - \frac{y}{\cos^2 x}; \quad w = x \ln y - \frac{e^y}{x} + 2y.$$

$$24) u = \operatorname{ctg} x - \frac{x^4}{6y^3} + y^3; \quad v = \frac{y}{\sin^2 x} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + x; \quad w = \frac{x^2}{y} - \arccos y.$$

$$25) u = \frac{1}{6}x^3 - y \sin x; \quad v = \frac{1}{2}y^2 \cos x - \frac{x}{1+y^2}; \quad w = y - \frac{1}{2}xy^2 - \operatorname{arctg} y.$$

$$26) u = \frac{1}{6}x^3 \sqrt{y} - \ln \cos x; \quad v = -\frac{1}{3}x^2 \sqrt{y^3} + e^{x+y}; \quad w = -e^{x+y} - \frac{y^2}{2 \cos^2 x}.$$

$$27) u = -y^2 x^2; \quad v = \frac{2}{3}x \sqrt{(2y+1)^3}; \quad w = \frac{1}{6}y^4 - \frac{2}{15}\sqrt{(2y+1)^5} + y \ln x.$$

$$28) u = \frac{y^2}{3x^2} - \frac{1}{15}\sqrt{(2x+y)^5}; \quad v = \frac{2}{15}\sqrt{(2x+y)^5} - y; \quad w = -\frac{y^4}{6x^4}.$$

$$29) u = y^2 \ln x - 4e^{\frac{x}{2}}; \quad v = 2ye^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{\cos^2 y} + 3x; \quad w = \operatorname{tg} y + \frac{y^4}{12x^2} - y \lg x.$$

$$30) u = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} \sin y - \frac{1}{30}x^6; \quad v = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cos y; \quad w = \frac{1}{2}y^2 x^4.$$

Завдання 6. Дослідити функції на екстремум:

- 1) $z = \frac{3}{2}x^2 - 5xy + y^2 - 8x + 7y.$ 2) $z = 2x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 + 3x - 9y.$
- 3) $z = \frac{5}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 - 9x + 3y.$ 4) $z = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{11}{2}y^2 - 2x + 3y.$
- 5) $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{9}{2}y^2 + 3x + 2y.$ 6) $z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2 - 16x - y.$
- 7) $z = \frac{3}{2}x^2 + 5xy - \frac{1}{2}y^2 - x + 17y.$ 8) $z = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x + 7y.$
- 9) $z = x^2 + 7xy - \frac{11}{2}y^2 - 17x - 24y.$ 10) $z = 3x^2 - 5xy + 2y^2 - 18x + 15y.$
- 11) $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 16x + 22y.$ 12) $z = 4x^2 + xy + y^2 + 13x + 9y.$
- 13) $z = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 3y^2 + 6x + 14y.$ 14) $z = 2x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + 2x + 5y.$
- 15) $z = 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 18y.$ 16) $z = 6x^2 + xy - y^2 + 6x - 12y.$
- 17) $z = 2x^2 - xy - y^2 - 28x + 7y.$ 18) $z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x - 2y.$
- 19) $z = x^2 + xy + y^2 + x - 4y.$ 20) $z = \frac{3}{2}x^2 - 10xy - 5y^2 - 7x + 1.$
- 21) $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 3x + 6y.$ 22) $z = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x - 4y.$
- 23) $z = x^2 + 3xy + 5y^2 + 5x + 2y.$ 24) $z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 16x - 2y.$
- 25) $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + x.$ 26) $z = 4x^2 - xy + 2y^2 + 17x - 6y.$
- 27) $z = \frac{1}{2}x^2 + xy - y^2 + 4x - 11y.$ 28) $z = 5x^2 + 4xy + y^2 + 6x.$
- 29) $z = \frac{3}{2}x^2 + 4xy + 8y^2 - 3x - 4y.$ 30) $z = x^2 - 3xy + 5y^2 - 14x + 21y.$

Завдання 7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D , яка обмежена осями координат та вказаною прямою.

$$1) z = x^2 - 3xy - 12x + 18y; \quad y = 14 - 2x.$$

$$2) z = 2x^2 + 3xy + 2x - 3y; \quad y = 2x - 6.$$

$$3) z = x^2 + 3xy - x + 3y; \quad y = x + 2.$$

$$4) z = 3x^2 + 2xy - 10x - 4y; \quad y = x - 3.$$

$$5) z = x^2 - 3xy + 2x + 6y; \quad y = 4 - x.$$

$$6) z = x^2 - xy + 3x; \quad y = 4 - 2x.$$

$$7) z = 3x^2 - 2xy - 16x + 6y; \quad y = 10 - 2x.$$

$$8) z = x^2 + 3xy + x + 6y; \quad y = 2x - 8.$$

$$9) z = 2x^2 - 2xy - 2y; \quad y = -2x - 8.$$

$$10) z = x^2 3xy - x - 3y; \quad y = -x - 2.$$

$$11) z = 3x^2 - 4xy + 4x + 8y; \quad y = -2x - 6.$$

$$12) z = 4x^2 - 2xy - 2x + 2y; \quad y = 6 - 2x.$$

$$13) z = 2x^2 - xy - 2x + y; \quad y = 4 - 2x.$$

$$14) z = x^2 + xy + x + 2y; \quad y = 2x + 8.$$

$$15) z = x^2 + 3xy + 2x - 6y; \quad y = x - 4.$$

$$16) z = 2x^2 + 5xy - 2x + 10y; \quad y = x + 5.$$

$$17) z = x^2 + 2xy + 2x - 2y; \quad y = x - 4.$$

$$18) z = 3x^2 - 3xy - 3x + 6y; \quad y = 6 - x.$$

- 19) $z = 2x^2 - xy - 11x + 3y$; $y = 5 - x$.
- 20) $z = x^2 - 3xy - x - 3y$; $y = -2x - 4$.
- 21) $z = 2x^2 + 2xy - 6x - 4y$; $y = 2x - 6$.
- 22) $z = x^2 + 3xy + 10x + 6y$; $y = -x - 5$.
- 23) $z = x^2 - 2xy + 2x - 6y$; $y = -6 - x$.
- 24) $z = 3x^2 + 4xy - 2x - 4y$; $y = 2x - 3$.
- 25) $z = x^2 - 3xy - 5x + 12y$; $y = 10 - 2x$.
- 26) $z = 2xy + y^2 + 2x - 2y$; $y = x - 4$.
- 27) $z = xy + 2y^2 - 3y$; $y = 4 - 2x$.
- 28) $z = 3xy - 4y^2 - 3x - y$; $y = 5 - x$.
- 29) $z = 2xy + 3y^2 - 2x - 2y$; $y = x + 5$.
- 30) $z = x^2 - 4xy - 2x + 20y - 10$; $y = 8 - x$.

Завдання 8. З досліду між величинами x та y була встановлена залежність, яка наведена в таблиці. За допомогою методу найменших квадратів визначити лінійну функцію $y=ax+b$. На координатній площині Oxy відмітити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму.

№ вар.	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5
1	1	4	-1	3	0	-1	-2	-1	-3	-1
2	-4	-2	-2	-3	-3	-4	2	-4	1	-5

№ вар.	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5
3	4	4	2	3	1	1	3	1	0	-2
4	-2	4	-1	2	0	1	1	1	2	-1
5	7	4	5	3	4	1	1	-1	2	-3
6	2	4	3	2	5	1	6	-2	8	-3
7	4	4	3	2	1	2	0	-1	-2	-2
8	6	5	5	3	4	2	5	0	3	-1
9	-6	4	-4	3	-5	1	-3	1	-1	-2
10	-4	5	-3	2	-1	2	0	0	1	0
11	8	4	9	3	7	1	6	-2	4	-3
12	5	4	6	2	8	1	7	-1	10	-3
13	-7	4	-6	3	-4	1	-2	2	-1	0
14	-7	1	-6	-2	-3	-4	-5	-5	-2	-6
15	0	0	2	-2	3	-4	5	-3	6	-5
16	-2	-2	0	-3	-1	-4	1	-4	3	-6
17	-6	2	-5	0	-3	-2	-4	-3	-2	-4
18	6	7	1	6	-2	6	-1	4	-3	4
19	2	5	0	3	-2	1	-2	-1	-4	-2
20	-3	5	-1	4	2	4	3	2	4	2
21	1	1	-2	0	-3	-2	-5	-3	-4	-4
22	-2	3	-1	1	0	-3	1	-1	2	-3
23	6	2	4	0	3	-2	5	-3	2	-4
24	-6	6	-7	4	-9	2	-8	1	-10	0
25	1	2	-1	0	-2	-2	-3	-3	-5	-4

№ вар.	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5
26	-3	-3	-2	-3	-1	-1	0	1	2	3
27	1	-2	2	-1	3	1	4	3	5	5
28	-6	-3	-4	-1	-3	2	-2	3	-1	5
29	-2	-1	-1	1	0	3	2	6	3	7
30	5	-1	4	1	3	4	1	5	0	7

II. Диференціальні рівняння

Завдання 1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку.

1. а) $\frac{x}{\sin y} dx - y(1+x^2)dy = 0$; б) $y' = \frac{3^x}{(3y^2+1)(y^3+y)^4}$;

в) $y' = \frac{y^2 - xy + 4x^2}{x^2}$; г) $y' = \frac{x+y+3}{2x+2y-1}$;

д) $y' = \frac{4x-5y-1}{x+4y-16}$; е) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x \cos^5 x$.

2. а) $x \ln y dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{y} dy = 0$; б) $y' = \frac{\cos x \cos^5 y}{\sin^3 x \sin y}$;

в) $y' = \frac{x}{y} \sec \frac{3y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{2-x-y}{3x+3y-1}$;

д) $y' = \frac{5x-y+17}{3x+5y-1}$; е) $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.

3. а) $\frac{x}{\cos y} dx + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} dy = 0$; б) $y' = \frac{x^2 \cos x^3}{y \sin 3y}$;

в) $y' = \frac{x}{y} \operatorname{cosec} \frac{2y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{4x+4y+1}{3-x-y}$;

д) $y' = \frac{2x-y+7}{x+2y-4}$; е) $y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. а) $x(y^2+4y+5) \ln x dx - dy = 0$; б) $y' = \frac{y^2+4y+20}{(x+1) \ln(x+1)}$;

в) $y' = \frac{x}{y} e^{-\frac{4y}{x}} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{2x+2y-5}{7-x-y}$;

$$д) y' = \frac{7x - 11y - 24}{2x + 7y - 17};$$

$$е) xy' - y = \frac{x^2(4x + 3)}{x^2 + 8x + 25}.$$

$$5. \quad а) \frac{\ln x}{\sqrt[3]{1 + y^2}} dx = \frac{y}{x^3} dy;$$

$$б) y' = \frac{y^5 + 3y^2}{(5y^4 + 6y)\cos^2 7x};$$

$$в) y' = \frac{2x + y}{x - y};$$

$$г) y' = \frac{x + y + 10}{5x + 5y - 1};$$

$$д) y' = \frac{-5x + 4y + 15}{6x - 5y - 18};$$

$$е) y' + y \operatorname{tg} x = \cos x \sin^2 4x.$$

$$6. \quad а) (y^2 + 3y)dx + \frac{(2y + 3)}{x^2 \ln x} dy = 0; \quad б) y' = \frac{\cos^2 2x}{y(y^3 + 2)};$$

$$в) y' = \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^3 \frac{y}{x} + \frac{y}{x};$$

$$г) y' = \frac{4x + 4y + 1}{x + y - 3};$$

$$д) y' = \frac{-3x + 4y + 22}{2x - 3y - 16};$$

$$е) y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x \cos^2 3x.$$

$$7. \quad а) dx - xye^y \ln^2 x dy = 0;$$

$$б) y' = \frac{x^3(3 + x^2)}{\sin^2 6y};$$

$$в) y' = \sec^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x};$$

$$г) y' = \frac{6x + 6y - 5}{3 - 2x - 2y};$$

$$д) y' = \frac{x + 2y + 9}{8x + y + 13};$$

$$е) y' - \frac{2y}{x} = \frac{x^2(6x - 1)}{x^2 - 10x + 21}.$$

$$8. \quad а) \frac{\sin x dx}{3y^2 + 2} = (\cos^2 x + 1)e^{y^3 + 2y} dy; \quad б) y' = \frac{x^4 \ln x}{3y^2 e^{y^3}};$$

$$в) y' = \operatorname{cosec}^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x};$$

$$г) y' = \frac{3x + 3y - 9}{7 - x - y};$$

$$д) y' = \frac{2x - 3y + 7}{5x + 4y + 6};$$

$$е) xy' - 2y = x^4 e^{2x}.$$

9. а) $\frac{\cos x}{y} dx = 5^y (\sin^2 x + 1) dy$; б) $y' = \frac{x^5(1+x^3)}{5y^4 \sin y^5}$;
 в) $y' = \frac{2y^2 - 5xy + 2x^2}{xy}$; г) $y' = \frac{3+x-y}{2-x+y}$;
 д) $y' = \frac{x+y+5}{4x+y+2}$; е) $y' \sin x - y \cos x = e^{\cos x} \sin^3 x$.
10. а) $\frac{\sin x dx}{y^2 + y} = (\cos^2 x - 9) \ln y dy$; б) $y' = \frac{\sqrt{x}(3+x^2)}{7y^6 \cos y^7}$;
 в) $y' = \frac{x^2}{y^2 + 2xy + 13x^2} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{7x-7y-1}{x-y+4}$;
 д) $y' = \frac{x-2y+9}{5x-y}$; е) $y' \cos x + y \sin x = e^{\sin x} \cos^3 x$.
11. а) $\frac{3x^2+1}{3^y} dx + \frac{1}{(x^3+x)^4} dy = 0$; б) $y' = \frac{\sin x \cos^5 x}{\sqrt{y}(2+y^3)}$;
 в) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3-2x+2y}{8x-8y+1}$;
 д) $y' = \frac{x-2y-12}{12x+y+6}$; е) $y' - \frac{y}{x} = x^2 \cos x$.
12. а) $\frac{\cos x}{\ln y} dx = (y^3 + y^2) \sin^2 x dy$; б) $y' = \frac{\sqrt[4]{x}(x^3+3)}{\cos y \sin^5 y}$;
 в) $x^2 y' = y^2 - 3xy - 5x^2$; г) $y' = \frac{3x+3y-4}{1-9x-9y}$;
 д) $y' = \frac{-x-2y+7}{4x-y-28}$; е) $y' + \frac{2y}{\sin 2x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{1+x^2}$.
13. а) $\sin x \sin^3 y dx = \cos^5 x \cos y dy$; б) $y' = xe^{3x} \sqrt{4-9y^2}$;

- в) $xyy' = x^2 \sec \frac{5y}{x} + y^2$; г) $y' = \frac{2x+2y-1}{3-6x-6y}$;
- д) $y' = \frac{2x+3y-1}{x+4y+6}$; е) $y' - \frac{2x+3}{x^2+3x}y = \frac{x^2+3x}{x^2-4x+3}$.
14. а) $\frac{x}{\cos y^3}dx - \frac{y^2}{\sin 3x}dy = 0$; б) $y' = \frac{1}{ye^{5y}(1+4x^2)}$;
- в) $xyy' = x^2 \operatorname{cosec} \frac{7y}{x} + y^2$; г) $y' = \frac{4x+4y+5}{1-12x-12y}$;
- д) $y' = \frac{x+2y-4}{2x+y+1}$; е) $y' - \frac{3x^2-1}{x^3-x}y = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2+6x+34}}$.
15. а) $(y+1)dx = \frac{x^2+4x+20}{\ln(y+1)}dy$; б) $y' = \frac{x(\sqrt{x}-3)\cos^2 y^5}{5y^4}$;
- в) $xyy' = x^2 e^{-\frac{3y}{x}} + y^2$; г) $y' = \frac{5x+5y+4}{15x+15y-8}$;
- д) $y' = \frac{5x-14y-11}{3x-10y-5}$; е) $y' - \frac{4y}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{2x+1} \cos^2 x$.
16. а) $\cos^2 4y dx = \frac{x^5+3x^2}{5x^4+6x}dy$; б) $y' = \frac{x(x^2+2)\sin^2 y^4}{4y^3}$;
- в) $xy' = 3x \sec \frac{y}{x} \sin^4 \frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{x+y+8}{3x+3y+1}$;
- д) $y' = \frac{-3x+4y+6}{2x-3y-3}$; е) $y' + 3x^2y = e^{-x^3} \sin^2 4x$.
17. а) $\frac{x}{\cos^2 2y}dx + \frac{1}{x^2+3}dy = 0$; б) $y' = \frac{x^3 \ln x}{(y^2+2)(y^3-1)}$;
- в) $xy' = 5x \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^2 \frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{2x-2y-5}{3-x+y}$;

$$д) y' = \frac{x+2y-1}{x+4y+3};$$

$$е) y' - 5x^4 y = e^{x^5} \sin x \cos^3 x.$$

$$18. а) \frac{1}{y^2} dx - \frac{2+y^3}{\sin^2 4x} dy = 0;$$

$$б) y' = \frac{3x^2 e^{x^3}}{y^2(\sqrt{y}+7)};$$

$$в) xy' = 4x \sec^2 \frac{4y}{x} + y;$$

$$г) y' = \frac{3x+3y+2}{x+y-9};$$

$$д) y' = \frac{3x+10y+2}{2x+3y+5};$$

$$е) y' + \frac{y}{\sin^2 x} = e^{ctgx} \cos^3 x.$$

$$19. а) \frac{3e^{x^3}}{\ln y} dx - \frac{y^4}{x^2} dy = 0;$$

$$б) y' = \frac{xe^{3x} \sin^2 y^5}{5y^4};$$

$$в) xy' = 5x \operatorname{cosec}^2 \frac{2y}{x} + y;$$

$$г) y' = \frac{x+y-3}{5x+5y-1};$$

$$д) y' = \frac{x+2y-1}{3x+y-8};$$

$$е) y' - \frac{y}{\cos^2 x} = e^{tgx} x \sin 2x.$$

$$20. а) \frac{5 \sin x^5}{y^3} dx + \frac{1+y^5}{x^4} dy = 0;$$

$$б) y' = \frac{x(1+y^2) \sin x}{y};$$

$$в) xyy' = 2y^2 + 4xy + x^2;$$

$$г) y' = \frac{2x-2y+3}{10x-10y-2};$$

$$д) y' = \frac{3x+2y}{4x+3y+1};$$

$$е) y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = e^{\arcsin x} \sin^3 x.$$

$$21. а) \frac{7 \cos x^7}{\sqrt{y}} dx - \frac{2+y}{x^6} dy = 0;$$

$$б) y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{xy \ln x};$$

$$в) xy' = \frac{x^3}{y^2 + 6xy + 25x^2} + y;$$

$$г) y' = \frac{3x+3y-7}{5-9x-9y};$$

$$д) y' = \frac{-x+4y-6}{8x-y+17};$$

$$е) y' - \frac{y}{1+x^2} = e^{\arctg x} x \ln x.$$

22. а) $\frac{\sqrt{x}}{\sin y} dx - \frac{\cos^2 y}{3+x^2} dy = 0$; б) $y' = \frac{x \cos x}{y\sqrt{1+y^2}}$;
 в) $xy' = y \ln^2 \frac{y}{x} + y$; г) $y' = \frac{4x-4y+3}{7+x-y}$;
 д) $y' = \frac{x-2y-11}{x+y+4}$; е) $y' - \frac{3 \sin x}{\cos^4 x} y = x^3 e^{\cos^{-3} x} \ln x$.
23. а) $\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{y}} dx + \frac{y^4+7}{\cos x} dy = 0$; б) $y' = \frac{1}{y(x^2+4x+5) \ln y}$;
 в) $xy' = \frac{y^2-5xy+25x^2}{x}$; г) $y' = \frac{y-x+5}{3x-3y+2}$;
 д) $y' = \frac{2x+y}{5x+2y+3}$; е) $y' - 3x^2 y \cos x^3 = e^{\sin x^3} 5^{4x}$.
24. а) $\frac{1}{y} dx = \sqrt{4-9x^2} e^{5y} dy$; б) $y' = \frac{x\sqrt[3]{1+x^2}}{y^3 \ln y}$;
 в) $2yy' = x \sec \frac{7y}{x} + \frac{2y^2}{x}$; г) $y' = \frac{y+3x-1}{5-2y-6x}$;
 д) $y' = \frac{x+y+2}{x+4y-1}$; е) $y' + \frac{5x^4+1}{x^5+x} y = \frac{\sin^2 4x}{x^5+x}$.
25. а) $xe^{3x}(1+4y^2)dx = dy$; б) $y' = \frac{2x+3}{y^2(x^2+3x+1) \ln y}$;
 в) $3yy' = x \operatorname{cosec} \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{x}$; г) $y' = \frac{2x-y+5}{4x-2y+3}$;
 д) $y' = \frac{-3x+10y+21}{2x-3y-14}$; е) $y' + 2y \sin 2x = \frac{e^{\cos 2x}}{x^2+8x}$.

26. а) $\frac{5x^4}{y} dx = (\sqrt{y} + 4) \cos^2 x^5 dy$; б) $y' = xye^x \ln^2 y$;
- в) $4yy' = xe^{-\frac{y}{x}} + \frac{4y^2}{x}$; г) $y' = \frac{x+4y-1}{3-x-4y}$;
- д) $y' = \frac{-5x+2y+7}{3x-5y-8}$; е) $y' - 4y \cos 4x = xe^{\sin 4x} \cos 3x$.
27. а) $\frac{4x^3}{y+1} dx = (y^2 + 2) \sin x^4 dy$; б) $y' = \frac{3x^2(\cos^2 y + 1)e^{x^3}}{\sin y}$;
- в) $5y' = 2 \sec \frac{y}{x} \sin^6 \frac{y}{x} + 5 \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{5-x+3y}{2x-6y+1}$;
- д) $y' = \frac{-x+3y-9}{4x-y+3}$; е) $y' + \frac{7x^6+2x}{x^7+x^2} y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^7+x^2}$.
28. а) $\frac{x^2+2}{\ln y} dx - \frac{y^3}{x^3+1} dy = 0$; б) $y' = \frac{x5^x(\sin^2 y + 4)}{\cos y}$;
- в) $2y' = 3 \operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^7 \frac{y}{x} + 2 \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{x+2y-1}{3x+6y+5}$;
- д) $y' = \frac{-x-y+3}{5x-y-9}$; е) $y' - \frac{9x^8-4x^3}{x^9-x^4} y = \frac{x^9-x^4}{x^2-4x}$.
29. а) $\frac{x^3}{y^2} dx + \frac{3e^{y^3}}{\sqrt{x}+5} dy = 0$; б) $y' = \frac{x^5(\cos^2 y - 9) \ln x}{\sin y}$;
- в) $5y' = 6 \sec^2 \frac{8y}{x} + 5 \frac{y}{x}$; г) $y' = \frac{3x-y+4}{2-3x+y}$;
- д) $y' = \frac{2x+11y+3}{x+2y-2}$; е) $y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x} y = e^{-\cos^{-1} x} \sin 5x$.
30. а) $\frac{5}{y \sin^2 x^5} dx = \frac{e^{3y}}{x^4} dy$; б) $y' = \frac{x^9(\sin^2 y - 4) \ln x}{\cos y}$;

$$в) 7y' = 5 \operatorname{cosec}^2 \frac{y}{x} + 7 \frac{y}{x};$$

$$г) y' = \frac{3+2x-5y}{5y-2x+4};$$

$$д) y' = \frac{2x-9y+2}{3x+2y+3};$$

$$е) y' - 4y \sin^3 x \cos x = e^{\sin^4 x} 9^{3x}.$$

Завдання 2. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків за допомогою зниження порядку.

$$1. \quad а) y''' = 6x + xe^{2x};$$

$$б) y'' + y' \operatorname{tg} x = \sec x.$$

$$2. \quad а) y^{IV} = 8 \cos 2x + 3x^2;$$

$$б) (x^3 + x^2)y'' - (3x^2 + 2x)y' = 0.$$

$$3. \quad а) y''' = \sqrt{x} + 9x \cos 3x;$$

$$б) y'' + 2y'^2 \operatorname{tg} y = 0.$$

$$4. \quad а) y^{IV} = 12 \sin 3x + 2^x;$$

$$б) (1 - y^2)y'' + yy'^2 = 0.$$

$$5. \quad а) y''' = (2x+1)^{-3} - xe^{3x};$$

$$б) y'' = y'(2y - 2).$$

$$6. \quad а) y^{IV} = 4^x + 5x^{-4};$$

$$б) y'' - 2y'^2 \operatorname{ctg} y = 0.$$

$$7. \quad а) y''' = x \ln x + 12 \sin 3x;$$

$$б) y'' - y' \operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec} x.$$

$$8. \quad а) y^{IV} = 3x^{-5} - 8 \cos 2x;$$

$$б) (x^2 + 4x + 5)y'' = -(2x + 4)y'.$$

$$9. \quad а) y''' = x \sin 2x - 5x^{-3};$$

$$б) (1 + y^2)y'' - 2yy'^2 = 0.$$

$$10. \quad а) y^{IV} = 2 \cdot 3^x - 27(2 - 3x)^{-4};$$

$$б) y'' \sin 2x + 2y' = 0.$$

$$11. \quad а) y''' = x^2 \ln x + 4e^{2x};$$

$$б) y'' - \frac{2}{x}y' = \frac{3}{x}.$$

$$12. \quad а) y^{IV} = 3 \cdot 4^x - 25 \sin 5x;$$

$$б) (y^2 + 3)y'' - yy'^2 = 0.$$

$$13. \quad а) y''' = 6x^{-4} - 12x^2 \ln x;$$

$$б) 2yy'' = 1 + y'^2.$$

$$14. \quad а) y^{IV} = 24x^{-5} - 81 \cdot 5^{3x};$$

$$б) (y^3 - y^2)y'' = (2y - 3y^2)y'^2.$$

$$15. \quad а) y''' = x - 16x \sin 4x;$$

$$б) y'' \sin 2x - 2y' = 0.$$

16. а) $y^{IV} = 60x^{-6} - 32e^{-2x}$; б) $y'' - y'^2 \operatorname{ctg} y = 0$.
17. а) $y''' = \frac{1}{8}x \sin \frac{1}{2}x - 6$; б) $(x^2 - 4x + 3)y'' = (4 - 2x)y'$.
18. а) $y^{IV} = (\frac{1}{2}x + 5)^{-4} - 9^{2x}$; б) $(y^2 + 8y + 17)y'' = (y + 4)y'^2$.
19. а) $y''' = \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{2}x + 12$; б) $y'' + y' \operatorname{tg} x = 0$.
20. а) $y^{IV} = (4 - \frac{1}{2}x)^{-5} + 9 \cdot 10^{3x}$; б) $(y^5 - 2y^2)y'' = (4y - 5y^4)y'^2$.
21. а) $y''' = 2\cos^2 x - 3e^{-x}$; б) $y'' - 2y' \operatorname{tg} x = 0$.
22. а) $y^{IV} = 120x^{-7} + 2\sin^2 x$; б) $(2y + 1)y'' = 2y'^2$.
23. а) $y''' = \sin^2 x \cos x$; б) $(x^5 + x^3)y'' = (5x^4 + 3x^2)y'$.
24. а) $y^{IV} = xe^{-2x}$; б) $(3y + 4)y'' = 3y'^2$.
25. а) $y''' = \cos^2 x \sin x$; б) $xy'' - 3y' = 4$.
26. а) $y^{IV} = x \sin(1 - 2x)$; б) $y'' + y'^2 \operatorname{tg} y = 0$.
27. а) $y''' = \cos^3 x$; б) $y'' + 2y' \operatorname{ctg} x = 0$.
28. а) $y^{IV} = x \cos(3 + 2x)$; б) $(y^2 + 4y + 5)y'' = (2y + 4)y'^2$.
29. а) $y''' = \sin^3 x$; б) $y'' = y' \operatorname{ctg} x$.
30. а) $y^{IV} = xe^{3+2x}$; б) $(y^2 - 6y + 8)y'' = (2y - 6)y'^2$.

Завдання 3. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. а) $y'' - 4y' + 13y = 13x^2 + 10$; б) $y'' + 2y' - 8y = 2e^x \sin 2x$.
2. а) $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$; б) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x} \cos 3x$.
3. а) $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 9$; б) $y'' + 3y' - 10y = 8e^{2x} \sin x$.
4. а) $y'' - 4y' + 29y = 6xe^{-x}$; б) $y'' - 3y' - 4y = 5e^{-3x} \cos x$.
5. а) $y'' + 4y' + 20y = 4x - 20x^2$; б) $y'' - 5y' + 4y = 6e^{-x} \sin 2x$.
6. а) $y'' - 6y' + 10y = 4xe^{-2x}$; б) $y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x} \cos x$.
7. а) $y'' + 9y = 9x^2 - 8$; б) $y'' + y' - 6y = 8e^x \sin 3x$.
8. а) $y'' - 4y' + 5y = 10xe^{3x}$; б) $y'' - 6y' + 5y = 12e^{-3x} \cos x$.
9. а) $y'' - 2y' - 3y = 4xe^{-x}$; б) $y'' - 8y' + 17y = 9e^{-x} \sin 2x$.
10. а) $y'' + 6y' + 13y = 5x - 26x^2$; б) $y'' - 4y' - 5y = 4e^x \cos 3x$.
11. а) $y'' + 2y' + 17y = 4xe^{2x}$; б) $y'' - y' - 12y = 5e^{-x} \sin x$.
12. а) $y'' - 4y' + 40y = 6xe^{-x}$; б) $y'' - y' - 6y = 7e^{-3x} \cos x$.
13. а) $y'' - 2y' - 15y = 9 - 15x^2$; б) $y'' + 4y = 8 \sin 2x$.
14. а) $y'' - 10y' + 26y = 5xe^x$; б) $y'' + 5y' - 6y = 12e^{2x} \cos 2x$.
15. а) $y'' + 8y' + 17y = 34x^2 + 10x$; б) $y'' + 4y' - 5y = 9e^{-2x} \cos 3x$.
16. а) $y'' - 6y' - 7y = 14xe^{-3x}$; б) $y'' + 16y = 32 \cos 4x$.
17. а) $y'' - 8y' + 20y = 6 - 40x^2$; б) $y'' + y' - 12y = 9e^{-2x} \cos 3x$.
18. а) $y'' + 4y' + 40y = 10xe^{4x}$; б) $y'' + 2y' - 3y = 6e^{3x} \sin 2x$.
19. а) $y'' - 2y' + 50y = 50x^2 + 14x$; б) $y'' + y' - 20y = 24e^{4x} \cos 3x$.
20. а) $y'' - 2y' - 8y = 16xe^{-2x}$; б) $y'' + 4y' + 29y = 20e^x \sin 4x$.

21. а) $y'' + 2y' + 37y = 74x^2 - 21$; б) $y'' - 2y' - 24y = 15e^{-3x} \cos x$.
22. а) $y'' - 2y' - 35y = 25xe^{-5x}$; б) $y'' + 25y = 12e^{4x} \cos 3x$.
23. а) $y'' - 12y' + 40y = 30x - 40x^2$; б) $y'' - y' - 42y = 16e^{-4x} \sin 2x$.
24. а) $y'' - 10y' + 29y = 36xe^{3x}$; б) $y'' + 2y' - 35y = 30e^{5x} \cos x$.
25. а) $y'' - 8y' + 16y = 8xe^{-2x}$; б) $y'' + 4y' + 8y = 16e^{-2x} \sin 2x$.
26. а) $y'' + 8y' + 20y = 18 - 20x^2$; б) $y'' - 12y' + 36y = 15e^{-3x} \cos x$.
27. а) $y'' + 3y' - 18y = 10xe^{2x}$; б) $y'' + 25y = 10 \cos 5x + 5 \sin 5x$.
28. а) $y'' - 8y' + 25y = 20xe^{4x}$; б) $y'' + 7y' - 8y = 16e^{-2x} \sin 4x$.
29. а) $y'' - 16y' + 65y = 32xe^{-2x}$; б) $y'' - 6y' - 16y = 40e^x \cos 4x$.
30. а) $y'' + y' - 42y = 48xe^{-4x}$; б) $y'' + 36y = 12 \cos 6x + 6 \sin 6x$.

Завдання 4. Розв'язати задачу Коші.

1. а) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x \cos^2 3x$, $y(\pi/4) = 8$;
 б) $y'' - 2y' - 3y = 4xe^{-x}$, $y'(0) = 4$, $y(0) = -3$.
2. а) $y' = \sec^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$, $y(6) = \pi$;
 б) $y'' - 4y' - 5y = 4e^x \cos 3x$, $y'(0) = 3$, $y(0) = -4$.
3. а) $\frac{\sin x dx}{3y^2 + 2} = (\cos^2 x + 1)e^{y^3 + 2y} dy$, $y(0) = 0$;
 б) $y'' + 2y' + 17y = 4xe^{2x}$, $y'(0) = 2$, $y(0) = -2$.
4. а) $y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x \cdot \cos x$, $y(\pi/6) = 2$;
 б) $y'' - y' - 6y = 7e^{-3x} \cos x$, $y'(0) = 1$, $y(0) = -5$.

5. а) $y' = \frac{x^2}{y^2 + 2xy + 13x^2} + \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$;
 б) $y'' - 2y' - 15y = 9 - 15x^2$, $y'(0) = 0$, $y(0) = -3$.
6. а) $y' = \frac{\sin x \cos^5 x}{\sqrt{y(2 + y^3)}}$, $y(0) = 1$;
 б) $y'' + 5y' - 6y = 12e^{2x} \cos 2x$, $y'(0) = -1$, $y(0) = 5$.
7. а) $y' = \frac{3x + 3y - 4}{1 - 9x - 9y}$, $y(0) = 1$;
 б) $y'' + 8y' + 17y = 34x^2 + 10x$, $y'(0) = -2$, $y(0) = 4$.
8. а) $xyy' = x^2 \sec \frac{5y}{x} + y^2$, $y(5) = \pi$;
 б) $y'' + 16y = 32 \cos 4x$, $y'(0) = -3$, $y(0) = 3$.
9. а) $\frac{x}{\cos y^3} dx - \frac{y^2}{\sin 3x} dy = 0$, $y(\pi/6) = 0$;
 б) $y'' - 8y' + 20y = 6 - 40x^2$, $y'(0) = -4$, $y(0) = 2$.
10. а) $y' - \frac{4y}{4x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{2x + 1} \cos^2 x$, $y(0) = 2$;
 б) $y'' + 2y' - 3y = 6e^{3x} \sin 2x$, $y'(0) = -5$, $y(0) = 1$.
11. а) $xy' = 3x \sec \frac{y}{x} \sin^4 \frac{y}{x} + y$, $y(6) = \pi$;
 б) $y'' - 2y' + 50y = 50x^2 + 14x$, $y'(0) = -6$, $y(0) = 0$.
12. а) $y' = \frac{x^3 \ln x}{(y^2 + 2)(y^3 - 1)}$, $y(1) = 0$;
 б) $y'' + 4y' + 29y = 20e^x \sin 4x$, $y'(0) = 6$, $y(0) = 1$.

13. а) $y' + \frac{y}{\sin^2 x} = e^{\operatorname{ctg} x} \cos^3 x$, $y(\pi/2) = 4$;
 б) $y'' + 2y' + 37y = 74x^2 - 21$, $y'(0) = 5$, $y(0) = 2$.
14. а) $y' = \frac{x + y - 3}{5x + 5y - 1}$, $y(0) = 2$;
 б) $y'' + 25y = 12e^{4x} \cos 3x$, $y'(0) = 4$, $y(0) = 3$.
15. а) $yy' = x(1 + y^2) \sin x$, $y(0) = 0$;
 б) $y'' - 12y' + 40y = 30x - 40x^2$, $y'(0) = 3$, $y(0) = 4$.
16. а) $y' - \frac{y}{1 + x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} x \ln x$, $y(1) = 5$;
 б) $y'' + 2y' - 35y = 30e^{5x} \cos x$, $y'(0) = 2$, $y(0) = 5$.
17. а) $xy' = y \ln^2 \frac{y}{x} + y$, $y(1) = e$;
 б) $y'' - 8y' + 16y = 8xe^{-2x}$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 6$.
18. а) $y' = \frac{1}{y(x^2 + 4x + 5) \ln y}$, $y(1) = e$;
 б) $y'' - 12y' + 36y = 15e^{-3x} \cos x$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 7$.
19. а) $y' = \frac{y + 3x - 1}{5 - 2y - 6x}$, $y(0) = 2$;
 б) $y'' + 3y' - 18y = 10xe^{2x}$, $y'(0) = -1$, $y(0) = -7$.
20. а) $3yy' = x \operatorname{cosec} \frac{5y}{x} + \frac{3y^2}{x}$, $y(15) = \pi$;
 б) $y'' + 7y' - 8y = 16e^{-2x} \sin 4x$, $y'(0) = -2$, $y(0) = -6$.
21. а) $y' = xye^x \ln^2 y$, $y(0) = e$;

- б) $y'' - 16y' + 65y = 32xe^{-2x}$, $y'(0) = -3$, $y(0) = -5$.
22. а) $y' = \frac{5-x+3y}{2x-6y+1}$, $y(0) = 1$;
 б) $y'' + 36y = 12\cos 6x + 6\sin 6x$, $y'(0) = -4$, $y(0) = -4$.
23. а) $2y' = 3\operatorname{cosec} \frac{y}{x} \cos^7 \frac{y}{x} + 2\frac{y}{x}$, $y(6) = \pi$;
 б) $y'' - 4y' + 13y = 13x^2 + 10$, $y'(0) = -5$, $y(0) = -3$.
24. а) $y' = \frac{x^5(\cos^2 y - 9)\ln x}{\sin y}$, $y(1) = \pi/2$;
 б) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x} \cos 3x$, $y'(0) = -6$, $y(0) = -2$.
25. а) $y' - 4y \sin^3 x \cos x = e^{\sin^4 x} 9^{3x}$, $y(0) = 2$;
 б) $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 9$, $y'(0) = -7$, $y(0) = -1$.
26. а) $y' = \frac{y^2 - xy + 4x^2}{x^2}$, $y(1) = 2$;
 б) $y'' - 3y' - 4y = 5e^{-3x} \cos x$, $y'(0) = 8$, $y(0) = 0$.
27. а) $x \ln y dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{y} dy = 0$, $y(0) = e$;
 б) $y'' + 4y' + 20y = 4x - 20x^2$, $y'(0) = 7$, $y(0) = -1$.
28. а) $y' = \frac{4x+4y+1}{3-x-y}$, $y(0) = 1$;
 б) $y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x} \cos x$, $y'(0) = 6$, $y(0) = -2$.
29. а) $y' = \frac{x}{y} e^{\frac{-4y}{x}} + \frac{y}{x}$, $y(4) = -1$;
 б) $y'' + 9y = 9x^2 - 8$, $y'(0) = 5$, $y(0) = -3$.

30. а) $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{1+y^2}} dx = \frac{y}{x^3} dy, \quad y(1) = 0;$

б) $y'' - 6y' + 5y = 12e^{-3x} \cos x, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -2.$

Завдання 5. Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{6}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 4y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{1}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{1}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 10y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 7y. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 10y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - \frac{37}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 4y. \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - \frac{1}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 5y. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{27}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 8y. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 25y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{8}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 6y. \end{cases}$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{5}{4}y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 4y. \end{cases}$

$$13) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - \frac{65}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 3y. \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{61}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 8y. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 52y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 5y. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{29}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 2y. \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - \frac{29}{4}y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 11y. \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - \frac{13}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 8y. \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - \frac{1}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + \frac{8}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 5y. \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{5}{2}y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 9y. \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - \frac{50}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 15y. \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 36y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 6y. \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 27y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 7y. \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - \frac{29}{5}y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 6y. \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - \frac{25}{3}y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

Завдання 6. Розв'язати задачу.

1) Знайти криву, яка проходить через точку $(0; -2)$ і має наступну властивість: кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій її точці $(x; y)$ дорівнює $3y$.

2) Знайти криву, у якої точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

3) Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла й середовища. Тіло охолонуло за 10 хвилин від 90°C до 60°C . Температура навколишнього повітря не змінюється й дорівнює 20°C . Якою буде температура тіла через 30 хвилин?

4) Знайти криві, які мають таку властивість, що відрізок, який дотична у будь-якій точці кривої відтинає від осі Oy , дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

5) Човен уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна $1,5$ м/с. Через 4 с човен рухається зі швидкістю 1 м/с. Якою буде швидкість через 10 с?

6) Знайти криві, для яких площа трикутника, що утворений дотичною, віссю абсцис і перпендикуляром, який проведений з точки дотику до осі абсцис, є сталою величиною і дорівнює a^2 .

7) Знайти криву, яка має таку властивість, що величина перпендикуляра, який опущений з початку координат до дотичної, дорівнює абсцисі точки дотику.

8) Швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна кількості цієї речовини у даний момент. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Скільки відсотків речовини залишиться через 100 днів?

9) Трапеція утворена осями координат, дотичною до деякої кривої й перпендикуляром, який опущений з точки дотику до осі абсцис. Знайти криві, у яких площа вказаної трапеції є сталою величиною і дорівнює $3a^2$.

10) Швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна кількості цієї речовини у даний момент. Експериментальні дослідження показали, що на протязі року з кожного грама радія розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина деякої відомої кількості радія?

11) Трикутник утворений дотичною до деякої кривої, віссю абсцис і перпендикуляром, який проведений з точки дотику до осі абсцис. Знайти криві, для яких сума катетів вказаного трикутника є сталою величиною і дорівнює b .

12) Знайти криву, у якої відстань будь-якої дотичної від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

13) Футбольний м'яч вагою 0,4 кг кинуто вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює

0,48 Г при швидкості 1 м/с. Обчислити час підйому м'яча і найбільшу висоту підйому.

14) Знайти криву, у якої відрізок, що відтинається дотичною на осі ординат, дорівнює напівсумі координат точки дотику.

15) За який час витече вода з циліндричного бака з діаметром $2R = 1,8$ м і висотою $H = 2,45$ м через отвір у дні діаметром $2r = 6$ см? Вісь циліндра вертикальна (див. §2.8, зад.3).

16) Знайти криві, які мають наступну властивість: відрізок осі абсцис, що відтинається дотичною і нормаллю, проведеними з довільної точки кривої, дорівнює $2a$.

17) Визначити криву, у якої відношення відрізка, що відтинається дотичною на осі Oy , до відстані між початком координат і точкою дотику залишається сталою величиною і дорівнює a .

18) Циліндричний бак поставлений вертикально і має отвір у дні. Половина води з повного бака витікає за 5 хвилин. За який час витече уся вода (див. §2.8, зад.3)?

19) Знайти криві, у яких площа трикутника, обмеженого дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є сталою величиною і дорівнює a^2 .

20) Матеріальна точка масою 1 г рухається прямолінійно під дією сили, яка прямо пропорційна часу, що відраховується від моменту $t = 0$, і обернено пропорційна швидкості руху точки. В момент $t = 10$ с швидкість дорівнювала 50 см/с, а сила – 4 дін. Якою буде швидкість через хвилину після початку руху?

21) Довести, що крива, яка має таку властивість, що усі її нормалі проходять через сталу точку, є коло.

22) Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю Ox має абсцису, яка удвічі менша за абсцису точки дотику.

23) Корабель уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості корабля. Початкова швидкість корабля 10 м/с, а швидкість через 5 с – 8 м/с. Якою буде швидкість через 15 с?

24) Знайти криву, для якої довжина відрізка, що відтинається на осі ординат нормаллю, яка проведена у будь-якій точці кривої, дорівнює відстані цієї точки від початку координат.

25) За законом Ньютона швидкість охолодження тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою T тіла й температурою повітря T_0 . Якщо температура повітря дорівнює 20°C і тіло на протязі 20 хвилин охолонуло від 100°C до 60°C , то через скільки часу його температура знизиться до 30°C ?

26) Довести, що крива, кутовий коефіцієнт дотичної якої у будь-якій точці пропорційний абсцисі точки дотику, є парабола.

27) Знайти криву, для якої добуток абсциси будь-якої її точки на величину відрізка, що відтинається нормаллю на осі Oy , дорівнює подвоєному квадрату відстані від цієї точки до початку координат.

28) Визначити шлях S , який проходить тіло за час t , якщо його швидкість пропорційна пройденому шляху і якщо тіло проходить 100 м за 10 с, а 200 м – за 15 с.

29) Знайти криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної у будь-якій точці в n раз більше кутового коефіцієнта прямої, яка з'єднає цю ж точку з початком координат.

30) Точка маси m рухається прямолінійно. На неї діє сила пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності k_1). Крім того, на точку діє сила опору середовища, яка пропорційна швидкості (коефіцієнт

пропорційності k_2). Знайти залежність швидкості від часу, вважаючи, що у початковий момент швидкість дорівнює нулю.

Завдання 7. За допомогою методу варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо функції y_1 і y_2 є частинними розв'язками відповідного однорідного рівняння.

1. $y'' + 4y' - 5y = xe^{-4x}$, $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = e^x$;
2. $y'' + 3y' - 4y = (-3x + 2)e^x$, $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^x$;
3. $y'' + 2y' - 3y = 4x + 5$, $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^x$;
4. $y'' + y' - 2y = (-2x + 3)e^x$, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^x$;
5. $y'' - y = (-4x + 5)e^{3x}$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$;
6. $y'' + 3y' - 10y = (5x - 1)e^{2x}$, $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = e^{2x}$;
7. $y'' + 2y' - 8y = 4e^{-5x}$, $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{2x}$;
8. $y'' + y' - 6y = (2x + 3)e^{-4x}$, $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{2x}$;
9. $y'' - 4y = (3x - 2)e^{4x}$, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{2x}$;
10. $y'' - y' - 2y = 2xe^{-2x}$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{2x}$;
11. $y'' + 2y' - 15y = (4x - 1)e^{-x}$, $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = e^{3x}$;
12. $y'' + y' - 12y = (-3x + 1)e^{2x}$, $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{3x}$;
13. $y'' - 9y = e^{-3x}$, $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{3x}$;
14. $y'' - y' - 6y = x + 4$, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{3x}$;
15. $y'' - 2y' - 3y = (5x)e^x$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{3x}$;
16. $y'' + y' - 20y = (4x + 2)e^{-4x}$, $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = e^{4x}$;
17. $y'' - 16y = (-2x + 3)e^{5x}$, $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{4x}$;
18. $y'' - y' - 12y = (2x + 1)e^{3x}$, $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{4x}$;
19. $y'' - 2y' - 8y = (3x - 2)e^{4x}$, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{4x}$;
20. $y'' - 3y' - 4y = (x - 5)e^{2x}$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{4x}$;
21. $y'' - 25y = -4x + 1$, $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = e^{5x}$;

22. $y'' - y' - 20y = 5x$, $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{5x}$;
23. $y'' - 2y' - 15y = (-3x + 4)e^{-4x}$, $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{5x}$;
24. $y'' - 3y' - 10y = (2x - 5)e^{4x}$, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{5x}$;
25. $y'' - 4y' - 5y = (-x + 4)e^{5x}$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{5x}$;
26. $y'' - y' - 30y = (3x - 3)e^{2x}$, $y_1 = e^{-5x}$, $y_2 = e^{6x}$;
27. $y'' - 2y' - 24y = (5x - 1)e^{4x}$, $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{6x}$;
28. $y'' - 3y' - 18y = (3x + 5)e^{5x}$, $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{6x}$;
29. $y'' - 4y' - 12y = (x + 1)e^x$, $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{6x}$;
30. $y'' - 5y' - 6y = (4x - 3)e^{2x}$, $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{6x}$.

Рекомендована література

1. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К. : Вид. центр “Академія”, 2003.
2. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи і моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989.
4. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990.
5. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. /За редакцією Г.Л.Кулініча. – К., 1992.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980.
7. Рудницький В.Б., Делей В.І. Вища математика. Навч. посібник. Хмельницький: “Поділля”. – 1999.
8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985.
9. Краснов М.Л. и др. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высш. школа, 1978.