

УДК 531.36:62-752+62-755

Олег О.Горошко,
Геннадій Б.Філімоніхін*,
Володимир В.Пірогов*,
Ірина І. Філімоніхіна

**Стабілізація положення осі
обертання абсолютно твердого
тіла багатомаятниковим (багато-
кульовим) автобалансиром**

*Розглянута задача стабілізації
положення осі обертання абсолютно
твердого тіла багатомаятниковим
(багатокульовим) автобалансиром. Тіло
рухається плоскопаралельно, усередині
знаходиться матеріальна точка, що
створює незрівноваженість. Поло-
ження осі обертання тіла стабілізують
маятники (кулі), які рухаються усере-
дині тіла. Встановлено, що за умови
існування стійкі основні рухи системи, у
яких вона обертається навколо головної
центральної осі інерції тіла, а решта
рухів, побічних - нестійка.*

*Ключові слова: автобалансир,
стабілізація, абсолютно тверде тіло.*

Oleg O.Goroshko,
Hennadiy B.Filimonikhin*,
Volodimir V.Pirogov*,
Irina I. Filimonikhina

**Stabilization of the position of the
axis of the rotation of the absolute
rigid body of the pendulums (balls)**

*Is considered the problem of
stabilization, of the position of the axis of
the rotation of the absolute rigid body of
the pendulums (balls) concerning itself. The
body makes plane-parallel motions. Inside
the body there is a material point, which
creates unbalanced weight. The rule of his
axis of rotation is stabilized by pendulums
(balls), which move inside a body. Is
established that under condition of
existence is stable the main motions of a
system – the motion in which the system
rotates around the central axis inertia of
the body, other motions - collateral - are
unstable.*

*Key Words: autobalancer,
stabilization, absolute rigid body.*

*E-mail: filimonikhin@narod.ru, pirogovvv@rambler.ru

Вступ. Задача стабілізації положення осі обертання абсолютно твердого тіла (АТТ) є актуальною задачею механіки [1-6]. Таким тілом може бути штучний супутник Землі або космічний апарат, положення якого у просторі стабілізується обертанням [1-5], ротор, який зрівноважується автобалансиром (АБ) [6] тощо. В роботі [1] запропоновано стабілізувати кульовим АБ положення осі обертання космічного апарата. В роботі [4] була досліджена задача стабілізації положення осі обертання АТТ двохмаятниковим (двохкульовим) АБ. При цьому була досліджена стійкість основного руху системи - в якому АТТ обертається навколо власної головної центральної осі - в малому за допомогою першого методу Ляпунова. В роботі [5] була розглянута аналогічна задача. При цьому була досліджена стійкість всіх усталених рухів шляхом дослідження на умовний екстремум повної (кінетичної) енергії системи.

В даній роботі розв'язується більш загальна задача, а саме, коли положення осі обертання АТТ стабілізує багатомаятниковий (багато-

кульовий) АБ. При цьому для дослідження стійкості усталених рухів застосовується як перший метод Ляпунова, так і дослідження на умовний екстремум.

1. Опис моделі системи. Розглядувана ізолювана система складається із несучого АТТ масою M , що стабілізується (в подальшому просто АТТ). В ідеальному випадку АТТ повинно обертатися навколо власної головної центральної осі w , яка проходить через центр мас АТТ – точку O і спрямована на нас (рис.1). Використовуємо допоміжні осі u, v , які виходять із точки O , жорстко зв'язані з АТТ, причому вісь u спрямована в бік точки D , а вісь v так, що система координат є правою. Вважаємо, що АТТ симетричне відносно площини Ouv . Всередині АТТ у цій площині знаходиться нерухома відносно АТТ матеріальна точка D масою m_d , що створює незрівноваженість (рис. 1, а). Для її компенсації усередині АТТ встановлені додаткові тіла, що створюють АБ (рис. 1, а, б). У випадку багатомаятникового АБ на вісь w встановлено n маятників масою m , фізичної довжини l , з осьовим моментом інерції ml^2 відносно осі, на яку насаджені. У випадку багатокульового АБ n куль масою m рухаються по кільцевим доріжкам радіуса l , причому кулі приймаються за матеріальні точки, або l – відстань від осі w до центра мас j -ої кулі і осьовим моментом інерції кулі відносно власного центра мас нехтуємо. Відмітимо, що в силу особливостей системи будь-яка вісь, що паралельна осі w – є головною віссю інерції системи.

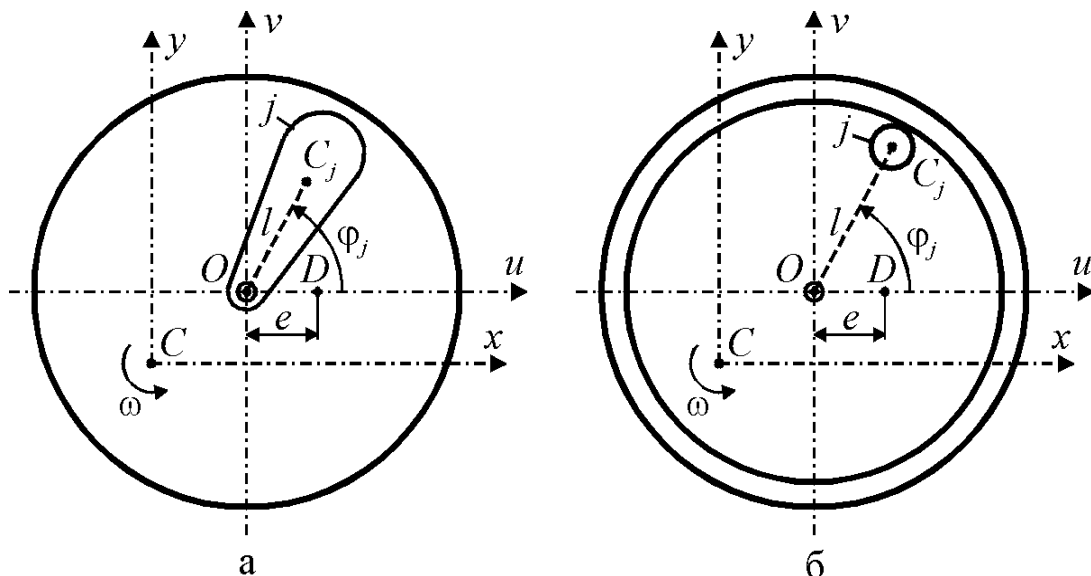


Рис. 1 – Модель АТТ і багатомаятникового (багатокульового) АБ

Спільний центр мас маятників (куль) знаходиться в одній площині з точками O, D . В цій площині знаходиться і центр мас системи – точка C (рис. 1, а). Рух АТТ визначаємо відносно осей x, y , які виходять з центра мас системи – точки C і паралельні осям u, v . Для зручності положення центра мас системи показано так, щоб координати відносно них були

додатними. Центр мас ізольованої системи рухається рівномірно і прямолінійно. Тому, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що він нерухомий.

Позначимо через J_O осьовий момент інерції АТТ відносно осі w , а через ω – кутову швидкість обертання тіла. Координати точки D відносно осей u, v , мають вид $(e, 0, 0)$.

Положення маятників (куль) визначається кутами φ_j , які відрховуються від додатного напрямку осі u . При русі маятника відносно АТТ на нього діє момент сил в'язкого опору – $Hl\dot{\varphi}_j$, де H – коефіцієнт сил в'язкого опору, $\dot{\varphi}_j$ – відносна кутова швидкість обертання маятника. При русі кулі відносно АТТ на неї діє сила в'язкого опору – $Hl\dot{\varphi}_j$, де H – коефіцієнт в'язкого опору, $l\dot{\varphi}_j$ – швидкість руху кулі по доріжці відносно АТТ.

Вважаємо, що згідно початкових умов, АТТ рухалось плоскопаралельно. Сили, які виникають при русі маятників (куль) відносно АТТ, не будуть виводити його з плоскопаралельного руху. Тому будемо вважати, що АТТ і далі рухається плоскопаралельно.

Вважаємо, що вісь w – найбільшого моменту інерції [2]. В іншому випадку вважаємо, що існує активна система з підтримання плоскопаралельного руху АТТ, причому, в силу вказаних особливостей системи, її маса і створювані сили – малі і їх можна не враховувати.

Будемо виділяти основні рухи, в яких точка D зрівноважена маятниками (кулями), точки O і C співпадають і АТТ обертається із сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо осі $w=z$. Тут і нижче будемо вважати, що $0 \leq e_0 < 1$, причому дана нерівність – достатня умова існування основних рухів. Поряд з основними рухами можуть існувати побічні рухи. В них точка D незрівноважена і АТТ обертається навколо осі z , яка не співпадає з віссю w . Відмітимо, що в силу особливостей системи вісь z – її головна центральна вісь інерції.

В подальшому, для більшої стислості, будемо посилатися на маятниковий АБ. Дослідження будемо проводити за методикою, застосованою у роботах [3-5].

2. Рівняння руху системи. Маємо такі рівняння у безрозмірному вигляді, що визначають рух системи і які одержані з допомогою:

- теореми про рух центра мас системи

$$\xi + e_0 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \cos \varphi_j = 0, \quad \eta + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sin \varphi_j = 0; \quad (1)$$

- закону збереження моменту кількості руху матеріальної системи

$$(R_j - \xi^2 - \eta^2) R_\omega + \xi \eta - \dot{\eta} \xi + \frac{1}{2 \tilde{R}_m n} \sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j = R_j; \quad (2)$$

- і теореми про зміну моменту кількості руху для маятників

$$\ddot{\phi}_j + \dot{R}_\omega + h_j \dot{\phi}_j - i\tilde{R}_m \left[\dot{z} + 2iR_\omega \dot{z} - R_\omega^2 z + i\dot{R}_\omega z \right] e^{-i\phi_j} - \left[-2iR_\omega \dot{\bar{z}} - R_\omega^2 \bar{z} - i\dot{R}_\omega \bar{z} \right] e^{i\phi_j} = 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (3)$$

де у (1-3) безрозмірні змінні і час:

$$\xi = \frac{x}{r^*}, \quad \eta = \frac{y}{r^*}, \quad z = \xi + i\eta, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}, \quad (4)$$

і безрозмірні параметри:

$$e_0 = \frac{m_d e}{nml}, \quad R_m = \frac{nm}{M_\Sigma} = 2\tilde{R}_m, \quad h = \frac{H}{ml^2 \omega_0}, \quad R_j = \frac{J_o + m_d e^2 + nml^2}{M_\Sigma r^{*2}}, \quad (5)$$

причому у (4) та (5) $r^* = nml/M_\Sigma$ - найбільша відстань, на яку може відхилитись матеріальна точка D від центру мас АТТ так, щоб її могли зрівноважувати маятники і при цьому АТТ б оберталосся навколо осі $w=z$; $M_\Sigma = M + m_d + nm$ - сумарна маса системи; t - розмірний час, i - уявна одиниця. З рівнянь (1-3) видно, що динаміку системи характеризують 5 суттєво відмінних безрозмірних параметрів:

$$h \geq 0, \quad n > 2, \quad 0 \leq e_0 < 1, \quad R_j > 0, \quad 0 < \tilde{R}_m < 0,5. \quad (6)$$

3. Приведення задачі визначення умов стабілізації положення осі обертання тіла до задачі дослідження осьового моменту інерції системи на умовний екстремум.

Оскільки на систему діють тільки дисипативні сили і її повна енергія співпадає з кінетичною, то для дисипативних систем маємо закон зміни кінетичної енергії системи у такому вигляді

$$dT/dt = -2R, \quad (7)$$

де T – кінетична енергія системи, R – дисипативна функція Релея. В зв'язку з тим, що під час перехідних процесів до системи не підводиться зовнішня і внутрішня енергія, то з часом вона прийде до усталеного руху. В ньому кінетична енергія системи набуде мінімального значення внаслідок розсіювання енергії системи за рахунок тертя, яке виникає при русі маятників відносно АТТ. В усталених рухах рух маятників відносно АТТ відсутній, тому вони будуть обертатися з ним як одне жорстке ціле, а кінетична енергія системи у безрозмірному вигляді визначатиметься формулою

$$T = \tilde{J}_z R_\omega^2 / 2, \quad (8)$$

де

$$\tilde{J}_z = R_j - \xi^2 - \eta^2 = R_j - \left(e_0 + \sum_{j=1}^n \cos \phi_j / n \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n \sin \phi_j / n \right)^2, \quad (9)$$

- безрозмірний осьовий момент інерції системи. З (8) та (9) видно, що в усталеному русі кінетична енергія системи залежить від параметрів $\xi, \eta, \phi_j, R_\omega$. В усталеному русі, враховуючи рівняння (2), кінетичну енергію системи перепишемо слідуючим чином

$$T = R_J^2 / \tilde{J}_z. \quad (10)$$

Оскільки $R_J^2/2$ - константа, то коли кінетична енергія системи приймає мінімальне значення, осьовий момент інерції системи – максимальне, і т. д. Тому далі на відміну від роботи [5], будемо досліджувати на умовний екстремум осьовий момент інерції системи, а не її кінетичну енергію.

4. Дослідження осьового моменту інерції системи на умовний екстремум у випадку $e_0 < 1$.

4.1. Дослідження на умовний екстремум осьового моменту інерції системи як функції ξ, η . Візьмемо перші частинні похідні від рівняння (9) за ξ, η і прирівняємо їх до нуля, матимемо:

$$\partial \tilde{J}_z / \partial \xi = -2\xi = 0, \quad \partial \tilde{J}_z / \partial \eta = -2\eta = 0. \quad (11)$$

Необхідна умова існування екстремуму виконується при $\xi, \eta = 0$. Зауважимо, що це відповідає основним рухам системи, бо в них АТТ обертається навколо власної центральної осі. Візьмемо другі частинні похідні від рівняння (9) за ξ і η , матимемо:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \xi^2} = -2; \quad a_{22} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \eta^2} = -2; \quad a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (12)$$

Введемо у розглядання квадратну матрицю 2-го порядку A , складену з елементів (12). Тоді її головні діагональні мінори матимуть вигляд:

$$\Delta_1 = a_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 4 > 0. \quad (13)$$

На основі критерію Сильвестра [7] отримуємо, що $\tilde{J}_z$ приймає максимальне значення. Тоді T приймає мінімальне значення, і основні рухи стійкі.

4.2. Дослідження на умовний екстремум осьового моменту інерції системи, як функції φ_j .

4.2.1. Визначення кількості усталених рухів та їх класифікація.

Візьмемо перші частинні похідні від рівняння (9) за φ_j і прирівняємо їх до нуля, матимемо слідує систему n нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\partial \tilde{J}_z / \partial \varphi_j = 2 \left(\epsilon_{u0} \sin \varphi_j - e_{v0} \cos \varphi_j \right) / n = 0, \quad /j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

де

$$e_{u0} = e_0 + \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i / n, \quad e_{v0} = \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i / n \quad (15)$$

- відповідно безрозмірна незрівноваженість по осі u та v . Аналіз системи рівнянь (14) показує, що вона має такі істотно відмінні розв'язки.

1. Основні рухи, в яких відбувається стабілізація положення осі обертання АТТ ($z = w$) і $e_{u0} = 0, \quad e_{v0} = 0$. Для визначення n невідомих кутів використовуються два алгебраїчних рівняння. Їх розв'язок дає $(n-2)$ параметричну сім'ю рухів, в яких $\xi = 0$ і $\eta = 0$.

2. Побічні рухи, в яких система незрівноважена і не відбувається стабілізації положення осі обертання АТТ ($z \neq w$). Побічні рухи розрізнятимемо за положенням маятників відносно точки D та O .

а) У випадку, коли $e_0 \neq 0$, маятники будуть відхилені вздовж осі u (рис. 2, а) і розв'язок матиме вигляд:

$$\varphi_j = k_j \pi, \quad \cos \varphi_j = \epsilon_j, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (16)$$

де k_j - числа, що задають напрямок відхилення маятників. Якщо $k_j = 0$, то маятник j відхилений у бік точки D , якщо $k_j = 1$ - у протилежний бік.

Зауважимо, що маятники створюють незрівноваженість $e = \sum_{i=1}^n \epsilon_i / n$.

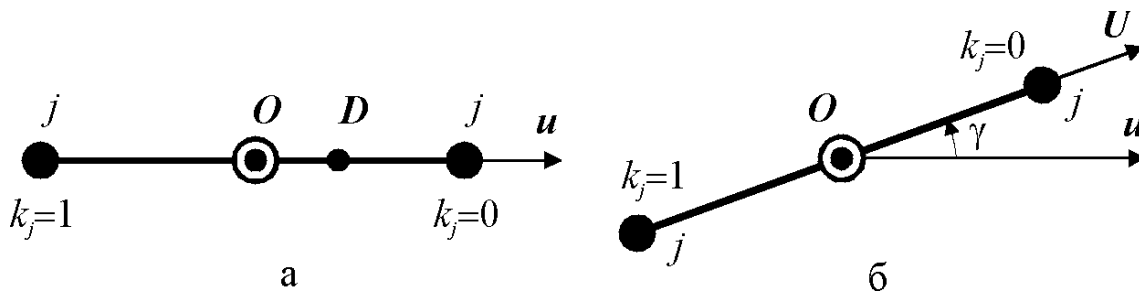


Рис. 2 – Побічні рухи при $e_0 \neq 0$ (а) та при $e_0 = 0$ (б)

Оскільки маятники однакові, то принципово різних побічних рухів буде $(n+1)$.

б) У випадку, коли $e_0 = 0$, маятники відхилені вздовж лінії U , повернутої на кут γ відносно осі u (рис. 2, б) та створюють незрівноваженість $e = \cos \gamma$. При цьому:

$$\varphi_j = \gamma + k_j \pi, \quad \cos \varphi_j = \cos \gamma \epsilon_j = \cos \gamma \epsilon_j, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (17)$$

де γ – деякий параметр. Оскільки маятники однакові і при заміні кута γ на кут $\gamma + \pi$ вони змінюють орієнтацію на протилежну, то загальна кількість істотно відмінних сімей однопараметричних рухів наступна: для парної кількості маятників - $(n/2 + 1)$; для непарної - $(n/2 + 1)/2$.

4.2.2. Дослідження стійкості побічних рухів. Для з'ясування характеру нестійкості побічних рухів дослідимо $\tilde{J}_z(\varphi_j)$ на умовний екстремум на цих рухах. Не обмежуючи загальності матимемо слідуючий вигляд других частинних похідних від виразу (9):

$$\begin{aligned} \partial^2 \tilde{J}_z / \partial \varphi_j^2 &= a_{jj} = 2 \epsilon_j \left[e_0 + \sum_{i=1, i \neq j}^n \epsilon_i / n \right] / n, \quad / j = \overline{1, n} / ; \\ \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \varphi_j \partial \varphi_i} &= \frac{\partial^2 \tilde{J}_z}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = a_{ji} = -\frac{2}{n^2} \epsilon_j \epsilon_i, \quad / j, i = \overline{1, n}, j \neq i / . \end{aligned} \quad (18)$$

Введемо у розглядання квадратну матрицю n -го порядку $A = \|a_{ji}\|_1^n$, складе

ну з елементів (18). Із застосуванням критерію Сильвестра [7] проведемо аналіз стійкості (нестійкості) побічних рухів. Розглянемо взаємовиключні випадки:

1. Якщо існують принаймні два маятника, відхилені в протилежні боки, то не обмежуючи загальності, нумерацію маятників будемо проводити так, щоб на основі перших двох мінорів можна було сказати про стійкість (нестійкість) розглядуваних побічних рухів, а саме $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Тоді для випадку коли:

а) $e_0 \neq 0$, отримаємо що:

$$\Delta_1 = 2 \left[e_0 + \sum_{i=2}^n \epsilon_i / n \right] / n, \quad \Delta_2 = -4 \left[e_0 + \sum_{i=3}^n \epsilon_i / n \right]^2 / n < 0; \quad (19)$$

б) $e_0 = 0$, отримаємо що:

$$\Delta_1 = 2 \sum_{i=2}^n \epsilon_i / n^2, \quad \Delta_2 = -4 \left[\sum_{i=3}^n \epsilon_i / n \right]^2 / n^2 < 0. \quad (20)$$

Отже, оскільки Δ_2 від'ємне, то на основі критерію Сильвестра, $\tilde{J}_z$ не може прийняти максимальне значення, а T - мінімальне. Тому розглядувані рухи нестійкі.

2. Всі маятники відхилені у один бік. Можливі два випадки: $\epsilon_i = 1$ (всі маятники відхилені в бік точки D : $k_j = 0$, $j = \overline{1, n/}$), та $\epsilon_i = -1$ (всі маятники відхилені у протилежну сторону від точки D : $k_j = 1$ $j = \overline{1, n/}$). Введемо такі позначення:

$$a = a_{jj} = 2 [\pm e_0 - \epsilon_j / n] n, \quad b = a_{ij} = a_{ji} = -2/n^2, \quad (21)$$

де тут і надалі верхній знак відповідає випадку, коли $\epsilon_i = 1$, нижній – $\epsilon_i = -1$. Можна перевірити, що неможливо відповісти про стійкість (нестійкість) розглядуваних побічних рухів на основі перших двох головних діагональних мінорів. Тому перейдемо до розгляду матриці A , складеної з елементів (21), яка має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} d + nb & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}, \quad (22)$$

де A – матриця до перетворення, A^* – отримана після перетворення з допомогою лівих і правих елементарних операцій [8]. Тут $d = a - b = 2 [\pm e_0] n$.

Для випадку, коли $\epsilon_i = \pm 1$, матимемо:

$$\Delta_1 = d + nb, \quad \Delta_2 = d + nb \bar{d}, \dots, \quad \Delta_n = d + nb \bar{d}^{n-1}, \quad (23)$$

де $d + nb = \pm 2e_0/n$. При $e_0 < 1$: коли $e \approx 1$, то $\tilde{J}_z$ - приймає мінімальне значення, а T - максимальне; коли $e \approx -1$, то $\tilde{J}_z$ не може прийняти максимальне значення, а T - мінімальне. Отже, розглядувані рухи нестійкі.

Отже, оскільки у системи стійкі основні рухи, а побічні – нестійкі, то з часом будуть здійснюватися тільки основні рухи. Відмітимо, що усталені рухи системи можна одержати і з рівнянь (1-3), поклавши в цих рівняннях похідні рівними нулю. Але для відповіді на питання про характер стійкості (нестійкості) рухів необхідне дослідження кінетичної енергії (осьового моменту інерції) системи на умовний екстремум.

5. Дослідження стійкості основного усталеного руху першим методом Ляпунова для випадку $e_0 < 1$. Дане дослідження дає можливість визначити швидкість затухання перехідних процесів (за наявності коливальних системи - і їх частоту) у випадку, коли система була виведена, внаслідок збурень, з будь-якого руху із сім'ї основних. Будемо використовувати диференціальні рівняння (3). Збурений рух має вигляд:

$$z = s; \quad \varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \alpha_j; \quad R_\omega = 1 + p, \quad (24)$$

де s, α_j, p - збурення ($|s|, |\alpha_j|, |p| \ll 1$); $0, \tilde{\varphi}_j, 1$ - незбурений рух. З рівнянь (1) та (2), враховуючи, що для основного руху $\xi, \eta = 0$, знайдемо:

$$s = -\sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \alpha_j e^{i\tilde{\varphi}_j}, \quad \bar{s} = \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \alpha_j e^{-i\tilde{\varphi}_j}, \quad p = -\frac{1}{2\tilde{R}_m R_j} \sum_{j=1}^n \frac{\dot{\alpha}_j}{n}. \quad (25)$$

Стійкість основного руху будемо досліджувати за параметром s , який визначає відхилення головної центральної осі тіла w від головної центральної осі системи z . Тому систему з n рівнянь (3) приводимо до системи з мінімальною кількістю рівнянь відносно параметра s . Введемо нову змінну:

$$\beta = \sum_{j=1}^n \alpha_j / n, \quad (26)$$

- „середній” кут повороту маятників (куль). Враховуючи вирази (25), матимемо таку систему n лінійаризованих диференціальних рівнянь динаміки маятників:

$$D_l = \ddot{\alpha}_l + h_l \dot{\alpha}_l - \left(\frac{1}{2\tilde{R}_m R_j} \right) i\tilde{R}_m \left[\frac{1}{2} + 2is - s e^{-i\tilde{\varphi}_l} - \left(-\frac{1}{2} - 2i\bar{s} - \bar{s} e^{i\tilde{\varphi}_l} \right) \right] = 0, \quad /l = \overline{1, n}/. \quad (27)$$

Якщо відбувається певний основний рух із сім'ї основних, то $s = \bar{s} = 0$, і

$$e_0 = -\sum_{l=1}^n e^{i\tilde{\varphi}_l} / n, \quad e_0 = -\sum_{l=1}^n e^{-i\tilde{\varphi}_l} / n. \quad (28)$$

Введемо позначення

$$\mu = \dot{\beta}, \quad \dot{\mu} = \ddot{\beta}. \quad (29)$$

Тоді, з огляду на вирази (28) та (29), з n рівнянь (27) отримаємо слідувачу систему рівнянь з трьома незалежними змінними μ, s та $\bar{s}$:

$$\sum_{l=1}^n D_l / n = \dot{\mu} + h\mu - \left(\frac{1}{2\tilde{R}_m R_J} - i\tilde{R}_m e_0 \right) + 2i\dot{s} - s - \left(\frac{1}{2\tilde{R}_m R_J} - i\tilde{R}_m e_0 \right) - 2i\dot{\bar{s}} - \bar{s} = 0,$$

$$L = -\sum_{l=1}^n D_l i e^{i\tilde{\varphi}_l} / n = \dot{s} + h\bar{s} - \left(\frac{1}{2\tilde{R}_m R_J} - i\tilde{R}_m e_0 \right) + \tilde{R}_m \left[\left(\frac{1}{2\tilde{R}_m R_J} - i\tilde{R}_m e_0 \right) + 2i\dot{s} - s \right] \left(\frac{1}{2\tilde{R}_m R_J} - i\tilde{R}_m e_0 \right) - 2i\dot{\bar{s}} - \bar{s} \tilde{b}_{12} = 0, \quad \bar{L} = 0, \quad (30)$$

де

$$\tilde{b}_{12} = \sum_{l=1}^n e^{2i\tilde{\varphi}_l} / n, \quad |\tilde{b}_{12}| < 1 \quad (31)$$

- сталі параметри, обчислені на поточному основному русі із сім'ї, в околі якого рухається система. Як видно з системи рівнянь (30), стійкість будь-якого руху системи із сім'ї основних визначають змінні $s, \bar{s}$ та μ .

Введемо позначення:

$$qR_m = 1/2\tilde{R}_m R_J = nml^2 / (J_0 + m_d e^2 + nml^2), \quad (32)$$

де $J_0 = M\rho_0^2$; ρ_0 - радіус інерції АТТ. Тоді $q = M_\Sigma l^2 / (M\rho_0^2 + m_d e^2 + nml^2)$.

Подано характеристичне рівняння системи (30) у вигляді поліному:

$$\Delta \left(\frac{1}{n} \right) = a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5,$$

де $a_0 = 1 - qR_m - R_m \left[-qR_m (-e_0) \right]$; $a_1 = h \left[-2qR_m - R_m \right] - qR_m (-e_0)$;

$$a_2 = h^2 \left[-qR_m + R_m \right] - h^2 - qR_m (-e_0) + \frac{R_m^2}{4} \left[qR_m e_0 (-\tilde{b}_{12} - \tilde{b}_{12}) + \right.$$

$$\left. + (-qR_m) (-\tilde{b}_{12} \tilde{b}_{12}) \right]; \quad a_3 = h \left[h^2 + R_m \right] - qR_m (-e_0) \left[h^2 (-\tilde{b}_{12} \tilde{b}_{12}) \right];$$

$$a_4 = R_m h^2 + \frac{R_m^2}{4} \left[qR_m e_0 (-\tilde{b}_{12} - \tilde{b}_{12}) + (-qR_m) (-\tilde{b}_{12} \tilde{b}_{12}) \right];$$

$$a_5 = R_m^2 h (-\tilde{b}_{12} \tilde{b}_{12}) / 4. \quad (33)$$

Отриманий поліном п'ятого степеня має дійсні коефіцієнти, тому можливі наступні варіанти: 1) всі корені дійсні; 2) три корені дійсні і одна пара комплексно спряжених; 3) один корінь дійсний і дві пари комплексно-спряжених.

Дослідимо стійкість основних рухів у випадку, коли маса маятників (куль) набагато менша маси системи, тобто $R_m \ll 1$, ($q \sim 1$). Тоді корені характеристичного рівняння системи (30) мають такі розкладання:

$$\lambda_{1,2,3} \approx -h, \quad \lambda_4 \approx R_m \left(-1 + \sqrt{\tilde{b}_{12} \tilde{b}_{12}} \right) / h, \quad \lambda_5 \approx R_m \left(-1 - \sqrt{\tilde{b}_{12} \tilde{b}_{12}} \right) / h, \quad (34)$$

тут $0 < \tilde{b}_{12} \tilde{b}_{12} < 1$, в силу рівнянь (31). Оскільки корені (34) від'ємні, то основні рухи стійкі, а перехідні процеси аперіодичні.

Висновки. Для розглядуваної ізольованої матеріальної системи, складеної з АТТ, що стабілізується, багатомаятникового (багато

кульового) АБ, і матеріальної точки, яка створює незрівноваженість встановлено, що:

- 1) система має $n-2$ параметричну сім'ю основних рухів, в яких точка зрівноважена і відбувається стабілізація положення осі обертання АТТ ($z = w$);
- 2) система має побічні рухи, в яких точка незрівноважена і не відбувається стабілізації положення осі обертання АТТ ($z \neq w$), причому при $e_0 \neq 0$ для парної і непарної кількості маятників існують $(n+1)$ істотно відмінних побічних рухів, а при $e_0 = 0$ для парної кількості маятників - $n/2 + 1$, для непарної - $(n+1)/2$ істотно відмінних однопараметричних сімей побічних рухів;
- 3) основні рухи стійкі, а побічні – нестійкі;
- 4) з часом система буде здійснювати певний рух із сім'ї основних, тобто відбудеться стабілізація положення осі обертання АТТ;
- 5) у випадку, коли $R_m \ll 1$ і система була виведена з основного руху, перехідні процеси повернення системи до певного основного руху із сім'ї - аперіодичні.

Література

1. Automatic balancer: patent 3,433,534 US, / G.E.Mercer (US). Serial No. -616,429. Filed Feb. 10, 1967. Patented Mar. 18, 1969.
2. Pringle R.Jr. Stability of the Force-Free Motions of a Dual-Spin Spacecraft. //AIAA Journal, Vol. 7, No. 6, 1969, pp. 1054-1063.
3. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – т.35. №6. – С. 651-658.
4. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізолюваного абсолютно твердого тіла // Вісник, математика-механіка. Київський національний університет. Вип. №7-8, 2002. С.67-71.
5. Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла маятниковим (кульовим) автобалансиром / Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. н., вип. № 3, 2004. С.95-102.
6. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352с.
7. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. - М., "Наука", 1976 г., 320 стр.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: "Наука", 1966. - 576 с.

Надійшла до редакції 22.06.2005.

Горошко О. О., Філімоніхін Г. Б., Пирогов В. В., Філімоніхіна І. І. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2005. - №4. - с. 67-76.