

ствующим подбором поверхностной нагрузки без введения дополнительных кинематических условий на поверхности слоистой среды.

Этот факт можно использовать при рассмотрении задач в горной механике, геофизике и других областях техники. Эти выводы имеют место лишь для рассмотренных параметров среды. Для других значений E_m , ν_m , ρ_m необходимы дополнительные исследования.

1. Бабич И. Ю., Гузь А. Н., Шульга Н. А. Исследование динамики и устойчивости композитных материалов в трехмерной постановке: Обзор // Прикл. механика.— 1982.—18, № 1.— С. 3—27.
2. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел.— Киев: Наук. думка, 1971.—276 с.
3. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях.— Киев: Наук. думка, 1973.—274 с.
4. Гузь А. Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Внутренняя неустойчивость // Прикл. механика.— 1985.—21, № 11.— С. 3—17.
5. Гузь А. Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Поверхностная неустойчивость // Там же.— 1986.—22, № 1.— С. 24—35.
6. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел.— Киев: Виш. школа, 1986.—504 с.
7. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел.— Киев: Наук. думка, 1985.—280 с.
8. Гузь А. Н., Чехов В. Н. Поверхностная неустойчивость слоистых материалов при малых и конечных деформациях // Механика композит. материалов.— 1984.— № 5.— С. 838—843.
9. Гузь А. Н., Чехов В. Н., Шульга Н. А. Поверхностная неустойчивость слоистого полупространства периодической структуры // Докл. АН СССР.— 1982.— 266, № 6.— С. 1306—1310.
10. Гузь А. Н., Чехов В. Н. Применение вариационных методов в задачах устойчивости слоистых полуграниченных сред // Там же.— 1985.—283, № 5.— С. 1123—1126.
11. Кузнецов С. В. О потере устойчивости слоя на упругом основании // Механика твердого тела.— 1975.— Вып. 3.— С. 164—168.
12. Чехов В. Н. Поверхностная неустойчивость слоистой среды, сопряженной с однородным полупространством // Прикл. механика.— 1984.—20, № 11.— С. 35—42.
13. Чехов В. Н. Влияние поверхностной нагрузки на устойчивость слоистых тел // Там же.— 1988, 24, № 9.— С. 10—17.

Ин-т механики АН УССР, Киев

Поступила 28.06.88

УДК 539.376

В. И. Козлов, С. Н. Якименко

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Изучение термомеханического поведения вязкоупругих тел при гармоническом нагружении представляет интерес при прогнозировании прочности и работоспособности различных элементов виброзащитных и демпфирующих систем. При этом возможно существенное повышение температуры колеблющегося тела, возникающее вследствие диссипации механической энергии. Диссипативный разогрев может при определенных условиях решающим образом влиять на функциональную способность конструктивных элементов.

Общая система уравнений связанной динамической теории термовязкоупругости, описывающая термомеханическое поведение вязкоупругих тел, является существенно нелинейной. Ее нелинейность обусловлена как зависимостью механических свойств материала от температуры и от компонент тензора деформаций, так и связанностью механических и тепловых полей. В случае постоянных механических характе-

ристик материала исходная система распадается на линейную систему вязкоупругости и уравнение энергии с известным источником тепла, который вычисляется после решения линейной задачи вязкоупругости.

Общий обзор по применению различных аналитических и численных методов решения квазистатических и динамических задач термовязкоупругости при гармонических нагрузках содержится в работах [2, 3, 4, 6, 8].

В настоящей статье в нелинейной постановке исследуется динамическое поведение и температура диссипативного разогрева вязкоупругого тела вращения при осесимметричном нагружении. Вязкоупругие свойства материала учитываются с помощью комплексных характеристик [2], зависящих от частоты и температуры. При учете зависимости свойств материала от температуры для решения нелинейной задачи можно использовать метод пошагового интегрирования [2, 3, 8]. При этом на каждом шаге необходимо решать задачу вязкоупругости с механическими характеристиками, вычисленными на предыдущем шаге по времени. Решение линейных уравнений вязкоупругости и теплопроводности на каждой итерации находится методом конечных элементов, для чего используется вариационная формулировка этих задач [4]

$$\delta \mathcal{E} = 0; \quad \delta I = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V [A_1 (\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2) + A_2 \varepsilon_{rz}^2 + A_3 (\varepsilon_{rr} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \rho \omega^2 (u^2 + w^2)] dV - \int_{\Sigma} (t_{nr} u + t_{nz} w) d\Sigma; \quad (2)$$

$$I = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + 2 \int_{T_0}^T \frac{\lambda}{a} \frac{\partial T}{\partial t} dT - 2DT \right\} dV + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \alpha (T - 2\theta) T d\Sigma;$$

$$A_1 = \frac{K + 4G}{3}; \quad A_2 = 4G; \quad A_3 = \frac{2(K - 2G)}{3};$$

$u = u' + iu''$, $w = w' + iw''$ — комплексные амплитуды перемещений; ε_{ij} — комплексные амплитуды тензора деформаций; ω — круговая частота; ρ — плотность материала; t_{nr} , t_{nz} — проекции поверхностной силы \vec{t}_n , действующей на поверхность тела с внешней нормалью \vec{n} ; T — осредненная за цикл температура; λ , a , α — коэффициенты теплопроводности, температуропроводности, теплоотдачи; θ — температура окружающей среды; $G(\omega, T) = G_1(\omega, T) + iG_2(\omega, T)$, $K(\omega, T) = K_1(\omega, T) + iK_2(\omega, T)$ — комплексные модули сдвига и объемного расширения. Для осесимметричной задачи осредненная за цикл диссипативная функция определяется по формуле

$$D = \frac{\omega}{2} \left[2G_2 (|\varepsilon_{rr}|^2 + |\varepsilon_{zz}|^2 + |\varepsilon_{\varphi\varphi}|^2 + 2|\varepsilon_{rz}|^2 + \frac{K_2 - 2G_2}{3} (|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\varphi\varphi}|^2) \right]. \quad (3)$$

Решение вариационной задачи (1) осуществляется методом конечных элементов, предполагая при этом, что в пределах четырехугольного элемента перемещения и температура аппроксимируются квадратичными функциями [5]

$$w = \sum_{i=1}^8 \varphi_i w_i; \quad u = \sum_{i=1}^8 \varphi_i u_i; \quad T = \sum_{i=1}^8 \varphi_i T_i, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1); \quad \varphi_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1); \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1); \quad \varphi_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1); \\ \varphi_5 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta); \quad \varphi_6 = \frac{1}{2} (1 - \eta^2)(1 + \xi); \\ \varphi_7 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta); \quad \varphi_8 = \frac{1}{2} (1 - \eta^2)(1 - \xi); \end{aligned} \quad (5)$$

w_i, u_i, T_i — значения амплитуд перемещений и температуры в узловых точках.

Координаты местной системы ξ, η связаны с цилиндрическими z, r и координатами узловых точек z_i, r_i соотношениями

$$z = \sum_{i=1}^8 \varphi_i z_i; \quad r = \sum_{i=1}^8 \varphi_i r_i; \quad \sum_{i=1}^8 \varphi_i = 1. \quad (6)$$

После подстановки выражений (4) в (2) условие стационарности функционала $\delta \mathcal{E} = 0$ приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд компонент вектора перемещений [4]

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_i} = 0. \quad (7)$$

Для четырехугольного элемента, все стороны которого могут совпадать с границей тела, производные для первого узла имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i} &= a_{11}^m w_1 + b_{11}^m u_1 + a_{12}^m w_2 + b_{12}^m u_2 + \dots + a_{18}^m w_8 + b_{18}^m u_8 + f_1^{(z,m)}; \\ \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_i} &= c_{11}^m w_1 + d_{11}^m u_1 + c_{12}^m w_2 + d_{12}^m u_2 + \dots + c_{18}^m w_8 + d_{18}^m u_8 + f_1^{(r,m)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{12}^m &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_1 \Phi_1 \Phi_2 + \frac{1}{4} A_2 \Psi_1 \Psi_2 - \rho \omega^2 \varphi_1 \varphi_2 \right) r |J| d\xi d\eta; \\ b_{12}^m &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{4} A_2 \Psi_1 \Phi_2 + \frac{1}{2} A_3 \Phi_1 \left(\Psi_2 + \frac{1}{r} \varphi_2 \right) \right] r |J| d\xi d\eta; \\ a_{12}^m &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[A_1 \left(\Psi_1 \Psi_2 + \frac{1}{r^2} \varphi_1 \varphi_2 \right) + \frac{1}{4} A_2 \Phi_1 \Phi_2 + \right. \\ &\quad \left. + A_3 \frac{1}{r} (\Psi_1 \varphi_2 + \varphi_1 \Psi_2) - \rho \omega^2 \varphi_1 \varphi_2 \right] r |J| d\xi d\eta; \\ f_1^{(z,m)} &= - \int_L t_{n_z} \varphi_1 r dl; \quad f_1^{(r,m)} = - \int_L t_{nr} \varphi_1 r dl; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Phi_i = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right); \quad \Psi_i = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right);$$

$$J = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi};$$

$$a_{ij} = a_{ji}; \quad c_{ij} = b_{ji}; \quad d_{ij} = d_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8).$$

Записывая аналогичные соотношения для других точек четырехугольника и суммируя выражения (8) по всем элементам, на которые разбито меридиональное сечение, получим систему алгебраических уравнений относительно узловых значений компонент вектора перемещений.

Аппроксимируя коэффициент теплоотдачи и температуру окружающей среды квадратичными функциями

$$\alpha = \sum_{i=1}^8 \varphi_i \alpha_i; \quad \theta = \sum_{i=1}^8 \varphi_i \theta_i$$

и учитывая выражение (4), из условия стационарности функционала $\delta I = 0$ для определения узловых значений температуры T_i получаем систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнение, записанное для первого узла четырехугольника имеет вид

$$H_{11}^m \frac{dT_1}{dt} + H_{12}^m \frac{dT_2}{dt} + \dots + H_{18}^m \frac{dT_8}{dt} + (A_{11}^m + B_{11}^m) T_1 +$$

$$+ (A_{12}^m + B_{12}^m) T_2 + \dots + (A_{18}^m + B_{18}^m) T_8 = D_1^m + B_{11}^m \theta_1 + B_{12}^m \theta_2 + \dots + B_{18}^m \theta_8, \quad (10)$$

решение которого определяется при начальных условиях

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_8 = T_0. \quad (11)$$

Здесь

$$A_{12}^m = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda (\Psi_1 \Psi_2 + \Phi_1 \Phi_2) r |J| d\xi d\eta;$$

$$H_{12}^m = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\lambda}{a} \varphi_1 \varphi_2 r |J| d\xi d\eta;$$

$$B_{12}^m = \int_L \alpha \varphi_1 \varphi_2 r dl; \quad D_1^m = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 D \varphi_1 r |J| d\xi d\eta.$$

Одним из наиболее простых и достаточно точных приемов решения уравнений (10) является метод Бубнова — Галеркина [1]. Аппроксимируя изменение температуры на интервале времени $t + \tau$ линейной функцией и применяя процедуру метода Бубнова — Галеркина, для определения узловых значений T_i получаем систему линейных алгебраических уравнений. Уравнение, записанное для первой точки четырехугольника, каждая из сторон которого может совпадать с границей тела имеет вид

$$\left[\frac{1}{\tau} H_{11}^m + (1 - \gamma) (A_{11}^m + B_{11}^m) \right] T_1(t + \tau) + \left[\frac{1}{\tau} H_{12}^m + (1 - \gamma) (A_{12}^m + B_{12}^m) \right] \times$$

$$\times T_2(t + \tau) + \dots + \left[\frac{1}{\tau} H_{18}^m + (1 - \gamma) (A_{18}^m + B_{18}^m) \right] T_8(t + \tau) =$$

$$= \left[\frac{1}{\tau} H_{11}^m - \gamma (A_{11}^m + B_{11}^m) \right] T_1(t) + \left[\frac{1}{\tau} H_{12}^m - \gamma (A_{12}^m + B_{12}^m) \right] T_2(t) + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{1}{\tau} H_{18}^m - \gamma (A_{18}^m + B_{18}^m) \right] T_8(t) + D_1^m + B_{11}^m \theta_1 + B_{12}^m \theta_2 + \dots + B_{18}^m \theta_8. \quad (12)$$

Исследование численного решения задачи теплопроводности показывает, что наилучшая точность достигается при $\gamma=1/3$. При $\gamma=0$ получаем неявную разностную схему решения уравнения (10).

Предлагаемый подход применяется к исследованию термомеханического поведения вязкоупругого кругового цилиндра конечной длины с заданными на торцах перемещениями $w=w_0 \cos \omega t$, $u=0$ и свободной от нагрузки боковой поверхностью. Предполагается, что цилиндр находится в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой, температура которой равна начальной $\theta=T_0$ при коэффициентах теплоотдачи α_1 и α_2 на цилиндрической поверхности $r=R$ и торцах $z=\pm H$ соответственно.

Поскольку меридиональное сечение цилиндра и граничные условия симметричны относительно плоскости $z=0$, при вычислении напряженно-деформированного состояния и температурного поля достаточно рассмотреть четверть меридионального сечения цилиндра.

В качестве основных вязкоупругих характеристик выбираются комплексный модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν . В результате решения задачи определяются перемещения, деформации, напряжения, температура диссипативного разогрева, а также безразмерная динамическая жесткость

$$\beta = \frac{H \int_0^R \sigma_{zz}(r, H) r dr}{(1 + \nu) G(\omega, T_0) \omega_0 R^2}$$

и коэффициент поглощения энергии [7]

$$\psi = \frac{4\pi \iiint_F D r dr dz}{\omega \mathcal{E}_1},$$

где

$$\mathcal{E}_1 = \iiint_F \left[2G_1 (|\varepsilon_{rr}|^2 + |\varepsilon_{zz}|^2 + |\varepsilon_{\varphi\varphi}|^2 + 2|\varepsilon_{rz}|^2) + \frac{K_1 - 2G_1}{3} (|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\varphi\varphi}|^2) \right] r dr dz.$$

Численные результаты получены для цилиндра из резины ИРП-1374. Составляющие комплексного модуля сдвига G представляются выражениями

$$G_1 = a_1 \hat{\omega}^b e^{-2,3b\varphi}; \quad G_2 = G_1 c \hat{\omega}^d e^{-2,3d\varphi}, \quad (13)$$

где зависящая от температуры функция φ имеет вид

$$\varphi = \frac{8,86(T - T_r)}{101,6 + T - T_r}, \quad (14)$$

а a_1, b, c, d — постоянные материала; T_r — температура приведения.

В расчетах использовались следующие значения параметров: $a_1 = 1,35 \cdot 10^6$ Па; $b=0,04$; $c=0,06$; $d=0,18$, $\nu=0,495$; $\rho=1200$ кг/м³; $\lambda = 0,22$ Вт/м·град; $a=1,183 \cdot 10^{-7}$ м²/с; $G_0=1,18 \cdot 10^6$ Па; $\hat{\omega} = \omega/\omega_0$; $\omega_0 = 1$ с⁻¹; $\alpha_1=8,8$ Вт/м²·град; $\alpha_2=1153$ Вт/м²·град; $T_0=20$ °С; $T_r = -20$ °С; $R=0,1$ м; $H=0,1$ м, $\omega_0=5 \cdot 10^{-5}$ м.

С целью оценки точности предлагаемого подхода вначале рассматривалась линейная задача для случая независимых от температуры свойств материала (в выражении (14) полагается $T=T_0$).

На рис. 1 показана зависимость модуля комплексной жесткости от безразмерной частоты $\Omega = \omega R (\rho/G_0)^{1/2}$. Результаты, отмеченные точками, получены методом конечных элементов, а сплошные линии соот-

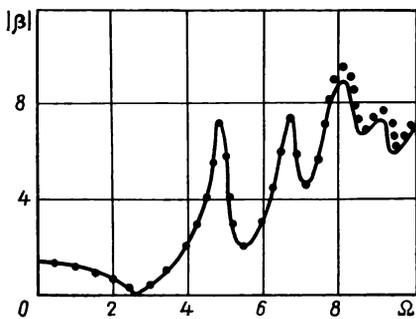


Рис. 1

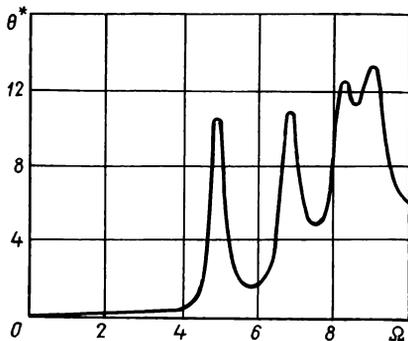


Рис. 2

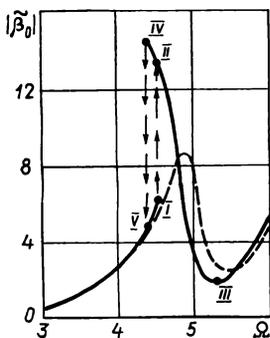


Рис. 3

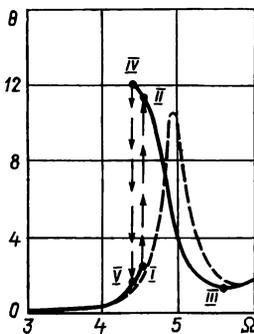


Рис. 4

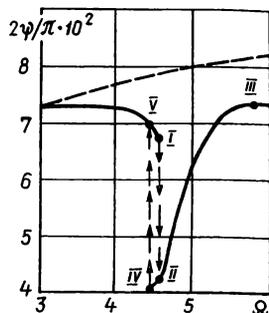


Рис. 5

ветствуют точному решению [6]. Как видно, при выбранной дискретизации области результаты конечноэлементного подхода достаточно хорошо согласуются с результатами аналитического решения для диапазона частот до 5 резонанса.

На рис. 2 показана частотная зависимость максимальной по объему установившейся температуры $\theta^* = (T-T_0)H^2 \cdot 10^{-6} / (T_0-T_r) \omega_0^2$.

Далее данный подход применяется для решения нелинейной задачи (модуль сдвига G считается зависящим от температуры согласно формулам (13, 14)).

На рис. 3 показано изменение динамической жесткости $\tilde{\beta}_0 = H \int_0^R \sigma_{zz}(r, H) r dr / (1 + \nu) G_0 \omega_0 R^2$ в зависимости от частоты, включая пер-

вый резонанс. Как видно, учет зависимости свойств материала от температуры приводит к качественному отличию результатов и позволяет выявить нелинейный характер поведения цилиндра. При возрастании частоты нагружения происходит перескок из точки I в точку II ($\Omega_I = 4,592$). При дальнейшем увеличении частоты реализуется участок II—III. При уменьшении Ω процесс идет по участку III—IV. Из точки IV происходит перескок в точку V ($\Omega_{IV} = 4,496$). В диапазоне частот $\Omega_{IV} < \Omega < \Omega_I$ существует два устойчивых состояния.

Изменение максимальной по объему установившейся температуры θ^* (на рис. 4 $\theta = \theta^*$) и коэффициента поглощения энергии $\frac{\psi}{2\pi} \cdot 10^2$ (на рис. 5 $2\psi/\pi \cdot 10^2$ следует читать $\frac{\psi}{2\pi} \cdot 10^2$) в зависимости от частоты нагружения показано соответственно на рис. 4, 5. Сплошные линии на рис. 3—5 соответствуют нелинейной постановке задачи, штриховые — линейной.

При вычислениях четверть меридионального сечения цилиндра аппроксимировалась 60 четырехугольными восьмиузловыми элементами. Использование элементов более высокого порядка по сравнению с элементами, применяемыми в [2, 3], позволяет повысить точность вычислений в области резонансных частот.

1. Грибанов В. Ф., Паничкин Н. Г. Связанные и динамические задачи термоупругости.— М.: Машиностроение, 1984.—184 с.
2. Гуменюк Б. П., Карнаухов В. Г., Козлов В. И. Численное исследование термомеханического поведения вязкоупругих тел при плоском гармоническом деформировании // Прикл. механика.— 1985.—21, № 1.— С. 10—16.
3. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости.— Киев: Наук. думка, 1982.—260 с.
4. Козлов В. И., Карнаухов В. Г. Конечноеlementный метод исследования термомеханического поведения вязкоупругих тел вращения при циклическом нагружении // Прикл. механика.— 1983.—19, № 11.— С. 40—45.
5. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Термоупругость.— Киев: Наук. думка, 1987.—264 с.— (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 1).
6. Сенченков И. К., Гуменюк Б. П. К задаче об осесимметричных вынужденных колебаниях вязкоупругого цилиндра конечной длины при кинематическом возбуждении // Прикл. механика.— 1981.—17, № 9.— С. 111—115.
7. Сенченков И. К., Карнаухов В. Г., Червинко О. П. О коэффициенте поглощения энергии при циклическом деформировании вязкоупругих материалов и элементов конструкций из них // Там же.— 1988.—24, № 9.— С. 80—89.
8. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В. Н., Дырда В. И., Карнаухов В. Г. и др.— Киев: Наук. думка, 1987.—288 с.

Ин-т механики АН УССР, Киев

Поступила 11.02.88

УДК 539.376

Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов

ОБЪЕМНОЕ ОТВЕРЖДЕНИЕ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ УПРУГИХ ТЕЛ

§ 1. Постановка задачи. Процессы отверждения, протекающие в реальных телах, можно условно разделить на три вида. Первый из них — это фронтальное отверждение, при котором в затвердевающем теле четко выражена граница между областями, занятыми веществом в твердом и жидком агрегатных состояниях. Такой тип фазовых переходов реализуется при наличии существенных градиентов температуры в теле и отсутствии переохлаждения. Определению напряженного состояния в упругих и вязкоупругих телах в условиях фронтального отверждения посвящены, например, работы [2, 5, 6, 9, 12].

Второй вид — это объемное отверждение, при котором в каждом элементарном объеме тела содержится вещество как в твердой, так и в жидкой фазах. Процесс отверждения заключается в увеличении объемной концентрации вещества в твердом агрегатном состоянии (сте-