

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА І ТРАНСПОРТУ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ТРАНСПОРТНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології»

КРОПИВНИЦЬКИЙ – 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ БУДІВНИЦТВА І ТРАНСПОРТУ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ТРАНСПОРТНИХ ТЕХНОЛОГІЯХ.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології»

Затверджено
На засіданні кафедри
Вищої математики та фізики
Протокол №8 від 01.06.2022

КРОПИВНИЦЬКИЙ – 2022

Методи прикладної математики в транспортних технологіях. Елементи теорії множин. Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Транспортні технології» / Філімоніхіна І.І.– Кропивницький: ЦНТУ, 2022 р. – 39 с.

У методичних рекомендаціях розкрито основні теоретичні положення розділу “Множини” курсу дискретної математики, наведені приклади розв’язання задач з розгорнутими поясненнями, варіанти завдань для виконання самостійних робіт, список навчальної літератури.

Методичні рекомендації будуть корисними для студентів денної і заочної форми навчання спеціальності “Транспортні технології” і призначені для виконання самостійних робіт.

© І.І. Філімоніхіна

© ЦНТУ 2022

Зміст

ПЕРЕДМОВА	5
1.1 Основні поняття теорії множин	6
1.2. Основні числові множини	8
1.3. Підмножини	8
1.4 Операції над множинами	10
Задачі для самостійної роботи	18
1.5. Доведення рівностей з множинами.....	19
Задачі для самостійної роботи	21
1.6. Формули включення-виключення	21
ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ	26
Список літератури.....	39

ПЕРЕДМОВА

Дискретна математика (інші назви: дискретний аналіз, скінченна математика) – це розділ сучасної математики, в якому вивчають властивості математичних об'єктів дискретного характеру.

Курс дискретної математики є базою для таких спеціальних дисциплін як обчислювальна техніка, інфокомунікаційні системи і мережі, основи теорії кодування, цифрова обробка сигналів, інженерна та комп'ютерна графіка та інших.

Традиційно до курсу дискретної математики відносять такі розділи: теорія множин, комбінаторика, алгебраїчні структури, математична логіка, логіка висловлювань і предикатів, теорія графів, теорія алгоритмів і автоматів.

Теорія множин лежить в основі більшості математичних дисциплін і є універсальною мовою для опису і дослідження всіляких структур, як в математиці, так і в інформатиці.

Для полегшення процесу навчання, студентам пропонується докладний виклад теми "Елементи теорії множин" з достатньою кількістю прикладів та завдання для самостійної роботи. Призначено для студентів другого курсу спеціальності «Транспортні технології».

1.1 Основні поняття теорії множин

У повсякденному житті і практичній діяльності часто потрібно говорити про деякі сукупності різних об'єктів, предметів, понять, чисел, символів тощо. Наприклад, сукупність деталей механізму, аксіом геометрії, чисел натурального ряду, літер алфавіту. На основі інтуїтивних уявлень про такі сукупності сформувалося математичне поняття множини. Великий внесок в теорію множин зробив Георг Кантор: «Множина – це багато, що мислиться як єдине ціле». Пізніше, завдяки його дослідженням, теорія множин стала повністю визначеним та обґрунтованим розділом математики, а у теперішній час набула фундаментального значення.

Теорія множин є основою для усіх розділів дискретної математики та комп'ютерних наук в цілому, є однією з основ функціонального аналізу, топології, загальної алгебри та у теперішній час проводяться глибокі дослідження у самій теорії множин, що пов'язані з основами математики.

Теорія множин разом із іншими розділами дискретної математики має багато корисних застосувань у програмуванні. Наприклад, вона використовується для побудови систем керування базами даних, при розбудові та організації роботи комп'ютерних мереж, мережі Інтернет.

Інтуїтивне поняття множини: *множина – сукупність деяких різних об'єктів, яким властиве дещо спільне і які можна розглядати як єдине ціле.*

Об'єкти, з яких складається множина, називаються елементами множини.

Множини, як правило, позначають великими латинськими літерами $A, B, X, Y, \dots$, а їх елементи – малими латинськими літерами $a, b, x, y, \dots$.

Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою, і позначається символом $\emptyset$.

Приклад 1.1.1

Порожні множини:

- 1) множина квадратних тричленів, що мають більше двох коренів;
- 2) множина живих людей, вік яких більше 1000 років;
- 3) множина слонів, що літають.

Задати множину – вказати правило, яке дозволяє з'ясувати, чи є певний об'єкт елементом даної множини.

Найпростіший спосіб задання множини – **безпосередній перелік** усіх її елементів всередині фігурних дужок через кому, наприклад,

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

При цьому порядок розташування елементів у множині **неістотний**.

Множину також можна задати, вказавши **характерну властивість**, якою володіють усі елементи множини. При цьому множину X з елементів x , що задовольняють деяку умову $p(x)$, позначають так:

$$X = \{x \mid p(x)\} \text{ або } X = \{x : p(x)\}.$$

Наприклад,

$$A = \{x \mid x - \text{просте число}\} \quad (A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\})$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 15 = 0\} \quad (B = \{-5, 3\})$$

Якщо елемент a входить до складу множини A (елемент a міститься у множині A), то символічно це записують $a \in A$, інакше $a \notin A$. Нехай, наприклад, $A = \{1, 2, 3\}$, тоді $3 \in A$, $7 \notin A$.

Множина A називається **підмножиною** множини B (позначається $A \subset B$), якщо кожен елемент множини A належить також і множині B . Нехай, наприклад, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, тоді $A \subset B$.

Множини A і B називаються **рівними** (позначається $A = B$), якщо вони складаються із однакових елементів. Якщо множини A і B **не рівні**, то це позначають $A \neq B$.

Нехай, наприклад, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 1, 5\}$, тоді $A = B$.

Очевидно, що $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subset B$ і $B \subset A$.

Множина називається **скінченною**, якщо кількість її елементів виражається деяким числом.

Множина, яка не є скінченною, називається **нескінченною**.

Злічена множина – це множина, усі елементи якої можна перенумерувати: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Потужністю множини називається кількість елементів скінченної множини і позначається $|A|$.

Приклад 1.1.2

$$1) |\emptyset| = 0;$$

$$2) |\{a, b, c, d\}| = 4;$$

3) $\mathbb{N}$ – нескінченна злічена множина.

1.2. Основні числові множини

До основних числових множин, які розглядаються у математиці, відносять:

1) Множина натуральних чисел :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

2) Множина цілих чисел :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

3) Множина раціональних чисел :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

4) Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ (множина усіх чисел числової прямої).

1.3. Підмножини

Будь-яку частину A' множини A , що вибрана за певною ознакою, називають **підмножиною** і позначають $A' \subset A \Leftrightarrow a \in A' \Rightarrow a \in A$.

Також запис $A \subset B$ може називатися «включення» і читатися « A міститься (входить) у B », « B містить A ».

Приклад.1.3.1.

Включення $A \subset B$ правильне для множин $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Приклад 1.3.2.

1) Множина A складається з усіх чотирикутників;

2) Множина B складається з усіх трапецій;

3) Множина C складається з усіх паралелограмів;

4) Множина D складається з усіх прямокутників;

5) Множина E складається з усіх квадратів.

Кожна наступна множина є підмножиною попередньої:

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E.$$

Приклад 1.3.3.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

З визначення підмножини бачимо, що будь-яка множина є підмножиною самої себе: $A \subset A$.

Будемо вважати, що порожня множина $\emptyset$ є підмножиною будь-якої множини: $\emptyset \subset A$.

Виключивши ці граничні випадки (тобто $\emptyset$, A), ми отримаємо так звані **власні підмножини** множини A , тобто такі, що не є порожніми та не збігаються з A .

Множини A і B **рівні**, якщо одночасно: $A \subset B$ і $B \subset A$ (тобто будь-який елемент A належить B і навпаки). Позначення рівності $A=B$. У випадку рівності множини A і B складаються з одних і тих самих елементів.

Для включення множин справедлива властивість транзитивності: якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

Множина всіх підмножин даної множини називається булеаном і позначається $\mathcal{B}(A)$. Наприклад, якщо множина $A = \{1, 2, 3\}$, то

$$\mathcal{B}(A) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Потужність булеану визначається за формулою:

$$|\mathcal{B}(A)| = 2^{|A|}$$

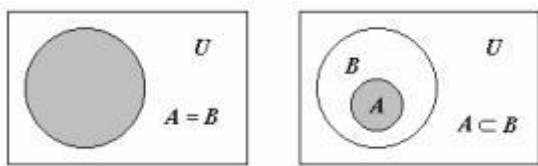
Якщо всі множини, що розглядаються в процесі вивчення певного питання, є підмножинами деякої іншої множини U , то вона називається **універсальною множиною** у даному процесі.

Наприклад, при вивченні числових множин роль універсальної множини може грати поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ (або деякі його підмножини). У теорії чисел універсальна множина збігається або із множиною всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$, або з множиною натуральних чисел $\mathbb{N}$; в математичному аналізі універсальна множина – це множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Універсальну множину домовимось надалі завжди позначати символом U . Для будь-якої множини X : $X \subset U$.

Для наочного зображення множин використовують спеціальні графічні **діаграми Ейлера-Венна**: універсальну множину U зображають у вигляді прямокутника, а інші множини – у вигляді кругів всередині цього

прямокутника. Наприклад, діаграми Ейлера Венна для ілюстрації понять $A = B$ і $A \subset B$ мають вигляд:



1.4 Операції над множинами

Розглянемо тепер операції, що можна виконувати над множинами – операцію об'єднання (позначається символом $\cup$), операцію перетину (позначається символом $\cap$), операцію різниці (позначається символом $\setminus$), операцію доповнення (позначається символом $\bar{A}$) та операцію симетричної різниці (позначається символом Δ).

Визначення цих операцій подано нижче, де A і B – довільні підмножини універсальної множини U . Результуючі множини на діаграмах Ейлера-Венна при цьому зафарбовано сірим кольором.

Об'єднанням множин A і B називається множина $A \cup B$, що складається з елементів, які належать хоча б одній із цих множин:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$$

Аналогічним чином визначають об'єднання довільної скінченної кількості множин.

Нехай, наприклад, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, тоді $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Перетином множин A і B називається множина $A \cap B$, що складається з елементів, які одночасно належать обом цим множинам:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$$

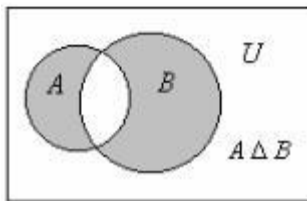
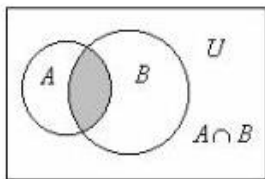
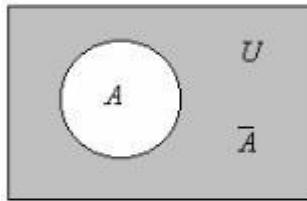
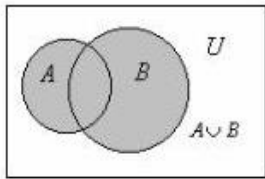
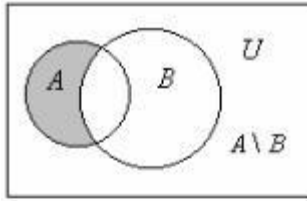
Аналогічним чином визначають об'єднання довільної скінченної кількості множин.

Нехай, наприклад, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, тоді $A \cap B = \{3, 4\}$.

Різницею множин A і B називається множина $A \setminus B$, що складається з таких елементів множини A , котрі не належать множині B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$$

Нехай, наприклад, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, тоді $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{5, 6\}$.



Доповненням множини A називається така множина $\bar{A}$, що складається з таких елементів універсальної множини U , котрі не належать множині A :

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ і } x \notin A\}$$

Очевидно, $\bar{\bar{A}} = U \setminus A, \bar{\bar{A}} = A$.

Нехай, наприклад, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, тоді $\bar{A} = \{2, 4\}$ $A \setminus B = \{1, 2\}$.

Симетричною різницею множин A і B називається така множина $A \Delta B$, що визначається наступним чином:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Очевидно, симетричну різницю можна визначити так:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Нехай, наприклад, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, тоді $A \Delta B = \{1, 2, 5, 6\}$.

Розглянемо тепер властивості операцій над множинами. Нехай A , B і C – довільні підмножини універсальної множини U .

1) Закони комутативності:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \Delta B = B \Delta A$$

2) (асоціативності:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

3) Закони ідемпотентності:

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

4) Закони дистрибутивності:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5) Властивості універсальної множини:

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \setminus U = \emptyset$$

$$A \Delta U = \bar{A}$$

6) Властивості порожньої множини:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \setminus \emptyset = A$$

$$A \Delta \emptyset = A$$

7) Властивості доповнення:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \Delta \bar{A} = U$$

8) Закони де Моргана:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

9) Властивості різниці:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$A \setminus A = \emptyset$$

$$U \setminus A = \bar{A}$$

10) Властивості симетричної різниці:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$\overline{A \Delta B} = \bar{A} \Delta \bar{B} = A \Delta \bar{B}$$

$$A \Delta A = \emptyset$$

Наведені властивості операцій над множинами використовують для спрощення різних виразів і доведення різноманітних рівностей.

Приклад 1.4.1. Нехай $U = \{5, 6, \dots, 30\}$ – універсальна множина, $A = \{6, 8, 9, 10, 12, 14, 20, 21, 22, 27\}$, $B = \{3x - 6 \mid x - \text{непарне}, x \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x + 4 - \text{просте число}\}$. Вказати перелік елементів множини $D = B \setminus (A \Delta \bar{C})$.

Розв'язання.

1) Задамо множини B та C переліком їх елементів:

$$B = \{9, 15, 21, 27\}, \quad C = \{7, 9, 13, 15, 19, 25, 27\}.$$

2) Послідовно виконаємо операції над множинами:

а) $\bar{C} = \{5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}$.

б) Знайдемо симетричну різницю множини A та $\bar{C}$ за формулою:

$$A \Delta \bar{C} = (A \setminus \bar{C}) \cup (\bar{C} \setminus A).$$

Оскільки $A \setminus \bar{C} = \{9, 27\}$, $\bar{C} \setminus A = \{5, 11, 16, 17, 18, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}$, то

$$A \Delta \bar{C} = \{5, 9, 11, 16, 17, 18, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30\}.$$

в) Знайдемо різницю множин B та $A \Delta \bar{C}$:

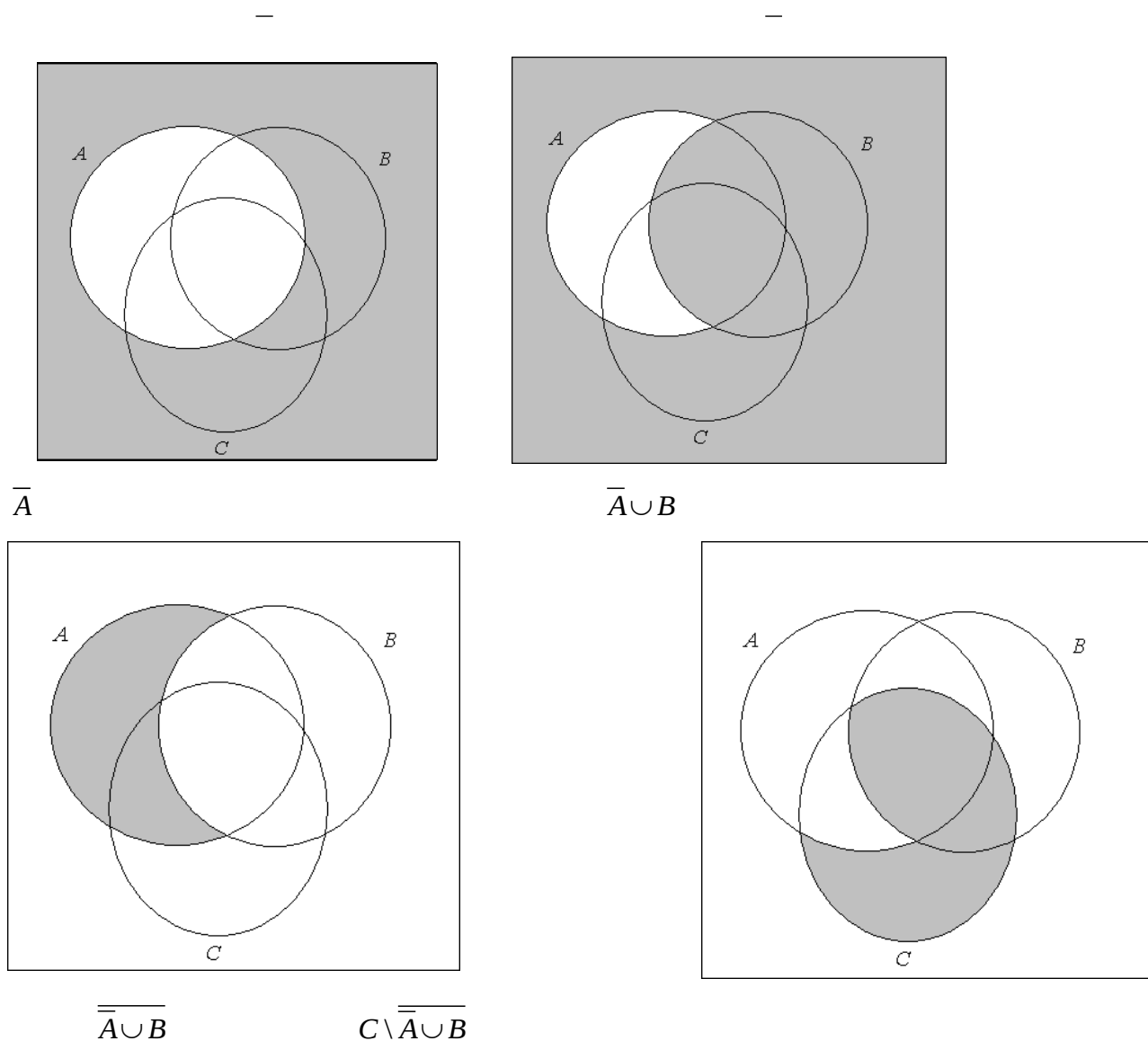
$$B \setminus (A \Delta \bar{C}) = \{15, 21\}.$$

Відповідь: $D = \{15, 21\}$.

Приклад 1.4.2. На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множину $C \setminus \overline{A \cup B}$.

Розв'язання.

Зобразимо діаграми Венна для всіх операцій алгебри множин, які входять у формулу, в порядку виконання:



Приклад 1.4.3. Довести, що для довільних множин A , B та C справджується рівність:

$$C \cap \overline{A \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A).$$

Розв'язання.

Перший спосіб.

Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Для множини у лівій частині рівності відповідна їй діаграма зображена справа на рисунку вище. Побудуємо діаграму для множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$:

Порівнюючи діаграми, бачимо, що вони ідентичні. Тому множини $C \setminus \overline{A \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ рівні.

Другий спосіб.

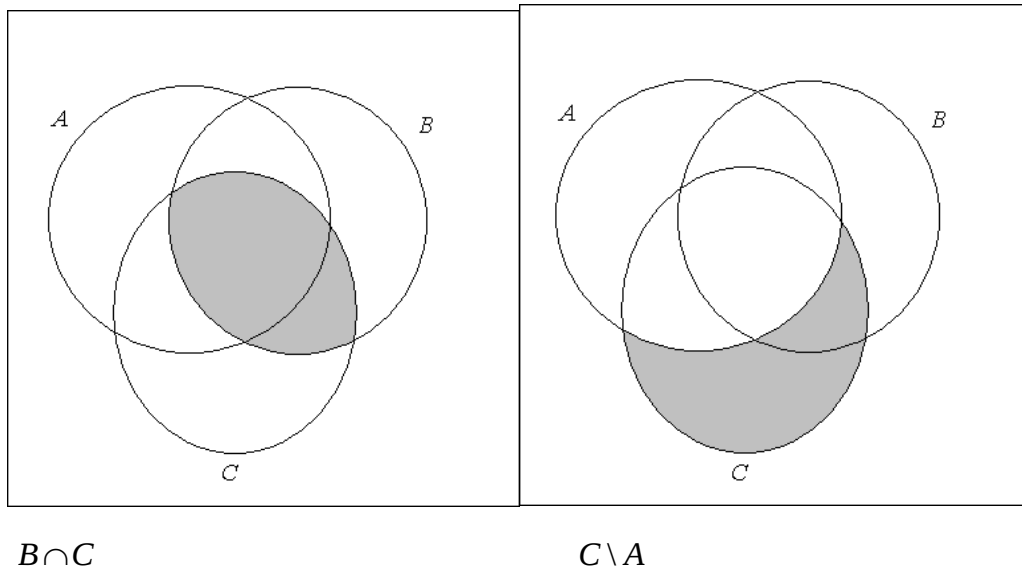
Доведемо, що

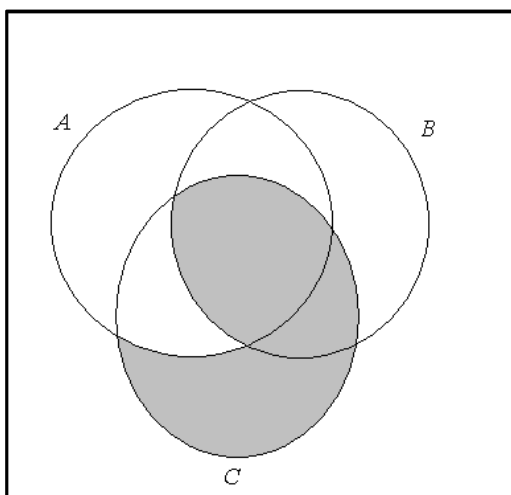
$$C \setminus \overline{A \cup B} \subseteq B \cap C \cup (C \setminus A) \text{ та } B \cap C \cup (C \setminus A) \subseteq C \setminus \overline{A \cup B}.$$

а) Доведемо перше включення. Нехай $x \in C \setminus \overline{A \cup B}$.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \overline{A}, \\ x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin A, \\ x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in C \setminus A, \\ x \in C \cap B. \end{array} \right] \Rightarrow x \in B \cap C \cup (C \setminus A). \end{aligned}$$

Таким чином ми показали, що довільний елемент x множини $C \setminus \overline{A \cup B}$ є елементом множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$. Перше включення доведено.





$$B \cap C \cup (C \setminus A)$$

б) Доведемо друге включення. Нехай $x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$.

$$\left[\begin{array}{l} x \in C \cap B, \\ x \in C \setminus A. \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin A. \end{array} \right. \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \bar{A}. \end{array} \right. \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \bar{A} \cup B. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ \overline{x \notin \bar{A} \cup B}. \end{array} \right. \Rightarrow x \in C \setminus \overline{\bar{A} \cup B}.$$

Ми показали, що довільний елемент x множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є елементом множини $C \setminus \overline{\bar{A} \cup B}$. Тому друге включення доведено.

Отже, множини $C \setminus \overline{\bar{A} \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є рівними.

Приклад 1.4.4.

Знайти множину точок площини, координати яких задовольняють таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2y \leq 4, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Розв'язання.

Побудуємо першу множину $x - 2y \leq 4$. Це півплощина, границя цієї півплощини – пряма $x - 2y = 4$. Складемо таблицю для побудови прямої:

x	0	4
y	-2	0

Перевіримо, чи належить точка $O(0;0)$ півплощині $x - 2y \leq 4$, для цього

підставляємо координати точки у рівняння півплощини:

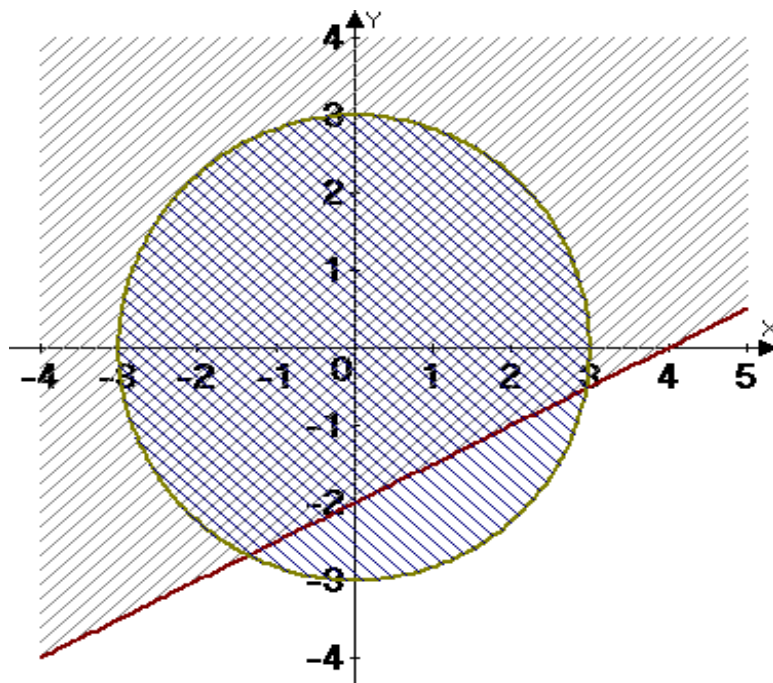
$$0 - 2 \cdot 0 \leq 4$$

$$0 \leq 4$$

Нерівності вірні, тому точка $O(0;0)$ належить півплощині $x - 2y \leq 4$.
Відносно прямої $x - 2y = 4$. Відносно прямої $x - 2y = 4$ обираємо півплощину, що містить точку O (позначена штриховкою).

Друга множина $x^2 + y^2 \leq 9$ - це круг з центром в початку координат і радіусом $R=3$.

Перетин цих множин – множина, що зображена на рисунку (перетин штриховок).



Контрольні запитання

- Які існують способи визначення множин?
- Що таке власні підмножини?
- Що таке універсальна множина?
- Як визначається потужність множини?
- Як визначається булеан даної множини?
- Чому дорівнює потужність булеану?
- Як визначається операція об'єднання множин?

- Як визначається операція перетину множин?
- Як визначається операція різниці множин?
- Як визначається операція доповнення множини?
- Як визначається операція симетричної різниці множин?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти $A \Delta (\overline{B} \cap C)$ за умови, що:

$$U = \{1, 2, \dots, 20\}, \quad A = \{x - 2 : 5x + 1 - \text{квадрат цілого числа}\},$$

$$B = \{x : x^2 < 60\}, \quad C = \{x : (3x - 1) - \text{просте число}\}.$$

Задача 2. Вказати перелік елементів множини $D = B \Delta (\overline{A} \cup C)$, якщо:

$$U = \{5, 6, \dots, 30\}, \quad A = \{5, 7, 8, 10, 11, 14, 20, 21, 22, 26\},$$

$$B = \{2x - 7 : x - \text{непарне}\}, \quad C = \{x : x^2 + 1 - \text{просте число}\}.$$

Задача 3. На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множини:

а) $\overline{A \Delta \overline{C}} \setminus (B \cup A);$

б) $(\overline{A} \cap B) \cup (B \Delta C).$

Задача 4. Нехай A — множина трикутників, B — множина чотирикутників, C — множина правильних многокутників, D — множина многокутників, які мають принаймні один прямий кут, E — множина рівносторонніх многокутників. Вказати множини:

а) $((D \cap A) \setminus (C \cap B)) \Delta (A \cap E);$

б) $\overline{B \cap (C \cup D)} \cap E \cap B.$

Задача 5. Нехай S — множина усіх квадратів, R — множина усі прямокутників, L — множина усіх ромбів, P — множина усіх правильних многокутників площини. Вказати множини:

а) $(L \setminus S) \cap (R \setminus \overline{P});$

б) $(P \setminus S) \cup (R \setminus \overline{L}).$

1.5. Доведення рівностей з множинами

Для перевірки та доведення рівностей з множинами можна скористатися будь-яким із трьох методів: графічним методом, методом двостороннього включення чи методом еквівалентних перетворень.

Найпростішим методом перевірки рівностей є **графічний метод**. Він полягає у порівнянні діаграм Ейлера-Венна для результуючих множин, що задаються відповідно правою і лівою частинами досліджуваної рівності. Якщо ці діаграми повністю співпадають (визначають одну і ту ж саму множину), досліджувана рівність є вірною, інакше – ні.

Універсальним методом доведення рівностей з множинами є **метод двостороннього включення, який базується на співвідношенні (1.1.1), тобто для доведення рівності вигляду $A = B$ необхідно і досить показати, що $A \subset B$ і $B \subset A$.**

Приклад 1.5.1. Методом двостороннього включення довести рівність $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Розв’язання.

1) Покажемо, що $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Візьмемо довільний елемент x із множини $A \setminus B$. Необхідно показати, що тоді обов’язково $x \in A \cap \bar{B}$. Маємо:

$$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \text{ і } x \notin B \Rightarrow x \in A \text{ і } x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A \cap \bar{B}.$$

2) Покажемо, що $A \cap \bar{B} = A \setminus B$.

Візьмемо довільний елемент x із множини $A \cap \bar{B}$. Необхідно показати, що тоді обов’язково $x \in A \setminus B$. Маємо:

$$x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow x \in A \text{ і } x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A \text{ і } x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B. \blacksquare$$

Приклад 1.5.2. Методом двостороннього включення довести дистрибутивність операції перетину відносно операції об’єднання: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Розв’язання.

$$\begin{aligned} 1) & x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \text{ і } x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ і } (x \in B \text{ або } x \in C) \\ & (x \in A \text{ і } x \in B) \text{ або } (x \in A \text{ і } x \in C) \Leftrightarrow \\ & (x \in A \cap B) \text{ або } (x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ або } (x \in A \cap C) \Leftrightarrow \\ & (x \in A \text{ і } x \in B) \text{ або } (x \in A \text{ і } x \in C) \Leftrightarrow \\ & x \in A \text{ і } (x \in B \text{ або } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C). \blacksquare \end{aligned}$$

Графічним методом та методом двостороннього включення можуть бути перевірені та строго доведені властивості операцій над множинами.

Незважаючи на універсальність, недоліком останнього методу є те, що для складних рівностей він стає досить громіздким.

Ефективним методом доведення рівностей з множинами є **метод еквівалентних перетворень**. Його суть полягає у використанні властивостей операцій над множинами для зведення однієї частини рівності до іншої чи спрощення обох частин до одного і того ж самого проміжного виразу.

Приклад 1.5.3. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

- 1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
- 2) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

Розв'язання.

- 1) $A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap \bar{C}) = (A \cap B) \cap \bar{C} = (A \cap B) \setminus C$
- 2) $A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$
 $= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = \emptyset \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) = A \setminus B$

У рівностях, що містять операцію симетричної різниці, слід користуватися властивостями симетричної різниці, якщо це можливо, якщо ж ні – позбутися її згідно будь-якого з означень (вдалий вибір при цьому може значно спростити подальші викладки).

Приклад 1.5.4. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

- 1) $A \Delta (A \cap B) = A \setminus B$;
- 2) $A \Delta (A \Delta B) = B$.

Розв'язання.

- 1) $A \Delta (A \cap B) = (A \cup (A \cap B)) \setminus (A \cap (A \cap B)) =$
 $= A \setminus (A \cap (A \cap B)) = A \setminus ((A \cap A) \cap B) = A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$
- 2) $A \Delta (A \Delta B) = (A \Delta A) \Delta B = \emptyset \Delta B = B$

Контрольні запитання

- Які існують способи доведення рівностей з множинами?
- В чому суть методу двохсторонніх включень?
- В чому суть методу еквівалентних перетворень?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Перевірити рівності графічним методом та довести їх методом двохстороннього включення:

- 1) $A \cap B = A \setminus B$;
- 2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- 3) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
- 4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
- 5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Задача 2. Використовуючи властивості операцій над множинами, спростити вирази:

- 1) $(A \cup B) \cup (A \cup B)$;
- 2) $(A \cap B) \cap B$;
- 3) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$;
- 4) $(A \cap B \cap M) \cup (A \cap B \cap C \cap M \cap N) \cup (A \cap M \cap A)$;
- 5) $((A \cup B) \cap B) \cap (A \cap (A \cap B))$;
- 6) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
- 7) $(A \cap B \cap C \cap D) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (C \cap D)$;
- 8) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup B \cup C$;
- 9) $A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$;
- 10) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

1.6. Формули включення-виключення

*Множина називається **скінченною**, якщо вона містить скінченну кількість елементів.*

Потужністю скінченої множини називається кількість елементів у цій множині.

Потужність множини A позначатимемо $|A|$. Нехай, наприклад, $A = \{2, 3, 7, 15\}$, тоді $|A| = 4$.

Формули включення-виключення – формули, що дозволяють знаходити потужність об'єднання декількох скінченних множин.

Формули включення-виключення для двох і трьох скінченних множин мають відповідно вигляд:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Відповідність між елементами множин A та B називається взаємно однозначною, якщо кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B і кожному елементу множини B відповідає єдиний елемент множини A .

Приклад 1.6.1. Відображення $f: x \rightarrow 3x+1$ встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами множин $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{4, 7, 10\}$.

Дві множини називаються **рівнопотужними** (еквівалентними), якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Той факт, що множини A та B є рівнопотужними, будемо записувати у вигляді $|A| = |B|$.

Відношення рівнопотужності має наступні властивості:

1. $|A| = |A|$.
2. Якщо $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$.
3. Якщо $|A| = |B|$ і $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Приклад 1.6.2. Множини $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ та $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ є рівнопотужними. Відповідність встановлює відображення $f: k \rightarrow a_k$.

Скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони містять однакову кількість елементів.

Приклад 1.6.3. Множина парних чисел рівнопотужна множині цілих чисел. Відповідність встановлює відображення $f: 2n \rightarrow n, n \in \mathbb{Z}$.

Множина A називається **зліченною**, якщо вона є рівнопотужною множині натуральних чисел.

В теорії множин доводиться, що множина цілих чисел, раціональних чисел є зліченими, множина дійсних чисел є незліченною.

Справедливі також такі твердження:

- а) у кожної нескінченної множини є зліченна підмножина.
- б) будь-яка підмножина зліченної множини або скінченна, або зліченна.
- в) об'єднання скінченної та зліченної множин є зліченною множиною.
- г) об'єднання скінченної кількості злічених множин — зліченна множина.

*Множина дійсних чисел та будь-яка рівнопотужна їй множина називається **континуальною**. Іншими словами, такі множини мають потужність континуум.*

Приклад 1.6.4. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. Із них 47 знають англійську мову, 35 – німецьку, 20 – французьку, 23 – англійську і німецьку, 12 – англійську і французьку, 11 – німецьку і французьку, 5 – усі три іноземні мови. Скільки осіб в інституті не знають жодної із іноземних мов? Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову? Скільки знають тільки французьку мову?

Розв'язання. Нехай U – множина всіх працюючих, A, H, F – множини осіб, що знають відповідно англійську, німецьку та французьку мови.

Хоча б одну мову знають

$$|A \cup H \cup F| = |A| + |H| + |F| - |A \cap H| - |A \cap F| - |H \cap F| + |A \cap H \cap F| = 47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61 \text{ (особа),}$$

жодної мови не знають

$$|U| - |A \cup H \cup F| = 67 - 61 = 6 \text{ (осіб),}$$

лише англійську знають

$$|A| - |A \cap H| - |A \cap F| + |A \cap H \cap F| = 47 - 23 - 12 + 5 = 17 \text{ (осіб),}$$

лише німецьку

$$|H| - |H \cap A| - |H \cap F| + |H \cap A \cap F| = 35 - 23 - 11 + 5 = 6 \text{ (осіб),}$$

лише французьку

$$|F| - |F \cap A| - |F \cap H| + |F \cap A \cap H| = 20 - 12 - 11 + 5 = 2 \text{ (особи)}$$

Приклад 1.6.5. З 220 школярів 163 вміють грати у хокей, 175 – у футбол, 24 не вміють грати у ці ігри. Скільки школярів одночасно вміють грати у хокей та у футбол?

Розв'язання. Введемо позначення:

Π – множина всіх школярів, $|\Pi| = 220$,

Φ – множина школярів, що вміють грати у футбол, $|\Phi| = 175$,

X – множина школярів, що вміють грати у хокей, $|X| = 163$,

$\Phi \cap X$ – множина школярів, що вміють грати і у футбол, і у хокей,

$\Phi \cup X$ – множина школярів, що вміють грати хоча б в одну з ігор – або у футбол, або у хокей. За умовою, 24 школяра не вміють грати в ці ігри, тому $|\Phi \cup X| = |\Phi| - 24 = 196$.

За формулою $|\Phi \cup X| = |\Phi| + |X| - |\Phi \cap X|$,

звідки $|\Phi \cap X| = |\Phi| + |X| - |\Phi \cup X| = 175 + 163 - 196 = 142$.

Відповідь: 142 школяра грають і у футбол, і у хокей.

Приклад 1.6.6. У студентській групі 25 людей. Під час літніх канікул 9 з них від'їжджали у турпоїздки за кордон, 12 – мандрували Україною, 15 – відпочивали на морі в Криму, 6 – мандрували за кордоном і Україною, 7 – були і за кордоном, і в Криму, 8 – мандрували Україною і були у Криму, 3 – брали участь у всіх трьох поїздках. Скільки студентів нікуди не виїжджали?

Розв'язання. Нехай:

K – множина студентів, що виїжджали за кордон;

U – множина студентів, що мандрували Україною;

M – множина студентів, що відпочивали на морі у Криму.

Тоді множина студентів, що їздили хоча б кудись, $K \cup U \cup M$. Так як $9 + 12 + 15 = 36 > 25$, то множини K , U , M перетинаються (це бачимо і безпосередньо з умови задачі, бо деякі студенти були в різних поїздках)

$$|K \cup U \cup M| = |K| + |U| + |M| - |K \cap U| - |K \cap M| - |U \cap M| + |K \cap U \cap M|$$

Маємо

$$|K| = 9, |U| = 12, |M| = 15, |K \cap U| = 6, |K \cap M| = 7, |U \cap M| = 8,$$

$$|K \cap U \cap M| = 3.$$

Тоді $|K \cup U \cup M| = 9 + 12 + 15 - 6 - 7 - 8 + 3 = 39 - 21 = 18$, а нікуди не виїжджали $25 - 18 = 7$ студентів.

Контрольні запитання

- В чому суть формул включення-виключення?
- Дати означення рівнопотужних множин.
- Що таке зліченна множина?
- Сформулювати властивості злічених множин.
- Які множини мають потужність континуум?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. В школі навчаються 1400 учнів. З них 1250 вміють кататися на лижах, 952 – на ковзанах. Ні на лижах, ні на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів вміють кататися і на лижах, і на ковзанах ?

Задача 2. Кожен із учнів класу на канікулах два рази був у театрі і бачив дві різні вистави. При цьому вистави I, II, III бачили відповідно 25, 12 і 23 учні. Скільки учнів у класі? Скільки з них бачили вистави I і II, I і III, II і III?

Задача 3. Скільки натуральних чисел із першої сотні (1, 2, ..., 100) не діляться на жодне із чисел 2, 3, 5?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Виконати завдання:

1. 1) перелічити елементи множини $M = \{\text{множина кольорів спектра}\}$;
 2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:
$$\begin{cases} |x| \geq 3, \\ x^2 + y^2 \geq 3. \end{cases}$$
2. 1) перелічити елементи множини $M = \{\text{множина додатніх простих чисел, які менші за } 40\}$;
 2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:
$$\begin{cases} y < |x|, \\ |x| > 2. \end{cases}$$
3. 1) перелічити елементи множини $M = \{\text{множина цілих додатніх степенів } 3, \text{ які менші за } 250\}$;
 2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:
$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 \leq 9, \\ |y| < 2. \end{cases}$$
4. 1) перелічити елементи множини $M = \{\text{множина додатніх чисел кратних } 5, \text{ які менші за } 47\}$;
 2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:
$$\begin{cases} y - x < 3, \\ y - 3x \geq 5. \end{cases}$$
5. 1) перелічити елементи множини $M = \{\text{множина різних однокольорових шахматних фігур}\}$
 2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей:
$$\begin{cases} x + y > 0, \\ -4x + y > 4. \end{cases}$$
6. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : (x^2 - 1)(x^2 - 3x - 4) = 0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 < 81, \\ x > 5. \end{cases}$

7. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : \cos x - 2 = 0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} x - y > 1, \\ x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$

8. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : -5 \leq |x| \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |x| > 2, \\ y - 3x < 0. \end{cases}$

9. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : -1 \leq |x| \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |x| \leq 2, \\ y < x. \end{cases}$

10. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : \cos^2 x = 4\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |x| \geq 1, \\ x - y > 2. \end{cases}$

11. 1) перелічити елементи множини $M = \{\text{множина простих чисел, які менші за } 57\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |x| \geq 3, \\ y + x \leq 9. \end{cases}$

12. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : -2 \leq x \leq 9, x - \text{просте число}\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 4, \\ x \neq 1. \end{cases}$

13. 1) перелічити елементи множини $M = \{x: x^2\sqrt{x} - x = 0\}$;
2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |x| > 2, \\ (x+3)^2 + y^2 < 4. \end{cases}$
14. 1) перелічити елементи множини $M = \{x: x - \sqrt{x} - 2 = 0\}$;
2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |x| \leq 2, \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 < 16. \end{cases}$
15. 1) перелічити елементи множини $M = \{x: x^4 - 8x^2 - 9 = 0\}$;
2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |x| > 2, \\ y + 3x \geq 0. \end{cases}$
16. 1) перелічити елементи множини $M = \{x: (x^2 - 4)(x^2 + 3x - 4) = 0\}$;
2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} x + y > 2, \\ y - 4x > 4. \end{cases}$
17. 1) перелічити елементи множини $M = \{x: 2\cos x = 1\}$;
2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 > 1, \\ y < 0. \end{cases}$
18. 1) перелічити елементи множини $M = \{x: x^3 - x^5 = 0\}$;
2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ y + x < 0. \end{cases}$
19. 1) перелічити елементи множини $M = \{x: -2 \leq |x| \leq 3, x - \text{цїле число}\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} x - y > 2, \\ y - 3x < 0. \end{cases}$

20. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : \sin x - 1 = 2\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |x| \leq 2, \\ x^2 + (y - 2)^2 \leq 9. \end{cases}$

21. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : x^4 - x^2 - 20 = 0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |y| > 2, \\ y - 3x < 0. \end{cases}$

22. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : \cos^2 x - \sin 2x = 0, -\pi < x < \pi\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |y| < 3, \\ x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$

23. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : \sin x - 3 = 0\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} |y| > 1, \\ y + 2x < 0. \end{cases}$

24. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : (x^2 - 4)(x^2 - 3x - 4)\}$;

2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} x > 2, \\ x^2 + (y - 1)^2 \leq 64. \end{cases}$

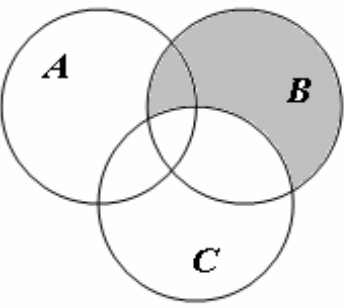
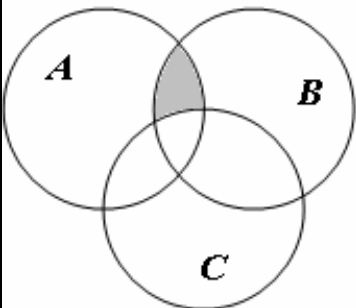
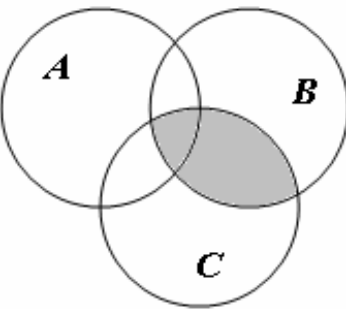
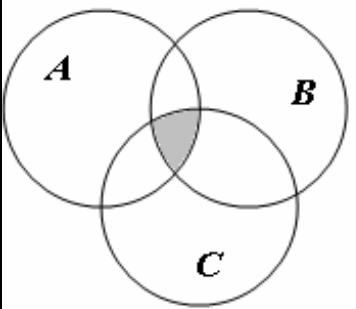
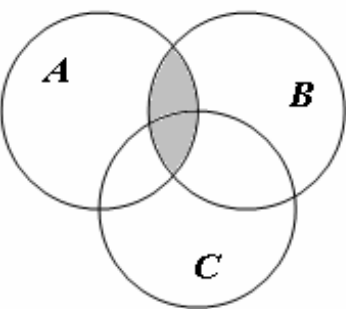
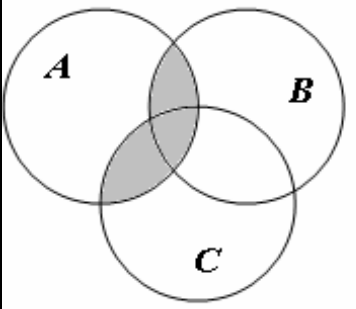
25. 1) перелічити елементи множини $M = \{x : 3 \leq x \leq 27, x - \text{просте число}\}$;

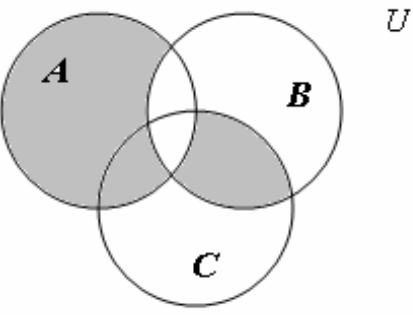
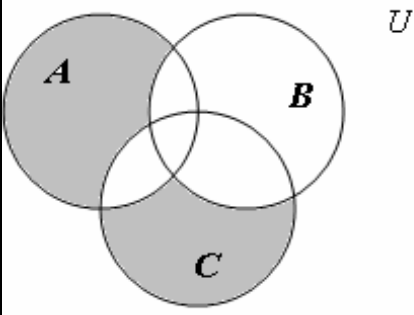
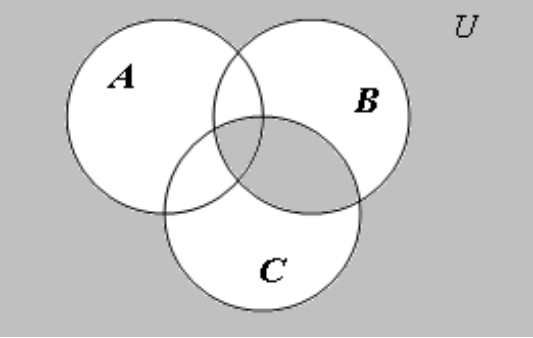
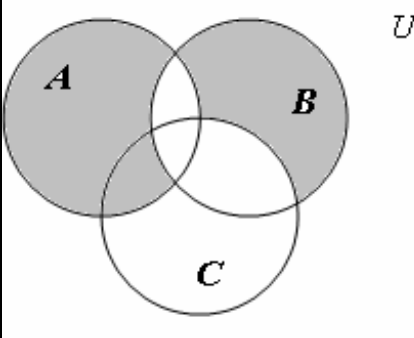
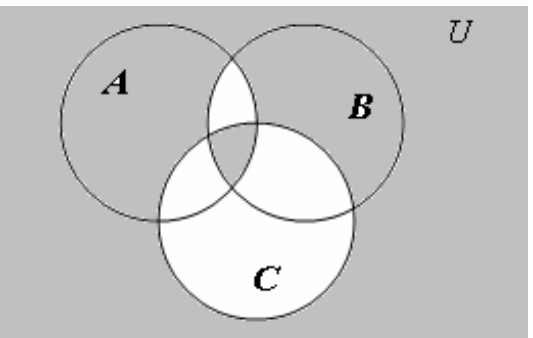
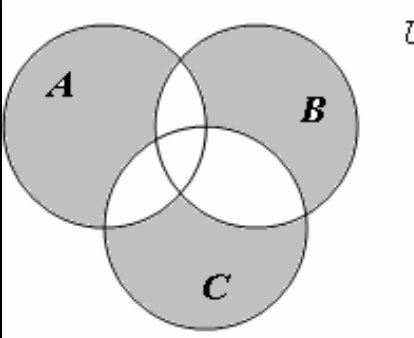
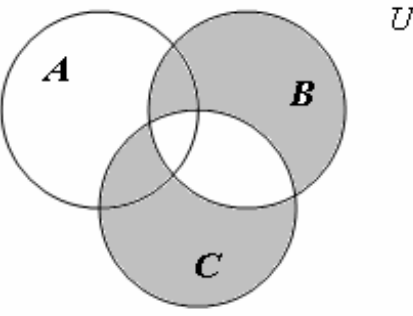
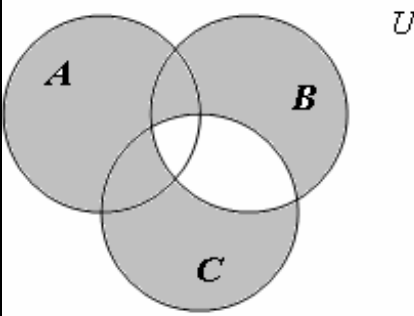
2) знайти множину точок на площині, координати яких задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ y - 3x < 1. \end{cases}$

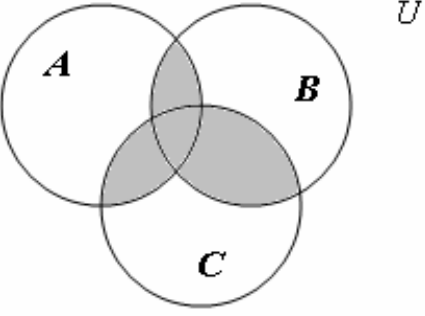
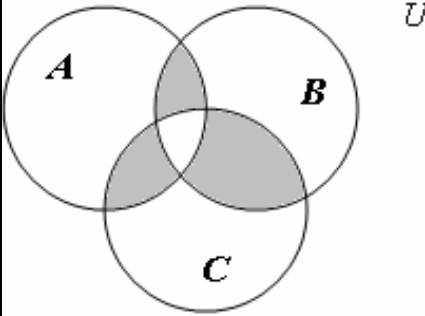
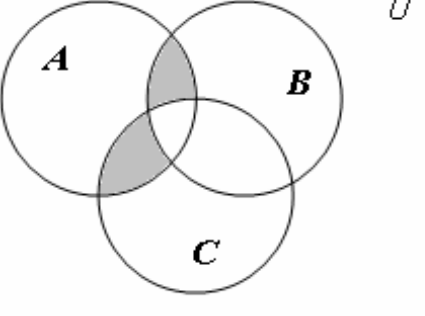
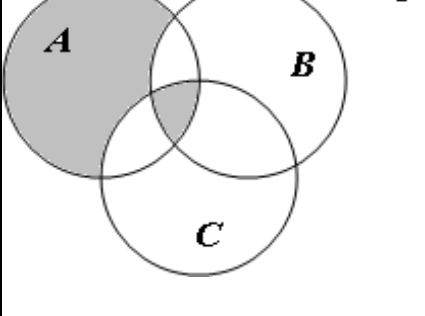
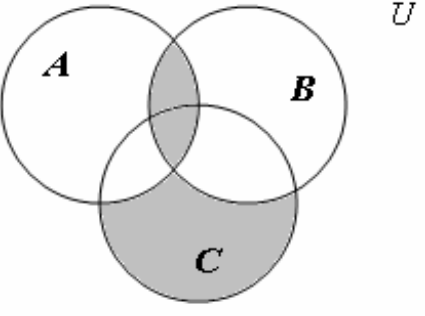
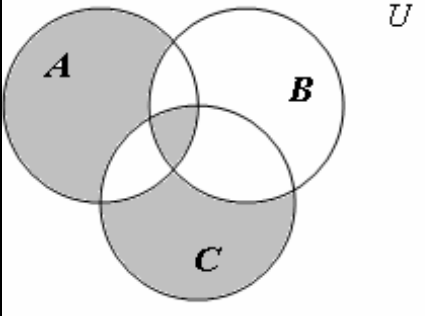
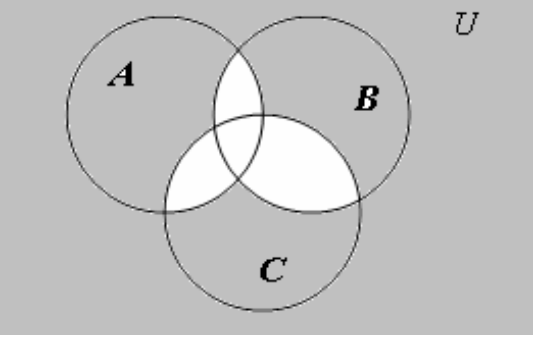
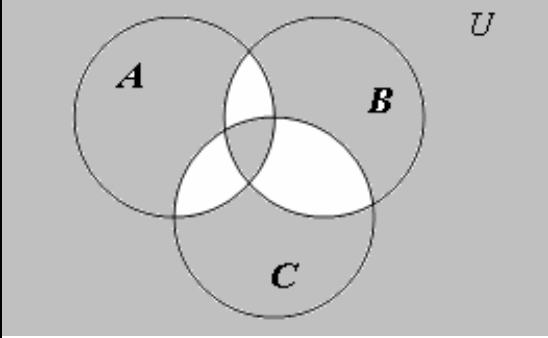
Завдання 2. Знайти $A \cup B, A \cap B, A \mid B, B \setminus A$, якщо:

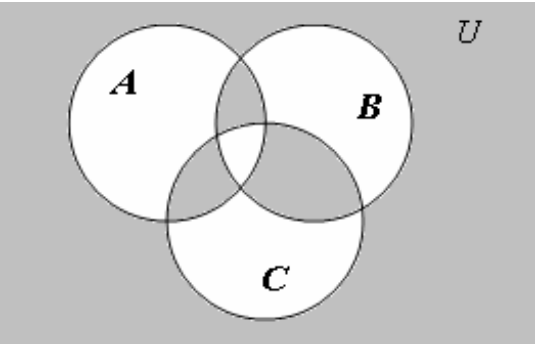
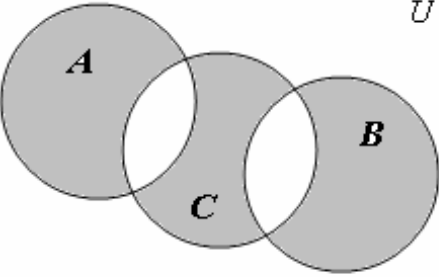
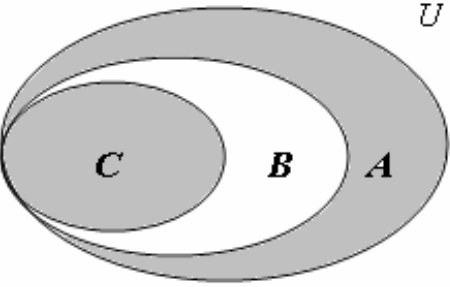
№ варіанту	A	B
1	$\{1, 3, 5\}$	$\{2, 4\}$
2	$\{1, 2, 4\}$	$\{3, 1, 5, 0\}$
3	$\{2, 5, 4\}$	$\{3, 1, 5\}$
4	$[-1, 3]$	$] 2, 6 [$
5	$(0, 1)$	$\{0, \frac{1}{2}, 1\}$
6	$(3, 5)$	$(2, 4)$
7	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$
8	$(0, 9)$	$[-5, 5]$
9	$\{1, 3, \{2, 4\}, 0\}$	$\{\{1, 3\}, 2, 4\}$
10	$\{1, \{2, 5\}, 6\}$	$\{1, 2, 5, 6\}$
11	$\{x \in A / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 4 \text{ і } x \leq 40\}$	$\{x \in B / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 5 \text{ і } x \leq 40\}$
12	$\{x \in A / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 4 \text{ і } x \leq 30\}$	$\{x \in B / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 6 \text{ і } x \leq 40\}$
13	$\{x \in A / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 2 \text{ і } x \leq 20\}$	$\{x \in B / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 3 \text{ і } x \leq 30\}$
14	$\{x \in A / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 9 \text{ і } x \leq 100\}$	$\{x \in B / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 10 \text{ і } x \leq 100\}$
15	$(3, 5)$	$[2, 4]$
16	$\{2, 5, 4\}$	$\{2, 5, 4\}$
17	$\{2, 3, 7, 8, 9, 11, 19, 20\}$	$\{x \in B / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 2 \text{ або } 3 \text{ і } x \leq 100\}$
18	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$\{x \in B / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 2 \text{ і } x \leq 10\}$
19	$\{a, c, b\}$	$\{c, d, k\}$
20	$\{1, 5, 3, 0, 7\}$	$\{2, 4, 0, 6\}$
21	$(2, 6]$	$[4, 9)$
22	$[2, 5]$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
23	$\{x \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$	$\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
24	$\{x \in A / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 3 \text{ і } x \leq 30\}$	$\{x \in B / x \in \mathbb{N} \text{ і ділиться на } 5 \text{ і } x \leq 50\}$
25	$\{a, b, c, e, d\}$	$\{a, e, l, k, n\}$

Завдання 3. Опишіть множину, яка відповідає замальованій частині діаграми Венна:

№	Завдання	№	Завдання
01		02	
03		04	
05		06	

07		08	
09		10	
11		12	
13		14	

15		16	
17		18	
19		20	
21		22	

23		
24		
25		

Завдання 4. Розв'язати задачу:

1. Із 40 програмістів 18 володіють мовою Python, 19 — мовою C++, 21 — мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Python і 11 C++, 7 — Python і Java, 8 — C++ і Java. Троє програмістів не володіють жодною із мов Python, C++, Java. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.
2. У групі вчиться 25 студентів. Відомо, що 5 студентів отримали п'ятірку з математики, 8 — з програмування, 7 — з фізики. Троє студентів отримали п'ятірку з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які: а) Не отримали жодної п'ятірки; б) Отримали рівно одну п'ятірку.
3. Троє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі і у Лондоні, 6 — і у Лондоні і у Римі, 5 — і у Парижі і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були в усіх трьох містах.
4. В одній групі студентів 10 чоловік можуть працювати на Дельфі, 10 — на Паскалі, 6 — на Сі. По дві мови знають: 6 чоловік — Делфі і Паскаль, 4 — Паскаль і Сі, 3 — Делфі і Сі. Один студент знає всі три мови. Скільки студентів в групі?
5. В день авіації на аеродромі всіх бажаючих катали на літаку, планері, дельтаплані. На літаку літали 30 чоловік, на планері — 20, на дельтаплані -15. І на літаку і на планері каталося 10 чоловік, на літаку і дельтаплані — 12, на планері і дельтаплані -5. Двоє чоловік каталися на літаку, планері і дельтаплані. Скільки було бажаючих політати?
6. Кожен учень класу — або дівчина, або особа блондин, або любить математику. В класі 20 дівчат, з них 12 блондинок, причому лише одна блондинка любить математику. Всього в класі 24 особи-блондина, 12 з них люблять математику. В класі 17 учнів, які люблять математику, з них 6 дівчат. Скільки всього учнів в цьому класі ?
7. На пікнік поїхали 92 студенти. При цьому бутерброди з ковбасою взяли 47 студентів, з сиром — 38, з маслом — 42, з сиром і ковбасою — 28, з ковбасою і маслом — 31, з сиром і маслом — 26. Всі три види бутербродів взяли 25 студентів, а декілька студентів брали на пікнік не бутерброди, а пиріжки. Скільки студентів брали з собою на пікнік пиріжки

8. У відділі НДІ працюють декілька осіб, кожна з яких знає хоча б одну іноземну мову. При цьому 6 осіб знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – англійську і французьку, 1 – всі три мови. Скільки осіб працюють у відділі? Скільки з них знають лише англійську мову? Лише французьку? Лише німецьку?
9. На уроці літератури вчитель зацікавився, хто із 40 учнів класу читав книги А, В і С. Результати виявились такими: книгу А прочитали 25 учнів, книгу В – 22 учні, книгу С – 22 учні, книгу А або книгу В – 33 учні, книгу А або книгу С – 32 учні, книгу В або книгу С – 31 учень, всі три книги – 10 учнів. Скільки учнів не читали жодної книги? Скільки учнів прочитали тільки 1 книгу?
10. Серед абітурієнтів, які склали вступні іспити до вузу, оцінку "5" отримали: з математики – 48, з фізики – 37, з української мови – 42, з математики або фізики – 75, з математики або української мови – 76, з фізики або української мови – 66, з усіх трьох предметів – 4. Скільки абітурієнтів отримали хоча б одну п'ятірку? Скільки з них отримали рівно одну п'ятірку? А рівно дві п'ятірки?
11. Протягом тижня в кінотеатрі демонструвались фільми Х, У, Z. Кожен із 40 студентів групи бачив або всі три фільми, або тільки якийсь один. При цьому фільм Х бачили 13 студентів, фільм У – 16 студентів, фільм Z – 19 студентів. Скільки студентів бачили усі три фільми?
12. Всі грибники повернулися додому з повними корзинами. В десятих корзинах були білі гриби, в 18 – підберезовики, у 12 – лисички. Білі і підберезовики були в 6 корзинах, білі і лисички – в 4, підберезовики і лисички – в 5. Всі три види грибів були у двох грибників. Скільки всього було грибників?
13. Всі туристи взяли з собою консерви. 6 чоловік взяли тушонку, 5 – згущене молоко, 8 – кашу з м'ясом. В трьох рюкзаках були тушонка і згущене молоко, в двох – згущене молоко і каша, в трьох тушонка і каша. І тільки в одному рюкзаку лежали всі три види консервів. Скільки було туристів?
14. На уроці літератури учитель вирішив дізнатись, хто із учнів класу читав книжки А, В і С. Результати опитування такі: книгу А читало 25 учнів, книгу В – 22 учні, книгу С – 22 учні, книгу А або В читали 33 учні, книгу А або С – 33 учні, книгу В або С – 31 учень, всі три книги прочитали 10 учнів. Скільки учнів в класі?
15. Із 100 студентів 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 10 – англійську і французьку, 5 – німецьку і французьку, 3 – німецьку, англійську і французьку. Скільки студентів не вивчають жодної мови? Скільки студентів вивчають лише французьку, лише англійську, лише німецьку мови?

16. Кожен учень в класі вивчає англійську або французьку мови. Англійську мову вивчає 25 чоловік, французьку – 27 чоловік, а англійську і французьку – 18 чоловік. Скільки учнів в класі?
17. В дитячому садку 52 дитини. Кожний з них любить цукерки або морозиво. Половина дітей любить цукерки, а 20 чоловік – цукерки і морозиво. Скільки дітей любить морозиво?
18. В одному з відділів магазину звичайно купують або один торт, або одну коробку цукерок, або один торт і одну коробку цукерок. В один з днів було продано 57 тортів і 36 коробок цукерок. Скільки було покупців. Якщо 12 чоловік купили і торт і коробку цукерок?
19. В спортивному таборі 65% дітей вміють грати у футбол, 70% - у волейбол і 75% - у баскетбол. Яка найменша кількість дітей, які вміють грати і у футбол, і у волейбол, і у баскетбол?
20. Кожний з учнів класу у зимові канікули рівно два рази був у театрі, при цьому спектаклі А, В і С бачили відповідно 25, 12 і 23 учні. Скільки учнів в класі? Скільки з них бачили спектаклі А і В, А і С, В і С?
21. Протягом тижня у кінотеатрі демонстрували фільми А, В і С. З 40 школярів, кожний передивився або всі три фільми, або один з трьох, фільм А бачили 13, фільм В – 16, фільм С – 19. Знайти, скільки учнів переглянули всі три фільми?
22. З 40 учнів 30 уміють плавати, 27 уміють грати у шахи і тільки 5 не уміють ні того, ні іншого. Скільки дітей уміють плавати і грати у шахи?
23. В групі із 100 туристів 70 чоловік знають англійську мову, 45 знають французьку мову і 23 чоловіки знають обидві мови. Скільки туристів в групі не знають ні англійської, ні французької мови? (8 туристів з групи).
24. В школі 1400 учнів. З них 1250 уміють кататися на лижах, 952 – на ковзанах. Ні на лижах, ні на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів уміють кататися і на лижах і на ковзанах? (862 учні).
25. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. Із них 47 знають англійську мову, 35 – німецьку мову, 23 – обидві мови. Скільки осіб в інституті не знають ні англійської, ні німецької мови? Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову?

Завдання 5. *Методом еквівалентних перетворень довести рівності:*

1. $A \cap (A \cup B) = A \cap B$;
2. $A \setminus B = A \cap B$;
3. $A \Delta (A \setminus B) = A \cap B$;
4. $B \setminus (A \Delta B) = A \cap B$;
5. $A \cap (B \setminus C) = B \cap (A \setminus C)$;
6. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$;
7. $(A \Delta B) \setminus A = B \setminus A$;
8. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
9. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
10. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
11. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
12. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;
13. $A \setminus (A \setminus (A \cap B)) = A \cap B$;
14. $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$;
15. $(A \cap B) \setminus (B \setminus A) = A \cap B$;
16. $(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$;
17. $(A \setminus B) \setminus (A \setminus B) = A \setminus B$;
18. $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;
19. $A \setminus (B \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;
20. $(A \cup B) \Delta B = A \setminus B$;
21. $(A \setminus B) \Delta (B \setminus A) = A \Delta B$;
22. $(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$;
23. $(A \cap B) \Delta (B \setminus A) = B$;
24. $(A \cup B) \Delta (A \setminus B) = B$;
25. $A \Delta (B \setminus A) = A \cup B$.

Список літератури

1. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевский О.А., Луцький Г.М., Печорін М.К. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – 236 с.
2. Авсеев Г.Г., Абрамов О.М., Ситников Д.Є. Дискретная математика. – Харьков: Торсинг, 2003. – 143 с.
3. Трохимчук, Р.М. Основи дискретної математики. Практикум [Текст] / Р.М. Трохимчук. – К.: МАУП, 2004. – 163 с.
4. Баландіна Н. М. ,Федоровський С.В. Дискретна математика : метод. вказівки / Баландіна Н.М., Федоровський С.В. – 2-ге вид., випр.-Одеса, 2020. – 65 с.
5. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.С. Дискретна математика. — К. : Вища школа, 2018. — 287 с.
6. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник. — Харків: Компанія СМІТ, 2016. — 480 с.
7. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. — К.: Видавнича група ВНУ, 2017. - 368 с.