МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до вивчення дисципліни «Вища математика» (розділ «Числові, степеневі ряди та ряди Фур`є») для студентів технічних спеціальностей

Затверджено на засіданні

кафедри вищої математики

та фізики
Протокол № 10 від 18.05.2016

КІРОВОГРАД 2016

Методичні вказівки до вивчення дисципліни «Вища математика» (розділ «Числові та степеневі ряди, ряди Фур`є) для студентів технічних спеціальностей / Укл. Кривоблоцька Л.М., Кічанова Н.П.-Кіровоград КНТУ, 2016-63с.

Містять відомості про дослідження числових та степеневих рядів. Дано основні визначення, ознаки збіжності для знакопостійних та знакозмінних числових рядів. Розглянуті степеневі ряди та методи знаходження інтервалів їх збіжності або розбіжності, а також приклади застосування рядів для інтегрування функцій, розв'язання диференціальних рівнянь, наближених обчислень. Крім того, наведені варіанти завдань для індивідуальної роботи.

Призначені для студентів усіх спеціальностей

Укладачі:

Кривоблоцька Л.М. – канд. фіз.-мат. наук, доцент

Кічанова Н.П – асистент

Рецензент:

Якименко С.М. – канд. фіз.-мат. наук, доцент Кіровоградського національного технічного університету

КІРОВОГРАД 2016

Границі. Неперервність.

1. Границя числової послідовності.

У курсі «Алгебра і початки аналізу» вивчають досить важливі властивості функцій, які не можна дослідити елементарними способами. В основі методів, за допомогою яких удається дослідити ці нові властивості, лежить поняття границі функції, одне із фундаментальних понять математики.

З'ясуємо поняття границі на простішому випадку функціональної залежності, коли областю визначення функції $y = f(x)$ є множина натурального ряду чисел N. Таку функцію називають числовою послідовністю і позначають $y_n = f(n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Числову послідовність ще записують у вигляді ряду чисел $y_1, {}_2, \dots, y_л, \dots,$ в якому y_1 називають першим членом послідовності, y_2 — другим і т. д., y_n — n-м, або загальним членом послідовності. Числову послідовність вважають заданою, якщо задано її загальний член.

Для числових послідовностей застосовують ще і таке позначення: (y_n) *або* (a_n), де y_n, a_n — n-ні члени послідовностей.

Прикладами числових послідовностей є арифметична і геометрична прогресії. Тут загальні члени задають такими формулами: $y_n = y_1 + d(n - 1)$, $y_n = y_1 q^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, де d — різниця арифметичної прогресії; q — знаменник геометричної прогресії.

Розглянемо ще приклади числових послідовностей.

Приклад. Розглянемо послідовність, загальний член якої заданий формулою

$$y_n = \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Дістанемо таку числову послідовність:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots. \qquad (2)$$

У послідовності (2) члени із зростанням числа n спадають і наближаються до числа нуль. І чим більше число n, тим відповідний член послідовності міститься ближче до нуля. Іншими словами, відстань $|y_n — 0|$ при зростанні n стає як завгодно малою, тобто у послідовності (2) знайдеться член y_N такий, що для всіх $n > N$ буде справджуватися нерівність

$$|y_n - 0| < \varepsilon, \qquad (3)$$

де ε — довільне додатне число. Надаючи є довільних додатних значень, щоразу матимемо шукане число N.

Щоб знайти N для будь-якого наперед заданого додатного числа ε, підставимо в нерівність (3) значення y_n і розв'яжемо здобуту нерівність відносно n. Дістанемо:

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon,\quad \frac{1}{n^2}<\varepsilon. \qquad (4)$$

Звідси $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Отже, нерівність (3) буде справджуватися для всіх значень n, які задовольняють нерівність (4).

Тому за число N можна взяти число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, якщо воно ціле, або найбільшу цілу частину цього числа, якщо це число в дробовим. Проілюструємо сказане за допомогою таблиці.

Таблиця

ε	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
N	2	3	4	5	10	31	100

Дамо означення границі числової послідовності. *Число а називається границею послідовності y_1, y_2, y_3,...,y_n,..., якщо для будь-якого додатного числа існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність*

$$|y_n - a| < \varepsilon. \qquad (8)$$

Символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a, \qquad \text{або } y_n \to a(n\to\infty).$$

Ми будемо користуватися першим позначенням (lim — від латинського слова «*limes*», що означає «границя»).

2. Нескінченно малі числові послідовності

Серед функцій натурального аргументу особливе місце відводиться так званим нескінченно малим послідовностям.

Послідовність $y_n = f(n)$, n — 1, 2, ... називається нескінченно малою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Наприклад, послідовності $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ є нескінченно малими.

Якщо у нерівності (8) покласти $a = 0$, то дістанемо нерівність $|y_n| < \varepsilon$, $n > N$. Тому нескінченно малу числову послідовність можна означити ще й так.

Числова послідовність (y_n) називається нескінченно малою, якщо для будь-якого додатного числа ε існує натуральне число N таке, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n| < \varepsilon$.

Нескінченно малі послідовності позначають через (a_n), (β_n), (γ_n) і т. д.

Наступні теореми встановлюють тісний зв'язок між послідовністю (y_n), яка має границю, і нескінченно малою послідовністю.

Теорема 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то послідовність $(a_n) = (y_n - a)$ є нескінченно малою.

Доведення. Яке б не було число $\varepsilon > 0$, знайдеться таке N, що для всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|y_n — a| < \varepsilon$, або $|\alpha_n| < \varepsilon (n > N)$, тобто α_n — нескінченно мала послідовність.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема 2. Якщо різниця між y_n і числом a є нескінченно малою послідовністю, то a є границею послідовності (y_n).

Доведення. Позначимо $a_n = y_n — a$. Тоді $y_n — a$ є нескінченно малою послідовністю. Тобто для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|a_n| < \varepsilon$, або, що те саме, $|y_n — a| < \varepsilon$. Отже, згідно з означенням границі, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Доведені теореми дають змогу навести ще й таке означення границі послідовності.

Число a називається границею числової послідовності (y_n), якщо різниця між y_n і числом a є нескінченно малою послідовністю, тобто $(y_n — a) = (\alpha_n)$, де (α_n) — нескінченно мала послідовність.

Нескінченно малі послідовності мають такі властивості.

Властивівть 1. *Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.*

Перш ніж сформулювати наступну властивість, наведемо таке означення. *Послідовність (y_n) називається обмеженою, якщо існує число $M > 0$, що для всіх значень $n = 1,2, \ldots$ виконується нерівність*

$|y_n| < M$.

Властивість 2. *Добуток нескінченно малої числової послідовності на обмежену послідовність є нескінченно малою числовою послідовністю.*

3. Нескінченно великі числові послідовності

Розглянемо нескінченно великі числові послідовності.

Означення. *Послідовність (y_n) називається нескінченно великою, якщо, яке б не було число $M > 0$, існує таке число $N = N(M)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n| > M$.* Це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty.$$

y_n при цьому називають нескінченно великою послідовністю. Наприклад, послідовності $((-1)^n n)$, (n^2), (n) є нескінченно великі.

Доведемо, наприклад, що $((—1)^n n)$ є нескінченно велика послідовність. Справді, для довільного числа $M > 0$, починаючи з деякого номера n, маємо $|y_n|=(—1)^n n = n > M$. Члени заданої послідовності необмежене зростають за модулем, набуваючи то додатних, то від'ємних значень. Якщо $M_1 = 100$, то $|y|=n>100$, якщо $n = 101, 102, ...$.

Отже, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$..

Слід зауважити, що необмежена числова послідовність може й не бути нескінченно великою. Так, числова послідовність (y_n), де

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{я} \quad n = 2k \\ n!, & \text{я як} \quad n = 2k+1, \quad k = 0,1,... \end{cases}$$

є необмеженою і не є нескінченно великою.

Існує тісний зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими числовими послідовностями. Цей зв'язок встановлюють такі теореми.

Теорема. Якщо (y_n)є нескінченно велика числова послідовність, то послідовність $(\alpha_n) = \left(\frac{1}{y_n}\right)$ є нескінченно малою.

Доведення. Оскільки (y_n) є нескінченно велика послідовність, то яке б ми не взяли число $M > 0$, існує таке число N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n| > M$. Нехай $M = \frac{1}{\varepsilon}$, де ε — довільне додатне число.

Тоді $|y_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ $(n > N)$, або $|a_n| < \varepsilon$ $(n > N)$. Теорему доведено.

Обернена теорема. Якщо послідовність (α_n) є нескінченно мала числова послідовність *і* $\alpha_n \neq 0$ для всіх $n = 1, 2, ...$, то послідовність $(y_n)= =\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ є нескінченно велика.

Доведення. Оскільки за умовою теореми (α_n) — нескінченно мала послідовність, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, наприклад, для $\varepsilon = \frac{1}{M}$, де $M > 0$ — будь-яке дійсне число, існує натуральне число $N = N(M)$ таке, що для всіх значень $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \frac{1}{M}$.

Позначимо $y_n = \frac{1}{\alpha_n}$. Тоді $\frac{1}{|\alpha_n|} = \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = |y_n| > M, \qquad n > N.$

Теорема доведена.

4. Основні теореми про границі

Знаходження границі числової послідовності на основі "тільки означення границі викликає часто певні труднощі, оскільки: треба наперед знати «підозріле» на границю число; не кожного разу за заданим ε можна знайти *N*.

Тому на практиці для знаходження границі числових послідовностей користуються такими теоремами.

Теорема 1. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають відповідно границі a і b. Тоді послідовність (x_n+y_n) має границю $a + b$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b$$

Теорема 2. Нехай послідовності (x_n) *і* (y_n) мають відповідно границі a, b. Тоді послідовність $(x_n \bullet y_n)$ має границю, яка дорівнює $a \bullet b$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b.$$

Теорема 3. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають скінченні границі, які відповідно дорівнюють $\lim_{n\to\infty}(x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$, причому $b \neq 0$. Тоді послідовність $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ має скінченну границю, яка дорівнює $\frac{a}{b}$.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Зростаюча або спадна обмежена послідовність має границю.

Теорема 5. Якщо послідовність (x_n) має границю a, то ця границя єдина**.**

Приклад 1. Знайти $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sin n^2 + \frac{1}{a^n}\right), a > 1.$

(За означенням $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, читають «ен факторіал».)

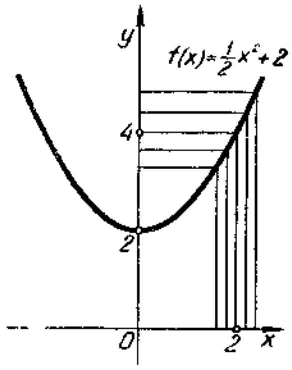
Розв'язання. Використаємо теорему про границю суми. Для цього з'ясуємо, чи існують границі доданків.. Послідовності $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n!}\right)$, є нескінченно малими , тобто $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ і $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$. Послідовність $(\sin n^2)$ є обмеженою: $|\sin n^2| \leq 1$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sin n^2 = 0,\ \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Границі доданків існують. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\sin n^2+a^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sin n^2+\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1.$$

5. Границя функції неперервного аргументу



Мал. 105

Розглянемо функцію *y = f (x),* де аргумент змінюється неперервно (набуває всіх значень з певного проміжку $\langle a;b\rangle$, крім, можливо, однієї внутрішньої точки даного проміжку).

Наведемо два приклади.

Приклад 1. Простежимо, як поводить себе функція $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, коли значення аргументу *x* як завгодно близько наближається до числа 2. Символічно це позначають так: $x\to 2$. З малюнка 105 випливає, що коли $x\to 2$ зліва або справа, то відповідні значення функції *f (x)* як завгодно близько наближаються до числа 4, тобто ці значення мало відрізнятимуться від числа 4.

У такому разі кажуть, що функція $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ має границею число 4, якщо $x\to 2$, або в точці $x_0 = 2$, Символічно це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)=4.$.

Число A називається границею функції y = f (x) у точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ *існує таке число* $\delta(\varepsilon)>0$, *що для всіх* $\kappa\in\langle a;b\rangle, x\neq x_o$ і *таких, що* $|x-x_0|<\delta$, *якщо виконується нерівність* $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=A,\ \text{або}\ f(x)\underset{x\to x_o}{\to} A$$

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}(2x+1)=3.$

Розв'язання. Під знаком границ є лінійна функція *y=kx+b(k=2,b=1).*З попереднього прикладу випливає, що лінійна функція *y = kx + b* у будь-якій точці $x\to a$ має границю *A*. Границя дорівнює значенню цієї функції у точці *x = a,* тобто *A = ka + b.* Отже, у даному прикладі *A* = 2 • 1 + 1 = 0. Задача розв'язана.

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	**2**
Число e	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$
Границя суми, добутку, частки за умови : $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)$,	$\lim\limits_{x\to a} c\, f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x), \qquad c = const$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$;
Перша важлива границя	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
Наслідки першої важливої границі	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;
Друга важлива границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$
Наслідки з другої важливої границі	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$

Поняття або співвідношення, що визначаються	**Формула**
1	**2**
Еквівалентні нескінченно малі	$x \sim \sin x \sim tg\, x \sim arcsin x \sim \mathrm{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$ $x \to 0$
	$u(x) \sim \sin u(x) \sim \mathrm{tg}\, u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \mathrm{arctg}\, u(x) \sim$ $\sim \ln\left(1+u(x)\right) \sim e^{u(x)} - 1,\ u(x) \to 0$ *при* $x \to a$
	$a^x - 1 \sim x \ln a, \qquad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a},$ $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$ *при* $x \to 0$
Еквівалентно нескінченно великі	$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \sim a_0 x^n$ при $x \to \infty$
Таблиця визначеностей	1) $\frac{c}{0} = \infty, c \neq 0;$ 2) $\frac{\infty}{0} = \infty;$ 3) $\frac{c}{\infty} = 0;$ 4) $\frac{0}{\infty} = 0;$ 5) $c \cdot \infty = \infty, c \neq 0;$ 6) $\infty \cdot \infty = \infty;$ 7) $\infty + \infty = \infty;$ 8) $0^\infty = 0;$ 9) $\infty^\infty = \infty$
Типи невизначеностей	$\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \{1^\infty\}, \{\infty^0\}, \{0^0\}$
Неперервність функції в точці $x = a$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a);$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0;$ $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$
Розрив першого роду: а) усувний; б)стрибок;	$\exists\, f(a+0), f(a-0);$ $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$ або $f(a+0) = f(a-0)$, якщо функція $f(x)$ невизначена при $x = a$; $f(a+0) \neq f(a-0)$
Розрив другого роду	Хоча б одна з границь $f(a+0), f(a-0)$ не існує або дорівнює нескінченності.

Варіанти завдань

Завдання: у прикладах 1-7 знайти границі заданих функцій або послідовностей. У прикладі 8 довести що $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (знайти $\delta(\varepsilon)$).

У прикладі 9 дослідити на неперервність функцію. У прикладі 10 визначити порядок малості нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно нескінченно малої функції $\beta(x)$ при $x \to 0$.

Варіант №1

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^2 x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - 2x}{3x - 2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^x$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 5e} \dfrac{\ln(x - 4e) - 1}{x - 5e}$.

8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$.

9. $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$.

10. $\alpha(x) = \sqrt{\sin^2 x + x^2}, \beta(x) = x$

Варіант №2

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{2x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$.

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6$.

9. $y = \dfrac{1}{3 + 5^{1/x}}$.

10. $\alpha(x) = \ln(1 - 5x^3), \beta(x) = x$.

Варіант №3

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^2+1}{(x-1)^2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-\cos^2 x}{x^2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^2+x-2}.$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}.$

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}.$

8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7.$

9. $y=2+\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}.$

10. $\alpha(x)=tgx-\sin x,\ \beta(x)=x.$

Варіант №4

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2-3}).$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+1}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}{\sin x}.$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}.$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}.$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-32}=10.$

9. $y=\begin{cases}\dfrac{2\sin x}{3x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

10. $\alpha(x)=1+x\sin x-cox2x,\ \beta(x)=x.$

Варіант №5

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right].$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right).$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}.$

6. $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{6x^2+x-1}{x+1/2}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+3}{3n^2+2}\right)^{n^2}.$

8. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2+x-1}{x+\frac{1}{2}}=-5.$

9. $y=\dfrac{1}{x^2-1}.$

10. $\alpha(x)=\cos 3x-\cos x,\ \beta(x)=x.$

Варіант №6

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+3)-\ln x)..$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}.$

6. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$

7. $\lim\limits_{x\to\pi/a}\dfrac{tg3x}{tgx}.$

8. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{6x^2-x-1}{x-1/2}=5.$

9. $y=\dfrac{1-\cos 8x}{64x^2}.$

10. $\alpha(x)=9^{\sin^2 x}-1,\ \beta(x)=x.$

Варіант №7

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right).$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-2\sin^2 x-\cos 2x}{x^2}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^x.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^2-2}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}.$

8. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{x-\dfrac{1}{3}}=-1.$

9. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$

10. $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+x}-1,\ \beta(x)=x.$

Варіант №8

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x.$

5. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+1}.$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7.$

9. $y=\begin{cases} x^2, & x\le 3,\\ 2x+1, & x>3.\end{cases}$

10. $\alpha(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}},\ \beta(x)=x.$

Варіант №9

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+3).$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right).$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5tg^2 x)^{3ctg^2 x}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x}\right)^x.$

6. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}.$

8. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}}=2.$

9. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{x}.$

10. $\alpha(x)=e^{x^2}-\cos x,\ \beta(x)=x.$

Варіант №10

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right].$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}).$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-3}{x^3+x-2}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}x\ln\frac{2+x}{1+x}.$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

8. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6.$

9. $y=\begin{cases}x^2, & x\le 3,\\ 2x+3, & x>3.\end{cases}$

10. $\alpha(x)=\sin 2x-2\sin x,\ \beta(x)=x.$

Варіант №11

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}.$

6. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+5}\right)^{2x+3}.$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2.$

9. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}.$

10. $\alpha(x)=\sqrt{1+x^3}-1,\ \beta(x)=x.$

Варіант №12

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{2x^2-3x-9}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-x\right).$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+2x}-3}{\sqrt[3]{x+8}-2}.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-18x^2+81}{2x^4-9x+1}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{x+7}\right)^{x+3}.$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-\frac{1}{2}}=-6.$

9. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$

10. $\alpha(x)=\sqrt{1+2x^2}-1,\ \beta(x)=x.$

Варіант №13

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-tgx}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{9/x}-1\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{2x^2-32}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+7}\right)^x$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

8. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-\frac{1}{3}}=-1$.

9. $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

10. $\alpha(x)=\arcsin\left(\sqrt{4+x^2}-2\right), \beta(x)=x$.

Варіант №14

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to}\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{7/5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-8x^2+1}{7x^4-9x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+7}\right)^{4x-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to-\frac{7}{5}}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+\frac{7}{5}}=-19$.

9. $y=9-5^{3/x}$.

10. $\alpha(x)=\sin 3-3\sin x, \beta(x)=x$.

Варіант №15

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+3+5+\ldots+n}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{2x+3}\right)^{x-1}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+4)^4-(n-1)^4}$.

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

8. $\lim\limits_{x\to-\frac{7}{2}}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\dfrac{1}{2}$.

9. $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq2,\\ 4, & x=2.\end{cases}$

10. $\alpha(x)=2^{\sin 2x}-1,\ \beta(x)=x.$

Варіант №16

1. $\lim\limits_{x\to}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{1-\cos8x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)\ln\dfrac{x+5}{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{1-2\sin^2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-4}{4x+9}\right)^{2x-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x-1}{2x^2-32}$.

8. $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\dfrac{2x^2-19x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}$.

9. $y=2^{\frac{4}{x-2}}$.

10. $\alpha(x)=\sin(\sqrt{9+x}-3),\ \beta(x)=x.$

Варіант №17

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}.$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}.$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-8}{7x+9}\right)^{-2x-1}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-9x-1}{2x^2+32}.$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3}=5.$

9. $y=\dfrac{x-9}{|x-9|}$ . .

10. $\alpha(x)=arctg^7 2x,\ \beta(x)=x.$

Варіант №18

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-tg^3 x}.$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{tg\frac{x}{2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x.$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x-2}{\left(4x^2-x-2\right)^2}.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-8}{6x+9}\right)^{3x-4}.$

8. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}=23.$

9. $y=\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$.

10. $\alpha(x)=x+\sqrt[3]{\sin x},\ \beta(x)=x.$

Варіант №19

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{20}-(x+\sqrt{x^2+1})^{20}}{x^{20}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x\,tg\,2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{3^{tgx}-1}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-9}{5x+9}\right)^{5x-4}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2-75x-39}{x+1/2}=-81.$

9. $y=\begin{cases} x^2-1, & x\le 3, \\ \cos\dfrac{\pi}{3-x}, & x>3. \end{cases}$

10. $\alpha(x)=\sqrt{9+x}-3,\ \beta(x)=x.$

Варіант №20

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 3x}{\cos 3x-\cos x}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{2x}$

5. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2-x}{x+3}-2x\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+2x+5}{x+1}=5$

9. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

10. $\alpha(x)=\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x},\ \beta(x)=x.$

Варіант №21

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{9x^2-x+3}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{5x}\right)^{1-x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-7}-\sqrt{x^2+5}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+5)=3$

9. $y=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ \sqrt{x+2}, & -2\le x<2, \\ x+1, & \end{cases}$

10. $\alpha(x)=\ln(1+\sqrt{x\sin x})$, $\beta(x)=x$.

Варіант №22

1. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$

9. $y=f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$

10. $\alpha(x)=\sqrt{(1+x^2)}\operatorname{tg}(\pi x/2)$, $\beta(x)=x$.

Варіант №23

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^3+2x}{x^2-x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[4]{9x^8+1}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{7-x+x^2}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 3x}{\operatorname{tg}^2 4x}$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2x+10}{2x-5}=4.$

9. $y=\begin{cases} 3\sqrt{x+2}, & 0\le x\le 2 \\ 12-3x, & 2<x\le 5; \\ 7x-6, & 5<x<\infty \end{cases}$

10. $\alpha(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2},\ \beta(x)=x.$

Варіант №24

1. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3+x^5}}{\operatorname{arctg} 5x}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{27x^3+4}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x^5}+x}$

5. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\frac{3x+1}{2x-2}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} (x(\ln(x+a)-\ln x))$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2-x^4}$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-6n+10}{n-5}=-1.$

9. $y=f(x)=x^2-\dfrac{|x+1|}{x+1}-1$

10. $\alpha(x)=\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2),\ \beta(x)=x.$

Варіант №25

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+x+4x^3}{1+x+x^2-x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{x^3+x+3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln x-\ln(x+1)\right]$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{n+7}{2n-5}=-2.$

9. $y=f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x-1|}$

10. $\alpha(x)=(x^2-25)$, $\beta(x)=(x-5)$, $x\to 5$

Варіант №26

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{5x+2}-\sqrt[3]{8x^3+5}}{\sqrt[4]{x+7}-x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\operatorname{arctg} x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x^3-1}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{7x-5-2x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{5x}\right)^{2x+3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x^2-75x-39}{x^2+1}=-39.$

9. $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x\le -1 \\ x^2+1, & \text{если } -1<x\le 1 \\ -x+3, & \text{если } x>1 \end{cases}$

10. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2+7x+2}$ и $\beta(x)=\dfrac{1}{3x^2-x+10}$

$x\to\infty$

Варіант №27

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{27x^3+4}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x^5+x}}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+5x-9}{2x^2+1}=-1.$

9. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x\le0\\ 1+2x, & \text{если } 0<x<2\\ x-2, & \text{если } x\ge2\end{cases}$

10. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2}$ и $\beta(x)=\dfrac{1}{x^2+7x+2}$, $x\to\infty$

Варіант №28

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-9x^2}{3x-\sqrt[4]{9x^8+1}}$

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{\left(3^{\sin x}-1\right)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to0}x\,ctg5x$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-1}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^3-8}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2x}{3x+1}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{8n-7}{1-5n}=-1.$

9. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ tgx, & 0\le x<\dfrac{\pi}{4}\\ 1, & x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

10. $\alpha(x)=x\sin x,\ \beta(x)=\operatorname{tg}x$

Варіант №29

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3(x-1)}{(x^2+1)x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 3x+\sin 5x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-3}-\sqrt{x^2+5x-7}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{n-9}{1+3n}=-1.$

9. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+2}, & x<-2\\ 2, & -2\le x\le 2\\ \dfrac{1}{2x}, & x>2\end{cases}$

10. $\alpha(x)=\sin^2 x$, $\beta(x)=\sin 2x$

Варіант №30

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x^2}}{6x+8}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x-1}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{4n-2}=\dfrac{1}{2}$

9. $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x+1}}}{3-x}$

10. $\alpha(x)=x^2-3x+2$,$\beta(x)=x^2+4x-5, x\to 1$

Ряди

Таблиця 2 – Числові ряди

Поняття або співвідношення що, визначаються	**Формула**
1	**2**
Числовий ряд	$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$
n-а частинна сума ряду	$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$
Ряд збіжний	$\lim_{n\to\infty} S_n = S$
Необхідна умова збіжності ряду	*Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається, то* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
Достатня умова розбіжності ряду	$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$
Геометричний ряд	$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, ряд збігається при $\lvert q \rvert < 1$, $S = \dfrac{a}{1-q}$, ряд розбігається при $\lvert q \rvert \geq 1$.
Гармонійний ряд	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ряд розбіжний
Узагальнений гармонійний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in R$, ряд збіжний при p>1, ряд розбіжний при p≤1

<table>
<tr><td>Знакододатній ряд</td><td colspan="2">$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad u_n > 0$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ознаки порівняння для рядів
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \,(1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \,,(2), \qquad u_n > 0, v_n > 0$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$a) u_n \le v_n , \forall n$
якщо ряд (2) збіжний , то ряд (1) збіжний,
якщо ряд(1) розбіжний , то ряд (2) розбіжний.
б) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0,$ то обидва ряди збіжні, або обидва розбіжні.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Достатні ознаки збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n , \ u_n > 0$</td></tr>
<tr><td>Ознака Деламбера</td><td colspan="2">$\exists \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$
$l < 1 -$ ряд збіжний ,
$l > 1 -$ ряд збіжний ,
$l = 1 -$ потрібне додаткове дослідження</td></tr>
<tr><td>Радикальна ознака Коші</td><td colspan="2">$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$
$l < 1 -$ ряд збіжний ,
$l > 1 -$ ряд розбіжний ,
$l = 1 -$ потрібне додаткове дослідження</td></tr>
</table>

Знакозмінний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\partial e\, u_n$ – задані числа , як додатні , так і відємні.
Знакопереміжний ряд	$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, u_n > 0.$
1	**2**
Ознака Лейбніца	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ *збігається,якщо* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *та* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
Ряди лейбніцевого типу	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \ldots$ Це умовно збіжні ряди
Достатня ознака збіжності	Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ *збіжний, то збіжний і ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно збіжний	Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ *збіжний.*
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ умовно збіжний	Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збіжний, а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ *розбіжний*

Таблиця 3 – Функціональні ряди

Поняття або співвідношення, що визначаються	**Формула**
1	**2**
Функціональний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$
n-а частинна сума ряду	$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$
Сума ряду	$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$
n-й залишок ряду	$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$
Степеневий ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ або $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$
Радіус збіжності степеневого ряду	$R = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\|$ або $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\|a_n\|}}$
Ряд Тейлора для функції f(x)	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$
Ряд Маклорена для функції f(x)	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$

Формули розкладу елементарних функцій в ряд Макорена

Формула	Радіус збіжності
1	2
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$-1 < x \le 1$
$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$-1 \le x \le 1$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1)} + \ldots =$ $= x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$, де $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!} + \ldots =$ $= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$-1 < x < 1$

Ряди Фур'є

Поняття або співвідношення, що визначаються	**Формула**
Ряд Фур'єдля періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, де $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ \ n=1,2,\dots$
а) ряд Фур'є для парної функції	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, *де* $a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$
б) ряд Фур'є для непарної функції	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$
Ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом $2l$	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$, де $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx$,

	$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \;\; n = 1,2,\ldots$ **2**
а) ряд Фур'є для парної функції	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$ де $a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,$ $a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$
б) ряд Фур'є для непарної функції	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin\frac{\pi n x}{l},$ де $b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,$
Ряд Фур'є в комплексній формі	
а)для періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{inx},$ $\partial e \, C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
б) для періодичної функції $f(x)$ з періодом $2l$	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{\frac{\pi n x}{l}},$ $\partial e \, C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\frac{\pi n x}{l}i}dx,$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Варіанти завдань
Варіант № 1

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{5n-3}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/3}}{n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(3n+4)}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x-5)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 9^n}$.

4. Задано ряд $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$ Знайти суму ряду $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$

5. Виконати розвинення функції $f(x)=e^{-x^2}$ в ряд за степенями x та знайти радіус R збіжності степеневого ряду.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 18^{\circ}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$$\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{x}dx.$$

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$$y''-xy'+y=e^x,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є, та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=x$ на інтервалі $(-\pi,\pi)$

б) $\begin{cases}0, & x<-3,\ x>3;\\ -2, & -3<x<0;\\ 2, & 0<x<3.\end{cases}$

Варіант № 2

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n+1}{n(n^2-1)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^5}{1+n^6}\right)^2$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{4n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+1)}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)2^n}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{(2n)!}$.

5. Виконати розвинення функції $f(x)=\cos^2 x$. в ряд за степенями x, та знайти радіус R збіжності степеневого ряду.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити $\operatorname{tg} 9^{\circ}$ з точністю до 0,001:

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx.$$

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$$y'=x^2y-1,\quad y(0)=1.$$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ \pi, & 0<x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=x\cos x$ на інтервалі $(0;\pi)$ по синусах.

Варіант № 3

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^9}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{6^n(n+2)!}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-5)^n}{n\cdot n!}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$, $[0,\infty)$.

5. Виконати розвинення функції $f(x)=\sin^2 x$.в ряд за степенями x та знайти радіус R збіжності степеневого ряду.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити e з точністю до 0,0001.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$\int_0^1 \cos x^2 dx.$

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''=(y')^2+xy, \quad y(0)=0, y'(0)=1.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x\le 0,\\ \pi-x, & 0<x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=x\cos x$ на інтервалі $(0;\pi)$ по косинусах.

Варіант № 4

1. Зайти суму ряду $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^2 n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\cdot \mathrm{tg}\frac{1}{n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+3)!}{(2n)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{3^n(2n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

4. За допомогою ряду $1-x+x^2-x^4-x^6+\ldots$знайти суму числового ряду $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

5. Виконати розвинення функції $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ в ряд за степенями x та знайти радіус R збіжності степеневого ряду:

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\ln 1{,}2$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx$.

9. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''+y'-y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$

10. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є на інтервалі $(-\pi;\pi)$, та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x\le 0,\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=x\sin x$ на інтервалі $(0;\pi)$ по косинусах.

Варіант № 5

1.Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n(n+1)(n+3)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^4}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{1+n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштраса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^{3/2}x^4}$, $(-\infty,+\infty)$.

6. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x та знайти радіус R збіжності степеневого ряду: $f(x)=\ln(1-2x)$

7. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{0,5}$.

8. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx.$$

9. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y'=xe^x+2y^2,\quad y(0)=0.$

10. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є на інтервалі $(-\pi;\pi)$, та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{-\pi}{4}, & -\pi<x\le 0,\\ \frac{\pi}{4}, & 0<x<\pi.\end{cases}$,

б) $f(x)=x\sin x$ на інтервалі $(0;\pi)$ по синусах.

Варіант № 6

1.Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+2)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin^2 n}{n!}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{x+n}\right)^3$, $[0,+\infty)$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x та знайти радіус R збіжності степеневого ряду: $f(x)=\frac{2}{1-x}$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\cos 10^{\circ}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^{1/3}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y'=2x+\cos y,\quad y(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $(0;\pi)$,

б) $f(x)=2x$ на інтервалі $(0;1)$.

Варіант № 7

1.Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{25n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $(-\infty,+\infty)$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x та знайти радіус R збіжності степеневого ряду: $f(x)=x^3\ln x$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt{1{,}025}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиаючи в ряд підінтегральну функцію: $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$(1-x)y''+y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=x^2$ на інтервалі $(-1;1)$,

б) $f(x)=e^{-x}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Варіант № 8

1.Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n(n+1)(n+3)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{8n-1}\right)^{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{5}}{2^{n}+3^{n}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n}}{n\sqrt{n}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n}}{(n+1)3^{n}}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^{3n}}{n^{2}}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{17^{n}}$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями $x-1$:

$x^{3}-2x+1$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt[3]{1{,}015}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиаючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_{0}^{1}\frac{e^{x}-1}{x}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y' = \cos x + x^{2}, \quad y(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є ,та побудувати її графіки:

а) $f(x)=5x-1$ на інтервалі $(-5;5)$,

б) $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{4}, & -\pi < x \le 0,\\ 0, & 0 < x < \pi.\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Варіант № 9

1. Зайти суму ряду $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n(n^2-4)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n)\ln^2(1+n)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt{n}}{2^n}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $(2,+\infty)$.

5. Виконати розвинення даної функції $f(x)=\frac{1}{x}$ в ряд за степенями $x+6$ та знайти радіус R збіжності степеневого ряду.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислти з точністю до 0,001 $\sqrt[3]{75}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''+y\cos y-x,\quad y(0)=0,\ y'(0)=\frac{\pi}{3}$.

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=x+x^2$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=\begin{cases}1, & -2<x\le 0,\\ 0, & 0<x<2.\end{cases}$

Варіант № 10

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11\cdot14\ldots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot5\cdot9\cdot13\cdot17\ldots(8n-11)(8n-7)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^9}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt[4]{n^4+8}}{(n+1)!}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n+6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $[0,+\infty)$.

5. Виконати розвинення функції $f(x)=-\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ в ряд за степенями $x-\frac{\pi}{2}$ та знайти радіус R збіжності степеневого ряду:

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 5^o$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^{0,5}\frac{\arcsin x}{x}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''=(y')^2+xy^2, \quad y(0)=0, y'(0)=-2.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=x+\pi$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ на інтервалі $(0;\pi)$.

Варіант № 11

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+6)(n+7)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+5)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{9n-1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+28n+9}\right)^{2n^2}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^3x^2}$, $(-\infty,+\infty)$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями $x+2$ та знайти радіус R збіжності степеневого ряду: $f(x)=\frac{1}{x+4}$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{0,3}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''=ye^x-xy'^2$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є на інтервалі $(-1;1)$, та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0,\\ x, & 0<x<1.\end{cases}$ на інтервалі $(-1;1)$,

б) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ на інтервалі $(0;\pi)$ по синусах.

Варіант № 12

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{(n+2)(n^2-4)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5(n^3+9)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n!}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $[0,2\pi]$

5. Виконати розвинення функції $f(x)=\frac{6}{8+2x-x^2}$ в ряд за степенями $x-1$ та знайти радіус R збіжності степеневого ряду.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[3]{129}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^1\frac{\operatorname{sh}x}{x}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''=xyy'$, $y(0)=1, y'(0)=0$.

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0,\\ 2, & 0<x<2.\end{cases}$ на інтервалі $(-2;2)$,

б) $f(x)=\cos x$ на інтервалі $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ по косинусах.

Варіант № 13

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(2n+5)(2n+7)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+9)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^{n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{5n}{9n-1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{2^{n}n!}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)x^{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n)x^{n}}{9^{n}}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку:

$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n}\sin\frac{1}{3^{n}x}$, $(0,\infty)$.

5. Виконати розвинення функції $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ в ряд за степенями x та знайти радіус R збіжності степеневого ряду.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[4]{132}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_{0}^{1}\sqrt{x}e^{-x^{2}}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y'=xy+x^{2}+y^{2}$, $y(0)=0$.

9. Виконати розвинення функцій ряд Фур`є та побудувати її графіки:

а) $f(x)=2x+3$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=\begin{cases}1-x, & -\pi<x\le 0,\\ 0, & 0<x<\pi\end{cases}$

Варіант № 14

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+8}{n(n+1)(n+4)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n)}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+7)^n$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $(-\infty,+\infty)$.

5. Виконати розвинення функції $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ в ряд за степенями x та знайти радіус R збіжності степеневого ряду:

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[3]{132}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^1 x\cos\sqrt{x}\,dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв\`язку диференціального рівняння:

$y'=xe^x+2y^2, \quad y(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур\`є та побудувати її графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{4}, & -\pi<x\le 0,\\ 0, & 0<x<\pi\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ на інтервалі $(0,\pi)$ по косинусах.

Варіант № 15

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n+1)!}{(2n)!}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{9n\sqrt{n}}\right)$;   г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^{n-1}}x^n$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad (-\infty,+\infty)$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями $x-3$, та знайти радіус R збіжності степеневого ряду.

$f(x)=e^{x^2-4x+1}$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_5^{10}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y'=x^3+y^2, \quad y(0)=0$.

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати її графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<o,\\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=\frac{x}{2}$ на інтервалі $(0;2)$ по косинусах.

Варіант № 16

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6-2n}{n(n+1)(n+7)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^3+5)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^n$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\sqrt{n}}x^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot 3^n(x-5)^n}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $[-1,1]$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\operatorname{arctg}1{,}2$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^1\sqrt[3]{x}\cos x\,dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y'=3x^2+xe^x,\quad y(0)=1.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є, та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x<3,\ x>3;\\ -2, & -3<x<0;\\ 2, & 0<x<3.\end{cases}$

б) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ на інтервалі $(0;\pi)$ по синусах.

Варіант № 17

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n+3)(2n+5)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{4n}{4n+3}\right)^{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(2n+2)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n n^2 (x+3)^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n\sqrt{n}}x^n$.

4. Використовуючи почленне диференціювання, обчислити суму ряду

$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{x+6}$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\ln 1{,}25$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$\int_0^{1/3}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$..

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y'=e^{\cos x}+y,\quad y(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є, та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}\pi x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & x<0,\ x>1.\end{cases}$

б) $f(x)=(x-1)^2$ на інтервалі $(0;\pi)$ по синусах.

Варіант № 18

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(3n-1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt{n+1}}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^4}{(3n)!}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+5)\ln(n+5)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

4. Використовуючи почленне диференціювання, обчислити суму ряду

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$$

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$$\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2}).$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[10]{1000}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^1\sqrt{x}\sin x\,dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y'=x^2+ye^y,\quad y(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ \frac{\pi x}{4}, & 0<x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=(x-1)^2$ на інтервалі $(0;\pi)$ по косинусах.

Варіант № 19

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(3n+7)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+100}{8n+1}\right)^n$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^{n+2}}{7^n}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{(n+1)!}(x+6)^{2n+1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{7n+5}}$.

4. Використовуючи почленне диференціювання, обчислити суму ряду

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$$f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 15^{\circ}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^{0,5}\frac{\arcsin x}{x}dx.$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$(1+x^2)y''-5xy'-4y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є:

а) $f(x)=x^2$ на інтервалі $(-1;1)$.

б) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

Варіант № 20

1. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+8}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!}{(2n+5)!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^3}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n(n+2)}x^n$.

4. Використовуючи почленне диференціювання, обчислити суму ряду

$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями $x-1$.

$$f(x)=\frac{1}{x-3}.$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\ln 2$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$(1+x^2)y'-1=0, \quad y(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є:

а) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$ на інтервалі $(0;\pi)$,

б) $f(x)=e^x$ на інтервалі $(0;2\pi)$.

Варіант № 21

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(3n+2)(3n+5)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5n}{\sqrt{9n^2+1}}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n+1}{10n+5}\right)^{\frac{n^2}{3}}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\sqrt{\ln(n-1)}}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{8n-7}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)x^n}{5^n}$.

4. Використовуючи почленне диференціювання, обчислити суму ряду

$1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x-1.

$f(x)=\sqrt[3]{26+x}$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{1,3}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$$\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx..$$

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$(1-x)y''+y'+xy=0,\quad y(0)=1, y'(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є:

а) $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0,\\ 0, & 0<x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=x^2$ на інтервалі $(0;2\pi)$.

Варіант № 22

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+8}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{n^3}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2+2n+2)\ln^2(n+1)}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 13^n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{9}{5n}\right)$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}\cdot x^n$.

4. Використовуючи почленне інтегрування, обчислити суми ряду

$x+2x^2+3x^3+\ldots$

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями $x-3$.

$$f(x)=\sin\frac{\pi x}{6}.$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\operatorname{arctg}0{,}5$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$$\int_0^1\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}\,dx..$$

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''-xy'-y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

б) $f(x)=|x|,\quad -\pi\le x\le\pi.$

Варіант № 23

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+3)(n+4)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{8}{9n}\right)^{n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{n(n+1)}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{-n^2}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)\ln^{2}(n+2)}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n-1}}{5^{n}(n^{2}-5n)}$.

4. Використовуючи почленне інтегрування, обчислити суми ряду

$x-4x^{2}+9x^{3}-16x^{4}\ldots$

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями $x+1$:

$f(x)=(x+1)e^{x}$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 ln1,12.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_{0}^{0,3}e^{-2x^{2}}dx.$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''-x^{2}+y=0,\quad y(0)=1, y'(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є:

а) $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x\le 0,\\ \pi-x, & 0<x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

б) $f(x)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x$ на інтервалі $(0;\pi)$.

Варіант № 24

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+8)(n+9)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13n+7}{\sqrt{n2^n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{7^{n+1}}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{9n^3+16}}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^2 8^n}$.

4. Використовуючи почленне інтегрування, обчислити суми ряду

$1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями $x+1$.

$f(x)=\ln(1-x)$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{0,4}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$$\int_0^{0,5}\frac{1}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$$

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y'=x^2y+ye^x-1,\quad y(0)=1.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0,\\ x, & 0<x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$,

б) $f(x)=x$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Варіант № 25

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-3}{n(n+2)(n+3)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n(2n-1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{2n}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sin^2 n}\right)$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+5}{\sqrt{n^3}}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)2^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n+1)3^n}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n^3+1}}$, $[-3,0]$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$$f(x)=x\arccos\frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}.$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{1,4}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^{1/2}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$..

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв\`язку диференціального рівняння:

$y''=x^2y-y'$, $y(0)=1, y'(0)=0$.

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур\`є та побудувати її графік:

а) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,

б) $f(x)=\pi^2-x^2$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Варіант № 26

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$, г) $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{5}+\ldots$

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^2}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n\sqrt{n}}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cos\pi nx$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x-3.

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 13^{\circ}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_{0}^{0,5}x\,\mathrm{arctg}x\,dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''=xy'-y+1,\quad y(0)=1,\, y'(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графік:и:

а) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le 1\end{cases}$,

б) $f(x)=\cos 2x$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Варіант № 27

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(1+3^{-n}))^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n9^n}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{n^5}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}x^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(x-2)^n$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$, $[0,+\infty)$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{x+6}.$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\operatorname{arctg}1{,}2$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиаючи в ряд підінтегральну функцію:

$$\int_0^{0,25}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$$y''=yy'-x^2,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1.$$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0,\\ x, & 0\le x\le 2.\end{cases}$,

б) $f(x)=\cos 3x$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Варіант № 28

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 13^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^3+5n}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{e^n}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n4^{n-1}}x^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(x-1)^n$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейерштрасса:

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$\sqrt[3]{1+x}$.

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt{1{,}0004}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію:

$\int_0^{1/2}\ln(1+x^3)dx.$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''=(y')^2+xy^2,\quad y(0)=1, y'(0)=-2.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x\le 0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$,

б) $f(x)=\sin 2x$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Варіант № 29

1. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4n+1}{n^3-n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{5n^2-3}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^3(3n+4)}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)2^n}$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса:

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}.$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}997}}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int\limits_0^{0{,}5}\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}dx$.

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$3y''-xy'+x=0, \quad y(0)=1, y'(0)=0.$

9. Виконати розвинення функцій в ряд Фур`є на та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=\frac{2}{\pi}(\pi-x)$ інтервалі $(0,2\pi)$,

б) $f(x)=\sin 3x$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Варіант № 30

1. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n+3}{3}\ln^2(n+8)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}n^2}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{8+2n+n^2}$.

3. Визначити область збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$.

4. Довести рівномірну збіжність ряду в заданому проміжку, користуючись ознакою Вейєрштрасса: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $[-1,1]$.

5. Виконати розвинення даної функції в ряд за степенями x.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}.$$

6. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 17^{\circ}$.

7. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розвиваючи в ряд підінтегральну функцію: $\int_0^{1/2} e^{-2x^2}dx..$

8. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв`язку диференціального рівняння:

$y''-y'+5=x,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$

9. Виконати розвинення функції в ряд Фур`є та побудувати їх графіки:

а) $f(x)=x^2$ на інтервалі $(0,2\pi)$,

б) $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0,\\ 2x, & 0\le x\le 1.\end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Т.2.

2. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие, ч. 2. – М.: Высшая школа, 1967.

3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1972.

4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов.– 10-ое издание. – М.: Наука,1990.

5. Валєєв К. Г., Джаладова І. А., Лютий О.І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2002.