

Філімоніхіна Ірина

Асистент

Філімоніхін Геннадій

Професор, д-р. техн. наук

Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград

УДК 62-755 : 620.1.05: 534.1

Узагальнений емпіричний критерій стійкості основного руху і його застосування до ротора на двох осесиметричних пружних опорах

Сформульований узагальнений емпіричний критерій стійкості основного руху системи, до складу якої входить обертове тіло і декілька автобалансирів для його зрівноваження. За допомогою критерію визначені умови зрівноваження двома автобалансирами будь-якого типу динамічного дисбалансу жорсткого ротора на двох осесиметричних пружних опорах. Встановлено, що динамічне зрівноваження можливе тільки у випадку довгого складеного ротора, утвореного ротором, автобалансирами і тілами, створюючими дисбаланс, і відбувається на закритичних швидкостях обертання.

автобалансири, обертове тіло, ротор, стійкість, зрівноваження, дисбаланс

Вступ. Для зрівноваження обертових тіл на ходу, у процесі експлуатації, застосовуються пасивні автобалансири (АБ). В них корегувальні вантажі (КВ) за певних умов самі приходять у положення, у якому зрівноважують ротор і потім обертаються з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс чи не з'являться збурення іншого походження [1-3]. Такий усталений рух системи називається основним і з математичної точки зору для настання автобалансування необхідно, щоб він був стійким. Тому дослідження стійкості основних рухів таких систем займає центральне місце у теорії автобалансирів. В [3] був запропонований емпіричний критерій стійкості основного руху у випадку зрівноваження ротора (як гнучкого, так і жорсткого) одним АБ, і була показана його ефективність при визначенні умов настання автобалансування для різних роторних систем. Він дає необхідні умови стійкості, які близькі до достатніх, а при певних додаткових припущеннях з ними співпадають. В цій роботі критерій узагальнюється для випадку декількох АБ. Це актуально для дослідження випадків зрівноваження гнучкого ротора у декількох площинах корекції, або зрівноваження динамічного дисбалансу жорсткого ротора, або обертового штучного супутника Землі двома АБ. Застосування критерію ілюструється на задачі динамічного і статичного зрівноваження АБ твердого ротора на двох осесиметричних пружних опорах.

1. Узагальнення критерію стійкості основного руху. Формулювання критерію ґрунтується на властивості тіл АБ, як рідких, так і твердих, відхилятися у той же бік, що і точка на повздовжній осі обертового тіла, яка лежить у площині зрівноваження обертового тіла АБ. Відповідно до емпіричного критерію, для настання автобалансування у випадку зрівноваження ротора одним АБ необхідно, щоб це відхилення було у середньому за повний оберт ротора протилежно

вектору дисбалансу [3]. Узагальнимо цей критерій наступним чином:

При зрівноваженні обертового тіла n пасивними АБ з твердими тілами в n різних площинах корекції, для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб при фіксованому положенні тіл АБ в положенні, в якому вони зрівноважують обертове тіло, при будь-яких елементарних дисбалансах \mathbf{s}_j , що лежать в j -ій площині корекції і прикладених в точках j на необхідній осі обертання несучого тіла, виконувалася умова

$$f(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{s}_j(t) \cdot \mathbf{r}_j(t) \right) dt < 0. \quad (1)$$

де: t – час; \mathbf{r}_j – вектор відхилення точки j від її положення в основному русі, викликаний елементарними дисбалансами; T – період у випадку, якщо рух періодичний, якщо ні – нескінченно великий, або інший характерний проміжок часу.

Зробимо такі зауваження:

- критерій застосовний як для твердих, так і деформованих тіл, причому у випадку твердого тіла його можуть динамічно зрівноважувати два АБ ($n=2$), або статично – один АБ ($n=1$);
- у випадку одного АБ $n=1$ і з критерію (1) отримуємо емпіричний критерій, сформульований у роботі [3] для одного АБ;
- у рамках лінійної теорії роторних систем критерій (1) дає деяку квадратичну форму від параметрів елементарних дисбалансів, бо вектор відхилення \mathbf{r}_j є лінійною функцією елементарних дисбалансів $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$, і тому для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб ця квадратична форма була від'ємно-визначеною.

Ефективність методу перевіримо на задачі динамічного і статичного зрівноваження АБ твердого ротора на двох осесиметричних пружних опорах.

2. Опис моделі системи. На рис. 1 показана схема ротора, а на рис. 2 – схема його руху. Ротор – зрівноважений, його центр мас знаходиться у точці O . З ротором жорстко зв'язані маси, які створюють дисбаланс, і усередині ротора встановлені АБ для зрівноваження дисбалансу (на рис. 1 не показані). Ротор утримують зліва і справа осесиметричні опори відповідно жорсткостей c_1, c_2 . Дія сил тяжіння не враховується.

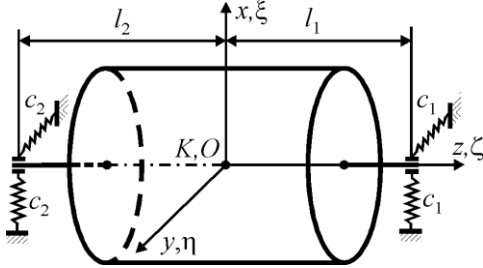


Рис. 1. Схема ротора на двох опорах

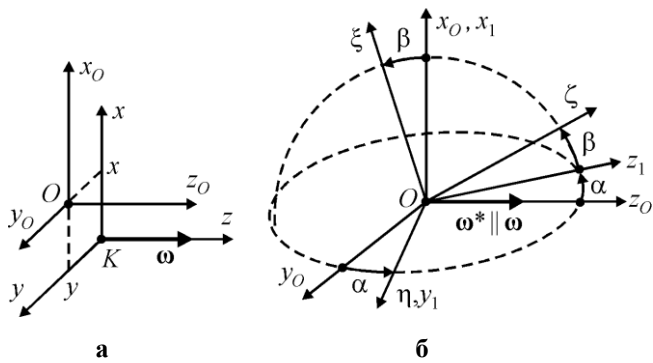


Рис. 2. Схема руху ротора

У основному русі АБ зрівноважують дисбаланс і система як одне жорстке ціле обертається із сталою кутовою швидкістю ω навколо осі z , причому остання проходить через центри недеформованих опор ротора (рис. 1). Для основного руху проведемо головні осі системи $Kxyz$, які починаються у центрі мас ротора. Аналогічні осі жорстко зв'яжемо з ротором і позначимо їх через $O\xi\eta\zeta$. У основному русі осі $Kxyz$ і $O\xi\eta\zeta$ співпадають. В процесі руху осі $O\xi\eta\zeta$ переміщуються таким чином. Спочатку вони переміщуються поступально на x, y щодо осей $Kxyz$, внаслідок чого переходять в проміжне положення $Ox_0y_0z_0$ (рис. 2, а). Потім осі $Ox_0y_0z_0$ повертаються на кути Резаля, як це показано на рис. 2, б, після чого переходять в осі $O\xi\eta\zeta$. Потім осі $O\xi\eta\zeta$ і $Kxyz$ повертаються навколо осі z з кутовою швидкістю обертання ω . Відмітимо, що описана схема руху застосовна і для роторів, закріплених на невагомому пружному валі [3].

Нехай у основному русі система має відносно осей $O\xi\eta\zeta$ такі тензор інерції і координати центра мас – точки G :

$$\mathbf{J}_O^{(0)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}; \quad \tilde{\xi}_G^{(0)} = 0, \quad \tilde{\eta}_G^{(0)} = 0, \quad \tilde{\zeta}_G^{(0)} = \zeta_G. \quad (2)$$

При елементарному відхиленні КВ від положення, у якому вони зрівноважують ротор, зазначені величини зміняться наступним чином

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon J_\xi & -\varepsilon J_{\xi\eta} & -\varepsilon J_{\xi\zeta} \\ -\varepsilon J_{\xi\eta} & B + \varepsilon J_\eta & -\varepsilon J_{\eta\zeta} \\ -\varepsilon J_{\xi\zeta} & -\varepsilon J_{\eta\zeta} & C \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\xi}_G = \varepsilon \xi_G, \quad \tilde{\eta}_G = \varepsilon \eta_G, \quad \tilde{\zeta}_G = \zeta_G + \varepsilon \zeta_G^{(1)}, \quad (3)$$

де ε нескінченно малий дійсний додатний параметр, і враховано, що АБ не змінюють осьовий момент інерції C [3]. Відмітимо, що відцентрові моменти інерції $\tilde{J}_{\xi\zeta} = \varepsilon J_{\xi\zeta}$, $\tilde{J}_{\eta\zeta} = \varepsilon J_{\eta\zeta}$ і координати центра мас $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G$ є параметрами, які характеризують незрівноваженість системи.

Тензор інерції системи відносно центральних осей системи, паралельних осям $O\xi\eta\zeta$:

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\tilde{\eta}_G^2 + \tilde{\zeta}_G^2) & -\tilde{\xi}_G \tilde{\eta}_G & -\tilde{\xi}_G \tilde{\zeta}_G \\ -\tilde{\xi}_G \tilde{\eta}_G & (\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\zeta}_G^2) & -\tilde{\eta}_G \tilde{\zeta}_G \\ -\tilde{\xi}_G \tilde{\zeta}_G & -\tilde{\eta}_G \tilde{\zeta}_G & (\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де M_Σ – маса всієї системи.

Незрівноваженій системі буде відповідати деякий усталений рух, на якому вона буде обертатися як жорстке ціле навколо осі z з постійною кутовою швидкістю ω . Він буде сумою конічної і циліндричної прецесії [3]. На цьому русі і треба скласти критерій (1).

Оскільки параметри дисбалансу прийняті величинами першого порядку малості, то відповідно до лінійної теорії роторних систем вважатимемо координати α, β, x, y також величинами першого порядку малості і подаємо їх у вигляді

$$\alpha = \alpha_1 \varepsilon, \quad \beta = \beta_1 \varepsilon, \quad x = x_1 \varepsilon, \quad y = y_1 \varepsilon. \quad (5)$$

3. Рівняння усталеного руху ротора. Застосовуючи рівняння Лагранжа II роду, складемо рівняння усталеного руху ротора.

Кінетична енергія системи на усталеному русі.

За теоремою Кеніга кінетична енергія системи на усталеному русі є сумою двох складових: T_n – кінетичної енергії поступального руху системи разом з центром мас; T_{ob} – кінетичної енергії обертального руху системи навколо центра мас. При цьому

$$T_n = \frac{1}{2} M_\Sigma r_G^2 \omega^2, \quad T_{ob} = \frac{1}{2} \mathbf{\omega}_{G\xi\eta\zeta}^T \mathbf{J}_G \mathbf{\omega}_{G\xi\eta\zeta}, \quad (6)$$

де r_G – відстань від центра мас системи до осі обертання z , $\mathbf{\omega}_{G\xi\eta\zeta}$ – вектор-стовпчик кутової швидкості обертання системи, знайдений в проєкціях на осі $G\xi\eta\zeta$.

Для невеликих α, β координати центра мас системи відносно осей $Kxyz$

$$x_G = x + \tilde{\xi}_G + \tilde{\zeta}_G \beta, \quad y_G = y + \tilde{\eta}_G - \tilde{\zeta}_G \alpha. \quad (7)$$

Тоді з врахуванням (3) і (5), із точністю до величин другого порядку малості включно

$$T_n = \frac{M_\Sigma \omega^2 \varepsilon^2}{2} [(x_1 + \xi_G + \zeta_G \beta_1)^2 + (y_1 + \eta_G - \zeta_G \alpha_1)^2]. \quad (8)$$

У проєкціях на осі $G\xi\eta\zeta$ кутова швидкість

обертання системи визначається так (рис. 2):

$$\begin{aligned}\omega_{\xi_G} &= -\omega \cos \alpha \sin \beta = -\omega \varepsilon \beta_1 + O(\varepsilon^3), \\ \omega_{\eta_G} &= \omega \sin \alpha = \omega \varepsilon \alpha_1 + O(\varepsilon^3), \\ \omega_{\zeta_G} &= \omega \cos \alpha \cos \beta = \\ &= \omega [1 - \varepsilon^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) / 2] + O(\varepsilon^4).\end{aligned}\quad (9)$$

Тоді, з точністю до величин другого порядку малості включно

$$\begin{aligned}T_{об} &= \frac{1}{2} \omega^2 C + \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{2} \{ [B - (C + \zeta_G^2 M_\Sigma)] \alpha_1^2 + \\ &+ [A - (C + \zeta_G^2 M_\Sigma)] \beta_1^2 - 2(J_{\eta_\zeta} - \eta_G \zeta_G M_\Sigma) \alpha_1 - \\ &+ 2(J_{\xi_\zeta} - \xi_G \zeta_G M_\Sigma) \beta_1 - (\xi_G^2 + \eta_G^2) M_\Sigma \}.\end{aligned}\quad (10)$$

Потенціальна енергія системи:

$$P = \frac{1}{2} (c_1 \Delta l_1^2 + c_2 \Delta l_2^2), \quad (11)$$

де $\Delta l_1, \Delta l_2$ - модулі деформацій пружин опор. У проекціях на осі Kx, yz

$$\begin{aligned}\Delta l_{1x} &\approx x + l_1 \beta, \quad \Delta l_{1y} \approx y - l_1 \alpha, \\ \Delta l_{2x} &\approx x - l_2 \beta, \quad \Delta l_{2y} \approx y + l_2 \alpha.\end{aligned}\quad (12)$$

Тоді

$$P \approx \frac{1}{2} \{ c_1 [(x + l_1 \beta)^2 + (y - l_1 \alpha)^2] + c_2 [(x - l_2 \beta)^2 + (y + l_2 \alpha)^2] \}.$$

Після перетворень, із точністю до величин другого порядку малості включно

$$P = \frac{\varepsilon^2}{2} [c_{33} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + 2c_{14} (\alpha_1 y_1 - \beta_1 x_1) + c_{11} (x_1^2 + y_1^2)], \quad (13)$$

де

$$c_{11} = c_1 + c_2, \quad c_{33} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2, \quad c_{14} = c_1 l_1 - c_2 l_2. \quad (14)$$

Функція Лагранжа на ustalеному русі

$$L = T - P. \quad (15)$$

З точністю до величин другого порядку малості включно

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} C \omega^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \{ [(B - C) \omega^2 - c_{33}] \alpha_1^2 + [(A - C) \omega^2 - c_{33}] \beta_1^2 + \\ &+ (M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) (x_1^2 + y_1^2) + \\ &+ 2(M_\Sigma \omega^2 \zeta_G - c_{14}) (\beta_1 x_1 - \alpha_1 y_1) + \\ &+ 2\omega^2 [M_\Sigma (x_1 \xi_G + y_1 \eta_G) - J_{\eta_\zeta} \alpha_1 + J_{\xi_\zeta} \beta_1] \}.\end{aligned}\quad (16)$$

Рівняння ustalених рухів. Візьмемо частинні похідні від L по α, β, x, y . Враховуючи (5), одержимо наступні рівняння ustalених рухів системи:

$$\begin{aligned}[(B - C) \omega^2 - c_{33}] \alpha_1 - (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) y_1 - J_{\eta_\zeta} \omega^2 &= 0, \\ [(A - C) \omega^2 - c_{33}] \beta_1 + (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) x_1 + J_{\xi_\zeta} \omega^2 &= 0, \\ (M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) x_1 + (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) \beta_1 + M_\Sigma \xi_G \omega^2 &= 0, \\ (M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) y_1 - (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) \alpha_1 + M_\Sigma \eta_G \omega^2 &= 0.\end{aligned}\quad (17)$$

Розв'язок рівнянь ustalених рухів. Введемо такі позначення

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= [(A - C) \omega^2 - c_{33}] (M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) - (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14})^2, \\ \Delta_2 &= [(B - C) \omega^2 - c_{33}] (M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) - (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14})^2, \\ u_1 &= J_{\eta_\zeta} \omega^2, \quad u_2 = J_{\xi_\zeta} \omega^2,\end{aligned}$$

$$u_3 = M_\Sigma \xi_G \omega^2, \quad u_4 = M_\Sigma \eta_G \omega^2. \quad (18)$$

Тоді розв'язок системи (17) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{(M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) u_1 + (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) u_4}{\Delta_2}, \\ \beta_1 &= \frac{-(M_\Sigma \omega^2 - c_{11}) u_2 + (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) u_3}{\Delta_1}, \\ x_1 &= \frac{-(A - C) \omega^2 - c_{33} u_3 + (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) u_2}{\Delta_1}, \\ y_1 &= \frac{-(B - C) \omega^2 - c_{33} u_4 + (\zeta_G M_\Sigma \omega^2 - c_{14}) u_1}{\Delta_2}.\end{aligned}\quad (19)$$

Зауважимо, що рівняння

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0 \quad (20)$$

задають критичні швидкості обертання складеного ротора, утвореного ротором, масами, створюючими дисбаланс і АБ.

3. Застосування критерію.

Врахування способу утворення елементарних дисбалансів. Елементарні дисбаланси розташовані у площинах корекції АБ. Нехай вони утворені двома елементарними масами εm , з наступними координатами відносно осей $O\xi\eta\zeta$:

$$\xi_i, \eta_i, a_i, \quad / i = 1, 2/, \quad (21)$$

де координати a_i задають положення площин корекції АБ відносно зазначених осей. Тоді

$$\xi_G = m(\xi_1 + \xi_2) / M_\Sigma, \quad \eta_G = m(\eta_1 + \eta_2) / M_\Sigma,$$

$$J_{\xi_\zeta} = m(\xi_1 \zeta_1 + \xi_2 \zeta_2), \quad J_{\eta_\zeta} = m(\eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2),$$

$$u_1 = m\omega^2 (\eta_1 a_1 + \eta_2 a_2), \quad u_2 = m\omega^2 (\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2),$$

$$u_3 = m\omega^2 (\xi_1 + \xi_2), \quad u_4 = m\omega^2 (\eta_1 + \eta_2). \quad (22)$$

Складання функціоналу (1). Зауважимо, що точки j , до яких прикладені вектори елементарних дисбалансів, мають відносно осей $O\xi\eta\zeta$ такі координати: $(0, 0, a_j)$, $/ j = 1, 2/$. Відносно цих осей

$$\mathbf{r}_j \approx (x + \beta a_j, y - \alpha a_j, 0)^T,$$

$$\mathbf{s}_j = m\varepsilon (\xi_j, \eta_j, 0)^T, \quad / j = 1, 2/. \quad (23)$$

Оскільки $\mathbf{s}_j, \mathbf{r}_j$ не залежать від часу, то критерій (1) приймає вигляд

$$f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_2 < 0. \quad (24)$$

Введемо такі параметри:

$$PA_i = A + a_i M_\Sigma (a_i - 2\zeta_C) - C,$$

$$PB_i = B + a_i M_\Sigma (a_i - 2\zeta_C) - C,$$

$$R_i = a_i^2 c_{11} + c_{33} - 2a_i c_{14}, \quad / i = 1, 2/,$$

$$PA = A + [a_1 a_2 - (a_1 + a_2) \zeta_C] M_\Sigma - C,$$

$$PB = B + [a_1 a_2 - (a_1 + a_2) \zeta_C] M_\Sigma - C,$$

$$R = a_1 a_2 c_{11} + c_{33} - (a_1 + a_2) c_{14}. \quad (25)$$

Тоді із точністю до величин другого порядку малості включно

$$\begin{aligned}f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) &= -m^2 \varepsilon^2 \omega^2 (a_{11} \xi_1^2 + 2a_{12} \xi_1 \xi_2 + a_{22} \xi_2^2 + \\ &+ a_{33} \eta_1^2 + 2a_{34} \eta_1 \eta_2 + a_{44} \eta_2^2),\end{aligned}\quad (26)$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= (PA_1\omega^2 - R_1)/\Delta_1, & a_{22} &= (PA_2\omega^2 - R_2)/\Delta_1, \\ a_{33} &= (PB_1\omega^2 - R_1)/\Delta_2, & a_{44} &= (PB_2\omega^2 - R_2)/\Delta_2, \\ a_{12} &= (PA\omega^2 - R)/\Delta_1, & a_{34} &= (PB\omega^2 - R)/\Delta_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналіз квадратичної форми. Для того, щоб $f(s_1, s_2)$ була від'ємною необхідно і достатньо, щоб квадратична форма у дужках в (26) була додатно-визначена. Із критерію Сильвестра випливає, що для цього необхідно і достатньо виконання наступних умов

$$a_{ii} > 0, \quad /i = 1, 2/,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{33}a_{44} - a_{34}^2 > 0. \quad (28)$$

Враховуючи (25), (27), знаходимо

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= (a_2 - a_1)^2 / \Delta_1, \\ a_{33}a_{44} - a_{34}^2 &= (a_2 - a_1)^2 / \Delta_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Тому необхідні і достатні умови стійкості основного руху (28) будуть еквівалентні таким умовам

$$\begin{aligned} \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad PA_1\omega^2 - R_1 > 0, \quad PA_2\omega^2 - R_2 > 0, \\ PB_1\omega^2 - R_1 > 0, \quad PB_2\omega^2 - R_2 > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Спростимо вигляд умов (30). Перейдемо до головних центральних осей інерції системи $G\xi_G\eta_G\xi_G$ на основному русі. Вони паралельні осям $O\xi\eta\xi$ і одержуються з них паралельним перенесенням вздовж осі ζ на координату ζ_G . Тоді відносно цих осей система матиме на основному русі такі головні центральні осьові моменти інерції

$$J_{\xi_G} = A - M_{\Sigma}\zeta_G^2, \quad J_{\eta_G} = B - M_{\Sigma}\zeta_G^2, \quad J_{\zeta_G} = C. \quad (31)$$

Відносно опор положення центра мас системи визначатимемо новими відстанями \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 , а положення площин корекції – новими координатами \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 такими, що:

$$\tilde{l}_1 = l_1 - \zeta_C, \quad \tilde{l}_2 = l_2 + \zeta_C, \quad \tilde{a}_j = a_j - \zeta_C, \quad /j = 1, 2/. \quad (32)$$

Введемо нові жорсткості, обчислені за цими відстанями:

$$\tilde{c}_{11} = c_1 + c_2, \quad \tilde{c}_{33} = c_1\tilde{l}_1^2 + c_2\tilde{l}_2^2, \quad \tilde{c}_{14} = c_1\tilde{l}_1 - c_2\tilde{l}_2. \quad (33)$$

Тоді можна перевірити, що

$$\Delta_1 = [(J_{\xi_G} - C)\omega^2 - \tilde{c}_{33}](M_{\Sigma}\omega^2 - \tilde{c}_{11}) - \tilde{c}_{14}^2,$$

$$\Delta_2 = [(J_{\eta_G} - C)\omega^2 - \tilde{c}_{33}](M_{\Sigma}\omega^2 - \tilde{c}_{11}) - \tilde{c}_{14}^2,$$

$$PA_i = J_{\xi_G} + M_{\Sigma}\tilde{a}_i^2 - C,$$

$$PB_i = J_{\eta_G} + M_{\Sigma}\tilde{a}_i^2 - C, \quad /i = 1, 2/. \quad (34)$$

Зауважимо, що

$$c_{11}c_{33} - c_{14}^2 = \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{33} - \tilde{c}_{14}^2 = c_1c_2(l_1 + l_2)^2 = c_1c_2(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2)^2 > 0,$$

$$\begin{aligned} R_i &= c_1(l_1 - a_i)^2 + c_2(l_2 + a_i)^2 = \\ &= c_1(\tilde{l}_1 - \tilde{a}_i)^2 + c_2(\tilde{l}_2 + \tilde{a}_i)^2 > 0, \quad /i = 1, 2/. \end{aligned} \quad (35)$$

Тоді останні чотири умови в (30) зможуть виконуватися при певних ω , за умов, що

$$PA_i = J_{\xi_G} + M_{\Sigma}\tilde{a}_i^2 - C > 0,$$

$$PB_i = J_{\eta_G} + M_{\Sigma}\tilde{a}_i^2 - C > 0, \quad /i = 1, 2/. \quad (36)$$

При цьому швидкість обертання ротора повинна перевищувати такі швидкості

$$\begin{aligned} \omega_i^{(\xi)} &= \sqrt{\frac{c_1(\tilde{l}_1 - \tilde{a}_i)^2 + c_2(\tilde{l}_2 + \tilde{a}_i)^2}{J_{\xi_G} + M_{\Sigma}\tilde{a}_i^2 - C}}, \\ \omega_i^{(\eta)} &= \sqrt{\frac{c_1(\tilde{l}_1 - \tilde{a}_i)^2 + c_2(\tilde{l}_2 + \tilde{a}_i)^2}{J_{\eta_G} + M_{\Sigma}\tilde{a}_i^2 - C}}, \quad /i = 1, 2/. \end{aligned} \quad (37)$$

Зробимо аналіз рівнянь $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$. Подамо Δ_1 у вигляді полінома

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= M_{\Sigma}(J_{\xi_G} - C)\omega^4 - [\tilde{c}_{11}(J_{\xi_G} - C) + M_{\Sigma}\tilde{c}_{33}]\omega^2 + \\ &\quad + \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{33} - \tilde{c}_{14}^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} a^{(\xi)} &= M_{\Sigma}(J_{\xi_G} - C), \quad b^{(\xi)} = -[\tilde{c}_{11}(J_{\xi_G} - C) + M_{\Sigma}\tilde{c}_{33}], \\ c^{(\xi)} &= \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{33} - \tilde{c}_{14}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Дискримінант бікватратного рівняння (38) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} D^{(\xi)} &= (b^{(\xi)})^2 - 4a^{(\xi)}c^{(\xi)} = \\ &= [M_{\Sigma}\tilde{c}_{33} + \tilde{c}_{11}(J_{\xi_G} - C)]^2 - 4M_{\Sigma}(J_{\xi_G} - C)c^{(\xi)} = \\ &= [M_{\Sigma}\tilde{c}_{33} - \tilde{c}_{11}(J_{\xi_G} - C)]^2 + 4M_{\Sigma}\tilde{c}_{14}^2(J_{\xi_G} - C). \end{aligned}$$

Звідки видно, що оскільки $c^{(\xi)} > 0$, то і $D^{(\xi)} > 0$. Тому бікватратне рівняння завжди має два дійсних кореня відносно ω^2 .

У випадку, коли $J_{\xi_G} - C > 0$ у бікватратного рівняння два додатних кореня, яким відповідають дві додатні критичні швидкості обертання складеного ротора:

$$\begin{aligned} \omega_{кр1}^{(\xi)} &= (-b^{(\xi)} - \sqrt{(b^{(\xi)})^2 - 4a^{(\xi)}c^{(\xi)}})/2, \\ \omega_{кр2}^{(\xi)} &= (-b^{(\xi)} + \sqrt{(b^{(\xi)})^2 - 4a^{(\xi)}c^{(\xi)}})/2, \\ \omega_{кр1}^{(\xi)} &\leq \sqrt{\tilde{c}_{11}/M_{\Sigma}} < \sqrt{\tilde{c}_{33}/(J_{\xi_G} - C)} \leq \omega_{кр2}^{(\xi)}. \end{aligned} \quad (40)$$

При одержанні оцінок в (40) враховані властивості реальних роторних систем, а саме, що

$$\tilde{c}_{11}/M_{\Sigma} < \tilde{c}_{33}/(J_{\xi_G} - C).$$

При перевищенні другої критичної швидкості умова стійкості $\Delta_1 > 0$ починає виконуватися. Вона виконується і на швидкостях, менших за першу критичну.

Коли $J_{\xi_G} - C < 0$, то бікватратне рівняння має один додатний корінь, якому відповідає одна додатна критична швидкість:

$$\begin{aligned} \omega_{кр1}^{(\xi)} &= (-b^{(\xi)} + \sqrt{(b^{(\xi)})^2 - 4a^{(\xi)}c^{(\xi)}})/2, \\ \omega_{кр1}^{(\xi)} &\leq \sqrt{\tilde{c}_{11}/M_{\Sigma}}. \end{aligned} \quad (41)$$

При перевищенні $\omega_{кр1}^{(\xi)}$ умови стійкості не виконуються, бо $\Delta_1 < 0$, а на менших швидкостях $\Delta_1 > 0$.

Аналогічні результати одержуються і для другого рівняння $\Delta_2 = 0$. Відповідні критичні швидкості позначатимемо з індексом η .

Розглянемо різні складені ротори.

а) Випадок короткого складеного ротора ($C > J_{\xi_G}, C > J_{\eta_G}$). У нього, в загальному випадку

(коли $J_{\xi_c} \neq J_{\eta_c}$ і $\tilde{c}_{14} \neq 0$) дві критичні швидкості $\omega_{кр1}^{(\xi)}$, $\omega_{кр1}^{(\eta)}$. Аналіз формул (37) показує, що підібрати \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 так, щоб швидкості $\omega_i^{(\xi)}$, $\omega_i^{(\eta)}$ були менші за $\omega_{кр1}^{(\xi)}$, $\omega_{кр1}^{(\eta)}$, неможливо. Тому зрівноваження динамічного дисбалансу короткого жорсткого ротора двома АБ в двох площинах корекції неможливе.

б) Випадок довгого складеного ротора ($J_{\xi_c} > C$, $J_{\eta_c} > C$). У складеного ротора в загальному випадку (коли $J_{\xi_c} \neq J_{\eta_c}$ і $\tilde{c}_{14} \neq 0$) чотири критичні швидкості $\omega_{крi}^{(\xi)}$, $\omega_{крi}^{(\eta)}$, $i=1,2/$. Аналіз формул (37) показує, що при перевищенні $\omega_{кр2}^{(\xi)}$, $\omega_{кр2}^{(\eta)}$ умови стійкості (30) виконуються, а на менших швидкостях – ні. Тому зрівноваження динамічного дисбалансу довгого жорсткого ротора двома АБ в двох не співпадаючих площинах корекції відбуватиметься на швидкостях, які перевищують найбільшу критичну швидкість складеного ротора.

Одержані результати узагальнюють результати робіт [4,5], одержані для кульових АБ, бо розповсюджують їх на всі типи АБ із твердими КВ. Зауважимо, що для врахування конкретного типу АБ треба обчислити масо-інерційні характеристики складеного ротора, використовуючи інформацію про цей АБ.

Нехай ротор статично зрівноважується одним АБ. Відповідна умова стійкості основного руху одержується з умови (26), якщо покласти в ній ξ_2, η_2 рівними нулю:

$$f(\mathbf{s}_1) = -m\varepsilon^2\omega^2(a_{11}\xi_1^2 + a_{33}\eta_1^2). \quad (42)$$

Для стійкості основного руху необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови

$$a_{11} > 0, a_{33} > 0. \quad (43)$$

Ці умови були одержані і досліджені в роботі [3].

Остаточно можна зробити наступні висновки:

- 1) Узагальнений емпіричний критерій стійкості основного руху системи з обертовим тілом і АБ:
 - застосовний для гнучких і жорстких обертових тіл у випадках, коли обертове тіло зрівноважують один і більше АБ у одній, або декількох різних площинах корекції;
 - у випадку зрівноваження обертового тіла одним АБ узагальнений критерій збігається із відомим емпіричним критерієм стійкості основного руху.

Філімоніхіна Ірина Іванівна (1963 р.н.)

Адреса: вул. Героїв Сталінграду, 26, корп. 1, кв. 84, м. Кіровоград, Україна, 25031

Тел.: (0522) 30-04-56 (д.), 39-05-64 (сл.)

Місце роботи: Кіровоградський національний технічний університет, асистент кафедри вищої математики та фізики

2) У випадку ротора на двох осесиметричних пружних опорах, який несе два АБ з різними площинами корекції:

- якщо ротор короткий, то динамічне зрівноваження неможливе;
- якщо ротор довгий, то динамічне зрівноваження буде відбуватися на закритичних швидкостях обертання складеного ротора.

ЛІТЕРАТУРА

1. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950, Vol. 22 No 10, pp. 103-106.
2. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. –М.: Наука, 2002. –119 с.
3. Філімоніхіна Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. –352 с.
4. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. -Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. –84 с.
5. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plain automatic balancing // Machine Dynamics Problems, 2004, Vol. 25 No 3/4, pp. 139-152.

Отримана 14.04.07

I.Filimonikhina, G.Filimonikhin

The generalized empirical criterion of stability of the main motion and its application to a rotor on two cycle-symmetric elastic supports.

Kirovograd national technical university, Kirovograd

Is formulated the generalized empirical criterion of stability of the main motion of the system in which structure enters a rotating body and some autobalancers for it balancing. By means of criterion are determined the conditions of a balancing by two any type autobalancers of the dynamic unbalance of a rigid rotor on two cycle-symmetric elastic support. It is established, that the dynamic balancing is possible only in the case of the long compound rotor formed by a rotor, autobalancers and the bodies forming unbalance, and occurs upper of all critical rotation speeds.

Філімоніхін Геннадій Борисович (1964 р.н.)

Адреса: -//-

Тел.: (0522) 30-04-56 (д.), 39-05-47 (сл.)

Місце роботи: Кіровоградський національний технічний університет, професор кафедри деталей машин та прикладної механіки

Д-р. техн. наук, проф.

