

## КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### Введение

Создание гарантированно конкурентоспособных систем стабилизации движения сложных многомерных подвижных объектов, в том числе неустойчивых, которые функционируют в условиях случайных неконтролируемых возмущений, с минимальными затратами на проектирование, является одним из главных требований достижения успеха на рынке данного класса устройств. Как отмечено в [1], при создании авиационной и космической техники выполнение такого условия — одно из наиболее эффективных и проверенных при применении экспериментально-аналитического подхода к проектированию оптимальных систем стохастической стабилизации.

Данный подход предусматривает реализацию нескольких взаимосвязанных этапов проектировочных работ:

- экспериментальное исследование динамики векторов сигналов «вход–выход» прототипа объекта управления в реальных условиях функционирования;
- выполнение структурной или параметрической идентификации моделей динамики прототипа или опытного образца подвижного объекта на основе полученных неслучайных характеристик векторов сигналов «вход-выход»;
- определение оптимальной структуры и параметров многомерного регулятора на основе применения современных методов синтеза оптимальных многомерных систем стабилизации к результатам идентификации;
- анализ качества стабилизации прототипа объекта, включенного в оптимальную систему стабилизации, в реальных условиях функционирования;
- разработка технического предложения на создание новой или модернизацию имеющейся системы стабилизации многомерного подвижного объекта управления.

Успех применения такого подхода определяется, с одной стороны, соответствием алгоритмов идентификации, синтеза и анализа реальным условиям функционирования объектов управления и особенностями их динамики, а с другой, — наличием системы компьютерной математики, позволяющей применить отмеченные выше алгоритмы для автоматизированного проектирования оптимальных систем автоматического управления.

Существует достаточно большое количество алгоритмов синтеза оптимальных систем стабилизации многомерных линейных динамических объектов во временной области, реализованных в САПР на основе решения матричных алгебраических уравнений Риккати. Они гарантируют получение прозрачных и корректных результатов в условиях, когда динамика объекта управления характеризуется матрицей передаточных функций, порядок числителя которых меньше или равен порядку знаменателя, а на его входах действуют векторы возмущений и помех в виде  $\delta$  — коррелированных белых шумов [2, 3].

В то же время динамика достаточно широкого круга подвижных объектов (летательные аппараты, морские суда, автомобили, роботы-манипуляторы) [1, 4–6] с учетом приводов рулей не отвечает указанным условиям. В такой ситуации, как

следует из работ [1, 3, 7–9], одним из наиболее эффективных путей синтеза оптимальных структуры и параметров многомерных систем стабилизации является применение частотных методов, особенно при неустойчивых или неминимально фазовых объектах управления.

Однако использование известных частотных методов синтеза оптимальных многомерных систем стабилизации в САПР ограничено повышенной вычислительной сложностью, которая возникает при выполнении математических операций с полиномиальными и дробно-рациональными матрицами комплексного аргумента и проявляется в уменьшении надежности получения результата. Следовательно, представляется актуальным выполнение исследования, направленного на обоснование нового алгоритма синтеза оптимальных систем стохастической стабилизации движения многомерных объектов управления как устойчивых, так и неустойчивых, в условиях стационарных случайных внешних возмущений с повышенной надежностью получения результатов вычислений.

Анализ исследований и публикаций по вопросам синтеза оптимальных линейных многомерных инвариантных во времени систем управления в частотной области [1, 7–10] показал, что базовым методом создания таких систем можно считать метод, изложенный в [7]. Он основан на использовании формулы Фробениуса для обращения полиномиальных матриц и достаточно сложных вычислений при формировании служебных полиномиальных матриц специального вида. Все это ограничивает успешность использования в САПР алгоритмов из работы [7] для решения задачи синтеза при увеличении порядка и размерности объекта управления. В то же время в этой монографии доказано, что структура и параметры данных служебных матриц не влияют на выбор оптимального регулятора и эффективность от его использования в системе, а определяют лишь ход и сложность вычислительных процессов синтеза.

В [8] обоснована новая процедура определения служебных матриц, оговоренных выше, на основе факторизации соответствующим образом построенной блочной полиномиальной матрицы. Это дало возможность автору значительно упростить базовый алгоритм синтеза. В то же время полученные в работе [8] соотношения позволяют синтезировать оптимальную многомерную систему стабилизации, предназначенную для функционирования в условиях действия случайных возмущений в виде вектора белого шума и при идеальном измерении выходных координат объекта.

В [1] обоснован новый метод синтеза оптимальных многомерных систем стабилизации динамических объектов, в том числе неустойчивых, предназначенных для работы в условиях стационарных случайных внешних возмущений при «неидеальных» измерениях выходных координат объекта. Алгоритмы, построенные на основе этого метода, предусматривают выбор служебных полиномиальных матриц специального вида из физических соображений, что значительно упрощает процедуру их формирования. В то же время многократное применение данного метода для решения задач создания систем стабилизации показало, что с ростом размерности объекта управления возникают проблемы катастрофической потери точности вычислений при выполнении компьютерных расчетов с разрядной сеткой ограниченной длиной.

Цель данной работы заключается в обосновании нового комбинированного метода синтеза оптимальных многомерных систем стабилизации, который бы подтвердил простоту вычислительного алгоритма из [8], а также возможности и физическую прозрачность алгоритмов из монографии [1].

### **Постановка задачи синтеза**

В терминах работы [1] задача синтеза формулируется следующим образом. Допустим, что задан  $n$ -мерный линейный объект управления, движение которого

описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений, представленных при нулевых начальных условиях в преобразованном по Лапласу виде

$$P_0 x_0 = M_0 u + \psi_0, \quad (1)$$

где  $x_0$  —  $n$ -мерный вектор выходных координат объекта;  $P_0$  — полиномиальная матрица размерности  $n \times n$ , которая характеризует динамику объекта управления и может иметь полином-определитель  $|P_0(s)|$  с нулями, расположенными в правой полуплоскости комплексного переменного  $s = \alpha + j\beta$  (ППП);  $u$  —  $m$ -мерный вектор сигналов управления;  $M_0$  — полиномиальная матрица размерности  $n \times m$ , которая определяет чувствительность объекта к изменению сигналов управления;  $\psi_0$  —  $n$ -мерный вектор стационарных случайных возмущений с нулевым математическим ожиданием и дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей  $S_{\psi_0\psi_0}$ .

Будем считать также, что вектор выходных координат  $x_0$  измеряется полностью с помощью системы неидеальных датчиков, динамика которой определяется матрицей передаточных функций  $K$ . На выходе измерителей действует  $n$ -мерный вектор центрированных стационарных случайных шумов  $\varphi$  с дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей  $S_{\varphi\varphi}$ .

По известным полиномиальным и дробно-рациональным матрицам  $M_0$ ,  $P_0$ ,  $K$ ,  $S_{\psi_0\psi_0}$ , и  $S_{\varphi\varphi}$  необходимо найти структуру и параметры матрицы передаточных функций регулятора  $W$ , включение которого в обратную связь к объекту управления обеспечивает устойчивость системы стабилизации (рис. 1) и доставляет минимум следующему критерию качества:

$$e = \langle x_0' R x_0 \rangle + \langle u' C u \rangle, \quad (2)$$

где  $\langle \rangle$  — знак математического ожидания;  $R$  — положительно-определенная полиномиальная весовая матрица размерности  $n \times n$ , которая определяет влияние дисперсии ошибки стабилизации на значение критерия  $e$ ;  $C$  — неотрицательно определенная полиномиальная весовая матрица размерности  $m \times m$ , которая ограничивает дисперсию сигнала управления  $u$ ; ' — знак транспонирования.

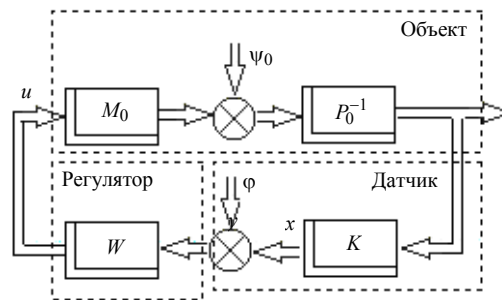


Рис. 1

### Основной материал исследования

Для решения поставленной задачи осуществлена поэтапная перестройка структурной схемы рис. 1 к стандартному виду [1]. На первом этапе преобразований структурная схема (см. рис. 1) приведена к выходу  $x$  датчиков  $K$  (рис. 2) и получена эквивалентная с соотношениями (1) система дифференциальных уравнений

$$Px = Mu + \psi, \quad (3)$$

в которой приняты следующие обозначения:

$$P = K_{10}P_0K^{-1}; \quad M = K_{10}M_0; \quad x = Kx_0; \quad \psi = K_{10}\psi_0. \quad (4)$$

Для определения полиномиальной матрицы  $K_{10}$  с минимальным возможным порядком элементов предлагается совместное использование алгоритмов левостороннего удаления полюсов [11] и MFD-разложения [9] дробно-рациональной матрицы  $K^{-1}$  и произведения матриц  $P_0K^{-1}$ . При этом матрица  $K_{10}$  может быть найдена в результате MFD-разложения [9] следующего произведения:

$$K_{10}^{-1}P_1 = P_0K_{20}^{-1}, \quad (5)$$

где  $K_{20}$  — результат левостороннего удаления полюсов матрицы передаточных функций датчиков [11]

$$K_{20}^{-1}K_2 = K, \quad (6)$$

а между определителями полиномиальных матриц  $K_{10}$  и  $K_{20}$  существует тождество  $|K_{10}| = |K_{20}|$ , которое является следствием MFD-разложения дробно-рациональных матриц.

На втором этапе структурная схема (см. рис. 2) приведена к стандартному виду (рис. 3), когда на входе системы стабилизации действует расширенный вектор возмущений  $\xi$ :

$$\xi = (E_n, P)\xi_0, \quad (7)$$

где вектор  $\xi_0$  является результатом вертикальной конкатенации векторов  $\psi$  и  $\varphi$ :

$$\xi_0 = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}; \quad (8)$$

$E_n$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ ; а на выходе системы действует вектор  $y$ .

По аналогии с работой [1] связь между векторами  $\xi_0$  и  $x_0$  определяется как

$$x_0 = K^{-1} \left[ F_y^\xi(E_n, P) - (O_n, E_n) \right] \xi_0, \quad (9)$$

где  $F_y^\xi$  — матричная передаточная функция замкнутой системы «объект + регулятор» от возмущения  $\xi$  к вектору  $y$ ;  $O_n$  — нулевая матрица размера  $n \times n$ . Вектор сигналов управления  $u$  в замкнутой системе также зависит от расширенного возмущения  $\xi$ :

$$u = F_u^\xi(E_n, P)\xi_0, \quad (10)$$

где  $F_u^\xi$  — матричная передаточная функция системы «объект + регулятор» от возмущения  $\xi$  к вектору  $u$ .

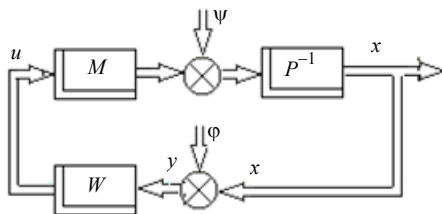


Рис. 2

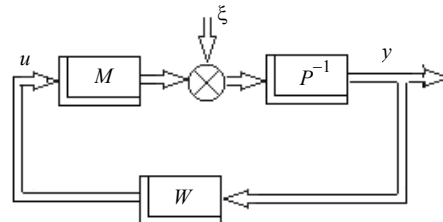


Рис. 3

В работах [1, 7] на основе уравнения (3) доказано, что между матрицами  $F_u^\xi$  и  $F_y^\xi$  существует взаимосвязь, которая характеризуется соотношением

$$PF_y^\xi - MF_u^\xi = E_n. \quad (11)$$

Кроме этого, показано, что структура и параметры данных матриц зависят от матрицы передаточных функций регулятора  $W$ :

$$F_u^\xi = W(P - MW)^{-1}, \quad (12)$$

$$F_y^\xi = (P - MW)^{-1}. \quad (13)$$

Таким образом, структурные преобразования (рис. 1–3) и уравнения (9), (10) сводят задачу синтеза оптимальной системы стабилизации к задаче минимизации функционала (2), представленного в виде

$$e = \langle x'Rx \rangle + \langle u'Cu \rangle. \quad (14)$$

Для решения этой задачи перепишем функционал (14) в частотной области

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}(S'_{xx}R + S'_{xx}C)ds, \quad (15)$$

где  $j$  — комплексная единица;  $\text{tr}$  — след матрицы;  $S'_{xx}$  — транспонированная дробно-рациональная матрица спектральных плотностей отклонений выходных координат объекта управления;  $S'_{uu}$  — транспонированная матрица спектральных плотностей отклонений сигналов управления,  $R$  — положительно-определенная дробно-рациональная весовая матрица, которая при известных матрицах  $R_0$  и  $K$  равняется  $R = K_*^{-1} \cdot R_0 \cdot K^{-1}$ ;  $s$  — комплексная переменная ( $s = j\omega$ ).

Определим матрицу варьируемых передаточных функций  $\Phi$  в виде

$$F_u^\xi = z_{22}\Phi + z_{21}, \quad (16)$$

где  $z_{22}, z_{21}$  — дробно-рациональные матрицы

$$z_{22} = (B + AP^{-1}M)^{-1}; \quad z_{21} = -z_{22}AP^{-1}; \quad (17)$$

$A, B$  — полиномиальные матрицы, найденные в результате представления вспомогательной блочной матрицы  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} O_n & P & -M \\ P_* & -R & O_{n \times m} \\ -M_* & O_{m \times n} & -C \end{bmatrix} \quad (18)$$

в виде произведения двух факторов (блочных полиномиальных матриц)  $V$  и  $\Sigma$ :

$$H = V_*\Sigma V, \quad (19)$$

где

$$V = \begin{bmatrix} E_n & -S & N \\ O_n & P & -M \\ O_{m \times n} & A & B \end{bmatrix}; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} O_n & E_n & O_{n \times m} \\ E_n & O_n & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & O_{m \times n} & -E_m \end{bmatrix}, \quad (20)$$

при условии, что определитель  $|V|$  — полином Гурвица.

Алгоритм факторизации матрицы (19) впервые предложен и детально описан в работе [8]. Подстановка выражений (18) и (20) в уравнение (9) доказывает существование следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
P_*S + S_*P + A_*A &= R, \\
M_*S + N_*P - B_*A &= O_{m \times n}, \\
P_*N + S_*M - A_*B &= O_{n \times m}, \\
M_*N + N_*M + B_*B &= C.
\end{aligned} \tag{21}$$

В таком случае критерий качества (5) с учетом уравнений (7)–(10) и (16) превращается в функционал

$$\begin{aligned}
e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left\{ \left[ \begin{pmatrix} E_n \\ P_* \end{pmatrix} z_{21} M_* P_*^{-1} R G + \begin{pmatrix} E_n \\ P_* \end{pmatrix} P_*^{-1} R G \right] S'_{\xi_0 \xi_0} + \right. \\
\left. + \Phi_* z_{22} M_* P_*^{-1} R G S'_{\xi_0 \xi_0} \begin{pmatrix} E_n \\ P_* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O_n \\ E_n \end{pmatrix} R G S'_{\xi_0 \xi_0} + \right. \\
\left. + [z_{21} C z_{21} + z_{21} C z_{22} \Phi + \Phi_* z_{22} C z_{21} + \Phi_* z_{22} C z_{22} \Phi] (E_n, P) S'_{\xi_0 \xi_0} \begin{pmatrix} E_n \\ P_* \end{pmatrix} \right\} ds, \tag{22}
\end{aligned}$$

где  $G$  — дробно-рациональная матрица, которая равняется

$$G = P^{-1} M z_{21} (E_n, P) + P^{-1} M z_{22} \Phi (E_n, P) + P^{-1} (E_n, P) - (O_n, E_n);$$

$S'_{\xi_0 \xi_0}$  — транспонированная матрица спектральных плотностей расширенного вектора возмущений  $\xi_0$ ; \* — знак эрмитового сопряжения матрицы [12].

Матрица  $S'_{\xi_0 \xi_0}$  определяется в результате применения теоремы Винера–Хинчина к вектору (8) в виде

$$S'_{\xi_0 \xi_0} = \begin{bmatrix} S'_{\psi\psi} & S'_{\varphi\psi} \\ S'_{\psi\varphi} & S'_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где  $S'_{\psi\psi}$  — транспонированная матрица спектральных плотностей вектора эквивалентных возмущений, которая с учетом выражения (4) равняется

$$S'_{\psi\psi} = K_{10} \cdot S'_{\psi_0 \psi_0} \cdot K_{10}^*; \tag{24}$$

$S'_{\varphi\varphi}$  — транспонированная матрица взаимных спектральных плотностей между векторами  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$S'_{\varphi\psi} = K_{10} \cdot S'_{\varphi\psi_0}. \tag{25}$$

Поиск алгоритма определения структуры и параметров матрицы передаточных функций  $W$ , как и в работах [1, 7, 8], можно осуществить в результате минимизации функционала (22) на классе устойчивых и физически реализуемых варьируемых матриц  $\Phi$  с помощью процедуры Винера–Колмогорова. В соответствии с этой процедурой найдена первая вариация функционала (22):

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr} \left[ \delta \Phi_* \frac{\partial}{\partial \Phi_*} \text{tr}(\cdot) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \text{tr}(\cdot) \delta \Phi \right] ds, \tag{26}$$

где  $\Phi$  — аналитическая в ППП вариация

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \Phi_*} \text{tr}(\cdot) &= z_{22} (M_* P_*^{-1} R P^{-1} M + C) z_{22} \Phi, \\
(E_n, P) S'_{\xi_0 \xi_0} \begin{pmatrix} E_n \\ P_* \end{pmatrix} &+ z_{22} M_* P_*^{-1} R P^{-1} M z_{21} + M_* P_*^{-1} R P^{-1} + \\
+ C z_{21} (E_n, P) S'_{\xi_0 \xi_0} \begin{pmatrix} E_n \\ P_* \end{pmatrix} &- z_{22} M_* P_*^{-1} R (O_n, E_n) S'_{\xi_0 \xi_0} \begin{pmatrix} E_n \\ P_* \end{pmatrix}. \tag{27}
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\Gamma_*\Gamma = z_{22}*(M_*P_*^{-1}RP^{-1}M + C)z_{22}, \quad (28)$$

где  $\Gamma$  — результат правосторонней факторизации [10] произведения матриц в правой части уравнения (28). Если выполняются соотношения (21), то выражение (28) легко приводится к виду

$$\Gamma_*\Gamma = z_{22}*(B_* + M_*P_*^{-1}A_*)(B + AP^{-1}M)z_{22}. \quad (29)$$

Учет обозначений (17) позволяет доказать, что

$$\Gamma_*\Gamma = E_m. \quad (30)$$

Определим матрицу  $D$  как результат левосторонней факторизации [10] транспонированной матрицы спектральных плотностей обобщенных возмущений

$$DD_* = (E_n, P)S'_{\xi_0 \xi_0} \begin{pmatrix} E_n \\ P_* \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Примем, что дробно-рациональная матрица  $T$  равняется

$$T = z_{22}*(M_*P_*^{-1}RP^{-1}Mz_{21} + M_*P_*^{-1}RP^{-1} + Cz_{21})D, \quad (32)$$

а матрица  $G$  —

$$G = -z_{22}M_*P_*^{-1}R(S'_{\psi\varphi} + S'_{\varphi\varphi}P_*)D_*^{-1}. \quad (33)$$

Поскольку выполняются соотношения (21), то выражение (32) приводится к виду

$$T = z_{22}*(M_*P_*^{-1}S_* - N_*)D, \quad (34)$$

а частная производная (27) упрощается и представляется как

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_*} \text{tr}(\Phi) = \Phi DD_* + TD_* - GD_*.$$

Таким образом, первая вариация функционала качества (26) становится равной

$$\delta e = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}[\delta \Phi_*(\Phi DD_* + TD_* - GD_*) + (DD_*\Phi_* + DT_* - DG_*)\delta \Phi] ds. \quad (35)$$

Как видно из работы [1], матрица варьируемых функций  $\Phi$ , которая отвечает условиям устойчивости и физической реализуемости, а также доставляет минимум функционалу (22), учитывая выражение (35), должна определяться на основе соотношения

$$\Phi = -(T_0 + T_+ + G_0 + G_+)D^{-1}, \quad (36)$$

где  $T_0 + T_+$  — дробно-рациональная матрица, которая является устойчивой частью результата сепарации (расщепления) [10] матрицы  $T$ ;  $G_0 + G_+$  — устойчивая часть результата сепарации матрицы  $G$ .

Подстановка результата (36) в выражение (16) и решение уравнения (12) относительно матрицы передаточных функций регулятора с учетом соотношения (17) позволяет определить, что

$$W = (B + \Phi M)^{-1}(-A + \Phi P). \quad (37)$$

Таким образом, получен новый комбинированный метод синтеза оптимальных многомерных систем стабилизации. Его отличительная черта — уменьшение количества вычислений при выполнении этапов синтеза по отношению к базовым алгоритмам [1, 7].

### Пример применения комбинированного метода синтеза

Для иллюстрации эффективности нового комбинированного алгоритма синтеза рассмотрим пример создания системы стабилизации двумерного неустойчивого динамического объекта, приведенный в [1]. Допустим, что динамика объекта управления (см. рис. 1) описывается матрицами

$$P_0 = \begin{bmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & -s+3 \end{bmatrix}; \quad M_0 = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Матрица передаточных функций измерителей  $K = E_2$  ( $E_2$  — единичная матрица размерности  $2 \times 2$ ); шумы измерения  $\varphi$  отсутствуют; на объект действует вектор возмущений  $\psi_0$  с нулевыми математическими ожиданиями и транспонированной матрицей спектральных плотностей  $S'_{\psi_0\psi_0}$ :

$$S'_{\psi_0\psi_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2,$$

а весовые матрицы  $R = C = E_2$ . Нужно определить матрицу передаточных функций оптимального регулятора  $W$ .

Поскольку измерение вектора выходных координат  $x_0$  осуществляется идеально по условиям задачи, то выполняются следующие уравнения:

$$K_{10} = K_{20} = E_2, \quad K = K_1 = K_2 = E_2, \quad P = P_0, \quad M = M_0, \quad x = x_0, \quad \psi = \psi_0. \quad (39)$$

Подстановка матриц (38), (39) в выражение (18) позволяет определить вспомогательную полиномиальную матрицу  $H$ , подлежащую факторизации специального вида:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s+1 & s+1 & -s-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s+3 & 0 & -1 \\ -s+1 & -s+1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ s-2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Факторизация (19) этой матрицы на основе алгоритма из [8] позволила определить блоки матрицы  $V$ , необходимые для последующего выполнения синтеза:

$$A = \begin{bmatrix} 0,763 & 0,0256 \\ 0,0874 & -6,139 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0,6506 & 0 \\ -0,0874 & 1 \end{bmatrix}; \quad (40)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0,1599 & 0,0725 \\ 0,0874 & -6,139 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 0,1599 & 0 \\ 0,0874 & 0 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

После подстановки матриц (38) и (40) в выражение (17) найдена дробно-рациональная матрица  $z_{22}$ :

$$z_{22} = \frac{1}{(s+1,513)(s+3,253)} \begin{bmatrix} 0,70711(s+3,226)(s+1) & -0,5218(s+1) \\ 0,0618(-s+3) & -(s+1,54)(-s+3) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Результат левосторонней факторизации транспонированной матрицы возмущений  $S'_{\psi\psi}$ , которая равна  $S'_{\psi_0\psi_0}$ , имеет вид

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (43)$$



Учитывая полученные результаты (40)–(43), а также отсутствие помех измерения, сформируем дробно-рациональные матрицы  $T$  и  $G$ , которые подлежат сепарации, на основе алгоритмов (32), (33):

$$T = \frac{1}{(-s+1,513)(-s+3,253)} \begin{bmatrix} 0,113(-s+3,178) & -0,0618(s+3) \\ 0,0874(-s+0,586) & 6,226(-s+1,533) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$G = O_2,$$

где  $O_2$  — нулевая матрица размерности  $2 \times 2$ .

Рассмотрение выражения (44) позволяет сделать вывод, что результат сепарации матрицы  $T$  имеет вид

$$T_0 + T_+ = O_2,$$

поскольку элементы матрицы  $T$  — правильные дроби, полюса которых расположены в ППП. В свою очередь матрица  $G_0 + G_+$  также нулевая. Таким образом, варьируемая матрица  $\Phi$  (36) является матрицей размера  $2 \times 2$ , все элементы которой равны нулю. В результате применения алгоритма (37) к матрицам (40) находим матрицу передаточных функций оптимального регулятора в виде

$$W = \begin{bmatrix} -1,174 & -0,0394 \\ -0,189 & 6,135 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

В таком случае матрицы передаточных функций оптимальной многомерной системы стабилизации по сигналам управления  $F_u^\xi$  и по выходным координатам, определенные из уравнений (12), (13), имеют следующий вид:

$$F_u^\xi = \frac{1}{(s+1,513)(s+3,253)} \begin{bmatrix} -0,54(s+3,142) & -0,522(s+1) \\ 0,0874(-s+3) & -6,226(s+1,533) \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$F_y^\xi = \frac{1}{(s+1,513)(s+3,253)} \begin{bmatrix} 0,46(s+3,135) & -0,478(s+1,038) \\ 0,0874 & -(s+1,54) \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Сравнение результатов (45)–(47) с соответствующими матрицами, представленными в [1], указывает на их полную аналогию с точностью до ошибок округления. В то же время, как и ожидалось, значительно упрощается процедура сепарации (32), (33) за счет уменьшения количества операндов в отмеченных выражениях по отношению к соответствующим алгоритмам, приведенным в [1, 7].

### Заключение

Комплексное применение процедуры определения служебных матриц в результате специального класса факторизации вспомогательной матрицы и базового метода минимизации квадратичного функционала в частотной области позволило обосновать новый метод синтеза оптимальных структуры и параметров системы стохастической стабилизации линейного многомерного объекта управления, возможно, неустойчивого. Его характерной особенностью является уменьшение вычислительной сложности выполнения оптимального синтеза в частотной области за счет уменьшения количества операндов, полиномиальных и дробно-рациональных матриц, а также снижения порядков полиномов у них.

*Осадчий С.І., Зозуля В.А.*

## КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ СТАБІЛІЗАЦІЇ БАГАТОВИМІРНИХ РУХОМИХ ОБ'ЄКТІВ ПРИ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ВПЛИВАХ

Представлено новий алгоритм синтезу оптимальних систем стохастичної стабілізації у частотній області. Він дозволяє визначити структуру та параметри матриці передавальних функцій або системи рівнянь регулятора, призначеного для роботи у колі зворотного зв'язку до багатовимірного, можливо, нестійкого об'єкта керування. Порівняно з відомими алгоритмами обґрунтований у статті алгоритм відрізняється значним зменшенням кількості обчислювальних операцій. Це досягнуто завдяки виконання спеціального типу факторизації поліноміальної матриці.

*Osadchiy S.I., Zozulya V.A.*

## COMBINED METHOD FOR A SYNTHESIS OF THE OPTIMUM MULTIDIMENSIONAL MOVING OBJECTS STABILIZATION SYSTEMS UNDER STATIONARY RANDOM EFFECTS

The new algorithm of the optimum stochastic stabilization systems synthesis in a frequency region is represented. It allows to define a structure and parameters of the regulator transmission functions matrix or the regulator equations system. The regulator is intended for work in chain of feedback to a multidimensional, possibly unsteady, controlled object. In comparison to the known algorithms the algorithm which is grounded in the article differs by the considerable diminishing of a calculable operations number. It is attained due to the special type factorization of a polynomial matrix implementation.

1. *Азарсков В.Н. Блохин Л.Н., Житецкий Л.С.* Методология конструирования оптимальных систем стохастической стабилизации — Киев : Книжное изд-во НАУ, 2006. — 440 с.
2. *Квакернаак, Х. Сиван Г.* Линейные оптимальные системы управления. — М. : Мир, 1977. 650 с.
3. *Kwakernaak H., Siseb M.* Polynomial J-Spectral Factorization // IEEE Transact. On Automat. Contr. — 1994, **39** — N. 2 — P. 315–328.
4. *Осадчий С.І. Блохин Л.Б., Жесан Р.В.* структурная идентификация математических моделей многомерного объекта с произвольной динамикой по неполным данным // Материалы междунар. конф. «Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта», Т. 2 — Херсон : ХНТУ, 2009. — С.30–33.
5. *Блохин Л.М. Осадчий С.І. Гаврилюк Б.О.* Оценка динамических характеристик продольного канала сверхлегкого летательного аппарата на малых высотах полета // Научные труды академии. — Кировоград : ДЛАУ, 2004. — Вып. 8 — С. 198–204.
6. *Осадчий С.І. Шаповалова І.А., Коропалов С.А.* Идентификация динамики двухприводной системы управления деревообрабатывающего станка // Модернизация и управление состоянием экологоэкономических систем региона. Математическое обеспечение интеллектуальных систем моделирования. — 2006. — Вып. 3 — С. 225–231.
7. *Оптимизация* линейных инвариантных во времени систем управления: / Ф.А. Алиев, В.Б. Ларин, К.И. Науменко и др. — Киев : Наук. думка, 1978 — 327 с.
8. *Науменко К.И.* Наблюдение и управление движением динамических систем. — К. : Наук. думка, 1984. — 208 с.
9. *Kuchera V.* Discrete line control: the polynomial equation approach. — Praha : Akademia, 1979. — 206 p.
10. *Алиев Ф.А. Бордюк В.А., Ларин В.Б.* H<sub>2</sub>-оптимизация и методы пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов. — Баку : ЭЛМ, 1991. — 326 с.
11. *Davis M.C.* Factoring the spectral matrix // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1963. — AC-8, N 4. — P. 296–305.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1988. — 552 с.

*Получено 28.05.2012*