УДК 621.01-621.9.06

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ВЕКТОРІВ ШОСТОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ ЖОРСТКОСТІ ПРОСТОРОВИХ МЕХАНІЗМІВ ПАРАЛЕЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

В.Б. Струтинський, *д-р техн. наук, професор;*
А.М. Кириченко, *канд. техн. наук, доцент,*
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ

Розглянуте застосування векторів шостого порядку у розрахунках жорсткості просторових механізмів паралельної структури, визначені координатні перетворення векторів узагальненого навантаження, переміщення та матриці жорсткості. Названий математичний апарат використано для визначення матриці жорсткості гексаподу.

Ключові слова: *паралельна кінематика, вектор, матриця перетворення, навантаження, переміщення, матриця жорсткості, гексапід.*

Обосновано применение векторов шестого порядка для расчетов жесткости пространственных механизмов параллельной структуры, определены координатные преобразования векторов обобщенной нагрузки, перемещения и матрицы жесткости. Указанный математический аппарат использован для определения матрицы жесткости гексапода.

Ключевые слова: *параллельная кинематика, вектор, матрица преобразования, нагрузка, перемещение, матрица жесткости, гексапод.*

ВСТУП

Однією із актуальних проблем проектування та дослідження обладнання з механізмами паралельної структури є визначення їх жорсткості, яка найбільш повно описується матрицею просторової жорсткості [1]. Згідно з [2] матриця жорсткості встановлює співвідношення між навантаженням та викликаною ним похибкою положення

$$\mathbf{W} = K \quad \mathbf{\Delta}, \qquad (1)$$

де K – матриця жорсткості 6×6; $\mathbf{W} = \left(P_x, \quad P_y, \quad P_z, \quad M_x, \quad M_y, \quad M_z\right)^T$ – вектор узагальненого навантаження (P_x, P_y, P_z – складові сили, що діють у точці A у напрямках осей X, Y та Z відповідно; M_x, M_y, M_z – складові моменти, що діють у точці A стосовно осей X, Y та Z відповідно); $\mathbf{\Delta} = \left(\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\right)^T$ – вектор узагальненої похибки ($\delta_x, \delta_y, \delta_z$ – різниця між номінальними та фактичними координатами та $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – малі повороти твердого тіла навколо осей координат). Фізичний зміст елементів матриці жорсткості k_{ij} – жорсткість системи у напрямку i-ї узагальненої координати під дією j-го компонента узагальненої сили.

В літературі зустрічаються кілька варіантів запису векторів узагальненого переміщення та навантаження, що визначаються пріоритетом поступальних переміщень та сил [1,2], обертальних переміщень та моментів [3], обертальних переміщень та сил [4]. Залежно від зазначеного пріоритету можна сформулювати кілька варіантів структури матриці жорсткості K, що відрізняються розміщенням підматриць поступальної, крутильної та сполучної жорсткостей.

Якщо тіло розміщене на n точково-осьових пружних опорах з напрямком осі пружини $\mathbf{a}_i$, жорсткістю k_i та радіус-векторами $\mathbf{r}_i$ точок прикріплення пружини, та згідно з [2] елементи матриці жорсткості визначаються як

$$k_{jk} = \sum_{i=1}^{n} k_i R_{ji} R_{ki} \,, \tag{2}$$

де $j,k \in 1, \;\; 2, \;\; \ldots, \;\; 6$; R_{ji}, R_{ki} – елементи вектора $\boldsymbol{R}_i = \left(a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}, s_{xi}, s_{yi}, s_{zi}\right)^T$ (a_{xi}, a_{yi}, a_{zi} – елементи вектора $\mathbf{a}_i$; s_{xi}, s_{yi}, s_{zi} – елементи вектора $\mathbf{m}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i$, що являє собою момент вектора $\mathbf{a}_i$).

У загальному випадку за формулою (2) необхідно розрахувати кожен із 36 елементів матриці жорсткості, тому цей шлях визначення матриці жорсткості досить складний та потребує багато обчислень.

У роботі [3] навантаження та пружні переміщення розглядають як комплексні вектори, а зв’язок між ними встановлюється за допомогою бінора пружності у вигляді двох комплексних матриць

$$\left(C\right) \quad \Phi = \left\{ \;\; C, C^{+} \right\} \quad \left(\boldsymbol{\theta} + \omega \;\; \boldsymbol{\delta}\right) = C\boldsymbol{\theta} + C^{+}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{R} \,,$$

де $\left(C\right) = \left\{ \;\; C, C^{+} \right\}$ – бінор пружності; $\Phi = \left(\boldsymbol{\theta} + \omega \;\; \boldsymbol{\delta}\right)$ – комплексний вектор (гвинт) пружних переміщень; $\mathbf{R} = \mathbf{f} + \omega\,\mathbf{m}$ – комплексний вектор (гвинт) зовнішніх навантажень. Елементи бінора пружності розраховуються подібно до (2) як суми відповідних проекцій жорсткостей опор або їх моментів відносно координатних осей.

Якщо розглядати структуру традиційної матриці жорсткості у вигляді блоків 3×3 [4]

$$K = \begin{bmatrix} K_{\text{п}} & K_{\text{с}} \\ K_{\text{с}}^{T} & K_{\text{к}} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

де $K_{\text{п}}$, $K_{\text{с}}$ та $K_{\text{к}}$ – матриці поступальної, сполучної та крутної жорсткостей відповідно, можна записати еквівалентний вираз бінора пружності [3] у вигляді

$$\left(C\right) = \left\{ K_{\text{к}} + \omega \quad K_{\text{с}}^{T}, K_{\text{п}} + \omega \quad K_{\text{с}} \right\},$$

тобто бінор пружності містить ту саму інформацію, що і матриця жорсткості, але у вигляді двох комплексних матриць, не надто зручному для обчислень і перетворень.

Математичний апарат гвинтового числення обробляє пари сила-момент, лінійне-кутове переміщення разом, але застосування комплексних векторів ускладнює використання єдиних матриць перетворень, і найголовніше – співвідношення між комплексними векторами (гвинтами) переміщення і навантаження не являє собою матриці жорсткості у традиційному вигляді. Таким чином, застосування математичного апарата гвинтового числення у вигляді комплексних векторів спрощує розрахунки, але все одно не дозволяє одержати єдиний простий вираз для матриці жорсткості пружної системи.

В роботі [2] радіус-вектори точок з декартовими координатами $x, \;\; y, \;\; z$ описуються власними векторами четвертого порядку вигляду $\mathbf{r} = \left(x, \;\; y, \;\; z, \;\; 1\right)^T$, координатні перетворення яких виконуються за допомогою матриць 4×4 перетворення координат, які мають таку структуру:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

де лівий верхній блок 3×3, що являє собою ортогональну матрицю, яка описує відносний поворот систем координат, а три перші координати четвертого стовпчика являють собою декартові координати їх відносного переміщення.

Такий математичний апарат забезпечує зручне перетворення радіус-векторів перемноженням на матриці координатного перетворення, проте порядок радіус-векторів та матриць перетворення не збігається з порядком векторів узагальненого навантаження, узагальнених переміщень та матриці жорсткості, що вимагає додаткових операцій і значно ускладнює розрахунки. Враховуючи, що вектори поступальних та обертальних переміщень, сил та моментів перетворюються окремо, слід визнати, що використання математичного апарата векторів четвертого порядку для визначення матриці жорсткості недоцільне.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Таким чином, необхідно, щоб математичний апарат для розрахунків жорсткості задовольняв такі умови: співвідношення між векторами узагальненого навантаження та узагальненого переміщення являє собою матрицю жорсткості у вигляді (1); перетворення векторів узагальненого навантаження та узагальненого переміщення при переході між системами координат проводиться без розкладу на окремі складові. Такі умови задовольняє математичний апарат векторів шостого порядку [5], яким можна скористатися для представлення математичних моделей фізичних об’єктів – узагальненого переміщення та навантаження.

Отже, метою роботи є обґрунтування переходу розрахунків жорсткості від векторної алгебри з координатною формою запису геометричних векторів до математичного апарата перетворень векторів шостого порядку за допомогою спеціальних матриць, для чого необхідно систематизувати операції з векторами шостого порядку, визначити матриці координатних перетворень векторів узагальненого переміщення та навантаження, встановити закони координатного перетворення матриці жорсткості.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Оскільки традиційна загальноприйнята структура матриці жорсткості має вигляд (3), в подальшому будемо розглядати вектор узагальнених переміщень у вигляді

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix},$$

де $\boldsymbol{\delta} = \left(\delta_x, \delta_y, \delta_z\right)^T$ – вектор малих лінійних переміщень; $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_x, \theta_y, \theta_z\right)^T$ – вектор малих поворотів твердого тіла, а вектор узагальненого навантаження у вигляді

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{f} = \left(P_x, P_y, P_z\right)^T$ – вектор сил; $\mathbf{m} = \left(M_x, M_y, M_z\right)^T$ – вектор моментів стосовно координатних осей.

Тоді рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\text{п}} & K_{\text{с}} \\ K_{\text{с}}^T & K_{\text{к}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}.$$

За аналогією з [3] можна вважати вектори узагальнених переміщень та навантажень гвинтами, оскільки вони складаються з двох трійок координат. Але на відміну від традиційних гвинтів колінеарність між трійками не потрібна, що усуває необхідність визначення осі гвинтового переміщення або силового гвинта і дозволяє безпосередньо визначати узагальнене переміщення або навантаження у необхідних точках твердого тіла. Далі будемо говорити про узагальнене навантаження та узагальнене переміщення на початку координат, якщо окремо не зазначено іншого.

Момент сили

Якщо вектор сили $\mathbf{f}$ діє у точці з радіус-вектором $\mathbf{r}$, її момент стосовно центра координат дорівнює

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}.$$

Тоді вектор узагальненого навантаження визначається як

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ \left[\mathbf{r}\right]_{\times} \end{bmatrix} \mathbf{f},$$

де E – одинична матриця 3x3; $\left[\mathbf{p}\right]_{\times}$ – кососиметрична матриця 3x3, породжена вектором паралельного перенесення початку координат O до O', заданим у системі координат $X_0Y_0Z_0$:

$$\left[\mathbf{p}\right]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця $\left[\mathbf{p}\right]_{\times}$ фактично є лінійним оператором, що відповідає векторному добутку $\mathbf{p}\times$, тобто застосування $\left[\mathbf{p}\right]_{\times}$ до вектора $\mathbf{r}$ перетворює його на вектор $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$. У вітчизняній літературі здебільшого використовується запис у вигляді $\left[\mathbf{p}\right]_{\times}$, а у зарубіжній – як оператора $\mathbf{p}\times$ [6].

Також можна визначити узагальнене навантаження, знаючи вектор плюкерових координат лінії дії сили та її абсолютну величину

$$\mathbf{W} = \mathbf{N}\ f, \tag{4}$$

де $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{n} \end{bmatrix}$ – вектор 6×1 плюкерових координат лінії дії сили.

Координатні перетворення радіус-векторів

Розглянемо перетворення радіус-вектора при переході від системи координат $X_0Y_0Z_0$ до системи $X'_0Y'_0Z'_0$

$$\mathbf{r}' = R\ \ \mathbf{r} - \mathbf{p},$$

де R – матриця повороту; $\mathbf{p}$ – вектор, що встановлює координати центра системи $X'_0Y'_0Z'_0$ у $X_0Y_0Z_0$.

Щоб перейти від традиційної операції додавання радіус-векторів при паралельному переносі системи координат до операції матричного множення векторів шостого порядку, розглянемо структуру добутку матриці на вектор

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{b}_1 + A_{12}\mathbf{b}_2 \\ A_{21}\mathbf{b}_1 + A_{22}\mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Координатні перетворення вектора узагальненого навантаження

Розглянемо перехід від системи координат $X_0Y_0Z_0$ до системи $X'_0Y'_0Z'_0$, початок координат якої O' одержується паралельним перенесенням початку координат 0 вектором $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1, & p_2, & p_3 \end{bmatrix}^T$ (рис. 1).

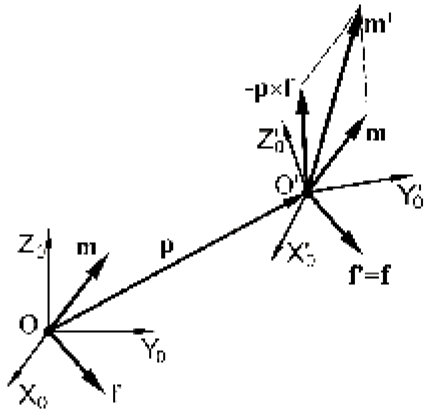

Рисунок 1 – Перетворення узагальненого навантаження

Оскільки вектор сили $\mathbf{f}$ залишається постійним, а вектор моменту змінюється з урахуванням паралельного перенесення сили

$$\mathbf{m}' = \mathbf{m} - \mathbf{p} \times \mathbf{f},$$

вектор навантаження $\mathbf{W}$ змінюється так:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}' \\ \mathbf{m}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} - \mathbf{p} \times \mathbf{f} \end{bmatrix}.$$

Тоді з урахуванням (5) зв'язок між векторами навантаження $\mathbf{W}'$ та $\mathbf{W}$ у системах координат $X_0Y_0Z_0$ та $X'_0Y'_0Z'_0$ можна записати так:

$$\mathbf{W}' = S\ \ \mathbf{W},$$

де S – матриця 6x6 просторового паралельного перенесення

$$S = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -[\mathbf{p}]_\times & E \end{bmatrix},$$

Зворотне перетворення описується матрицею S^{-1}, яка згідно з формулою Фробеніуса [7] дорівнює

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ [\ \mathbf{p}]_\times & E \end{bmatrix},$$

що підтверджується рівнянням $\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{p} \times \mathbf{f}$.

Якщо початки систем координат збігаються, а R – матриця 3x3 повороту від системи $X'_0Y'_0Z'_0$ до $X_0Y_0Z_0$, то

$$\mathbf{W}' = H\ \ \mathbf{W},$$

де H – матриця 6x6 просторового повороту

$$H = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Зворотне перетворення описується матрицею

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix}.$$

Якщо для переходу до системи координат $X'_0Y'_0Z'_0$ необхідно послідовно здійснити переміщення та поворот, то

$$\mathbf{W}' = T\ \ \mathbf{W}, \tag{6}$$

а матриця просторового перетворення має вигляд

$$T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ -[\mathbf{p}]_\times & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R[\mathbf{p}]_\times & R \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Зворотне перетворення задається матрицею T^{-1}, яка дорівнює

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ [\ \mathbf{p}]_\times & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ [\mathbf{p}]_\times R^T & R^T \end{bmatrix}.$$

Координатні перетворення вектора узагальненого переміщення

На відміну від вектора узагальненого навантаження при переході від системи координат $X_0Y_0Z_0$ до системи $X'_0Y'_0Z'_0$ (рис. 2) незмінним залишається другий компонент вектора узагальненого переміщення – вектор повороту $\boldsymbol{\theta}$, а вектор переміщення $\boldsymbol{\delta}$ змінюється з урахуванням паралельного перенесення

$$\boldsymbol{\delta}' = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{p} \times \boldsymbol{\theta} . \tag{8}$$

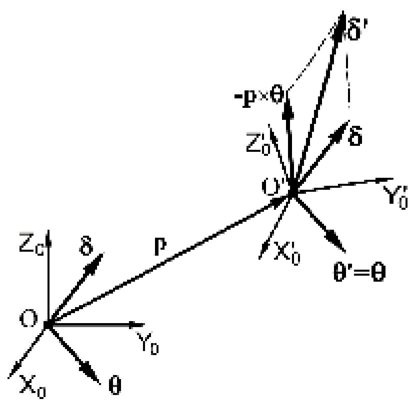

Рисунок 2 – Перетворення узагальненого переміщення

Тоді вектор узагальненого переміщення $\boldsymbol{\Delta}$ змінюється так:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}' \\ \boldsymbol{\theta}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} - \mathbf{p} \times \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}.$$

Отже, зв’язок між векторами $\boldsymbol{\Delta}$ та $\boldsymbol{\Delta}'$ формулюється так:

$$\boldsymbol{\Delta}' = S^* \boldsymbol{\Delta},$$

де S^* – матриця 6х6 просторового паралельного переносу

$$\mathrm{S}^* = \begin{bmatrix} E & -[\mathbf{p}]_\times \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

Зворотне перетворення описується матрицею

$$S^{-*} = \left(\mathrm{S}^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} E & [\ \mathbf{p}]_\times \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

що відповідає залежності $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}' + \mathbf{p} \times \boldsymbol{\theta}$.

При повороті системи координат

$$\boldsymbol{\Delta}' = H^* \boldsymbol{\Delta},$$

де H^* – матриця 6х6 просторового повороту

$$H^* = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Зворотне перетворення описується матрицею

$$H^{-*} = \left(H^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix}.$$

Якщо для переходу до системи координат $X'_0Y'_0Z'_0$ необхідно послідовно здійснити переміщення та поворот, то

$$\mathbf{\Delta}' = T^*\mathbf{\Delta}, \tag{9}$$

а матриця просторового перетворення має вигляд

$$T^* = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -[\mathbf{p}]_\times \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -R[\mathbf{p}]_\times \\ 0 & R \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Зворотне перетворення задається матрицею T^{-*}, яка дорівнює

$$T^{-*} = \left(T^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} E & [\mathbf{p}]_\times \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & [\mathbf{p}]_\times R^T \\ 0 & R^T \end{bmatrix}.$$

Систематизуємо усі матриці перетворення у таблицю 1. Очевидно, що будь-яка кількість послідовних координатних перетворень зводиться до перемноження матриць перетворення у зворотному порядку. Наприклад, при переході від системи I до системи II і далі до системи III маємо

$$\mathbf{W}_{II} = T_{I-II}\mathbf{W}_I,$$

$$\text{тоді } \mathbf{W}_{III} = T_{II-III}\mathbf{W}_{II} = T_{II-III}T_{I-II}\mathbf{W}_I.$$

Таблиця 1 – Матриці перетворення векторів шостого порядку

Об'єкт перетворення	Напрямок перетворення	Матриця перетворення		
		Зсув	Поворот	Загальне
Вектор узагальненого навантаження	прямий	$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -[\mathbf{p}]_\times & E \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R & 0 \\ -R[\mathbf{p}]_\times & R \end{bmatrix}$
	зворотний	$\begin{bmatrix} E & 0 \\ [\mathbf{p}]_\times & E \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R^T & 0 \\ [\mathbf{p}]_\times R^T & R^T \end{bmatrix}$
Вектор узагальненого переміщення	прямий	$\begin{bmatrix} E & -[\mathbf{p}]_\times \\ 0 & E \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R & -R[\mathbf{p}]_\times \\ 0 & R \end{bmatrix}$
	зворотний	$\begin{bmatrix} E & [\mathbf{p}]_\times \\ 0 & E \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^T \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R^T & [\mathbf{p}]_\times R^T \\ 0 & R^T \end{bmatrix}$

Для додаткової перевірки встановлених залежностей використаємо той факт, що робота визначається [6] як половина добутку узагальненого переміщення на узагальнене навантаження

$$A = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{W} \ ,$$

що згідно з правилами перемноження матриць відповідає традиційному запису у координатній формі

$$A = \frac{1}{2}\left(\delta_x \quad P_x + \delta_y \quad P_y + \delta_z \quad P_z + \theta_x \quad M_x + \theta_y \quad M_y + \theta_z \quad M_z\right).$$

У системі координат $X_0Y_0Z_0$ узагальнене навантаження $\mathbf{W}$ на узагальненому переміщенні $\boldsymbol{\Delta}$ здійснить роботу

$$A = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{W} \ ,$$

тоді як у системі координат $X'_0Y'_0Z'_0$ ця робота буде дорівнювати

$$A' = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}'^T \ \mathbf{W}' \ .$$

Оскільки робота не залежить від системи координат, то

$$\boldsymbol{\Delta}'^T \ \mathbf{W}' = \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{W} \ .$$

З урахуванням (6) та (9)

$$\left(T^* \boldsymbol{\Delta}\right)^T T \quad \mathbf{W} = \boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{W} \ , \tag{11}$$

$$T^{*T} T = E \ . \tag{12}$$

Перевіряємо (12), підставляючи (7) та (10)

$$\begin{bmatrix} R & 0 \\ -R[\mathbf{p}]_\times & R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & -R[\mathbf{p}]_\times \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T R & -R^T R[\mathbf{p}]_\times + \left(-R[\mathbf{p}]_\times\right)^T R \\ 0 & R^T R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

умова виконується. Також з (11) випливає співвідношення між матрицями координатних перетворень узагальненого переміщення та навантаження

$$T^* = T^{-T} \ .$$

Координатні перетворення матриці жорсткості

Якщо записати (1) у іншій системі координат $X'_0Y'_0Z'_0$, одержимо

$$\mathbf{W}' = K' \quad \boldsymbol{\Delta}' , \tag{13}$$

де $\mathbf{W}'$ та $\boldsymbol{\Delta}'$ – вектори узагальненого навантаження та пружних переміщень, записані у новій системі координат.

Враховуючи (1), (6) та

$$\mathbf{\Delta} = T^T \mathbf{\Delta}',$$

одержуємо

$$\mathbf{W}' = TKT^T \mathbf{\Delta}'.$$

Враховуючи (13), маємо залежність матриці жорсткості від перетворення координат

$$K' = TKT^T. \tag{14}$$

Таким чином, у загальному випадку $K' \neq K$, тобто матриця просторової жорсткості залежить від вибору системи координат.

Користуючись властивостями блочних матриць [7], можна визначити вигляд матриці жорсткості після перетворення координат

$$K' = \begin{bmatrix} RK_{\text{п}}R^T & R\left(K_{\text{с}} - K_{\text{п}}\langle\mathbf{p}\rangle^T\right)R^T \\ R\left(K_{\text{с}}^T - \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{п}}\right)R^T & R\left(K_{\text{к}} - \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{с}} - K_{\text{с}}^T\langle\mathbf{p}\rangle^T + \langle\mathbf{p}\rangle K_{\text{п}}\langle\mathbf{p}\rangle^T\right)R^T \end{bmatrix}. \tag{15}$$

З (15) видно, що чистий поворот системи координат трансформує усі підматриці однаково, а ступінь впливу на них паралельного перенесення значно відрізняється. Матриця поступальної жорсткості при переході від одної системи координат до іншої не залежить від вектора відносного зміщення $\mathbf{p}$ їх центрів, а визначається лише відносним поворотом R. Оскільки власні значення матриці при повороті зберігаються, то поступальні жорсткості не залежать від вибору системи координат. Матриця сполучної жорсткості при чистому повороті трансформується як окрема матриця, а лінійне переміщення пов’язує її з матрицею поступальної жорсткості. При цьому значення сполучних жорсткостей не зберігаються. Матриця крутильної жорсткості трансформується найбільш складно, у її перетворенні задіяні як матриця поступальної, так і матриця сполучної жорсткості. Крутильні жорсткості при перетворенні координат не зберігаються.

Як приклад можна застосувати розглянутий математичний апарат для визначення відомої матриці жорсткості гексаподу [4], представивши його рухому платформу у вигляді твердого тіла на шести пружинних опорах (рис. 3).

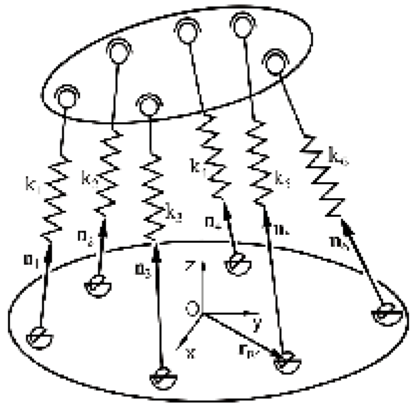

Рисунок 3 – Схема гексаподу

Нехай осям шести штанг змінної довжини жорсткістю k_i, закріплених у точках з радіус-векторами $\mathbf{r}_i$, відповідають одиничні вектори $\mathbf{n}_i$. Під узагальненим навантаженням $\mathbf{W}$ пружні переміщення платформи у системі координат основи дорівнюють $\boldsymbol{\Delta}$.

Нормалізовані плюкерові координати штанг визначаються векторами

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i \end{bmatrix}.$$

Переміщення у штангах можна розрахувати як проекцію вектора лінійних переміщень платформи $\boldsymbol{\delta}_i$ у точці прикріплення штанги на її одиничний вектор

$$\Delta l_i = \mathbf{n}_i^T \boldsymbol{\delta}_i . \tag{16}$$

Враховуючи (8),

$$\Delta l_i = \mathbf{n}_i^T \boldsymbol{\delta}_i - \mathbf{n}_i^T \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\theta} .$$

З огляду на те, що транспонований вектор плюкерових координат дорівнює

$$\mathbf{N}_i^T = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i^T & (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}_i)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i^T & -\mathbf{n}_i^T [\mathbf{r}_i]_\times \end{bmatrix},$$

можна записати (16) у вигляді

$$\Delta l_i = \mathbf{N}_i^T \boldsymbol{\Delta}. \tag{17}$$

Оскільки зовнішнє навантаження повністю компенсується силами у штангах, з урахуванням (4) можна записати

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{N}_i \quad f_i , \tag{18}$$

де f_i – величини сили у штангах, яку можна визначити за формулою

$$f_i = k_i \quad \Delta l_i . \tag{19}$$

Тоді з урахуванням (17) та (19) залежність (18) набирає вигляду

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{N}_i k_i \mathbf{N}_i^T \boldsymbol{\Delta}.$$

Таким чином, з урахуванням (1) матриця жорсткості гексаподу набирає вигляду

$$K = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{N}_i k_i \mathbf{N}_i^T . \tag{20}$$

З правил операцій над векторами і матрицями можна помітити, що добуток вектора на транспонований вектор дорівнює добутку матриці, будь-яким із стовпчиків якої є цей вектор, а інші стовпчики – нульові, на транспоновану, наприклад

$$\mathbf{u}\quad \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix}0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T .$$

Далі можна подати добуток $\mathbf{u}\quad c\quad \mathbf{u}^T$ у вигляді

$$\mathbf{u}\quad c\quad \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix}0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\ diag(0,c,0,0,0,0)\ \begin{bmatrix}0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T .$$

Тоді можна подати $\mathbf{N}_i k_i \mathbf{N}_i^T$ у вигляді добутку трьох квадратних матриць 6×6

$$\mathbf{N}_i k_i \mathbf{N}_i^T = B\quad A\quad B^T , \qquad (21)$$

де A – матриця, i-м елементом головної діагоналі якої є k_i (інші елементи можуть мати довільні значення); B – матриця, i-м стовпчиком якої є вектор $\mathbf{N}_i$.

Отже, з урахуванням (21) матриця жорсткості гексаподу

$$K = P\quad K_\theta P^T , \qquad (22)$$

де $K_\theta = diag(k_i)$ – матриця коефіцієнтів жорсткості штанг; $P = (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots , \mathbf{N}_6)$ – матриця, стовпчиками якої є нормалізовані плюкерові координати штанг гексаподу.

Залежність (22) збігається з одержаним у [2] виразом $K = J^T K_\theta J$ з урахуванням того, що якобіан являє собою транспоновану матрицю плюкерових координат $J = P^T$.

Якщо визначати матрицю жорсткості у системі координат, центр якої задано вектором $\mathbf{p}$ у системі координат основи, а орієнтація осей – матрицею повороту R , вектори $\mathbf{r}_i$ матимуть вигляд

$$\mathbf{r}'_i = R(\mathbf{r}'_i - \mathbf{p}) .$$

Тоді вектори плюкерових координат штанг дорівнюють

$$\mathbf{N}'_i = \begin{bmatrix} R\quad \mathbf{n}_i \\ R(\mathbf{r}'_i - \mathbf{p})\times\quad \mathbf{n}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R[\mathbf{p}]\times & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{r}_i\times\quad \mathbf{n}_i \end{bmatrix} = T\mathbf{N}_i .$$

Таким чином

$$K' = \sum_{i=1}^{6} T\mathbf{N}_i k_i (T\mathbf{N}_i)^T = T\left(\sum_{i=1}^{6} \mathbf{N}_i k_i \mathbf{N}_i^T\right) T^T ,$$

що з урахуванням (20) підтверджує (14).

ВИСНОВКИ

1. Для аналізу жорсткості механізмів паралельної структури зручно застосовувати вектори шостого порядку узагальненого навантаження та узагальненого переміщення без розкладання на окремі координатні складові.

2. Визначені матриці перетворення, що дозволяють трансформувати вектори шостого порядку узагальненого навантаження та переміщення, представляючи послідовні зсуви та повороти системи координат у вигляді добутку відповідних матриць перетворення.

3. На основі координатних перетворень векторів узагальненого навантаження та узагальненого переміщення встановлені залежності для координатного перетворення матриці жорсткості.

4. Розглянутий математичний апарат застосований для визначення матриці жорсткості гексаподу як твердого тіла на шести пружних опорах та її координатних перетворень.

SUMMARY

SIX-DIMENSIONAL VECTORS FOR STIFFNESS CALCULATIONS OF SPATIAL PARALLEL ROBOTS

V.B. Strutynsky, A.M. Kyrychenko
National Technical University of Ukraine 'Kyiv Polytechnic Institute'

The application of six-dimensional vectors for spatial stiffness calculations of parallel robots is considered. The coordinate transforms of generalized force, generalized displacement and stiffness matrix are established and validated by the case of hexapod stiffness matrix.

***Key words**: parallel kinematics, vector, transform matrix, force, displacement, stiffness matrix, hexapod.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кириченко А.М. Показники жорсткості верстатного обладнання з паралельною кінематикою / А.М. Кириченко // Збірник наукових праць КНТУ. Техніка в с/г виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. – – Кіровоград: КНТУ, 2009. - Вип. 22. – С. 272-282.
2. Решетов Д.Н. Точность металлорежущих станков / Д.Н. Решетов, В.Т. Портман. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
3. Диментберг Ф.М. Винтовое исчисление и его приложения в механике / Ф.М. Диментберг. – М.: Наука, 1965. – 200 с.
4. Струтинський В.Б. Теоретичний аналіз жорсткості шестикоординатного механізму паралельної структури / В.Б. Струтинський, А.М. Кириченко // Вісник Національного технічного університету України „Київський політехнічний інститут". Серія „Машинобудування". – 2009. – №57. – С. 198-207.
5. Коноплев В.А. Агрегативная механика систем твердых тел / В.А. Коноплев. – СПб.: Наука, 1996. – 166 с.
6. Featherstone R. Rigid Body Dynamics Algorithms / R. Featherstone. – New York: Springer, 2008. – 272 p.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Надійшла до редакції 2 квітня 2010 р.