

Міністерство освіти, науки, молоді та спорту України
Кіровоградський національний технічний університет

Матеріали

Шістнадцятого Міжнародного науково-практичного семінару

**“КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ”**

11–12 квітня 2014 року

Кіровоград
2014

Шістнадцятий Міжвузівський науково-практичний семінар
КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Кіровоград, 11–12 квітня 2014 року

Засновник семінару – Державна льотна академія України

У збірнику вміщено матеріали Шістнадцятого Міжвузівського науково-практичного семінару – ПОВІДОМЛЕННЯ про його роботу, ТЕЗИ 33 наукових доповідей, представлених на семінар.

Редакційна колегія:

Відповідальний редактор

Донець Георгій Панасович – доктор фізико-математичних наук,
професор, зав. відділом Інституту
кібернетики НАН України

Члени редколегії:

Авраменко О.В. – д.ф.-м.н., завідувач каф. прикладної математики та інформатики КДПУ ім. Володимира Винниченка

Белявська Г.Б. – к.ф.-м.н., ст. н.с. Інституту математики та інформатики Академії
Наук Молдови

Бондар О. П. – к.ф.-м.н., доцент каф. фізико-матем. наук КЛАНУ

Воблій В.А. – д.ф.-м.н., доцент Московського державного технічного
університету ім. Баумана

Волков Ю.І. – д.ф.-м.н., професор, завідувач каф. математики КДПУ
ім. Володимира Винниченка

Гамалій В.Ф. – д.ф.-м.н., професор, завідувач каф. екон. кібернетики і маркетингу
КНТУ

Козін І.В. – д.ф.-м.н., доцент кафедри економічної кібернетики Запорізького
національного університету

Петренюк А. Я. – д.ф.-м.н., професор каф. БДМБ КНТУ

Ревякин А.М – к.ф.-м.н., професор, Московский государственный институт
электронной техники (технический университет)

Сопронюк Ф.О. – д.ф.-м.н., професор, декан факультету комп'ютерних наук
Чернівецького національного університету ім. Ю.Федьковича

Філер З.Ю. – д.т.н., к.ф.-м.н., професор каф. математики КДПУ ім. Володимира
Винниченка

Шендеровський В.А. – д.ф.-м.н., професор, віце-президент Українського
фізичного товариства (м. Київ)

Ясинський В.К. – д.ф.-м.н., професор, завідувач каф. теорії ймовірності
Чернівецького національного університету ім. Ю.Федьковича

Організаційний комітет:

Голова – Семенюта М.Ф., к.ф.-м.н.

Відповідальний секретар – Петренюк В.І., к.ф.-м.н., доцент

Члени оргкомітету:

Вороненко А.А. – д.ф.-м.н., професор МГУ

Виврот Т.М. – кандидат фіз.-мат. наук, Центр досліджень науково-
технічного потенціалу та історії науки НАН України

Гамалій В.Ф. – д.ф.-м.н., професор, зав. кафедри економічної
кібернетики і маркетингу КНТУ

Дресєв О.М. – викладач кафедри програмного забезпечення КНТУ

Кузнєцов С.Т. – ст. викладач кафедри інформаційних технологій
КЛАНУ

Настоящий В.А. – к.т.н., професор, завідувач кафедри
будівельних дорожніх машин та будівництва КНТУ

Неділько С.М. – к.т.н., професор КЛАНУ

Петренюк А.Я. – д.ф.-м.н., професор каф. БДМБ КНТУ

Петренюк Л.П. – к.ф.-м.н.

Сидоренко В.В. – д.т.н., завідувач кафедри програмного
забезпечення КНТУ

Якименко С.М. – к.ф.-м.н., зав. кафедри вищої математики КНТУ

1. Агаи Аг Гамиш Якуб
Решение задачи о математическом сейфе для составного модуля К
2. Барболіна Т.М., Ємець О.О.
Упорядкування випадкових величин на основі порівняння моментів.....
3. Бондар О. П.
Функции на многообразиях, как математическая модель управляемых систем.....
4. Воблый В. А., Мелешко А. К.
Перечисление помеченных графов розы.....
5. Волков Ю.И., Войналович Н.М.
Розподіли Лагранжа з параметризацією середнім.....
6. Глухов О.Д.
Про одне узагальнення відстані на графах.....
7. Донець Г.П.
Алгоритм решения системы неравенств для плоской триангуляции.....
8. Дреєва Г.М., Дреєв О. М.,
Визначення оптимального розміру блоку при бітовому арифметичному кодуванні.....
9. Зернова Ю.О.
Визначення оцінок у методі гілок і меж при розв'язуванні комбінаторної транспортної задачі на розміщеннях.....
10. Извалов А. В.
Подсчет базовых самоописывающих графов.....
11. А.В. Коваленко, А.С. Коваленко
Задачи распознавания ситуаций в системах организационной стратегии интеграции производства и операций.....
12. Коганов Л.М.
Комбинаторно-алгоритмический вывод двух формул Франческо Фаа Ди Бруно
13. Козин И. В., Кривцун Е. В.
Эволюционно-фрагментарная модель трассировки печатных плат.....

14. Коновалов А.Д.
Грациозные разметки графов в гражданской авиации
15. Крайнічук Г.В.
Класифікація мінімальних тотожностей на квазігрупах.....
17. Кузьмин О. В., Мельникова В. А.
Программное обеспечение для моделирования простого дискретного процесса восстановления с использованием комбинаторных полиномов разбиений
18. Лысенко И. А., Смирнов А. А.
Исследование некриптостойких генераторов псевдослучайных чисел.....
19. Макарова Н.В.
Магический тессеракт третьего порядка.....
201. Нагорный А. С.
О свойствах попарных пересечений предполных классов функций пятизначной логики, сохраняющих разбиения.....
21. Петренюк В.І., Гермак В. С.
Доповнення до статті «Властивості графів мінімального базису проективної площини».....
22. Петренюк Д.А., Петренюк А.Я.
Групова дистанційна магічна розмітка графа
23. Петровська Т.В., Терновський П.А.
Кордіальність ромашка-графів та зубчастих графів.....
24. А.В. Стёпкин
Использование трех агентов для распознавания неориентированных графов.....
25. Смирнов А.А., Мохамад Абу Таам Гани
Анализ требований к качеству обслуживания в информационно-телекоммуникационных системах.....
26. Семенюта М. Ф., Черноусова Ж. Т.
О дистанционной магической разметке графов с циклическими конструкциями.....
27. Sokhatsky F.M., Pirus IЕ.M.
Top-Latin Cubes
28. Тимофієва Н. К.

Деякі властивості множини перестановок.....

29. Шевченко К. М.
Побудова ізоморфізмів деяких 4-регулярних гамільтоново
розкладних графів. II.....

30. Зоя Шеран
Некоторые результаты по Фибоначчи грациозным разметкам графов

31. Козирський В.Г., Шендеровський В. А.
Славетна постать української науки.....

32. Ромео Гогаладзе Г.Г.Читашвили
Некоторые вопросы прикладной геометрии и для профилирования специального
режущего инструмента

ВІН БАЧИТЬ ПОЕЗІЮ В МАТЕМАТИЧНИХ ПОБУДОВАХ

Семенюта М.Ф., Виврот Т.М.

Петренюк Анатолій Якович народився 1 березня 1944 року у місті Кіровограді на Балашівці в родині колгоспників. Оскільки батько пропав без вісті під час війни, матері доводилося тяжко працювати, щоб прогодувати трьох дітей, молодшим з яких був Анатолій. Вона з дитинства прививала маленькому Толі наполегливість, відповідальність та любов до навчання. З 1951 по 1961 рік Анатолій навчався в Кіровоградській середній школі № 23. Шкільний вчитель першим помітив математичний хист хлопця і допоміг його розвинути. Школу Анатолій закінчив із золотою медаллю.

У 1961 році поступив на фізико-математичний факультет Чернівецького державного університету, де познайомився з майбутньою дружиною Лідією, з якою він навчався в одній групі. З перших днів зарекомендував себе як здібний та працюючий студент, тому після закінчення другого курсу в числі найкращих студентів факультету був рекомендований для продовження навчання на механіко-математичному факультеті Московського державного університету ім. М. В. Ломоносова, який закінчив у 1967 році.

У МДУ навчався на кафедрі теорії чисел, курсові та дипломну роботи писав з комбінаторної математики під керівництвом професора Московського університету К. О. Рибнікова. Після закінчення університету залишений на навчання в аспірантурі Відділення математики МДУ.

Навчанням в аспірантурі керував член-кореспондент АН СРСР професор О. О. Гельфонд. За його рекомендацією було опубліковано перші наукові праці. Після смерті професора О. О. Гельфонда у 1970 році керівництво перейшло до професора К. О. Рибнікова. Результатом співпраці двох наукових керівників та аспіранта А. Я. Петренюка стала кандидатська дисертація “Исследования в теории конечных систем инцидентностей”,

успішно захищена 7 квітня 1972 року у Вченій раді Відділення математики МДУ.

Під час академічної відпустки у 1969-1970 роках працював у Києві в Інституті кібернетики АН УРСР. З 1972 по 1977 рік працював в Чернівецькому державному університеті, з 1977 по 1986 – в Кіровоградському інституті сільськогосподарського машинобудування, з 1986 по 2004 в Державній льотній академії України.

Дружина Лідія, з якою Анатолій одружився ще в студентські роки у 1965 році, також захистила кандидатську дисертацію з теорії графів у 1997 році.

З вересня 1998 по вересень 2001 року навчався у цільовій докторантурі Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, де його науковим консультантом був доктор фізико-математичних наук Г. П. Донець. За цей період написано докторську дисертацію “Екстремальні розклади повних графів: існування, перелік”, захист якої успішно відбувся 22 листопада 2002 року у Вченій раді Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України.

Після закінчення докторантури працював доцентом, згодом професором кафедри фізико-математичних дисциплін Державної льотної академії України. З вересня 2004 року працює професором кафедри будівельних дорожніх машин та будівництва Кіровоградського національного технічного університету.

Анатолій Якович передав інтерес до точних наук своїм дітям: старша дочка Світлана закінчила Талліннський технічний університет; старший син Олександр закінчив Московський державний технічний університет імені Н. Е. Баумана; молодший син Дмитро продовжив дослідження батька – закінчив аспірантуру в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України і захистив кандидатську дисертацію з теорії графів.

Учнями та послідовниками Петренюка А. Я. є Петровська Т.В., Терновський А.І, Терновський П.А та кандидати фіз.-мат. наук Семенюта М. Ф., Мироненко О. В., Петренюк Л. П., Петренюк Д. А.

Петренюк А. Я. заснував науково-практичний семінар «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», перші засідання якого проводилися на базі Державної льотної академії України, а наступні (уже більше 12 засідань) проводяться на базі Кіровоградського національного технічного університету.

За час науково-педагогічної праці опубліковано більш як 100 наукових та навчально-методичних робіт. Його статті надруковано у провідних журналах закордонних видань таких країн як Австралія, Канада, США, зокрема, в *Annals of Discrete Math*, 1980, *Discrete Math.*, 1989, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 1994, *Journal of Comb. Math. and Comb. Computing*, 2002 та інших. Надруковано також три монографії: А. Я. Петренюк «Екстремальні розклади повних графів» (2009), Г. А. Донець, А. Я. Петренюк «Экстремальные покрытия графов» (2009), А. Я. Петренюк «Чарівні та подібні до них графи» (2012).

Анатолій Якович досі залишається пристрасним ентузіастом науки, людиною, яка, за словами одного з його колег, кандидата філологічних наук, «бачить поезію в математичних побудовах».

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЕЙФЕ ДЛЯ СОСТАВНОГО МОДУЛЯ K

АГАИ АГ ГАМИШ ЯКУБ

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Пусть \mathfrak{S}_n - квадратная матрица порядка n , состоящая из единиц, а E_n - единичная матрица того же порядка. Тогда условие решение задачи о математическом сейфе на матрицах [1] запишется в виде системы уравнений

$$A\vec{x} + \vec{b} \equiv 0 \pmod{K}, \quad (1)$$

где A - квадратная матрица порядка $m \times n$, состоящая из m^2 подматриц

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_n & E_n & E_n & \dots & E_n \\ E_n & \mathfrak{S}_n & E_n & \dots & E_n \\ E_n & E_n & \mathfrak{S}_n & \dots & E_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_n & E_n & E_n & \dots & \mathfrak{S}_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Если K - не простое число, то несмотря на выполнение необходимых условий для чисел m и n , могут возникать ситуации, когда задача не имеет решения. В этом случае надо найти необходимую коррекцию начального состояния сейфа, чтобы задача имела решение. Рассмотрим последовательно все возможные варианты:

$$\mathbb{Z}_K \mid m+n \neq 1 \pmod{K}, \quad n \neq 1 \pmod{K}, \quad m \neq 1 \pmod{K}$$

а) $\text{НОД}(m+n-1, K) = d > 1;$

$$\text{НОД}(n-1, K) = \text{НОД}(m-1, K) = 1.$$

Чтобы слагаемое в (21) из [1], имеющее в знаменателе число $m+n-1$ можно было превратить в целое число, необходимо решить уравнение

$$t(m+n-1) \equiv \sum \mathbb{Z}_K \pmod{K} \quad (3)$$

Однако при условиях (а) и для произвольных b_{ij} это не всегда возможно.

Решение может существовать только при ограничении

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} \equiv 0 \pmod{d} \quad (4)$$

Тогда (3) будет иметь d решений вида

$$t = \left[t_1 + \frac{K}{d} \epsilon - 1 \right] \pmod{K} \quad (5)$$

где $s=1,2,\dots,d$, а t_1 – решение уравнения

$$t_1 \left(\frac{m+n-1}{d} \right) \equiv \sum_{i=1}^n b_{ij} \pmod{\frac{K}{d}} \quad (6)$$

Задача имеет d решений и (21) запишется в виде

$$x_{ij} \equiv \left[b_{ij} - \frac{\sigma_i}{n-1} - \frac{\lambda_j}{m-1} + \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} \right) t_1 + \frac{K}{d} \epsilon - 1 \right] \pmod{K} \quad (7)$$

где $s=1,2,\dots,d$.

Пример 1. Пусть $K=9, m=2, n=5$. Начальное состояние сейфа задано матрицей B . Параметры удовлетворяют условиям $\epsilon \pmod{K}$, а $\text{НОД}(m+n-1, K) = \text{НОД}(6, 9) = 3 > 1$. Сумма всех элементов матрицы B равна $41 \not\equiv 0 \pmod{3}$. Введем коррекцию и получим матрицу B' (элемент коррекции в рамке).

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & \boxed{2} & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим необходимые параметры:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m-1} &\equiv -1 \pmod{9}; & -\frac{1}{n-1} &\equiv \frac{1}{4} \equiv -2 \pmod{9}; \\ \sigma_1 &= 0; \sigma_2 = 6; \lambda_1 = \lambda_3 = 0; \lambda_2 = \lambda_4 = 7; \lambda_5 = 1; & t_1 &\equiv \frac{\left(\frac{42}{3} \right)}{\left(\frac{6}{3} \right)} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}; \\ x_{ij} &= \left[b_{ij} + 2\sigma_i - \lambda_j - 1 + 3\epsilon - 1 \right] \pmod{K}, \quad s=1,2,3. \end{aligned}$$

После подстановки всех параметров получим 3 решения задачи.

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверим решение $X^{(1)}$ и $X^{(3)}$.

$$\begin{aligned}
X^{(2)}: & \left(\begin{array}{c|ccc|c} \overset{+7}{7} & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc|c} \overset{+6}{5} & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|cccc|c} \overset{+7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \\
X^{(3)}: & \left(\begin{array}{c|cccc|c} \overset{+3}{7} & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc|c} \overset{+3}{1} & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 5 & 2 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} \overset{+1}{4} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 5 & 5 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc|c|c} \overset{+3}{5} & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|cccc|c} \overset{+1}{-1} & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} \overset{+3}{0} & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \rightarrow \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} \overset{+3}{0} & 0 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc|c|c} \overset{+3}{0} & 0 & 0 & 6 & 6 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|cccc|c} \overset{+3}{0} & 0 & 0 & 0 & 6 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

б) $\text{НОД}(\mathbb{C}-1, K) = d > 1$; $\text{НОД}(\mathbb{C}^{n-1}, K) = \text{НОД}(\mathbb{C}^{n+n-1}, K) = 1$.

Из второго соотношения вытекает, что $m-1 \neq 0 \pmod{K}$.

Чтобы слагаемое, имеющее в знаменателе число $n-1$, можно было превратить в целое число, необходимо решить уравнение

$$\mathbb{C}^{-1} p_i \equiv \left(\frac{\sum \mathbb{C}}{m+n-1} - \sigma_i \right) \pmod{K}, i=1,2,\dots,m. \quad (8)$$

Это решение может существовать только при ограничениях на матрицу B

$$\frac{\sum \mathbb{C}}{m+n-1} \equiv \sigma_i \pmod{d}, i=1,2,\dots,m. \quad (9)$$

Это даёт $m-1$ независимых значений для B . Будем считать, что это $m-1$ элементов в последнем столбце, то есть

$$b_{in} \equiv \left(\sigma_1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \right) \pmod{d}, i=2,3,\dots,m. \quad (10)$$

Кроме того p_i , как всегда, удовлетворяют ограничениям (29). Тогда для каждого i уравнение (43) имеет d решений вида.

$$p_i \equiv \left[p_i \mathbb{C} + \frac{k}{d} \mathbb{C} - 1 \right] \pmod{K}, \quad (11)$$

где $s_i = 1, 2, \dots, d$, а $p_i \mathbb{C}$ – решение уравнения

$$p_i \mathbb{C} \left(\frac{n-1}{d} \right) \equiv \frac{1}{d} \left(\frac{\sum \mathbb{C}}{m+n-1} - \sigma_i \right) \pmod{\frac{K}{d}}. \quad (12)$$

В общем случае задача (2) имеет d^{m-1} решений и (8) запишется в виде:

$$x_{ij} \equiv b_{ij} + \frac{1}{m-1} \left(\frac{\sum \epsilon_j}{m+n-1} - \lambda_j \right) + p_i, \quad (13)$$

где $i=1,2,\dots,m$, а p_i находится из (11) и (12) с учетом (29).

Пример 2. Пусть $K=9, m=5, n=4$, а матрица B представлена ниже. Здесь $d=3=\text{НОД}(\epsilon-1, K)$. Находим $\sigma_1 \equiv -1 \pmod{3}$. Проверяем условие (10). Оно выполняется для всех строк, кроме последней. Необходимо исправить элемент b_{mn} (он в рамке). В результате получаем необходимую матрицу B' .

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 6 \\ \boxed{3} & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проведём расчёты: $\sum \epsilon_j \equiv 4 \pmod{9}, m+n-1=8, \frac{\sum \epsilon_j}{m+n-1} \equiv 5 \pmod{9}$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \equiv 5 \pmod{9}, \sigma_4 = \sigma_5 \equiv 8 \pmod{9}$. Из (12) находим

$$p_i \equiv \left(\frac{5 - \sigma_i}{3} \right) \pmod{3}, \quad i=1,2,3,4,5. \quad (14)$$

Отсюда $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv 0 \pmod{3}, p_4 \equiv p_5 \equiv -1 \pmod{3}$. Решение, если положить

все $s_i = 1$, запишется в виде:

$$x_{ij} \equiv b_{ij} + 2\lambda_j - 1 + p_i, \quad \text{или}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X' = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

В матрице X не удовлетворялось условие (14), так как сумма $\sum_{i=1}^5 p_i = \sum_{i=1}^5 p_i \equiv -2 \pmod{9}$, а должна равняться $-5 \pmod{9}$. Поэтому из последней строки вычитается 3, что и даёт матрицу X' . Здесь, как и в случае для простого K , возникает проблема оптимизации X , чтобы она содержала максимальное количество нулевых элементов. Поэтому при согласовании

равенства (8) необходимо выбирать строки, в которых наибольшее количество элементов, кратных d . Проверим решение x' .

$$\begin{aligned}
 B' &= \begin{array}{c} +5 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 6 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +4 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 5 & 0 & 6 & 5 \\ \hline 6 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +6 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 6 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +3 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 6 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \\ \\ \rightarrow \begin{array}{c} +4 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 6 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 6 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +6 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 4 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +8 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +8 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \\ \\ \rightarrow \begin{array}{c} +8 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +6 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow b_{fin}.
 \end{array}
 \end{aligned}$$

Аналогично решается задача при $\text{НОД}(n-1, K) = d > 1$, $\text{НОД}(n+n-1, K) = \text{НОД}(n-1, K) = 1$, если параметры m и n поменять местами.

в) $\text{НОД}(n+n-1, K) = d_1 > 1$, $\text{НОД}(n-1, K) = d_2$, $\text{НОД}(n-1, K) = 1$.

В этом случае должны одновременно выполняться условия для матрицы B как в случаях а) и б)

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \epsilon_i &\equiv 0 \pmod{d_1}, \\
 \frac{\sum_{i=1}^m \epsilon_i}{m+n-1} &\equiv \sigma_i \pmod{d_2}, i=1,2,\dots,m.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Первое уравнение должно давать решение следующего вида

$$t \cdot (n+n-1) \equiv \sum_{i=1}^m \epsilon_i \pmod{K}$$

где $t = t_0 + \left(\frac{K}{d_1}\right) \cdot r$, $\epsilon_i = 0, 1, \dots, d_1 - 1$, а t_0 есть решение уравнения

$$t_0 \left(\frac{m+n-1}{d_1}\right) \equiv \frac{\sum_{i=1}^m \epsilon_i}{d_1} \pmod{\frac{K}{d_1}}. \tag{16}$$

Остальные уравнения (15) должны давать решения уравнениям такого вида

$$p_i \equiv -1 - \sigma_i \pmod{K}, \quad (17)$$

где $p_i = p_i + \left(\frac{K}{d_2}\right) \cdot s_i, s_i \in \{1, \dots, d_2 - 1\}$, а p_i есть решение уравнения

$$p_i \left(\frac{n-1}{d_2}\right) \equiv \left(\frac{t - \sigma_i}{d_2}\right) \pmod{\frac{K}{d_2}}. \quad (18)$$

Кроме того, уравнение (8) превратится в следующее

$$\sum_{i=1}^m p_i + t \equiv 0 \pmod{K}. \quad (19)$$

Тогда

$$x_{ij} \equiv \left[b_{ij} + \frac{t - \lambda_j}{m-1} + p_i + \frac{K}{d_1} \cdot r_1 \right] \pmod{K}, \quad (20)$$

где $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$.

Будем традиционно представлять все элементы последнего столбца, кроме b_{ij} зависимыми, то есть

$$b_{in} \equiv \sum_{j=1}^n b_{1j} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}, \quad (21)$$

А значение t выбираем из условия

$$t \equiv \sigma_1 \pmod{d_2}. \quad (22)$$

Пример 3. Пусть $m=6, n=4$ и $K=6$, а матрица B представлена ниже. Поскольку $\sigma_1=2$, то элемент b_{54} не удовлетворяет условию (21). После исправления получаем матрицу B' .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проведём необходимые расчёты: $\sum \equiv 48 \equiv 0 \pmod{6}; m+n-1=9 \equiv 3 \pmod{6}; \text{НОД}(-1, K) = \text{НОД}(9+n-1, K) = 3$.

Из соотношения

$$t_0 \left(\frac{9}{3} \right) \equiv \left(\frac{48}{3} \right) \pmod{2}$$

Находим $t_0 \equiv 0 \pmod{2}$, а $t \equiv 2r \pmod{6}$, $r = 0, 1, 2$. Так как $\sigma_1 = 2$, то и $t \equiv 2 \pmod{6}$;

$\frac{1}{m-1} = \frac{1}{5} \equiv -1 \pmod{6}$. Полагаем $p_i \equiv r_i \equiv 0 \pmod{6}$, тогда

$$x_{ij} \equiv q_{ij} + \lambda_j - 2 \pmod{6}$$

В результате получим матрицу X' .

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Но условие (19) в X' для p_6 не выполняется. Оно будет выполнено, если вычесть из последней строки 2, что приводит к искомой матрице X . Проверим это решение

$$B' = \begin{array}{c} +4 \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +2 \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ \hline 5 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +5 \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{c} +1 \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} +4 \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow b_{fin} \end{array}$$

Аналогично решается задача при условиях:

$$\text{НОД}(n+n-1, K) = d_1 > 1; \text{НОД}(n-1, K) = d_2 > 1; \text{НОД}(n-1, K) = 1.$$

Это достигается путём транспонирования матрицы B , то есть перестановкой параметров m и n .

$$\text{г) } \text{НОД}(n-1, K) = d_1 > 1; \text{НОД}(n-1, K) = d_2 > 1; \text{НОД}(n+n-1, K) = 1.$$

Последнее соотношение является следствием двух первых. Решение задачи будет существовать, если для матрицы B выполняются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i}{m+n-1} &\equiv \sigma_i \pmod{d_2}, i=1,2,\dots,m; \\ \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j}{m+n-1} &\equiv \lambda_j \pmod{d_1}, j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда вытекают ещё два равенства

$$\begin{aligned} \sigma_i &\equiv \lambda_j \pmod{d_2} \\ n\lambda_j &\equiv m\sigma_i \pmod{d_2} \\ i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \quad (24)$$

При этих условиях будем считать заданным первый столбец матрицы B , а все элементы последней строки, кроме первого, и все элементы последнего столбца как зависимые, которые подвержены корректировке. Отсюда

$$\begin{aligned} b_{mj} &\equiv \left(\lambda_1 - \sum_{i=1}^{m-1} b_{ij} \right) \pmod{d_1} \\ b_{in} &\equiv \left(\lambda_1 - \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} \right) \pmod{d_2} \end{aligned} \quad (25)$$

Если все эти условия выполняются, то решение задачи необходимо начинать с решения двух уравнений

$$\begin{aligned} p_i &\equiv \left(\frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i}{m+n-1} - \sigma_i \right) \pmod{K}, i=1,2,\dots,m; \\ q_j &\equiv \left(\frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j}{m+n-1} - \lambda_j \right) \pmod{K}, j=1,2,\dots,n. \end{aligned} \quad (26)$$

Первое уравнение имеет решение

$$p_i = p_i + \frac{K}{d_2} s_i, \text{ где } p_i \text{ — решение уравнения}$$

$$p_i \left(\frac{n-1}{d_2} \right) \equiv \frac{1}{d_2} \left(\frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i}{m+n-1} - \sigma_i \right) \pmod{\frac{K}{d_2}}, \quad (27)$$

а $s_i \in \{1, \dots, d_2 - 1\}, i=1,2,\dots,m$.

Второе уравнение имеет решение

$$q_j = q_j + \frac{K}{d_1} r_j, \text{ где } q_j \text{ — решение уравнения}$$

$$q_j \binom{m-1}{d_1} \equiv \frac{1}{d_1} \left(\frac{\sum_{i=1}^m \binom{m-1}{d_1} - \lambda_j}{m+n-1} \right) \pmod{\frac{K}{d_1}}, \quad (28)$$

а $r_j \in \{1, \dots, d_1 - 1\}, j=1, 2, \dots, n$.

Задача имеет $d_1^{m-1} \cdot d_2^{n-1}$ решений вида

$$x_{ij} \equiv \binom{m-1}{d_1} + p_i + q_j \pmod{K},$$

где $\sum_{i=1}^m p_i \equiv \sum_{j=1}^n q_j \equiv -\frac{\sum_{i=1}^m \binom{m-1}{d_1}}{m+n-1} \pmod{K}$ (29)

Пример 4. Пусть $m=4, n=8, K=21$, а матрица начального состояния сейфа задана ниже.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 7 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 16 & 3 & 14 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 6 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 13 & 0 & 19 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 7 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 16 & 3 & 14 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 6 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 13 & 0 & 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В матрице B не выполняются условия (25). Элементы в кружках заменены другими, в результате чего получается нужная матрица B' . Проведём необходимые расчеты:

$$d_1 = \text{НОД}(m-1, K) = 3, d_2 = \text{НОД}(n-1, K) = 7, \sum_{i=1}^m \binom{m-1}{d_1} \equiv 12 \pmod{21}, \frac{\sum_{i=1}^m \binom{m-1}{d_1}}{m+n-1} \equiv 3 \pmod{21}$$

В соответствии в (23) имеем

$\sigma_i \equiv 3 \pmod{7}, \lambda_j \equiv \sigma_i \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$. Поэтому $p_i \equiv 0 \pmod{3}$, а все $q_j \equiv 0 \pmod{7}$, кроме $q_3 \equiv -4, q_4 \equiv 1$. Отсюда $p_i = 3s_i, q_j = q_j + 7r_j$. Полагая в (29) $s_i = r_j = 0$, получим

первое решение X' .

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 17 & 17 & 3 & 14 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 & 0 & 18 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторая матрица получится из первой, если путём подбора s_i и r_j попытаемся удовлетворить второе условие (29). Поскольку, то есть здесь это условие удовлетворяется. Но чтобы побольше образовать нулей в X ,

положим $r_3 = -1$, а $r_4 = 1$. Чтобы $\sum_{i=1}^m p_i \equiv -3 \pmod{2}$, положим $s_2 = -1$. Это и даёт матрицу x . Теперь решение достигается за 8 шагов.

1. *Агаи Аг Гамши Якуб*. Задача о математическом сейфе на матрицах // Теорія оптимальних рішень. – 2013. – С. 124-130.

УПОРЯДКУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВІ ПОРІВНЯННЯ МОМЕНТІВ

Барболіна Т.М., Ємець О.О.*
tn_b@rambler.ru, yemetsli@mail.ru

*Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

Випадковий характер вихідної інформації, що має місце у багатьох практичних задачах, привертає увагу дослідників до розвитку моделей і методів стохастичного програмування. При побудові моделей задач стохастичної оптимізації виникає питання про те, що вважати допустимим розв'язком і яким чином визначати кращий розв'язок. У [1] пропонується підхід до упорядкування випадкових величин на основі порівняння їх моментів. У даній доповіді розглядаються властивості введеного відношення порядку, практично важливі для задач моделювання, а також постановки оптимізаційних задач.

Нехай Ω — деяка множина попарно незалежних випадкових величин. Випадкові величини позначатимемо великими латинськими літерами (X, Y, Z) . Через $M X$ позначатимемо математичне сподівання випадкової величини X , а через $\mu_s X$ — початковий момент s -го порядку випадкової величини X , тобто математичне сподівання s -го степеня цієї випадкової величини [2]:

$$\mu_s X = M X^s .$$

Означення 1. Дві випадкові величини $X, Y \in \Omega$ називатимемо μ_k -еквівалентними (і позначатимемо $X \sqsim_k Y$), якщо є рівними їх початкові моменти по k -й включно, тобто $\mu_i X = \mu_i Y$ для всіх $i = 1, \dots, k$.

Відношення \sqsim_k на множині Ω попарно незалежних випадкових величин є відношенням еквівалентності. Клас еквівалентності за відношенням \sqsim_k з представником X позначатимемо X_k , тобто $X_k \in \Omega / \sqsim_k$. Через $\mu_i X_k$ ($i \leq k$) позначатимемо початковий момент i -го порядку деякої випадкової величини $X \in X_k$ (згідно з означенням 1 ці моменти є рівними для всіх представників класу X_k).

Означення 2. Називатимемо класи $X_k, Y_k \in \Omega / \sqsim_k$ упорядкованими за неспаданням (позначати $X_k \preceq Y_k$), якщо для всіх $i \leq k$ таких, що $\mu_i X_k > \mu_i Y_k$ знайдеться таке $j < i$, що $\mu_j X_k < \mu_j Y_k$.

Іншими словами, $X_k \preceq Y_k$ тоді і лише тоді, коли перша відмінна від нуля різниця $\mu_i X_k - \mu_i Y_k$ є від'ємною.

Як доведено в [1], введене згідно з означенням 2 відношення на множині класів еквівалентності за відношенням \sqsim_k є лінійним порядком.

Для потреб моделювання ряду практичних задач природно було б вимагати, щоб для введених певним чином порядку і суми упорядкування двох класів еквівалентності зберігалось б при додаванні до лівої і правої частини одного й того самого класу. Розглянемо виконання вказаної властивості до введеного вище порядку. Для визначення операції суми доведемо лему.

Лема 1. Нехай дискретні випадкові величини X_1 і X_2 належать класу еквівалентності $X_k \in \Omega / \sqsim_k$, а величини Y_1 и Y_2 — класу $Y_k \in \Omega / \sqsim_k$. Тоді $X_1 + Y_1 \sqsim_k X_2 + Y_2$.

Доведення. Оскільки величини з множини Ω попарно незалежні, то для i -го момента суми величин $X_l + Y_l$ ($l=1,2$) має місце формула [3]

$$M(X_l + Y_l)^i = \sum_{j=0}^i C_i^j M X_l^j M Y_l^{i-j}. \quad (1)$$

Оскільки для всіх $j=1, \dots, k$ виконуються рівності $M X_1^j = M X_2^j$, $M Y_1^j = M Y_2^j$ (внаслідок $X_1 \square_k X_2$, $Y_1 \square_k Y_2$), то також $M(X_1 + Y_1)^i = M(X_2 + Y_2)^i$ для всіх $i=1, \dots, k$, тобто $X_1 + Y_1 \square_k X_2 + Y_2$. Лему доведено.

Означення 3. Сумою класів $X_k, Y_k \in \Omega / \square_k$ будемо називати клас з представником $X_1 + Y_1$, де $X_1 \in X_k, Y_1 \in Y_k$.

Твердження 2. Якщо для класів $X_k, Y_k \in \Omega / \square_k$ виконується умова $X_k \preceq Y_k$, то також має місце $X_k + Z_k \preceq Y_k + Z_k$, де $Z_k \in \Omega / \square_k$.

Доведення. Якщо $X_k = Y_k$, то висновок твердження очевидний. Розглянемо випадок, коли X_k і Y_k — різні класи еквівалентності. Нехай r — найменший порядок, для якого $\mu_r X_k \neq \mu_r Y_k$. З означення 2 випливає, що $\mu_r X_k < \mu_r Y_k$.

Якщо $r=1$, то $\mu_1 X_k = \mu_1 X = M X$, $\mu_1 Y_k = \mu_1 Y = M Y$. Отже,

$$\mu_1(X_k + Z_k) = \mu_1(X + Z) = M(X + Z) = M X + M Z <$$

$$< M Y + M Z = M(Y + Z) = \mu_1(Y + Z) = \mu_1(Y_k + Z_k),$$

звідки $X_k + Z_k \preceq Y_k + Z_k$.

При $r > 1$ на підставі формули (1) одержуємо, що для всіх $i=1, \dots, r-1$ рівні відповідні моменти сум $X_k + Z_k$ і $Y_k + Z_k$:

$$\mu_i(X_k + Z_k) = \mu_i(Y_k + Z_k).$$

Розглянемо r -і моменти:

$$\begin{aligned}
\mu_r X_k + Z_k &= \mu_r X + Z = \sum_{j=0}^r C_r^j \mu_j X \mu_{r-j} Z = \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j X \mu_{r-j} Z + \mu_r X = \sum_{j=0}^r C_r^j \mu_j Y \mu_{r-j} Z + \mu_r X = \\
&< \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j Y \mu_{r-j} Z + \mu_r Y = \mu_r Y + Z = \mu_r Y_k + Z_k .
\end{aligned}$$

Таким чином, $X_k + Z_k \preceq Y_k + Z_k$. Твердження доведено.

Введення лінійного порядку на множині класів еквівалентності за відношенням \square_k дозволяє визначити найменший (найбільший) елемент, що дає можливість ставити задачі оптимізації на них для знаходження екстремальних елементів за певних умов. Мінімумом називатимемо клас $[X^1]_k$, який є першим у порядку класів, пронумерованих згідно з лінійним порядком: $[X^1]_k \preceq [X^2]_k \preceq \dots \preceq [X^s]_k$. Максимумом називатимемо клас $[X^s]_k$.

Для того, щоб сформулювати лінійну задачу оптимізації на множині класів еквівалентності за відношенням \square_k , введемо операцію множення класу на число, для чого спочатку доведемо лему.

Лема 3. Нехай дискретні випадкові величини $X, Y \in \Omega$ є μ_k -еквівалентними, c — деяке число. Тоді $cX \square_k cY$.

Доведення. Оскільки внаслідок μ_k -еквівалентності випадкових величин X і Y для всіх $j=1, \dots, k$ виконуються рівності $\mu_j X = \mu_j Y$, то, використовуючи властивості математичного сподівання [2, 3], для j -х початкових моментів величин cX і cY для всіх $j=1, \dots, k$ маємо

$$\begin{aligned}
\mu_j cX &= M cX^j = M c^j X^j = c^j M X^j = c^j \mu_j X = c^j \mu_j Y = c^j M Y^j = \\
&= M c^j Y^j = \mu_j cY ,
\end{aligned}$$

тобто $cX \square_k cY$. Лему доведено.

Означення 4. Добутком класу $X_k \in \Omega/\square_k$ на число c називатимемо клас з представником cX , де $X \in X_k$.

Використовуючи операції над елементами фактор-множини Ω/\square_k , поняття мінімуму, лінійну задачу оптимізації на множині класів еквівалентності за відношенням \square_k можемо записати так: знайти мінімум функції

$$\sum_{j=1}^n c_j [X^j]_k$$

в області

$$S = \left\{ [X^1]_k, [X^2]_k, \dots, [X^n]_k \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} [X^j]_k \leq b_i, i = 1, \dots, m \right\},$$

де c_j, a_{ij}, b_i — детерміновані величини, $[X^j]_k \in \Omega/\square_k$.

Таким чином, у доповіді розглянуто підхід до упорядкування випадкових величин на основі порівняння їх моментів та вивчено властивості введеного відношення порядку. Введені поняття та відношення можуть використовуватися у постановках оптимізаційних задач.

Література

1. Барболіна Т.М. Моменти, порядок, оптимізація для випадкових величин / Т. М. Барболіна, О. О. Ємець // Інформатика та системні науки (ІСН-2014) : матеріали V Всеукр. наук.-практ. конф. (м. Полтава, 13-15 березня 2014 року) / за ред. О. О. Ємця. – Полтава : ПУЕТ, 2014. — С.40-43.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Гл. ред. физ.-мат. литерат., 1969. – 576 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей : учебник. / Борис Владимирович Гнеденко. – Изд. 8-е, испр. и доп — М. : Едиториал УРСС, 2005. — 448 с.

ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИЯХ, КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Бондарь О.П., kfmd_klanau@ukr.net

Кировоградская летная академия НАУ

Рассматривается взаимосвязь математического моделирования с топологией многообразий на нескольких примерах функций на многообразиях, как параметрах управляемых систем.

FUNCTIONS ON MANIFOLDS AS A MATHEMATICAL MODEL OF CONTROLLED SYSTEMS

We consider intercommunication mathematical modeling with topology of manifolds citing a few examples functions on manifolds as a parameter of controlled systems.

Многообразия, как математические объекты, и функции на них изучались многими авторами (см., напр., [1]) в различных аспектах. С другой стороны, многообразие можно рассматривать, как область изменения параметров различных систем, в каждой точке которой определено значение функции, которую можно интерпретировать, как управляющий параметр системы, то есть рассматривать математическую модель функционирования системы.

Так, например, динамические системы ([2]), как математический объект, могут быть моделью производственных систем, состояние которых меняется с течением времени.

Пример 1. Пусть состояние системы описывается двумя параметрами, все возможные пары значений которых образуют гладкое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие, и пусть каждому состоянию системы ставится в соответствие некоторая управляющая характеристика системы, интерпретируемая, как функция на многообразии. Если функция имеет минимальное число критических подмногообразий (в частности, - точек), то это можно понимать, как наличие управляющего параметра системы с минимальным числом состояний, при которых поведение системы меняется кардинально.

Тогда функция – управляющий параметр системы – с минимальным числом заданных критических подмногообразий будет иметь:

- две критические точки, если многообразие – сфера;

- три критические точки, если многообразие не является сферой (точки минимума и максимума и точку, имеющую ранг относительных гомологий, равный удвоенному числу ручек многообразия) ([3], [4]);

- две критические окружности, если многообразие – тор;

- окружность (подмногообразие минимума) и две критические точки (максимума и точку, имеющую ранг относительных гомологий, на единицу меньше удвоенного числа ручек многообразия);

- две окружности (подмногообразия минимума и максимума) и точку, имеющую ранг относительных гомологий, на два меньше удвоенного числа ручек многообразия, не являющегося тором.

Пример 2. Пусть состояние системы описывается n параметрами, все возможные пары значений которых образуют гладкое компактное связное ориентируемое n -мерное многообразие, и пусть каждому состоянию системы ставится в соответствие некоторая управляющая характеристика системы, интерпретируемая, как функция на многообразии, имеющая единственную критическую точку конического типа ([5]) с $i=1$. Тогда состояние системы можно описать функцией без критических точек, совпадающей с данной вне достаточно малой окрестности критической точки. Доказательство следует из теоремы об A -эквивалентных функциях ([5]).

Литература

1. Шарко В.В. Функции на многообразиях.- Киев: Наук. думка, 1990.
2. Фоменко А.Т. Топологические вариационные задачи.- М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1985.
3. Takens F. The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelman category//Inventiones math. – 1968. – №6.
4. Бондарь О. О числе критических подмногообразий функции на многообразии//Укр. Мат. Журн. – 1993. – 45, №12.

5.Бондарь О.П. А-эквивалентные в точке функции// Некоторые вопросы современной математики.Праці Інституту математики НАН України. Т. 25. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998.

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ГРАФОВ РОЗЫ

В.А. Воблый, А.К. Мелешко

vitvobl@yandex.ru, konstantin_meleshko@rambler.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Кактусом называется связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле [1, с. 93]. Все блоки кактуса – ребра или простые циклы (многоугольники). Граф розы с k лепестками получается склеиванием в одну вершину единственных вершин каждого из k циклов. Такой граф называется еще графом k -розы [2, 3]. Графы розы являются кактусами, а также k -циклическими эйлеровыми графами.

Теорема. Пусть $R_{n,k}$ – число помеченных графов розы с n вершинами и k лепестками. При $n \geq 5$ и $k \geq 2$ верна формула

$$R_{n,k} = \frac{n!}{k!2^k} \binom{n-k-2}{k-1} \quad (1)$$

Доказательство. Введем производящую функцию для чисел $R_{n,k}$:

$$R_k(w) = \sum_{n=3}^{\infty} R_{n,k} \frac{w^n}{n!}$$

Графы розы являются графами с одной точкой сочленения, у которых каждый блок является простым циклом. Пусть B_n – число помеченных блоков с n вершинами, а $B_{n,k}$ – число помеченных графов с n вершинами и k блоками, инцидентными единственной точке сочленения. В работе Джина [4] была получена производящая функция для числа помеченных графов с n вершинами, одной точкой сочленения и k блоками:

$$B_k(w) = \sum_{n=3}^{\infty} B_{n,k} \frac{w^n}{n!} = w \frac{\text{[Diagram: a cycle of length 3 with a vertex labeled } k \text{]} }{k!}, \text{ где } B(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n w^n}{n!}.$$

Поскольку в нашем случае все блоки – простые циклы, а число помеченных простых циклов с n вершинами равно $\frac{(n-1)!}{2}$, имеем

$$B(w) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{w^n}{n!}, \quad B'(w) = \frac{w^2}{2(1-w)}, \quad R_k(w) = \frac{w^{2k+1}}{k! 2^k (1-w)^k}.$$

С помощью известного разложения [5, с. 141]: $(1-w)^{-k} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k-1} w^r$,

получим
$$R_k(w) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k-1} \frac{w^{r+2k+1}}{k! 2^k}.$$

Заменив $r+2k+1=n$, найдем

$$R_k(w) = \sum_{n=2k+1}^{\infty} \binom{n-k-2}{k-1} \frac{w^n}{k! 2^k}.$$

Окончательно, имеем

$$R_{n,k} = \frac{n!}{k! 2^k} \binom{n-k-2}{k-1},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что при $k=2$ из формулы (1) получим $R_{n,2} = \frac{n-4}{8} n!$,

что совпадает с выражением для числа помеченных бициклических эйлеровых графов с n вершинами, найденным в работе [6].

Следствие. Число помеченных графов розы R_n с n вершинами равно

$$R_n = \sum_{k=2}^{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} \frac{n!}{k! 2^k} \binom{n-k-2}{k-1}.$$

Доказательство. Максимальное число лепестков k у розы с n вершинами, когда все ее лепестки треугольники. Поэтому $n \geq 3k-1$ и суммируя выражение для $R_{n,k}$ из формулы (1) по k от 2 до $\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$, получим утверждение следствия.

Литература

1. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. – М.: Мир, 1977.

2. Wang J., Huang Q., Belardo F. On the spectral characterizations of 3-rose graphs. – *Utilitas Mathematica* 91 (2013), 33-46.
3. Wang W., Mao L., Lu H. On bi-regular graphs determined by their generalized characteristic polynomials. – *Linear Algebra and its Applications* 438 (2013), 3076-3984.
4. Jin Ying-Lie Enumeration of labeled connected graphs and Euler graphs with only one cut vertex. *Yokohama Math. J.* 45 (1997), 125-134.
5. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. – М., Наука, 1982.
6. В. А. Воблый, «Перечисление помеченных бициклических и трициклических эйлеровых графов», *Матем. заметки*, 92:5 (2012), 678-683.

РОЗПОДІЛИ ЛАГРАНЖА З ПАРАМЕТРИЗАЦІЄЮ СЕРЕДНІМ

Волков Ю. І., Войналович Н. М., yulysenko@i.ua

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

В этой работе мы вычисляем дисперсионные функции некоторых распределений Лагранжа с параметризацией средним.

In this paper, we compute the variance function of some Lagrange distributions with the parameterization by the mean.

1. Розподіли степеневих рядів

Нехай $w(y) = \sum_k a_k y^k$, $a_k \geq 0$, $0 < y < R$.

Означення. Розподіл цілочисельної випадкової величини ξ , який задано формулою $\Pr(\xi = k) = p_k(y) := \frac{y^k a_k}{w(y)}$, $k = 0, 1, \dots$, y – параметр, називається розподілом степеневого ряду (PCP) функції $w(y)$.

Такі розподіли вперше почали вивчатись Ноаком в 1950 році, [1].

Математичне сподівання (середнє значення) знаходиться за формулою

$$E \xi = y \frac{w'(y)}{w(y)}, \text{ а дисперсія – за формулою } D \xi = y \frac{d E \xi}{dy}.$$

Введемо другу параметризацію (x -ову) за формулою $x = E \xi$.

Таку параметризацію називають *параметризацією середнім*.

На проміжку $(0, R)$ функція $x=x(y)$ має обернену, бо вона зростає.

Справді, $D\xi = y \frac{dE\xi}{dy} \geq 0, y > 0$, а тому $\frac{dx}{dy} = \frac{dE\xi}{dy} > 0$. Позначимо її через $y(x)$.

Тоді $\Pr(\xi = k) = p(k, x) := p_k(y(x)) = \frac{(y(x))^k a_k}{w(y(x))}, k = 0, 1, \dots, x \in X = \left(0, \frac{Rw'(R)}{w(R)}\right)$,

$D\xi = y(x)/y'(x)$. Далі дисперсію позначатимемо так: $D\xi = v(x)$.

Функція $v(x)$ називається *дисперсійною функцією розподілу* ([2]).

Приклад 1. $w(y) = e^y, x = y, v(x) = x, x > 0$.

Приклад 2. $w(y) = (1 + y)^n, x = \frac{ny}{1 + y}, y(x) = \frac{x}{n - x}$,

$v(x) = x(1 - x/n), x \in [0, n]$.

Приклад 3. $w(y) = \frac{1}{1 - y}, x = \frac{y}{1 - y}, y(x) = \frac{x}{1 + x}$,

$v(x) = x(1 + x), x \in (0, \infty)$.

Приклад 4. $w(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - y}}{y}, x = \frac{y}{2\sqrt{1 - y}(1 - \sqrt{1 - y})} - 1$,

$y = 1 - (2x + 1)^{-2}, v(x) = x(x + 1)(2x + 1), x \in [0, \infty)$.

Приклад 5. $w(y) = (1 - y) \exp \frac{y}{1 - y}, x = \frac{y^2}{(1 - y)^2}, y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$,

$v(x) = 2x(\sqrt{x} + 1), x > 0$.

Знайдемо ще інформацію за Фішером відносно параметра x .

$$I(x) = \sum_k \left(k \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{w'(f(x))f'(x)}{w(f(x))} \right)^2 p(k, x) = \frac{1}{(v(x))^2} \sum_k (k - x)^2 p(k, x) = \frac{1}{v(x)}.$$

Отже, $I(x) = 1/v(x)$. Отриманий результат можна використовувати для дослідження ефективності оцінки параметра x .

Візьмемо вибірку (X_1, X_2, \dots, X_n) з РСР. За оцінку параметра x візьмемо

$\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n, E\bar{X} = x$, отже, оцінка незміщена.

$$D\bar{X} = (DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n) / n^2 = v(x) / n. \text{ eff} = (nI(x)v(x)/n)^{-1} = 1.$$

Тому оцінка \bar{X} для математичного сподівання РСР з x -ою параметризацією є ефективною.

2. Розподіли Лагранжа

Багато розподілів степеневих рядів можна отримати, використовуючи ряди Лагранжа. Нехай функція $z = z(y)$ задана неявно рівнянням $y = \frac{z}{\varphi(z)}$, де функція $\varphi(z)$ аналітична і $\varphi(0) \neq 0$, а функція $f(z)$ диференційовна на множині значень функції $z(y)$. Тоді (див., наприклад, [3])

$$z(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k, a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (\varphi(t))^k |_{t=0}, \quad (1)$$

$$f(z(y)) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k, b_k = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} ((\varphi(t))^k f'(t)) |_{t=0} \quad (2)$$

Ще один варіант ряду Лагранжа має місце розклад

$$\frac{f(z)}{1 - y\varphi'(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (f(t)(\varphi(t))^k) |_{t=0}. \quad (3)$$

Якщо коефіцієнти цих рядів виявляться невід'ємними, то з ряди (1)-(3) породжують РСР.

Подивимось, якою буде x -ва параметризація для ряду (1).

$$x = \frac{yz'(y)}{z(y)}, z = y\varphi(z) \Rightarrow z' = \varphi(z) + y\varphi'(z) \cdot z' \Rightarrow z' = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)},$$

$$x = \frac{1}{(1 - y)\varphi'(z)} = \frac{1}{1 - z\varphi'(z)/\varphi(z)}.$$

Звідси знаходимо z (якщо це вдається), а потім $y = \frac{z}{\varphi(z)}$ виразимо через x .

Далі отримаємо x -ву параметризацію, користуючись рядом (2). Маємо

$$x = \frac{y(f(z(y)))'}{f(z(y))} = \frac{yf'(z)z'}{f(z)} \Rightarrow x = \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{z}{1 - z\varphi'(z)/\varphi(z)} =$$

$$(\log(f(z)))' \frac{z}{1 - z(\log\varphi(z))'}, \text{ а звідси знаходимо } z \text{ (якщо це вдається).}$$

Приклад 1. Побудувати РСР, якщо: $\varphi(z) = e^z, f(z) = z^n, n \geq 1$.

Розкладемо в ряд функцію $(z(y))^n$, користуючись співвідношенням (2).

Шукаємо коефіцієнти b_k : $b_k = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} e^k n t^{n-1} \Big|_{t=0}$.

Для знаходження b_k зробимо деякі перепозначення: $k-1 = m, n-1 = n$ і скористаємось формулою Лейбніца для похідної m -го порядку:

$$\frac{d^m}{dt^m} e^{m+1} t^n \Big|_{t=0} = \sum_{i=0}^m C_m^i (t^n)^{(i)} (e^{(m+1)t})^{(m-i)} \Big|_{t=0} = C_m^n n! (m+1)^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!} (m+1)^{m-n}.$$

Повертаючись до старих змінних, остаточно отримуємо:

$$b_k = \frac{nk^{k-n-1}}{(k-n)!}. \text{ Отже, } (z(y))^n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{nk^{k-n-1}}{(k-n)!} y^k.$$

Знайдемо x -ву параметризація:

$$x = (\log z^n)' \cdot \frac{z}{1 - z \log e^z} = \frac{n}{1-z}, \frac{n}{1-z} = \frac{1}{x} \Rightarrow z = 1 - \frac{n}{x} \Rightarrow y = \frac{z}{e^z} \Rightarrow$$

$$z(y) = 1 - \frac{n}{x}, y = \left(1 - \frac{n}{x}\right) \exp\left(\frac{n}{x} - 1\right), x > n \Rightarrow v(x) = \frac{y}{y'} = \frac{1}{(\log y)'} = \frac{x^2(x-n)}{n^2}.$$

3. Побудова розподілів із заданою дисперсійною функцією

Лема. Нехай функція $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, 0 \leq z < R$, абсолютно монотонна (всі

$$a_k \geq 0), \varphi(z) = \exp \int_0^z \frac{u(t) dt}{1 + tu(t)}, f(z) = \exp \int_0^z \frac{dt}{1 + tu(t)}.$$

Тоді числа $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f'(z)(\varphi(z))^m \right]_{z=0}, m = 1, 2, \dots$, невід'ємні.

Доведення. Нехай $g(z) = f'(z)(\varphi(z))^r = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k,r} z^k, r > 0$.

Звідси

$$b_{0,r} = f'(0)(\varphi(0))^r = 1, \text{ бо } f'(z) = \frac{1}{1 + zu(z)} \exp \int_0^z \frac{dt}{1 + tu(t)} \Big|_{z=0} = 1.$$

$g'(z) = f''(z)(\varphi(z))^r + r f'(z)(\varphi(z))^{r-1} \varphi'(z)$, але

$$\varphi'(z) = \frac{u(z)}{1+zu(z)} \exp \int_0^z \frac{u(t)dt}{1+tu(t)} \Big|_{z=0} = u(0) = a_0,$$

$$f''(z) = \frac{1}{(1+zu(z))^2} \exp \int_0^z \frac{dt}{1+tu(t)} - \frac{u(z)+zu'(z)}{(1+zu(z))^2} \exp \int_0^z \frac{dt}{1+tu(t)},$$

а звідси $f''(0) = 1 - a_0$. Тому $b_{1,r} = g'(0) = (r-1)a_0 + 1$.

Знайдемо рекурентне співвідношення, якому задовольняють коефіцієнти $b_{k,r}$.

$$(\log g(z))' = \frac{g'(z)}{g(z)} = (\log f'(z) + r \log \varphi(z))' = \frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{r\varphi'(z)}{\varphi(z)} =$$

$$\frac{1+ru(z)-u(z)-zu'(z)}{1+zu(z)}. \text{Звідси } g'(z)(1+zu(z)) = (1+(r-1)u(z)-zu'(z))g(z).$$

В цьому співвідношенні замінимо функції $u(z)$, $u'(z)$, $g(z)$, $g'(z)$ їхніми рядами.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} kb_{k,r} z^{k-1} \right) \cdot \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{k,r} z^k \right) \cdot \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} (r-k-1)a_k z^k \right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z зліва та справа, матимемо $kb_{k,r} = (1+(r-k)a_0)b_{k-1,r} + (r-k)(a_1b_{k-2,r} + a_2b_{k-3,r} \cdots + a_{k-1}b_{0,r})$.

Покладемо в цьому співвідношенні $r=m$ і послідовно знаходимо числа

$b_{1,m}, b_{2,m}, \dots, b_{m-1,m}$. Всі вони невід'ємні, крім того, оскільки $b_{k,r} = g^{(k)}(0)/k!$,

$$\text{то } b_{m-1,m} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f'(z)(\varphi(z))^m \right]_{z=0} \geq 0, \quad m=1,2,\dots$$

Теорема. Нехай $z(y)$ функція обернена до функції $y=z/\varphi(z)$. Тоді ряд

$$w(y) = f(z(y)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left[f'(t)(\varphi(t))^k \right]_{t=0}$$

породжує розподіл випадкової величини ξ такий, що

$$E\xi = x, D\xi = x(1+xu(x)), x > 0.$$

$$\text{Доведення. } x = \frac{yw'(y)}{w(y)} = \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot \frac{z}{1-z\varphi'(z)/\varphi(z)} = z. \text{ Тому } y = \frac{x}{\varphi(x)},$$

$$\text{а звідси } v(x) = \frac{y(x)}{y'(x)} = x(1+xu(x)).$$

Приклад 1. Нехай $u(x)=x+2$. Тоді

$$\varphi(z) = (1+z) \exp \frac{z}{1+z}, f(z) = \exp \frac{z}{1+z}, v(x) = x(1+x)^2.$$

Приклад 2. Нехай $u(x)=1/(1-x)$. Тоді

$$\varphi(z) = \exp z, f(z) = \exp(z - z^2/2), v(x) = x/(1-x).$$

4. Розподіли Лагранжа першого та другого роду

Розподілами Лагранжа першого роду (GLD_1) називаються розподіли, для яких ряди (1) і (2) будуть генератрисами ($\varphi(0) > 0, \varphi(1) = 1, 0 \leq f(0) < 1, f(1) = 1$), а розподілами Лагранжа другого роду (GLD_2) називаються розподіли, генератрисою яких будуть ряди типу (3). (Див. [4, п.7.2.5]).

Генератриси розподілів GLD_1 і GLD_2 можна використати для побудови РСР з параметризацією середніми і в ряді випадків знайти в явному вигляді їхні дисперсійні функції, які сповна характеризують такі розподіли.

Наведемо приклади дисперсійних функцій, які породжуються такими розподілами Лагранжа першого роду: binomial – binomial, binomial –Poisson, binomial – negative binomial, Poisson – binomial, Poisson – Poisson, Poisson –negative binomial, negative binomial –binomial, negative binomial – Poisson, negative binomial – negative binomial.

Приклад 1. $\varphi(z) = f(z) = (1/2 + 1/2z)$. $z(x) = x, v(x) = x(1+x)$.

Приклад 2. $\varphi(z) = (1/2 + 1/2z), f(z) = (1/3 + 2/3z)^2$.

$$z(x) = (-2 + x + \sqrt{4 + x^2})/4, v(x) = 1/2x\sqrt{x^2 + 4}.$$

Приклад 3. $\varphi(z) = (1/2 + 1/2z), f(z) = (1/4 + 3/4z)^3$.

$$z(x) = (-3 + x + \sqrt{9 - 2x + x^2})/6, v(x) = 1/3x\sqrt{9 - 2x + x^2}.$$

Приклад 4. $\varphi(z) = (1/2 + 1/2z)^3, f(z) = (1/4 + 3/4z)$.

$$z(x) = (x - 3 - \sqrt{9 + 6x + 25x^2})/(6x + 12).$$

$$v(x) = 1/27x(9 + 6\sqrt{9 + 6x + 25x^2} + x(6 + 25x + 5\sqrt{9 + 6x + 25x^2})).$$

Приклад 5. $\varphi(z) = (1/2 + 1/2z), f(z) = \exp(z - 1)$.

$$z(x) = (-1 + \sqrt{1 + 4x})/2, v(x) = x\sqrt{1 + 4x}.$$

Приклад 6. $\varphi(z) = (2/3 + 1/3z)^2$, $f(z) = \exp(z - 1)$.

$$z(x) = (-2 - x + \sqrt{4 + 12x + x^2})/2,$$

$$v(x) = \frac{x}{16} (4 + 6\sqrt{4 + 12x + x^2} + x(12 + x + \sqrt{4 + 12x + x^2})).$$

Приклад 7. $\varphi(z) = (3/4 + 1/4z)^3$, $f(z) = \exp(z - 1)$.

$$z(x) = (-3 - 2x + \sqrt{9 + 24x + 4x^2})/2,$$

$$v(x) = \frac{x}{27} (9 + 6\sqrt{9 + 24x + 4x^2} + 2x(12 + 2x + \sqrt{9 + 24x + 4x^2})).$$

Приклад 8. $\varphi(z) = \exp((z - 1)/2)$, $f(z) = \exp(z - 1)$.

$$z(x) = \frac{2x}{2 + x}, \quad v(x) = \frac{1}{4} x(x + 2)^2.$$

Приклад 9. $\varphi(z) = \exp((z - 1)/2)$, $f(z) = (2 - z)^{-1}$.

$$z(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x}}{x}, \quad v(x) = \frac{1}{2} x(1 + 4x + \sqrt{1 + 4x}).$$

Приклад 10. $\varphi(z) = (1 + z)/2$, $f(z) = (2 - z)^{-3}$.

$$z(x) = (-2 - x + \sqrt{4 + 20x + x^2})/4, \quad v(x) = \frac{1}{4} x\sqrt{4 + 20x + x^2}.$$

Приклад 11. $\varphi(z) = (2 + z)^2/9$, $f(z) = (2 - z)^{-1}$.

$$z(x) = \frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 8x}}{x - 1}, \quad v(x) = \frac{1}{4} x(1 + 8x + 3\sqrt{1 + 8x})$$

Література

1. Noack A. A class of Random Variables with Discrete Distributions//Ann. Math. Statist.- 1950.- 21, №1, p.127-132.
2. Moris Carl N. Natural exponential families with quadratic variance functions// Ann. Statist.-1982.-10, №2, p.65-80.
3. Поля Г. и Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, том 1, М. ГИТТЛ, 1955.
4. Johnson N.I., Kemp A.W., Kotz S. Univariate Discrete Distribution, Wiley-Interscience, 2005.

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ВІДСТАНІ НА ГРАФАХ

О.Д. Глухов

Національний авіаційний університет, Україна

В статье предложено одно обобщение расстояния на графах и исследованы некоторые его свойства.

The paper proposed a generalization of the distance on graphs and investigated some of its properties.

Розглянемо G - неорієнтований граф з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0| = n$, $|G^1| = m$, без петель, але, можливо, з кратними ребрами. Нехай $a, b \in G^0, a \neq b$, - дві довільні його вершини, k - натуральне число. Вершини a, b будемо називати k -з'єднаними, якщо існують k незалежних (які не мають спільних ребер) шляхів, що з'єднують дані дві вершини.

Для кожної пари k -з'єднаних вершин $a, b \in G^0, a \neq b$, позначимо через $d_G^{(k)}(a, b)$ (або просто $d^{(k)}(a, b)$ - якщо граф відомий) найменше сумарне число ребер у k незалежних шляхах, що з'єднують вершини a і b . Якщо дані вершини $a, b \in G^0, a \neq b$, не є k -з'єднаними вершинами, то покладемо $d^{(k)}(a, b) = \infty$. Крім того, вважатимемо, що $\forall k \geq 1: d^{(k)}(a, a) = 0$.

Теорема 1. Для кожного натурального k $d^{(k)}(a, b)$ є відстань на графі.

Доведення випливає з відомої теореми Форда-Фалкерсона [1,2] і перевірки справедливості аксіом Фреше.

k -діаметром графа G назвемо число $d^{(k)}(G) = \max\{d_G^{(k)}(a, b) : a, b \in G^0\}$.

Зауважимо, що при $k=1$ ми отримуємо звичайну відстань на графі, а $d^{(1)}(G) = d(G)$ є звичайний діаметр графа G .

Теорема 2. Якщо G - 2-реберно зв'язний граф, то $d^{(2)}(G) \leq 2(d^{(1)}(G))^2$.

Доведення. З результатів роботи [3] випливає, що будь-яке ребро 2-реберно зв'язного графа діаметра $d^{(1)}(G) = d(G) = d$ належить простому циклу довжини не більше, ніж $2d + 1$. Нехай $L = \{u_j\}_{j=1}^d$ є простий ланцюг довжини

d , що з'єднує дві дані вершини $a, b \in G^0, a \neq b$. Замінивши кожне ребро цього ланцюга на відповідний простий цикл і взявши об'єднання таких циклів, отримаємо 2-реберно зв'язний підграф H даного графа G . Легко перевірити, що $a, b \in H^0$ і що $|H^1| \leq 2d^2$, а отже $d^{(2)}(a, b) \leq 2d^2$, звідки й випливає твердження теореми.

Для даного графа G розглянемо граф $G^{(2)}$ з множиною вершин $(G^{(2)})^0 = G^0 \times G^0$ і множиною ребер $(G^{(2)})^1$ заданою наступними правилами. Нехай $u = ((a, b), (a', b')), a, b, a', b' \in G^0$. Визначимо, що $u \in (G^{(2)})^1$ і вагу $w(u)$ ребра u , якщо виконана хоча б одна з наступних умов:

$$1) (a, a'), (b, b') \in G^1, (a, a') \neq (b, b'), w(u) = 2;$$

$$2) a = a', (b, b') \in G^1, w(u) = 1;$$

При цьому вважатимемо, що разом з ребром $u = ((a, b), (a', b'))$ графу $G^{(2)}$ також належать ребра $((b, a), (a', b')), ((a', b'), (a, b))$ (з такою ж вагою).

Теорема 3. $d_G^{(2)}(a, b) = d_{G^{(2)}}((a, a), (b, b))$ і отже $d^{(2)}(G) = d(G^{(2)})$.

Зауважимо, що завдяки цьому результату можна знаходити відстань $d^{(2)}$ між вершинами даного графа за поліноміальний час [2].

Література

- [1] Ford L.R., Fulkerson D.R. Maximal flow through a network.- Canad. J. Math., v. 8, 1956, p. 399-404.
- [2] Diestel R. Graph Theory.- Springer-Verlag, New York, 2000. -322p.
- [3] Chung F.R.K., Garey M.R. Diametr Bounds for Altered Graphs. - Journal of Graph Theory, v. 8, 1984, p. 511-534.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Г.А. ДОНЕЦ

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Введение. Для плоской триангуляции с не очень большим количеством вершин существует возможность быстрого отыскания решения системы уравнений. Из минусов можно назвать ограничение в виде небольшого размера исследуемого графа.

Двойственный граф G' к планарному графу G — это граф, в котором вершины соответствуют граням графа G ; эти вершины соединены ребром, только если соответствующие им грани графа G имеют общее ребро. Например, двойственны друг к другу графы куб и октаэдр. Двойственный граф G' является псевдографом: в нём могут быть петли и кратные рёбра. В зависимости от укладки, к одному и тому же графу могут существовать несколько двойственных [1].

Рассмотрим максимальный четырехсвязный планарный граф G . Если он правильно раскрашен четырьмя цветами, то его ребра можно так раскрасить тремя цветами, что в каждой его треугольной грани все ребра будут окрашены по-разному. Обозначим номера цветов цифрами 0, 1, 2. Их двоичная запись будет иметь вид: (00), (01), (10).

Обозначим через x_i и y_i , $i=1,2,3$ соответственно первый и второй разряды двоичной записи номеров цветов для любого треугольника. Тогда, раскраска ребер будет эквивалентна решению системы уравнений для каждого треугольника в кольце вычетов по модулю 2- Z_2 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1(\text{mod } 2), \\ y_1 + y_2 + y_3 \equiv 1(\text{mod } 2), \\ y_1x_1 \equiv y_2x_2 \equiv y_3x_3 \equiv 0(\text{mod } 2). \end{cases}$$

Назовем y_i двойственными переменными к x_i . По теореме Татта [2] рассматриваемый граф G будет гамильтоновым. Гамильтонов цикл делит

граф на две области R_1 и R_2 . Если для G построить двойственный граф G' , то областям R_1 и R_2 будут соответствовать два произвольных дерева со степенью ветвления 3, которые будут соединяться друг с другом ребрами, двойственными к ребрам гамильтонова цикла.

Рассмотрим случай, когда оба этих дерева являются простыми цепями. Занумеруем ребра гамильтонова цикла последовательно по часовой стрелке. Как видно из рисунка 1, внутренние ребра области R_1 естественным образом упорядочиваются. Выделим в R_1 треугольник, две стороны которого принадлежат гамильтонову циклу (опорный треугольник) и занумеруем их 1 и 2. Продолжим нумерацию ребер гамильтонова цикла в том же порядке и в результате получим нумерацию на рис. 1.а, которую перенесем на область R_2 (рис. 1.б).

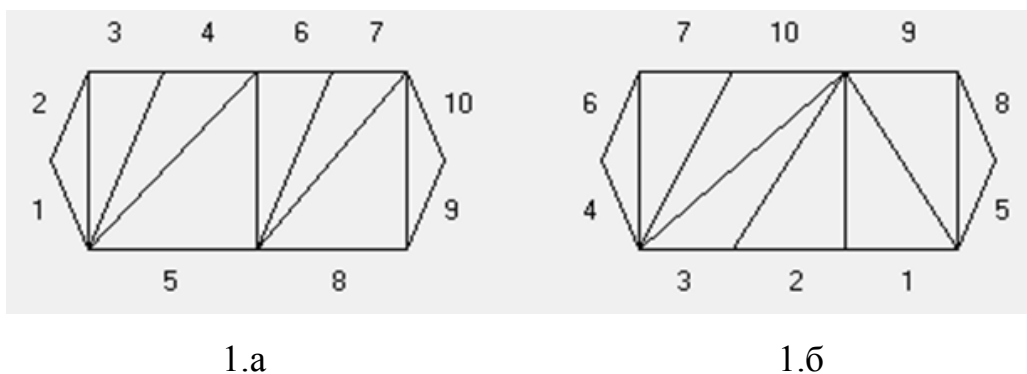


РИС. 1. Пронумерованные области R_1 и R_2 .,,

Любой правильно раскраске вершин графа G соответствует такая раскраска в три цвета его ребер, что в каждом треугольнике все три ребра имеют разные цвета, которые обозначим 0, 1, -1. Пусть x_i – цвет ребра под номером i гамильтонова цикла, где i находится в пределах $[1, k]$, где x_1 – первое пронумерованное ребро, а x_k – последнее [3].

Тогда, для первых двух ребер справедливо

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{3}.$$

Пусть a_j , ($j=1,2,\dots,n-2$) – переменные, соответствующие цветам внутренних ребер. Тогда, для правильной раскраски

$$a_1 \equiv (-x_1 - x_2) \pmod{3}.$$

В следующем треугольнике $x_3 \not\equiv a_1 \pmod{3}$ и тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Продолжая те же рассуждения, получим систему неравенств, дополненную одним равенством:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &\not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &\not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &\not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 &\not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 &\not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 - x_8 &\not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 + x_9 &\not\equiv 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 - x_9 - x_{10} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \pmod{3} \quad (1)$$

Для области R_2 получается аналогичная система, которую назовем двойственной к данной.

$$\left. \begin{aligned} x_4 - x_6 &\not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 + x_7 &\not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 - x_{10} &\not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} + x_3 &\not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 - x_2 &\not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 + x_1 &\not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 - x_9 &\not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 + x_9 + x_8 &\not\equiv 0 \\ x_4 + x_6 - x_7 + x_{10} - x_3 + x_2 - x_1 + x_9 - x_8 - x_5 &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \pmod{3} \quad (2)$$

Для графов с не очень большим количеством вершин существует возможность быстрого отыскания решения задачи. Выведем простое правило, относительно которого будем искать закономерности.

Правило: если два ребра опорных треугольников на области R_2 имеют вид x_k и x_{k+1} , то такие ребра являются ненулевыми.

Само собой это далеко не все возможные варианты, а частный случай. Это простое правило позволяет отыскивать решение задачи, не прибегая к решению системы (1-2), то есть фактически «на глазок» лишь по внешнему виду графа и соотношениям ребер в нем, причем такое решение должно быть только одно. Попробуем решить приведенный выше на рисунке пример.

Рассмотрим двойственные графы на рисунке 1. Исходя из первого неравенства нашей системы (1) для R_1 справедливо:

$$x_1=1, x_2=0;$$

Это опорный треугольник и потому также справедливо:

$$x_9=1, x_{10}=0.$$

Пусть $x_1=1$, тогда $x_k=+1$ для $k \equiv 1(\text{mod}2)$. На R_2 легко увидеть что $x_5=+1$ и значит $x_6 \neq 0$. Как же определить значение ребра более точно?

Легко заметить, что значение ребра зависит от удаленности от опорных треугольников. Если перебирать ребра графа от первой ненулевой компоненты (в данном случае x_1 или x_9) в направлении предполагаемой ненулевой (в данном случае x_6) расположенной не на опорном треугольнике, то можно обнаружить закономерность: если предполагаемый элемент расположен под четным номером, то он имеет противоположное значение к x_1 , если нечетное, то такое же, как у x_1 .

Тогда, перебрав ребра в R_1 в порядке (9, 10, 8, 7, 6), видим, что x_6 расположена под нечетным пятым номером, а значит $x_6=+1$. Это легко

проверить по области R_2 : переберем ребра (6, 4, 7, 10, 3, 2, 1) видим, что x_1 расположена под нечетным седьмым номером, а значит $x_1=+1$.

Тоже справедливо и x_9 : для R_2 (5, 8, 9, 1) для $x_9= x_1=+1$.

Имеем в итоге:

$$x_1 = x_5 = x_6 = x_9 = +1.$$

$$X = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0).$$

Рассмотрим другой пример. Попробуем переделить искомый граф G иначе, получив другое разбиение G' .

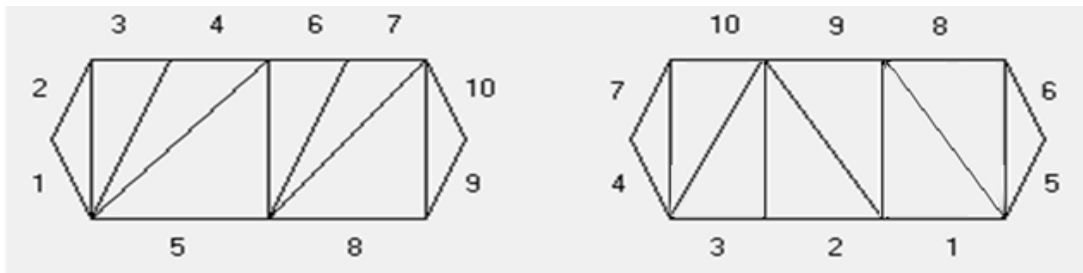


РИС. 2. Заново пронумерованные области R_1 и R_2 .

Здесь опорные треугольники R_2 также имеют ребра вида x_k и x_{k+1} , где $k=4$, $k+1=5$.

Пусть $x_1=+1$, тогда $x_k=+1$ для $x \equiv 1(mod 2)$. Тогда имеем, что $x_4=-1$, $x_5=-1$. Считая с обратной стороны, если $x_9=+1$, то (9, 10, 8, 7, 6, 5) x_5 расположен под четным шестым номером и значит имеет противоположное к x_9 значение.

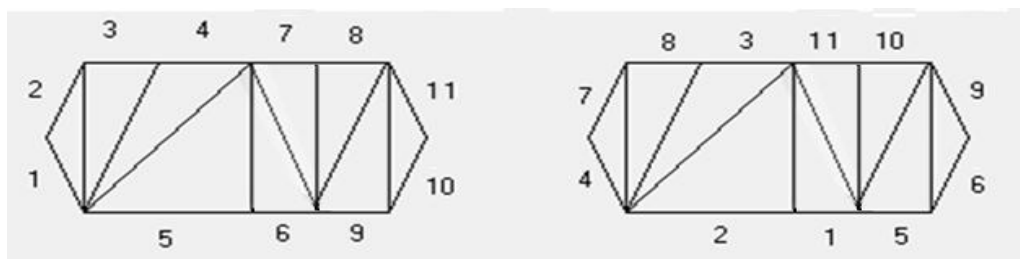
Имеем:

$$x_1 = x_9 = +1,$$

$$x_4 = x_5 = -1.$$

$$X = (1, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 1, 0).$$

Попробуем рассмотреть другой пример, где количество наших ребер будет нечетным.



3.a

3.б

РИС. 3. Заново пронумерованные области R_1 и R_2 .

Рассмотрим пример на рисунке 3. Пусть $x_1=+1$, тогда $x_k=+1$ для $x \equiv 1(\text{mod}2)$.

Тогда имеем $(6, 9, 5, 1) x_6=-1$, отсюда $x_7=-1$. Считая с обратной стороны, если $x_{10}=+1$, то $(6, 9, 10)$ видим, что x_7 расположен под нечетным третьим номером и значит имеет противоположное значение.

В итоге имеем $x_1= x_{10}=+1$, $x_6= x_7=-1$. $X=(1,0,0,0,0,-1,-1,0,0,1,0)$. Правильность решения легко проверить по системе (1-2), просто подставляя значения в неравенства.

Заключение. Предложенный метод позволяет относительно быстро отыскать решение системы уравнений для плоской триангуляции причем в заданных границах. Из минусов можно назвать ограничение в виде небольшого размера исследуемого графа. Дальнейшие исследования следует направить в углубление данной проблемы и построение более широкого алгоритма, способного разрешить проблему четырех красок.

Литература

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978. - 432 с.
2. http://pco.iis.nsk.su/grapp/WIN/sl_t.html. Информационное множество (интернет-ресурс)

3. *Донец Г.П.* Теоретико-числовой подход к решению некоторых задач теории графов. Диссертационная работа. - К., 1997. - 162 с.
4. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978. - 432 с.
5. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. - 300 с.

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІРУ БЛОКУ ПРИ БІТОВОМУ АРИФМЕТИЧНОМУ КОДУВАННІ

Дресєв О.М., Дресєва Г.М. — drey_sanya@ukr.ru

Кіровоградський національний технічний університет

***Анотація.** Досліджено блочне бітове арифметичне кодування інформації. На основі фрактальної розмірності густини одиничних бітів отримано оцінку розміру блоку для досягнення максимального ступеня стиснення.*

***Abstract.** Investigated block bit arithmetic coding information. Based on the fractal dimension of the density of individual bits of the estimation block size for maximum compression.*

Розглянуто блочне арифметичне ентропійне кодування з метою визначення оптимального розміру блоку для отримання вихідного файлу мінімального розміру.

Арифметичне побітове кодування характеризується ентропією інформації, якщо вхідний блок інформації має N бітів інформації, то після арифметичного кодування блок матиме розмір

$$N^* = N \left(p_0 \cdot \log_2 p_0 - p_1 \cdot \log_2 p_1 \right) + b,$$

де N^* – розмір (у бітах) пакованої інформації; b – кількість бітів, для алгоритму декодування, запису значення p_1 ; p – ймовірність появи одиничного чи нульового біту відповідно індексу. Графік відносної зміни розміру блоку після арифметичного кодування без врахування b , показано на

рисунку. Істотно, що у файлах частота знаходження одиничних бітів не є рівномірно розподіленою.

Розбиття файлу на блоки для окремого кодування, дає більш точне визначення локального значення відношення p , але збільшує об'єм інформації для запису значення відношення кількості одиничних бітів до нульових.

Введемо міру μ , яка є модулем різниці відносної кількості одиничних бітів в сусідніх блоках файлу:

$$\mu_i = |p_a - p_b|.$$

Розглянемо зміну ступеня стиснення при розбитті блока на дві частини. Мінімальний приріст ступеня стиснення є при $p=0,5$.

Оцінка коефіцієнту зменшення розміру файлу є

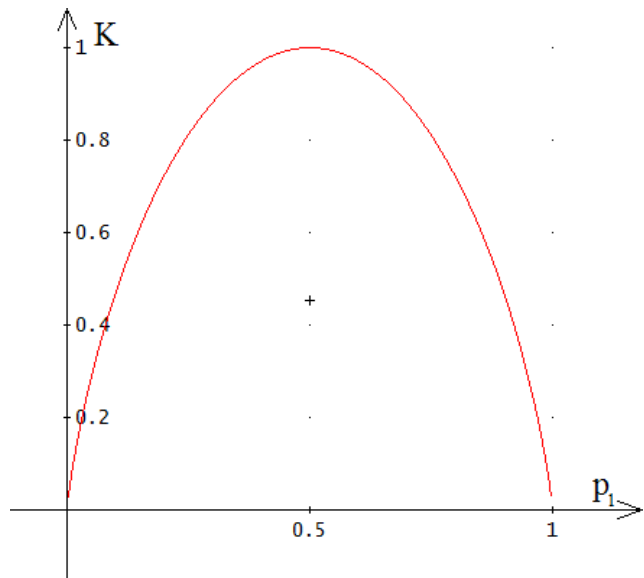


Рисунок – Відносний розмір пакованої інформації від долі одиничних бітів

$$K(\mu) = \frac{N + b}{N \left[(0,5 - \mu/2) \log_2(0,5 - \mu/2) - (0,5 + \mu/2) \log_2(0,5 + \mu/2) \right] + 2b}.$$

Цей коефіцієнт дає змогу оцінити доцільність подрібнення блоків кодування за для зменшення розміру файлу. Ключовим фактором є значення μ_i . Для оцінювання цієї величини використано поняття фрактальної розмірності. З зазначеної міри μ :

$$L_{n_1} = \sum_{i=1}^{n_1} \mu_{i,n_1}, \quad L_{n_2} = \sum_{i=1}^{n_2} \mu_{i,n_2}$$

При умові, що кількість блоків змінили у $z=n_2/n_1$ раз, можна оцінити фрактальну розмірність: $F = \frac{\ln L_{n_2} / L_{n_1}}{\ln n_2 / n_1}$. Після отримуємо оцінку коефіцієнту

стиснення інформації:

стиснення інформації:

$$K(F, z) = \frac{z \log_2 0,5}{\sum_{i=1}^z (0,5 + z^{F-1}/2) \log_2 (0,5 + z^{F-1}/2) + (0,5 - z^{F-1}/2) \log_2 (0,5 - z^{F-1}/2)}$$

Тепер можна записати цільову функцію $N/K(F, z) + zb \rightarrow \min$, мінімум якої шукається чисельно.

ВИЗНАЧЕННЯ ОЦІНОК У МЕТОДІ ГЛОК І МЕЖ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ КОМБІНАТОРНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Зернова Ю.О. Zernova.yulia@gmail.com

Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка

В докладе представлена одна из моделей комбинаторной транспортной задачи на размещении. Обоснована формула для определения оценок допустимых множеств при решении задачи методом границ и ветвей. Приведен пример использования этой формулы при решении конкретной задачи.

One of the models of the transport combinatorial problem in the set of permutations is represented. The author substantiates the formula for determining estimates of admissible sets in solving the problem by branch and bound algorithm. The example of using this formula for solving specific task is showed.

У роботах [1, 2] представлено різні постановки комбінаторних транспортних задач на множинах переставлень та розміщень. У даній доповіді розглядається застосування методу гілок і меж до розв'язування комбінаторної транспортної задачі у такій постановці.

Перевозиться продукт, який виробляється у m можливих пунктах виробництва $A_i, i = 1, \dots, m$ та розподіляється між n споживачами. Максимально можливі обсяги виробництва продукції в i -му пункті дорівнюють a_i , де $i = 1, 2, \dots, m$, мінімально можливі обсяги споживання в j -му пункті призначення — b_j , де $j = 1, 2, \dots, n$. Відомі також транспортні витрати c_{ij} при перевезенні одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача для всіх $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. Необхідно визначити обсяги перевезень x_{ij} з A_i в B_j для всіх $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, що відповідають мінімальним витратам на перевезення продукту. Вважається, що перевезення

вантажу можна здійснити певними місткостями кількістю η ($\eta > mn$) об'ємами $g_1, g_2, g_3, \dots, g_\eta$, серед яких ν різних.

Нехай $G = g_1, g_2, g_3, \dots, g_\eta$ – мультимножина, елементами якої є об'єми місткостей, у яких може перевозитися продукт, елементи мультимножини вважатимемо упорядкованими за неспаданням:

$$g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_\eta. \quad (1)$$

Тоді математична модель сформульованої задачі набуде вигляду:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (2)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n; \quad (4)$$

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}) \in E_{\eta\nu}^k \quad G \quad (5)$$

де $E_{\eta\nu}^k \quad G$ – загальна евклідова множина розміщень з елементів мультимножини G .

Для розв'язування задач виду (2)-(5) може використовуватися метод гілок і меж. Розглянемо питання визначення оцінок допустимих множин при розв'язуванні задачі.

Нехай деякі змінні задачі фіксовані як елементи з мультимножини G :

$$z_l = x_{ij} = g_{i_l}, l = 1, 2, \dots, t. \quad (6)$$

Не обмежуючи загальності, упорядкуємо нумерацію цих змінних z_l так, щоб

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_t. \quad (7)$$

З умов (6) та (7) маємо також

$$g_{i_1} \geq g_{i_2} \geq \dots \geq g_{i_t}. \quad (8)$$

Оскільки змінні z_l визначають допустиму множину задачі, то їх значення x_{ij} з (6) не суперечать умовам (2)-(3).

Нехай $G_B = g_{i_1}, \dots, g_{i_t}$ – мультимножина використаних в (6) елементів G , позначимо $\tilde{G} = G - G_B$, тобто \tilde{G} є різницею мультимножини G та G_B , де $G_B \subset G$. Упорядкуємо елементи $\tilde{G} = \tilde{g}_{j_1}, \tilde{g}_{j_2}, \dots, \tilde{g}_{j_{k-t}}, \dots, \tilde{g}_{j_{\eta-t}}$ так:

$$\tilde{g}_{j_1} \leq \tilde{g}_{j_2} \leq \dots \leq \tilde{g}_{j_i} \leq \tilde{g}_{j_{i+1}} \leq \dots \leq \tilde{g}_{j_{k-t}} \dots \leq \tilde{g}_{j_{\eta-t}}. \quad (9)$$

Позначимо коефіцієнти цільової функції (2) c_{ij} з тими самими індексами, що і змінні x_{ij} , що фігурують у (6), так: $c_{ij} = c_l^*$, де c_l^* – коефіцієнт при z_l з (6). Коефіцієнти цільової функції (2) c_{ij} , що стоять при невизначених змінних, позначимо $\tilde{c}_i \forall i=1, 2, \dots, k-t$. Нумерацію серед чисел c_l^* та \tilde{c}_i зробимо (не порушуючи загальності міркувань) таку, щоб виконувались умови:

$$c_l^* \leq c_{l+1}^* \forall i=1, 2, \dots, t-1 \quad (10)$$

$$\tilde{c}_i \geq \tilde{c}_{i+1} \forall i=1, 2, \dots, k-t-1 \quad (11)$$

Можна переконатися, що для задачі (2)-(5) має місце теорема, аналогічна до теореми 3.1 [1], у якій було встановлено оцінку для розв'язування комбінаторних транспортних задач на переставленнях.

Теорема. Для множини D допустимих розв'язків задачі (2)-(5), у якій допустимі розв'язки задовольняють умову (6), в методі гілок і меж за оцінку може слугувати величина

$$\xi_D = \sum_{j=1}^t c_j^* g_{i_j} + \sum_{i=1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i} \quad (12)$$

у якій параметри задовольняють умови (8) – (11).

Розглянемо приклад обчислення оцінки згідно зі сформульованою теоремою. Нехай розглядається задача (2)-(5), та задано:

$$a_1 = 17, a_2 = 16, a_3 = 15, b_1 = 27, b_2 = 15, b_3 = 6;$$

$$c_{11} = 1, c_{12} = 6, c_{13} = 4, c_{21} = 7, c_{22} = 5, c_{23} = 2, c_{31} = 3, c_{32} = 9, c_{33} = 8.$$

$$G = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Нехай розв'язки множини D задовольняють умову $x_{11} = 11, x_{23} = 1$.
Тоді $G_B = \{11, 1\}$, $\tilde{G} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C^* = \{1, 2\}$, $\tilde{C} = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3\}$.

Обчислимо $\sum_{j=1}^t c_j^* g_{i_j}$ та $\sum_{i=1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i}$:

$$\sum_{j=1}^t c_j^* g_{i_j} = 1 \cdot 11 + 2 \cdot 1 = 13, \quad \sum_{i=1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i} = 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 = 182$$

Отже, значення оцінки дорівнює:

$$\xi D = \sum_{j=1}^t c_j^* g_{i_j} + \sum_{i=1}^{k-t} \tilde{c}_i \tilde{g}_{j_i} = 13 + 182 = 195.$$

Таким чином, у доповіді представлено одну із моделей комбінаторної транспортної задачі на розміщеннях. Запропоновано формулу для визначення оцінок допустимих множин при розв'язуванні задачі. Наведено приклад використання даної формули при розв'язуванні конкретної задачі. Подальшого дослідження потребують властивості оцінки.

Література

1. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення : монографія / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 174 с.
2. Парфьонова Т.О. Комбінаторна транспортна задача з можливим недовантаженням місткостей / Т.О. Парфьонова // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНЕМ-2011): матеріали Всеукраїнського наукового семінару 26-27 серпня 2011 р. – Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 90-93.

ПОДСЧЁТ БАЗОВЫХ САМООПИСЫВАЮЩИХ ГРАФОВ

Извалов А. В., aviglau@gmail.com

Кировоградская лётная академия Национального авиационного университета

Самоописывающим графом в [1] было предложено называть граф, допускающий самоописывающую нумерацию. Самоописывающей нумерацией второго вида (С2-нумерацией) называется такая нумерация графа, при которой число в каждой вершине графа равняется количеству вершин, смежных с данной, занумерованных такими же числами.

В [2] установлено, что при удалении ребра, соединяющего вершины, занумерованные разными числами, С2-свойство графа сохраняется. Таким образом, базовый самоописывающий граф из n вершин представляет собой объединение регулярных графов (рис.1).

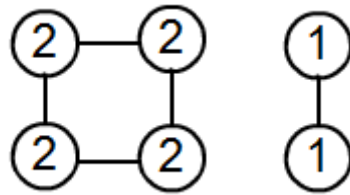


Рис.1. Пример базового С2-графа с $n=6$

Решим задачу подсчёта общего количества базовых С2-графов из n вершин. Обозначим эту величину как a_n . Задача вычисления a_n Перекликается с задачей Partitio Numerorum – разбиения натурального числа n на слагаемые, однако имеет ряд отличительных особенностей. Рассмотрим все возможные упорядоченные массивы $[c_i]$ из n чисел $c_{i=0..(n-1)} \in \mathbb{Z}^+$,

удовлетворяющие условию $\sum_{i=0}^{n-1} c_i = n$. Тогда $a_n = \sum_{\forall c} \prod_{i=0}^{n-1} b_{c_i, i}$

Здесь $b_{n,k}$ – количество не обязательно связных регулярных графов из n вершин со степенью регулярности k (табл.1.) Считаем, что $b_{0,k} = 1$.

Таблица 1. Величины $b_{n,k}$ для $n \leq 10, k \leq 8$.

	n									
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	1	1	2	2	3	4	5
3	0	0	0	1	0	2	0	6	0	21
4	0	0	0	0	1	1	2	6	16	60
5	0	0	0	0	0	1	0	3	0	60
6	0	0	0	0	0	0	1	1	4	21
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	5
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6

Однако метод полного перебора для вычисления необходимой величины достаточно затратный, а значительная часть массивов c_i не соответствуют какому-либо объединению регулярных графов. Например, для $n=6$ существует $C_{13}^7 = 462$ возможных массива $[c_i]$, однако только 16 из них соответствуют существующим объединениям регулярных графов (табл.2). Например, столбец №13 (массив $[0,2,4,0,0,0]$) соответствует объединению 1-регулярного графа из 2 вершин и 4-регулярного графа из 4 вершин (рис.2).

Таблица 2. Количество узлов в регулярных подграфах базовых C_2 -графов с 6 вершинами.

	№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Степень регулярности подграфа	0	6	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	4	0	0	3	1
	1	0	6	0	0	0	0	0	0	4	0	0	2	2	2	0	2
	2	0	0	6	0	0	0	5	0	0	4	0	0	4	0	3	3
	3	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	4	0	0	4	0	0
	4	0	0	0	0	6	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Для оптимизации перебора используем то, что в имеющем интерпретацию на графах массиве $[c_i]$ верно $\forall i \in \{1, \dots, n\} \left(c_i \equiv 0 \pmod{2} \right)$. Таким образом, для построения $[c_i]$ отбираем только те разбиения числа n в натуральные слагаемые, в которых j -й наименьший элемент не менее j . К примеру, разбиение $10 = 1 + 2 + 2 + 4$ не позволит получить объединения регулярных графов, а разбиение $10 = 3 + 3 + 4$ – позволит. Ему будет

соответствовать два массива $[c_i]$ и два С2-графа (рис.2 а), б)). Ненулевые элементы $[c_i]$ располагаются, учитывая правило чётности.

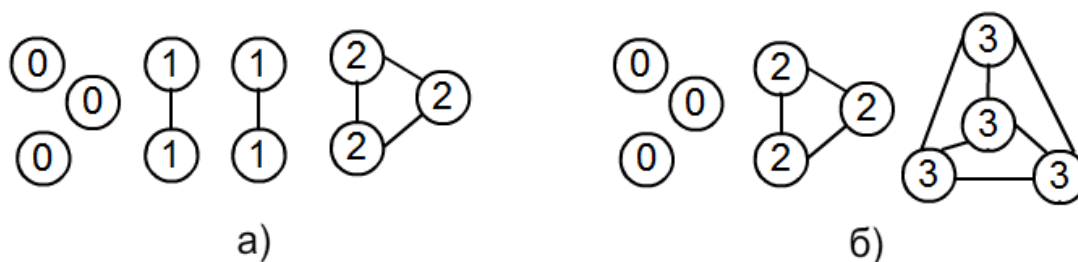


Рис.2. Базовые С2-графы, соответствующие разбиению $10 = 3 + 3 + 4$

Для значений a_n получена следующая таблица (табл.3)

Таблица 3. Количество узлов в регулярных подграфах базовых С2-графов с 6 вершинами.

Число вершин. n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество базовых С2-графов a_n	1	2	3	7	9	18	27	58	99	320
В том числе:										
Самостоятельно являющихся регулярными графами, $\sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k}$	1	2	2	4	3	8	6	22	26	180
Являющихся объединением регулярных графов с различной степенью регулярности	0	0	1	3	6	10	21	36	73	140

Последовательность a_n после нахождения большего количества членов будет внесена в онлайн-энциклопедию целочисленных последовательностей.

Литература

1. Извалов А.В. Самоописывающие нумерации графов //Материалы Международного научного семинара «Дискретна математика та її застосування у економіко-математичному моделюванні та інформаційних технологіях» (Запорожье, 11-13 октября 2012 г.). – Запорожье: ДВЗН Запорожский національний університет, 2012. – С. 32-33.

2. Извалов А.В. Конструирование графов, допускающих самоописывающие нумерации //Материалы XIV Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их применение» (Кировоград, Запорожье, 13-14 апреля 2013 г

**ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ СИТУАЦИЙ В СИСТЕМАХ
ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ ИНТЕГРАЦИИ
ПРОИЗВОДСТВА И ОПЕРАЦИЙ**

А.В. Коваленко alik_kb@mail.ru,

А.С. Коваленко anna__sun@mail.ru

Кировоградский национальный технический университет

К категории автоматизированных систем управления предприятием (далее АСУП), принято относить реализацию методологии систем ERP. Систем организационной стратегии интеграции производства и операций, управления трудовыми ресурсами, финансового менеджмента и управления активами, ориентированная на непрерывную балансировку и оптимизацию ресурсов предприятия посредством специализированного интегрированного пакета прикладного программного обеспечения, обеспечивающего общую модель данных и процессов для всех сфер деятельности.

Как известно, в большинстве систем управления, процессы обработки информации включают в себя решение следующих групп задач:

- 1) сбор, накопление и хранение данных об обстановке;
- 2) обобщение и анализ сведений об обстановке и выдача обработанной информации различным потребителям;
- 3) выработка рекомендаций для принятия решения или автоматическое формирование команд;
- 4) доведение команд до управляемых объектов и контроль выполнения.

В большинстве АСУП можно достаточно четко выделить комплексы технических и программных средств, на которые возлагается решение первых двух из перечисленных выше групп задач. Такие комплексы будем называть информационными подсистемами (далее ИП).

ИП могут существовать в двух вариантах. Во-первых, они могут являться неотъемлемой частью АСУП. Во-вторых, ИП могут быть организационно и технически оформлены как самостоятельные автоматизированные системы.

Несмотря на отмеченное выше разнообразие структур ИП и конкретного состава решаемых задач, при их разработке и совершенствовании приходится решать весьма сходные проблемы. Как показывает практика создания таких систем, особенно значительные трудности, вызывает разработка и сопровождение специального математического и программного обеспечения, выполняющего функции обобщения и анализа сведений об обстановке.

Поэтому разработчику трудно добиться, чтобы описание постановки задачи ERP системы, составленное со слов экспертов, содержало информацию, достаточную для разработки алгоритма ее решения, и для получения всех необходимых сведений он вынужден многократно обращаться к экспертам. Эти трудности усугубляются отсутствием адекватных методов формализованного представления экспертных знаний, понятных непрограммистам, а также отмеченной выше изменчивостью исходных данных для разработки алгоритмов.

Отмеченные трудности характерны при разработке алгоритмов и программ, предназначенных для решения практически всех задач оценки обстановки в любых АСУП [1-2].

Исследованы способы совершенствования технологии разработки специального математического и программного обеспечения реализующей стратегию ERP. Абстрагируясь от конкретного содержания задач обработки

сведений об обстановке [3-4], решаемых в ИП, введен обобщенный класс задач распознавания ситуаций (далее РС-задач).

К этому классу относятся задачи обработки информации, решаемые ERP системах, заключающиеся в формировании обобщенных выводов о текущей или прогнозируемой ситуации путем анализа частных сведений об обстановке и, возможно, результатов решения других РС-задач.

Выявлено, что при разработке автоматизированных ERP систем необходимо применять непосредственные методы составления описаний классов распознаваемых ситуаций.

Источником сведений, необходимых для построения таких априорных описаний могут быть эксперты, умеющие решать РС-задачи неавтоматизированным способом в условиях психологического комфорта.

Последнее означает, что:

- у эксперта имеются положительные мотивы для поиска решения РС-задачи;
- объем задачи не превышает психофизиологических возможностей человека по восприятию и обработке информации;
- отсутствуют жесткие ограничения на время, затрачиваемое на анализ информации;
- отсутствуют отрицательные последствия ошибочных решений.

Эксперты пользуются неформальными знаниями о структуре признакового пространства, позволяющими им при благоприятных условиях успешно справляться с решением РС-задач. Поэтому проблема построения априорных описаний классов распознаваемых ситуаций сводится к проблеме формализации, или представления, экспертных знаний.

Литература

1. Фомин Я. А. Распознавание образов: теория и применения. // 2-е изд. — М.: ФАЗИС, 2012. — 429 с.
2. Горелик А.И., Скрипкин В.А. Методы распознавания // -3 изд. М.: Высш.школа.1989. - 232 с.

3. Горелик А.Л. и др. Современное состояние проблемы распознавания: Некоторые аспекты // А.Л.Горелик, И.Б.Гуревич, В.А.Скрипкин. -М.:Радио и связь, 1985.-160 с.

4. Горелик А.Л., Эпштейн С.С. Об аддитивности информации в задачах распознавания объектов и явлений // Кибернетика. -1983. С.85-88.

КОМБИНАТОРНО-АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ВЫВОД ДВУХ ФОРМУЛ ФРАНЧЕСКО ФАА ДИ БРУНО

Л.М. КОГАНОВ (lenya_85@mail.ru)

Научный центр нелинейной волновой механики и технологии РАН.

Дан подробный (в отличие от наброска в упражнении 1.2.5 – 21 «Искусства программирования» Д.Э. Кнута) комбинаторно-алгоритмический вывод формулы Ф. Фаа ди Бруно для n-ой производной сложной функции (одного переменного). Непосредственно из неё выведена вторая детерминантная формула Ф. Фаа ди Бруно. Из которой в свою очередь получена первая указанная, что доказывает их взаимную выводимость друг из друга.

1. Будем опираться на две предшествующие работы автора [1] и [2]. Потребуется также сведения, связанные с маклореновским вариантом разложения Тэйлора в степенные ряды, имеющиеся в любом достаточно полном курсе анализа [3; гл. VI].

2. Мы будем исходить из известного правила цепочки для нахождения производной (в точке; на интервале – подробности и доказательство см. в [1]) функции от функции. Если имеем внешнюю зависимость

$$F = F(u)$$

от промежуточного аргумента u , и если этот аргумент u сам является функцией от переменной t , то при определённых условиях для образованной указанным путём сложной зависимости

$$F = F \left(\left. \begin{array}{c} u \\ u=g \end{array} \right| t \right) \quad (0)$$

от основного аргумента t имеет место:

$$\left[F \left(\int_{u=g} \right) \right]_t = F'_u \left(\int_{u=g} \right) \cdot g' \quad (1)$$

Знак вертикальной черты есть знак подстановки в смысле Лейбница: на место буквы или символа u следует подставить выражение или функцию g .

3. Итак, мы имеем два начальных выражения, условно – нулевое и первое соответственно. А именно,

$$\text{при } n = 0 \quad F \left(\int_{u=g} \right) \quad (0')$$

$$\text{при } n = 1 \quad F' \left(\int_{u=g} \right) \cdot g' \quad (1')$$

Для получения второй производной по t воспользуемся правилом произведения, где исходным является выражение (1'). Дифференцируя его по t , имеем при $n = 2$:

$$F'' \left(\int_{u=g} \right) \cdot g' + F' \left(\int_{u=g} \right) \cdot g'' \quad (2)$$

Продолжая этот процесс, мы будем использовать центральную идею из [2], а именно, *мы не будем на промежуточных этапах приводить подобные (дифференциальные мономы). Мы приведём их в самом конце по достижении необходимого порядка дифференцирования сложной функции.*

4. Не случайно некоторые сомножители дифференциальных мономов в соотношении (2) оказались помеченными кодами, точнее, *кодирующими блоками разбиений* конечного множества – базы, в данном случае $n = 2$ базы из первых двух натуральных чисел. Обозначаемой по Стенли $[n]_2$ (просьба не путать с квадратными скобками отсылки к списку литературы в конце настоящей работы!).

Напомним, что разбиение конечного множества B есть его представление суммой (вполне возможно, состоящей из одного-единственного слагаемого – самой базы B) из *попарно непересекающихся*

непустых подмножеств $B_1, B_2, \dots, B_k \subseteq \mathbb{N}_{\geq 1}$, называемых *блоками разбиения*. Мы будем, следуя М.Э. Казаряну¹, представлять такое разбиение символически в виде:

$$B = B_1 \amalg B_2 \amalg \dots \amalg B_k$$

где \amalg - символ «прямой» суммы без перекрытий.

В нашем случае одноблочное разбиение \mathbb{N}_1 правого слагаемого в (2) является *кодом этого слагаемого*, а соответствующим кодом левого слагаемого в (2) является разбиение $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$ - для нас будет важен *порядок записи блоков и элементов в них в виду удобства*, как в языках иврит и фарси, а именно, *справа налево*.²

Отметим сразу же, и это также весьма важно, что *число штрихов внешнего дифференцирования (по переменной u) функции F совпадает с числом блоков разбиений*, кодирующих два наших дифференциальных монома в соотношении (2).

Если мы теперь, используя правила произведения и цепочки, продифференцируем каждое слагаемое в (2), действуя справа налево *так же из соображения удобства в дальнейшей записи*, то поймём принцип кодирования получающихся дифференциальных мономов разбиениями, но уже с расширенной базой при добавлении элемента 3 к уже накопленной до указанного шага при $n = 2$ базе $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$.

Правое слагаемое в (2) нам даёт (дифференцирование F , без указаний производится по промежуточному аргументу u):

$$\left[F' \left(\int_{u=g} \cdot g'' \right) \right] = F'' \left(\int_{u=g} \cdot g' \right) \cdot g'' + F' \left(\int_{u=g} \cdot g''' \right) \quad (3')$$

¹ М.Э. Казарян. Мультиособенности, кобордизмы и исчислительная геометрия. Успехи Математических Наук, 2003, 58, №4(352), с. 29 – 88: см. стр.34, 2-й абзац сверху и далее стр.42, разд.3.2; см. также кн.: В.С. Губа, С.М. Львовский. «Парадокс» Банаха – Тарского, М.:МЦНМО, 2012. – 48с. – см. стр.6, 2-й абзац сверху.

² Автор не является пионером записи и чтения справа налево в математике: см., например, А.Ю. Китаев. Квантовые вычисления: алгоритмы и исправление ошибок. Успехи Математических Наук, 1997, 52, №6(318), 53 – 112; - пример 2.1 раздела 2.1 на стр. 60.

Левое слагаемое в (2) даёт с помощью *обобщённого правила произведения* (см. ниже) и, разумеется, правила, цепочки:

$$\left[F'' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \right) \right] = F''' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \right) + F'' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \right) + F'' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \right) \quad (3'')$$

И, наконец, объединив и считывая как и выше справа налево сначала (3') и затем (3''), получим:

$$F''' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \right) + F'' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \right) + F'' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \right) + F'' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \right) + F' \left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \right) \quad (3)$$

При этом нами при дифференцировании левого (первого) слагаемого в (2) было существенно использовано при $l=3$ обобщённое правило дифференцирования произведения по Лейбницу:

$$\left(\int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \right)' = u_1' \cdot u_2 + \dots + u_1 \cdot u_2', \quad (4)$$

причём опять же для окончательного удобства подведения итогов именно справа налево. Эта формула (4) нам понадобится в дальнейшем при дифференцировании каждого из возникших дифференциальных мономов на всех последующих шагах.

Саму формулу (выражение) (3) для 3-й производной по основному аргументу t можно записать символически в кодах следующим образом³:

$$\{ \{ \{ \{ \int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \} \} \} \} + \{ \{ \{ \int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \} \} \} \} + \{ \{ \{ \int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \} \} \} \} + \{ \{ \{ \int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \cdot g' \} \} \} \} + \{ \{ \int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \} \} \} \quad (3c)^4$$

А предыдущее выражение (2) – в виде:

$$\{ \{ \int_{u=g} \cdot g' \cdot g' \} \} \quad (2c)$$

Мы видим, что переход от (2с) к (3с) осуществляется последовательной вставкой (inserting) справа налево в каждый блок (в точности в один из имеющихся в разбиении до процедуры вставки) каждого разбиения нового

³ При этом можно считать, что операция \prod сильнее, чем обычное объединение \cup , и круглые скобки вовсе опускать.

⁴ с – code – код (сокр.).

элемента 3, расширяющего базу $\{1, 2\}$ до увеличенной на единицу мощности следующей базы $\{1, 2, 3\}$.

Отметим, что тот же вышеописанный процесс «размножения» дифференциальных мономов позволяет, кстати единообразно, получить (2с) из

$$\{1, 2, 3\} \quad (1c)$$

кодом которого является единственное одноблочное разбиение, содержащее единственный элемент 1. Разумеется, (1с) есть просто запись в кодах правила цепочки (1).

5. Отметим следующее:

А. У каждого g -сомножителя дифференциального монома число штрихов (порядок внутреннего дифференцирования по основной переменной t) есть мощность кодирующего блока.

В. Число k штрихов у F -сомножителя $(F_u \left|_{u=g} \right. C)$ – порядок k дифференцирования по промежуточному аргументу – есть число блоков кодирующего разбиения.

С. Суммарная мощность в каждом дифференциальном мономе всех кодирующих блоков есть порядок n дифференцирования – мощность базы $\{1, 2, \dots, n\}$.

Это верно при $n = 1, 2$ и 3 и будет установлено в общем виде дальнейшими рассуждениями.

6. Мы будем мыслить переход от n -й строки к строке с номером $n+1$ с учётом отмеченных выше закономерностей следующим образом.

Считывающая головка автомата (допустим, трактуемого как машина Тьюринга или же машина Поста и т.п.) скользит справа налево вдоль n -й строки, преобразуя каждый дифференциальный моном, «размножая» его в соответствии с правилами обобщённого произведения (4) и цепочки (1).

Действия считывающей и вставляющей (insert) новый элемент $n+1$ (кстати он, этот элемент, может образовывать и одноэлементный-

синглетонный блок) последовательно во все блоки всех возможных разбиений на базе $[n]$ поочерёдно – эти самые действия сообразуются исключительно с обобщённым правилом дифференцирования по Лейбницу и с правилом дифференцирования (правилом цепочки) сложной функции.

В итоге, в результате перехода к строке с номером $n+1$ от предыдущей строки с номером n , что осуществляется фактически в кодах-разбиениях для дифференциальных мономов, множество⁵ разбиений на базе $[n]$ преобразуется в множество разбиений на базе $[n] \cup \{n+1\} \cong [n+1]$ как всевозможными последовательными вставками добавленного элемента $n+1$ в каждый из блоков (каждого) кодирующего разбиения, так и добавлениями к разбиениям с базой $[n]$ одноэлементных блоков-синглетонов $\{n+1\}$, включающих лишь этот добавляемый элемент.

Переработка дифференциального монома под воздействием (4) и (1) вполне аналогична переработке мономов $u^{\epsilon} \cdot v^{\epsilon}$ в работе [2] под воздействием обычного (оператора) дифференцирования:

$$[u^{\epsilon} \cdot v^{\epsilon}] = u^{\epsilon+1} \cdot v^{\epsilon} + u^{\epsilon} \cdot v^{\epsilon+1}.$$

Точно так же, «штрихование»:

$$\left[F^{\epsilon} \cdot \prod_{u=g}^{\epsilon} g^{\{B_k\}}, g^{\{B_{k-1}\}}, \dots, g^{\{B_1\}} \right]$$

доставляет сумму слагаемых новой строки при «начальных» блоках B_k, \dots, B_1 разбиения

$$B_k \amalg \dots \amalg B_1$$

множества $[n]$.

В кодах это выглядит так:

$$\begin{array}{cccc} B_k \amalg & \dots & \amalg B_2 \amalg \{n+1\} \amalg B_1 \\ B_k \amalg & \dots & \amalg \{n+1\} \amalg B_2 \amalg B_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \{n+1\} \amalg B_k \amalg & \dots & \amalg B_k \amalg B_1 \end{array}$$

⁵ Геометрическая решётка, что для наших целей не существенно.

и, наконец, имеется «самое левое» выделенное слагаемое, образование которого доставляется дифференцированием по правилу цепочки, и которое после этого в кодах принимает вид

$$n+1 \text{ } \mathbb{B}_k \text{ } \Pi \cdots \Pi B_2 \text{ } \Pi B_1$$

с синглетонным или, что - то же самое, одноэлементным блоком (возможно не единственным), состоящим из одного – единственного добавленного элемента $n+1$ для наращивания базы. И насчитывает это разбиение $k+1$, т.е. на 1 больше блоков, нежели остальные коды указанных полученных мономов по истечении шага⁶ дифференцирующей машины.

Соответствующее полученное слагаемое имеет вид:

$$F^{n+1} \left(\bigoplus_{u=g} \right) \cdot g \cdot \left(\bigoplus_{\mathbb{B}_k} \right) \cdots \left(\bigoplus_{\mathbb{B}_1} \right),$$

порядки дифференцирования по основной переменной t сомножителей в квадратных скобках равны мощностям соответствующих блоков разбиения на базе $[n]$:

$$B_k \text{ } \Pi \cdots \Pi B_1.$$

7. Естественно, на этом этапе рассуждений возникают следующие вопросы:

- А.** Как привести подобные дифференциальные мономы, возникшие в n -й строке?
- В.** Сколько всего слагаемых в n -й строке? Иными словами, сколько всего имеется разбиений на базе $[n]$?

И следующий вопрос является уточнением (углублением) предыдущего:

- С.** Сколько разбиений на базе $[n]$ имеют в точности k блоков? Иными словами, сколько в n -й строке содержится дифференциальных мономов с порядком внешнего дифференцирования, равным в точности k .

⁶ Шаг состоит из ряда тактов. Заключается в переходе от предыдущей строки к непосредственно последующей.

8. Для ответов на перечисленные выше вопросы мы введём, как это первоначально было сделано в [4; стр. 184 - 191], понятие класса

$$\langle v_1, v_2, \dots \rangle$$

в смысле Дубиле – Рота – Стенли.

Будем говорить, что разбиение на базе \mathbb{N}^n принадлежит указанному классу, если в точности v_i блоков этого разбиения имеют мощность, равную i , т.е. содержат по i элементов каждый.

Поскольку блоки попарно не пересекаются и в совокупности покрывают (точнее, составляют всю) базу, то имеет место соотношение

$$1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + \dots + n \cdot v_n = n. \quad (5)$$

Кроме того, для фиксированного разбиения класса $\langle v_1, v_2, \dots \rangle$ число блоков, к примеру, обозначаемое посредством k , оказывается равным

$$k = v_1 + v_2 + \dots + v_n. \quad (6)$$

Одновременное сведение соотношений (5) и (6) в диофантову систему при фиксации целых неотрицательных (вообще говоря, натуральных) параметров n и k приводит к замечанию, восходящему к Луи Комтэ [5].

Замечание 1. Если набор (кортеж; если угодно, вектор-решение) целых неотрицательных значений $v_i; i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяет одновременно соотношениям (5) и (6), то при всех $i > n - k + 1$ необходимо следует, что $v_i = 0$.

Предположим, что, напротив, существует значение $i, n - k + 1 < i \leq n$, такое, что $v_i \geq 1$.

Но тогда бы мы имели бы

$$n > v_1 + 2 \cdot v_2 + \dots + (i-1) \cdot v_{i-1} + (i-k+1) \cdot v_i + \dots$$

Однако из (5) и (6) тогда прямо бы следовало, что:

$$n - k = v_2 + 2 \cdot v_3 + \dots + (i-1) \cdot v_i + \dots + (i-1) \cdot v_n > v_2 + 2 \cdot v_3 + \dots + (i-k+1) \cdot v_i + \dots \geq (i-k) \cdot v_i \geq n - k$$

и, в силу промежуточного *строгого* неравенства, полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Замечание 2. Весьма важен начальный специальный случай, когда $n = 1$. Тогда система, сведённая, собранная из соотношений (5) и (6) имеет единственное решение

$$v_1 = n = k = 1,$$

соответствующее формуле (1) дифференцирования сложной функции – правилу цепочки.

9. Основой для дальнейшего рассмотрения является следующая

Теорема. Существует функциональное (однозначное) отображение множества из $n!$ перестановок на базе $[n]$ в множество всех разбиений класса $\langle v_1, v_2, \dots \rangle$ на той же базе, при котором полные прообразы (а они не перекрываются в силу функциональной однозначности) каждого указанного разбиения содержат в точности по

$$v_1! \binom{n}{v_1} \cdot v_2! \binom{n-v_1}{v_2} \cdot \dots \quad (7)$$

перестановок из общего числа $n!$.

Доказательство начнём с замечания. Среди компонент v_i класса

$$\langle v_1, v_2, \dots \rangle \quad (8)$$

могут быть и нулевые. Так, если, к примеру, $v_n = 1$ (единственное одноблочное разбиение, в котором блок совпадает со всей базой $[n]$), то из (5) следует

$$v_1 = v_2 = \dots = v_{n-1} = 0.$$

Если же, по другому примеру, база $[n]$ дробится на $v_1 = n$ одноэлементных блоков, то

$$v_2 = v_3 = \dots = v_n = 0.$$

Соответствующие этим кодам «весовые» слагаемые стоят, соответственно, в правом и в левом концах n -й строки.

Пусть в общем случае нам дан вектор (8) с неотрицательными целыми компонентами $v_i; i = 1, 2, \dots, n$ и условием (5). И пусть дано конкретное упорядочение встречающихся мощностей блоков.

При этом вектору (8) соответствует набор убывающих встречающихся мощностей – чисел j с ненулевыми кратностями v_j :

$$\alpha_s > \alpha_{s-1} > \dots > \alpha_1 \geq 1,$$

причём

$$n_s \cdot \alpha_s + n_{s-1} \cdot \alpha_{s-1} + \dots + n_1 \cdot \alpha_1 = n,$$

и все кратности $n_q > 0$ при $q = 1, \dots, s$.

Разумеется,

$$n_s, n_{s-1}, \dots -$$

набор из ненулевых компонент, считываемых справа налево в (8) с пропусками нулей.⁷

Мы рассматриваем $n!$ перестановок, каждую из них как слово в алфавите $[n]$ с ровно n буквами без повторения букв.

Вставим любую фиксированную перестановку в шаблон, разделяя множество мест слева направо на n_1 последовательных отрезков⁸ длины α_1 (по α_1 мест для букв в каждом), далее – на n_2 отрезков по α_2 мест для букв в каждом и т.д.

Так, допустим при перестановке

$$1\ 2\ 3\ 4$$

и шаблоне, определяемом условиями

$$\alpha_1=1, n_1=2; \alpha_2=2, n_2=1$$

имеем «шаблонированную» - загнанную в шаблон перестановку

$$|1|2|34|,$$

и этой самой перестановке при нашем отображении соответствует разбиение

$$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{34}.$$

⁷ Приём исключения из рассмотрения нулевых компонент вектора (8) заимствован автором из работы: R. Cordovil, M. Las Vergnas, A. Mandel / Euler's relation, Mobius functions and matroid identities // Geometria dedicata, 1982, 12, №2, pp. 147 – 162; см. стр. 161.

⁸ Отрезки есть последовательные места для (бесповторных) подслов в перестановке.

Если бы не было бы шаблона и упорядочения длин отрезков, допустим, как у нас в тексте, по возрастанию, то тогда бы, к примеру, шаблонированная перестановка

$$|12|3|4|$$

соответствовала бы ещё одному разбиению, а именно, такому:

$$1\bar{2} \ 3\bar{4} \ 4\bar{1}.$$

Что противоречило бы однозначности отображения множества перестановок в множество разбиений предписанного класса (2,1) (см. формулу (8) – просьба нумерацию формул *не путать* с однокомпонентными классами! – Л.К.) с той же самой базой.

Точно так же невозможно сопоставление одной и той же перестановке

$$1,2,4,3$$

двух различных «шаблонирований» (первое из которых считаем по определению дефектным)

$$|1|2,4|3|$$

и

$$|1|2|4,3|.$$

Разумеется, разбиение получается из шаблонированной перестановки, когда из элементов отрезков этой перестановки образуются, формируются блоки разбиения.

Так как шаблон позволяет переставлять отрезки равной длины при образовании фиксированного разбиения, а так же позволяет при таком образовании переставлять элементы внутри отрезков (поскольку внутри блока порядок элементов несуществен), то из одной перестановки, отображающейся в данное фиксированное разбиение, можно получить ровно⁹

$$v_1! \binom{v_1}{v_1} \cdot v_2! \binom{v_2}{v_2} \cdot \dots \cdot v_n! \binom{v_n}{v_n} \quad (\text{см. (7)})$$

⁹ По сути, здесь мы не оговариваем многократное применение правила произведения из перечислительной комбинаторики.

перестановок в точности ему, этому разбиению, соответствующих. Поскольку, если к тому же какое-то $\nu_j = 0$, то

$$\nu_j! \cdot \binom{\nu_j}{\nu_j} = 0! \cdot \binom{\nu_j}{\nu_j} = 1.$$

Следствие 1. Имеется в точности

$$\frac{n!}{\nu_1! \cdot \binom{\nu_1}{\nu_1} \cdot \nu_2! \cdot \binom{\nu_2}{\nu_2} \cdots \nu_n! \cdot \binom{\nu_n}{\nu_n}} \quad (9)$$

разбиений базы $[n]$ класса (8) (это – номер формулы в настоящем тексте!).

Действительно, каждое такое разбиение соответствует определённому в (7) числу перестановок, причём обратное соответствие однозначно; и при этом в качестве допустимых прообразов фигурируют все без исключения $n!$ перестановок.

Следствие 2 об однородных разбиениях.

Если разбиение однородное или, что то же самое, юниформное, т.е. если все его блоки имеют одну и ту же мощность, допустим, равную r , то (9) переходит в

$$\frac{n!}{\binom{n}{r} \cdot \binom{\nu_1}{r} \cdot \binom{\nu_2}{r} \cdots \binom{\nu_n}{r}} \quad (9')$$

Действительно, соотношение (5) даёт нам при

$$\nu_1 = \cdots = \nu_{r-1} = \nu_{r+1} = \cdots = \nu_n = 0$$

соотношение вида

$$r\nu_r = n, \quad (5')$$

откуда следует, что $\nu_r = n/r$, что при подстановке в (9) приводит к (9').

10. Как очевидное следствие доказанной в предыдущем разделе 9 теоремы доставляется явное (но, к сожалению, незамкнутое) выражение после всевозможных приведений в n -й строке после окончания работы всех n шагов, начиная с нулевого входного состояния – выражения (0). Вплоть до полного формирования n -й строки, описанным выше дифференцирующим, множащим дифференциальные мономы (в кодах разбиений) автоматом.

В итоге мы получаем соотношение:

$$\left[F \left(\left. \begin{array}{c} \zeta \\ u=g \end{array} \right| t \right) \right]_{\zeta} = \sum_{k=1}^n F \left(\left. \begin{array}{c} \zeta \\ u=g \end{array} \right| \zeta \right) \cdot \sum_{\substack{v_1+2v_2+\dots+n \cdot v_n=n \\ v_1+v_2+\dots+v_n=k}} \frac{n!}{v_1! \cdot v_2! \cdot \dots \cdot v_n!} \cdot \zeta^{\nu_1} \zeta^{\nu_2} \dots \zeta^{\nu_n} \quad (10)$$

с обязательным уточнением $0^0 = 1$, поскольку в некоторых точках $t = t_0$ может так статься, что $g \left(\left. \begin{array}{c} \zeta \\ u=g \end{array} \right| \zeta \right) = 0$, в то время как блоки мощности i отсутствуют в соответствующих разбиениях, когда $v_i = 0$, и само указанное значение в произведении справа под знаком внутренней суммы не фигурирует вовсе.¹⁰

Будем, несмотря на (кстати говоря, не претендующие на полноту) историко – математические изыскания¹¹, называть соотношение (10) *первой формулой* Ф. Фаа ди Бруно [6],[7],[8; pp. 2 – 5; 304 - 305] для n -й производной сложной функции по основному аргументу.

11. Теперь, после нахождения явного вида (10) для n -й производной сложной зависимости (формула (0)) $F = F \left(\left. \begin{array}{c} \zeta \\ u=g \end{array} \right| t \right)$, где $u = g \left(\left. \begin{array}{c} \zeta \\ u=g \end{array} \right| t \right)$ по основному аргументу t , мы в состоянии ответить на возникшие в разделе 7 вопросы **В** и **С**. Вопрос **А**, повторяем, получил ответ с помощью **Теоремы** раздела 9 и вытекающей из неё *первой формулы* Ф. Фаа ди Бруно (10).

Чтобы ответить на вопрос **В** об общем числе возникающих до приведения подобных дифференциальных мономов в строке с номером n , соответствующей тому же порядку n дифференцирования сложной зависимости (даваемой соотношением (0)), положим в (10):

$$F \left(\left. \begin{array}{c} \zeta \\ u=g \end{array} \right| t \right) = e^u; \quad u = e^t - 1.$$

В качестве «читающей точки» - конкретного значения основного аргумента t удобно выбрать $t = 0$. В связи с этим и даётся *поправка*, равная (-1). Тогда при таком сдвиге на 1 влево (вдоль числовой оси) промежуточного аргумента все последовательные производные *внешней* функции будут так же

¹⁰ «Пустой» сомножитель произведения как правило полагается равным 1.

¹¹ Можно, кроме ссылки на трактат Арбогаста в [9'; упр. 1.2.5 – 21], отметить также обширную работу Уоррена Джонсона [10]; оба автора, и Кнут, и Джонсон, по-видимому, не в курсе вклада в предмет русского математика академика Коллинса [11; Гл. I, §7 с. 35 – 38; 180 - 181].

вычисляться именно в нуле (ибо при $t = 0$ мы имеем $u = e^t - 1 \Big|_{t=0} = 0$) и давать сомножителями единицы. К тому же поправка-константа (-1) исчезает при первом же дифференцировании промежуточного аргумента по основному.

Можно исходить при подборе промежуточного аргумента $u = g(\cdot)$ из маклореновского степенного разложения¹².

Имеем:

$$g(\cdot) = g(\cdot) + \frac{g'(\cdot)}{1!} \cdot t + \frac{g''(\cdot)}{2!} \cdot t^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(\cdot)}{n!} \cdot t^n + \dots \quad (11)$$

При этом нам нужно, чтобы

$$g(\cdot) = 0; g'(\cdot) = \dots = g^{(n)}(\cdot) = \dots = 1.$$

Что и даёт нам сравнением искомого разложения с экспонентой, а именно:

$$g(\cdot) = e^t - 1.$$

Поэтому общее число членов в n -й строке есть

$$\left[\frac{e^t - 1}{t} \right]_{t=0}^n. \quad (12)$$

Умножая (12) на $\frac{z^n}{n!}$ и суммируя по $n = 1, 2, \dots$, с учётом того, что выражение (12) при $n = 0$ (в сравнении с (0)) равно 1, имеем по уже употреблённой формуле маклореновского разложения производящую функцию последовательности чисел дифференциальных мономов в строках с номерами $0, 1, \dots, n, \dots$ вида $e^{e^z - 1}$, и, согласно (10) при необходимых подстановках явный вид таких значений при фиксации $n, F(\cdot) = e^n; g(\cdot) = e^t - 1, t = 0$.

Левая часть (10) в этом случае обычно обозначается посредством $B(\cdot)$ в честь американского математика Эрика Темпла Белла¹³:

¹² Специализация с точкой приложения в нуле формулы Брука Тэйлора, когда сдвиг из нуля трактуется как аргумент.

¹³ Американский математик шотландского происхождения Эрик Темпл Белл (1883 – 1960) был некоторое время вице-президентом Американского Математического Общества – American Mathematical Society (AMS).

$$B(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{v_1+2\cdot v_2+\dots+n\cdot v_n=n \\ v_1+v_2+\dots+v_n=k}} \frac{n!}{v_1! \cdot (\mathbb{C})^{v_1} \cdot v_2! \cdot (\mathbb{C})^{v_2} \cdot \dots \cdot v_n! \cdot (\mathbb{C})^{v_n}}; \quad n \geq 1; \quad (13)$$

$$B(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

12. Отвечая на вопрос С раздела 7, желательно *специализировать* предыдущую задачу, обращая внимание на число блоков разбиения, кодирующего дифференциальный моном.

С этой целью, наряду с выбором точки приложения $t=0$ в промежуточном аргументе $u = e^t - 1$, положим внешнюю зависимость $\bar{F} = \bar{F}(\mathbb{C})$ параметрической с параметром α .

А именно, положим

$$\bar{F}(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha \cdot u},$$

поскольку

$$\bar{F}(\mathbb{C}) \Big|_{u=0}^{(k)} = (\alpha \cdot u)^k \Big|_{u=0} = \alpha^k,$$

и введённый таким образом *параметр* α будет *перечисляющей переменной* по числу блоков в n -й строке, а сама строка – блочным индикатором – многочленом по переменной α при порядке n дифференцирования или, что то же самое, мощности n базы $[n]$ всевозможных кодирующих разбиений.

Аналогично соотношению (12) и последующих за ним рассуждений, мы приходим к *глобальному* эномератору вида $e^{\alpha \cdot (\mathbb{C}-1)}$ для двухиндексной последовательности Стирлинга II-го рода, общий член которой при фиксации перечисленных параметров как n так и числа блоков k даётся выражением:

$$S(\mathbb{C}, k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{v_1+2\cdot v_2+\dots+n\cdot v_n=n \\ v_1+v_2+\dots+v_n=k}} \frac{n!}{v_1! \cdot (\mathbb{C})^{v_1} \cdot \dots \cdot v_n! \cdot (\mathbb{C})^{v_n}}; \quad (14)$$

$$S(\mathbb{C}, 0) \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Отметим, что $S(\mathbb{C}, n) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ тождественно по всем допустимым n , что вытекает при равенстве параметров k и n друг другу в области суммирования.

Тогда вычитанием (6) из (5) получаем $v_2 + 2 \cdot v_3 + \dots + (\mathbb{C}-1) \cdot v_n = 0$, откуда в виду неотрицательной целозначности всех без исключения компонент класса (8)

вытекает, что $v_2 = v_3 = \dots = v_n = 0$. Откуда, в свою очередь, и из (5), и из (6) следует, что $n = k = v_1$. Достаточно указанные значения подставить в (14) с учётом фразы перед Следствием 1.

Самостоятельно можно показать, что двухиндексная последовательность $\{S(n, k)\}_{k \geq 0}^0$ Стирлинга II-го рода вполне определяется [12; Лемма 10.2, с. 40 - 41] совокупностью условий:

a) $S(n, 0) = \delta_{n,0}$, где $\delta_{n,k}$ - символ Кронекера;

b) $S(n, k) = 0$ при $k > n$;

c) основной рекуррентностью¹⁴:

$$S(n+1, k) = k \cdot S(n, k) + S(n, k-1); \quad n \geq k \geq 1. \quad (15)$$

Отметим, что разложение глобального энумератора $e^{\alpha \cdot (z-1)^k}$ по степеням α и фиксация коэффициента при α^k даёт *столбцовый* энумератор порядка k :

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{z^n}{n!} = \frac{(z-1)^k}{k!}; \quad k=1, 2, \dots \quad (16)$$

для указанной стирлинговой двухиндексной последовательности II-го рода.

При этом для вывода соотношения (16) фактически используется теорема Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах [13; часть I, гл. III, §10, стр. 88 – 93]. А именно, в соответствии с указанной теоремой, имеем:

$$e^{\alpha \cdot (z-1)^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cdot \frac{(z-1)^k}{k!}$$

при фиксации значения $\alpha \neq 0$ параметра α .

Далее, уже трактуя параметр α как переменную величину, при фиксации параметра k мы получаем сходящийся при любых (конечных) значениях переменной z энумератор k -го столбца последовательности $\{S(n, k)\}_{k \geq 0}^0$ в виде правой части (16).

Это соотношение, так же как и совокупность условий а) – с), вполне достаточно для вывода всех возможных соотношений и свойств

¹⁴ Вставка элемента $n+1$ в каждый блок n -й строки, либо образование с помощью этого элемента одноэлементного блока – ср. с разделом 6, где всё это интерпретируется в кодах разбиений.

стирлинговой последовательности II-го рода – подробности см. в [12;указанная выше лемма 10.2, с. 40 – 41].

13. Несколько расширим и обобщим рассматриваемые, проведённые в разделах **11** и **12**.

Положим, как и в указанном разделе **12**:

$$F \left(\left. \right|_t \right) = e^{\alpha \cdot u}$$

и, кроме того,

$$g \left(\left. \right|_t \right) = x_1 \cdot \frac{t}{1!} + x_2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + x_n \cdot \frac{t^n}{n!} + \dots,$$

т.е. согласно разложению по Маклорену,

$$\begin{aligned} g \left(\left. \right|_t \right) &= 0; \\ g' \left(\left. \right|_t \right) &= x_1; \\ g'' \left(\left. \right|_t \right) &= x_2; \\ &\dots \\ g^{(k)} \left(\left. \right|_t \right) &= x_n; \\ &\dots \end{aligned}$$

Тогда основная формула (10) при $n \geq 1$ примет вид:

$$\left[F \left(\left. \right|_t \right) \right]_{u=g \left(\left. \right|_t \right)} \Big|_{t=0} = \left[e^{\alpha \cdot u} \Big|_{u=x_1 \cdot \frac{t}{1!} + x_2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + x_n \cdot \frac{t^n}{n!} + \dots} \right]_{t=0} = \sum_{k=1}^n \alpha^k \sum_{\substack{v_1+2 \cdot v_2 + \dots + n \cdot v_n = n \\ v_1+v_2+\dots+v_n=k}} \frac{n!}{v_1! \cdot \dots \cdot v_n!} \cdot x_1^{v_1} \cdot x_2^{v_2} \cdot \dots \cdot x_n^{v_n} \quad (10')$$

Внутренняя сумма в последней части (10') называется в литературе *частичным* полиномом Белла и обозначается посредством $B_{n,k}(x_1, \dots, x_n); n \geq k \geq 1$ (см. **Замечание 1** раздела **8** настоящей работы, утверждающее отсутствие переменных x_i при $i > n - k + 1$).

И если мы теперь положим $\alpha = 1$, то правая часть (10') сведётся при $n \geq k \geq 1$ к выражению

$$\sum_{k=1}^n B_{n,k} \stackrel{def}{=} Y_n. \quad (17)$$

Кроме того, по определению (исходя из явного вида внешней функции и отсутствию свободного члена в разложении (маклореновском) внутренней

функции – промежуточного аргумента в (10') сравнением со случаем $u = 0$ и соотношением (0)):

$$Y_0 \equiv 1. \quad (18)$$

Умножая при $\alpha = 1$ первую и третью части (10') на $t^n/n!$ и суммируя по $n = 1, 2, \dots$ с учётом последнего доопределения (18), так же по Маклорену имеем:

$$e^g \mathbf{C} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cdot \frac{t^n}{n!}$$

или, что - то же самое,

$$e^g \mathbf{C} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cdot \frac{t^n}{n!}. \quad (19)$$

14. Продифференцируем по t обе части полученного соотношения (19).

Поскольку $Y_0 \stackrel{def}{=} 1$ и $\mathbf{C}_0 \equiv 0$, то:

$$e^g \mathbf{C} \cdot g' \mathbf{C} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!}. \quad (20)$$

Сравним в полученном соотношении (20) с учётом (19) и (18) коэффициенты при $t^n/n!$ в обеих частях. Имеем:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cdot \frac{t^n}{n!} \right) \cdot g' \mathbf{C} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!}$$

или

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cdot \frac{t^n}{n!} \right) \cdot \left(x_1 + x_2 \cdot \frac{t}{1!} + x_3 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!}.$$

Откуда указанным сравнением получаем, что

$$x_1 \cdot Y_n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x_{k+1} \cdot Y_{n-k} = Y_{n+1} \quad \text{при } n=1, 2, \dots \quad (21)^{15}$$

При $n = 0$ сумма в левой части считается «пустой» и полагается равной нулю.

¹⁵ Интерпретацию соотношения (21) в терминах весов, введённых на блоках разбиений (x_{k+1} есть вес блока мощности $k+1$), предложил Роберто Фрухт, чилийский математик, в работе [14; p. 72]. По сути дела мы по методу вложения В.А. Лисковца [15-ДАН, 1969] всевозможными способами к выделенному, допустим, последнему добавленному элементу $n+1$ прибавляем ровно k элементов из предыдущей базы $[n]$; при этом $k=1, 2, \dots, n$.

Присоединяя в качестве условия для «неизвестной» величины Y_0 соотношение (18), используем рекуррентность (21) в качестве поставщика $n+1$ последующих (от 1 вплоть до самого параметра $n+1$) линейных уравнений для системы с треугольной матрицей размера $\llbracket n+2 \rrbracket \times \llbracket n+2 \rrbracket$:

$$\begin{array}{rccccccc}
 1 \cdot Y_0 & & & & & & & = 1 \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 \cdot Y_0 & & -Y_1 & & & & & = 0 \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_2 \cdot Y_0 & + & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 \cdot Y_1 & & -Y_2 & & & = 0 \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x_3 \cdot Y_0 & + & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_2 \cdot Y_1 & + & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 \cdot Y_2 & & -Y_3 & = 0 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
 \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \cdot x_n \cdot Y_0 & + & \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \cdot x_n \cdot Y_1 & & + \dots & + & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 \cdot Y_n & - Y_{n+1} = 0
 \end{array} \quad (22)$$

Детерминант матрицы коэффициентов при неизвестных $\llbracket Y_0, \dots, Y_{n+1} \rrbracket$ этой системы есть произведение коэффициентов, стоящих на главной диагонали.

И этот детерминант размера $\llbracket n+2 \rrbracket \times \llbracket n+2 \rrbracket$ оказывается равным $\llbracket 1 \rrbracket^{n+1}$.

По правилу Крамера, ставя столбец свободных членов на место последнего ($n+2$ -го) столбца, получаем:

$$Y_{n+1} = \frac{1}{\llbracket 1 \rrbracket^{n+1}} \cdot \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 & & -1 & & & & & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_2 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 & & -1 & & & 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x_3 & & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_2 & & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 & & -1 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \cdot x_{n+1} & & \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \cdot x_n & & \dots & & \dots & \dots \\ & & & & & & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \cdot \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \end{array}$$

Раскрывая детерминант по последнему столбцу, получаем:

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= \frac{\binom{\epsilon+2}{\epsilon+1}}{\binom{\epsilon+1}{\epsilon+1}} \cdot \begin{vmatrix} \binom{0}{0} \cdot x_1 & -1 & & & \\ \binom{1}{1} \cdot x_2 & \binom{1}{0} \cdot x_1 & -1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ \binom{n}{n} \cdot x_{n+1} & \binom{n}{n-1} \cdot x_n & & \binom{n}{0} \cdot x_1 & \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \binom{0}{0} \cdot x_1 & -1 & & & \\ \binom{1}{1} \cdot x_2 & \binom{1}{0} \cdot x_1 & -1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ \binom{n}{n} \cdot x_{n+1} & \binom{n}{n-1} \cdot x_n & & \binom{n}{0} \cdot x_1 & \end{vmatrix} \cdot \quad (23)
\end{aligned}$$

15. Чтобы прийти к второй формуле Ф. Фаа ди Бруно [6], [7], вспомним, что порядок дифференцирования в правой части формулы (10) – первой формулы Фаа ди Бруно – есть общее число блоков в кодирующем моном разбиении.

Поэтому, исходя из (6), (10') и (17) и полагая в последней части формулы (23):

$$x_m := g^{\binom{\epsilon}{m}} F,$$

где F – символическая по Блиссару (подробности в классическом курсе [16; с. 30; 38 – 40 и далее]) переменная, а затем, уже после разложения определителя,

$$F^k := F_u \binom{\epsilon}{k} \Big|_{u=g} \binom{\epsilon}{k},$$

получаем с учётом сказанного выше и с учётом (17) вновь выражение для

$$\left[F \binom{\epsilon}{k} \Big|_{u=g} \binom{\epsilon}{k} \right]^{\binom{\epsilon+1}{k}}.$$

16.Замечание 1. Обычно ещё переставляют строки с помощью $\frac{n \cdot \binom{\epsilon+1}{k}}{2}$

транспозиций. А именно: последнюю строку ставим сначала – на место

предпоследней, затем – на место второй снизу, и т.д., на место первой – всего имеем n транспозиций. Затем предпоследнюю, ставшую уже последней вплоть до смены первой, сместившейся на вторую сверху позицию и т.д. вплоть до смены местами 2-й и первой строк – по индексу весового множителя x_i в элементах первого столбца.

Точно так же затем справа налево переставляются столбцы. При этом общее число необходимых смежных транспозиций рядов оказывается равным $\frac{n \cdot (n+1)}{2} \times 2 = n \cdot (n+1)$, т.е. равным чётному числу. Так как (ровно) один из сомножителей – двух последовательных целых чисел – необходимо чётен.

При этом в оригинальных работах Фаа ди Бруно [6], [7] в записи формулы (23) первый столбец остаётся на своём месте.

Последний столбец в общеупотребительной записи, повторяем, фигурирует у Фаа ди Бруно (см. по указанным ссылкам) как первый. Посему, при n транспозициях, ставящих его на первое место, добавляется множитель $(-1)^n$ в оригинальной записи символического выражения для производной $n+1$ -го порядка по основному аргументу в виде определителя размера $(n+1) \times (n+1)$.

Что и требовалось получить.

Замечание 2. Соотношение (23) было непосредственно получено с помощью одного важного индуктивного результата из теории определителей А.П. Поляковым¹⁶ и опубликовано в 1909-м году в «Математическом Сборнике» - органе Московского математического общества (ММО) – [17; Теор. 1 на стр.180 – 182 и вывод в виде Теор. 5 из §5 на 195 – 197]. Существенно, что в указанном труде Полякова символ $(-)$ означает не общеупотребительный *убывающий факториал* в смысле Дж. Риордана и Вильяма Феллера (см. [16; с. 11 в разд. 2.1.]), а *обычный биномиальный коэффициент*, ныне повсеместно в литературе обозначаемый посредством

¹⁶ Поляков Алексей Петрович (1878 – после 1941?) – профессор МГУ и МВТУ в первой половине прошлого века, участник международной конференции по математическому образованию (1 – 4 апреля 1914года), автор книги по материалам этой конференции (опубликована в журнале «Математическое образование», 1914, №6); ранее находился в Гёттингене в научной командировке в 1904-м году.

$\binom{n}{k}$. Это обстоятельство следует иметь в виду при чтении указанной статьи А.П. Полякова с непосредственным индуктивным выводом (23). По сути, возможно, как полагает автор настоящих строк, из цитированной работы Полякова вывести «обратным путём» и первую формулу Фаа ди Бруно (10).

Замечание 3. Действительно, разлагая последний детерминант в соотношении (23) вдоль последней $n+1$ -ой строки, получаем, вычёркивая последовательно *справа налево* \perp -образные «кресты»:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{+1} \\ \vdots \\ \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{-1} \end{array} \right] \binom{n}{0} \cdot x_1 \cdot Y_n + \left[\begin{array}{c} \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{-1} \end{array} \right] \binom{n}{1} \cdot x_2 \cdot Y_{n-1} + \left[\begin{array}{c} \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbb{K}1 \mathfrak{S}^{+1} \mathfrak{C}^{-1} \end{array} \right] \binom{n}{2} \cdot x_3 \cdot Y_{n-2} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Из строения (24) можно усмотреть следующее¹⁷:

А. В первых (и единственных для первого слагаемого в (24)) квадратных скобках стоит знак минора, дополняющего фиксируемый матричный элемент (повторимся – последовательно *справа налево*) в $n+1$ -й самой нижней строке.

В. Во вторых квадратных скобках – произведение минус-единиц, «падающих», точнее, попадающих - при удалении выбранного столбца и нижней (постоянной) $n+1$ -й строки – на главную диагональ, *справа* от выбранного и затем удалённого столбца (в правом нижнем углу). При этом существенно то обстоятельство, что, при удалении нижней $n+1$ -й строки и «растущего», точнее, восстановленного из неё зафиксированного столбца, слева от этого удалённого столбца происходит простое «проседание» вниз, а справа от него же – сдвиг, допустим (порядок не важен), влево и затем вниз.

Отметим, что теорема Лапласа о разложении определителей вдоль фиксированных рядов (в данном конкретном случае – столбцов справа от выбранного и затем удалённого) используется каждый раз в зависимости от порядка – числа «упавших» на главную диагональ минус-единиц. А именно, в тех столбцах, где они находятся.

¹⁷ В отличие от порядка разложения вдоль $n+1$ -й последней строки, матричные элементы которой мыслятся справа налево, порядок рассмотрения слагаемых в соотношении (24) и сомножителей внутри этих слагаемых - обычный порядок *слева направо*.

Отметим также, что при этом индекс k сомножителя Y_k совпадает с порядком дополнительного минора – детерминанта до образованной нижней треугольной матрицы в правом нижнем углу, непосредственно правее удаляемого выбранного столбца.

С. Перемножая квадратные скобки в каждом из слагаемых в (24), убеждаемся, что каждое такое умножение даёт знак «плюс».

А само выражение (24), тем самым, совпадает с левой частью соотношения (21), что нам и требуется.

17.¹⁸ Действительно, имея в виду соотношение (21), умножая обе его части на $t^n/n!$ и суммируя по $n=0,1,\dots$, обозначив предварительно с учётом (18) (т.е. с учётом $Y_0=1$),

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cdot \frac{t^n}{n!} = Y \mathbf{C},$$

имеем:

$$\begin{cases} Y' \mathbf{C} = Y \mathbf{C} \cdot g' \mathbf{C}; \\ Y \mathbf{C} = 1. \end{cases}$$

И, разделяя переменные и переобозначая основной аргумент посредством, допустим, буквы (переменной) x , имеем:

$$\frac{Y' \mathbf{C}}{Y \mathbf{C}} = g' \mathbf{C}.$$

Интегрируя обе части в пределах от $x=0$ до $x=t$, с учётом того, что при $Y_0=1$ имеет место $Y \mathbf{C} = 1$, учитывая к тому же равенство $g \mathbf{C} = 0$ (см. начало раздела **13**), получим последовательно:

$$\int_0^t \frac{Y' \mathbf{C}}{Y \mathbf{C}} dx = \int_0^t g' \mathbf{C} dx$$

или

¹⁸ Рассуждения в этом разделе не являются оригинальными – ср., например, с кн.: В.Н. Сачков. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977, стр. 134, формула (2.57) и далее.

$\ln Y \int_{x=0}^{x=t} = g \int_{x=0}^{x=t}$, то есть $\ln Y \int = g \int$, или $Y \int = e^g \int$, что есть в точности соотношение (19).

Из которого подстановкой с учётом соотношения (6):

$$x_i = \alpha \cdot \bar{x}_i; i = 1, \dots, n \text{ и } \bar{x}_i = g \int$$

получаем вновь формулу Ф. Фаа ди Бруно в форме (10').

Откуда основная форма (10) может быть получена по Блиссару рассуждениями из раздела 15, при соответствующих подстановках:

$$\alpha^k := F_u \int_{u=g}^{\int} ; \text{ где, как уже было указано выше, } \bar{x}_i := g \int; i, k = 1, \dots, n.$$

Что нам и требовалось установить как взаимную выводимость друг из друга обеих формул Ф. Фаа ди Бруно (10) и (23).

18. Заключительные замечания.

1. Автор с полным основанием может констатировать недостаточность наброска-скетча, посвящённого выводу первой формулы Ф. Фаа ди Бруно в «Искусстве» Д.Э. Кнута [9; упр. 1.2.5.- 21, с. 83; 584 - 586], [9'; упр. 1.2.5 – 21, с. 82; с. 537 - 539] и изолированное и бездоказательное положение в этом скетче второй детерминантной формулы Ф. Фаа ди Бруно.¹⁹

При этом совершенно не прорабатывается центральное и, на наш взгляд, важнейшее соответствие всех $n!$ перестановок на базе $[n]$ с разбиениями на $[n]$ фиксированного класса $\langle \nu_1, \nu_2, \dots \rangle$ в смысле Дубиле – Рота – Стенли [4; раздел 5.2, стр.184 – 191, формула (5.2) на стр.185] – то, что в настоящем тексте представляет собой **Теорему** из раздела 9.²⁰

¹⁹ В первом русском издании [9] (страницы указаны выше, как и далее) Д.Э Кнут ссылается на рассуждения Роберта Джеймса Мак-Элиса; во втором русском издании [9'] Кнут относит эти рассуждения к более ранней работе H.S.Wall'a в Bulletin of the American Mathematical Society "On the n -th derivative of $f \int$ ". – 1938, 44, pp. 395 – 398. [См. там же примыкающую непосредственно заметку: I. Opatowski. Combinatoric interpretation of a formula for the n -th derivative of a function of a function. –1939, 45, p. 944].

²⁰ Непониманием значимости этого обстоятельства и отсутствием необходимых разъяснений часто грешит многочисленная физическая литература, включающая и замечательные книги, как-то, например: Б.Т. Гейликман. Статистическая теория фазовых превращений. М.: ГИТТЛ, 1954, 119с. – см. стр.15, формула

2. Автор настоящих строк проделал вывод первой формулы Ф. Фаа ди Бруно со всей возможной полнотой, и из первой формулы (непосредственно из неё необходимыми подстановками, формированием «треугольной» системы линейных алгебраических уравнений и решением этой системы относительно одной из компонент – последней компоненты – по правилу Крамера) *вывел* вторую (детерминантную) формулу Ф. Фаа ди Бруно.

3. В предложенном настоящем тексте также констатируется и доказывается взаимная выводимость²¹ одной (первой) формулы Ф. Фаа ди Бруно (10) из другой (второй детерминантной) его формулы (23) см. основополагающие короткие работы Ф. Фаа ди Бруно [6] и [7].

4. Мы отмечаем также (см. **Замечание 2** предыдущего раздела **18**) возможность независимого вывода первой формулы Ф. Фаа ди Бруно путём обращения вывода, т.е. сначала вывода второй формулы Ф. Фаа ди Бруно при помощи одного из предложений в теории определителей²², а затем уже вывода из неё первой формулы Ф. Фаа ди Бруно как в разделах **16** и **17** настоящей работы.

5. *Сформулируем следующую задачу.* Возможно ли *обобщение* операции дифференцирования (в духе, например, квантовой q – производной по В. Кацу и П. Чену – см. [18; §§ 1 и 2]) такое, что дифференциальные q – мономы в производной порядка n от суперпозиции двух функций кодировались бы элементами (блоками, выделенной компонентой – см. указанные далее источники) q – решёток, обобщающих по Даулингу решётку разбиений n – элементного множества [19 - 19'], [4; разд. 5.3] ?

(1,6), или книга: Дж. Майер, М. Гёпперт-Майер. Статистическая механика / Пер. с англ. под ред. Д.Н. Зубарева, М.: Мир, 1980, 544с.:см. Примечания, разд. VI, пункт 6 на стр. 518 (второго) русского издания.

²¹ С некоторыми необходимыми сингулярностями и соответствующими ограничениями, накладываемыми необходимостью положительных целых значений *порядка* определителя специального вида, рассмотренного нами при выводе формул (23) и (24).

²² Непосредственного установленного московским математиком А.П. Поляковым (опубликовано в «Математическом Сборнике» в 1909-м году) – [17; Теор. 1 на стр.180 – 182 и вывод в виде Теор. 5 из §5 на стр. 195 – 197].

6. Автору хотелось осветить с достаточной, но вряд ли исчерпывающей весь предмет, полнотой и ясностью ряд вопросов. Кроме того, автору хотелось придать рассматриваемым вопросам несколько более умозрительный (с уклоном в математическую теорию алгоритмов) и менее технологический стиль, исповедуемый в книгах Дональда Эрвина Кнута («Искусство» [9-9’], «Конкретная математика» - совм.с Р. Грэхемом и О. Паташником). Насколько автору удалось достичь поставленных целей – об этом судить читателям и Коллегам, но никак не самому автору.

7. Первоначально работа (как одна из частей) была представлена докладом автора²³ «Комбинаторно-алгоритмические доказательства формул Лейбница и Фаа ди Бруно» на секции комбинаторного анализа (рук. секции проф. В.С. Шевелёв) на VI Межгосударственном семинаре по дискретной математике и её приложениям (Москва, МГУ, 2 – 6 февраля 1998г.).

Литература

1. Коганов Л.М. Правило произведения и правило цепочки. (Светлой памяти А.С. Кронрода) // Труды учёных МГПУ, вып. IV / Под ред. Н.П. Пищулина, - М.: МГПУ, 2006, - с. 118-127.

2. Коганов Л.М. Последовательное дифференцирование и перечисление: анализ, комбинаторика. Алгоритмы. (Светлой памяти Николая Борисовича Васильева) // Труды учёных МГПУ, вып. V / Под ред. Н.П. Пищулина. – М.: МГПУ, 2008, - с.188-200.

3. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I / Пер с нем. и с англ. Э.Г. Либина и Ю.Л. Рабиновича. – М.: Наука, 1967. – 704с.

4. Дубиле П., Рота Дж.-К., Стенли Р.

Об основах комбинаторной теории (IV): идея производящей функции.//.

²³ Сообщение о докладе см. в сб. «Математические вопросы кибернетики», вып.7, М.: Наука. Физматлит, 1998. – 368с. – на стр. 363.

В кн.: «Перечислительные задачи комбинаторного анализа» / Сб. переводов (Библиотека «Кибернетического сборника») под ред. Г.П. Гаврилова. М.: Мир, 1979. – 363с.: см.с. 160 – 228; РЖ Мат 1980, 3В545К.

4'. Doubilet Peter, Rota Gian-Carlo, Stanley Richard.

On the foundations of combinatorial theory (VI): The idea of generating function. Proceedings of the sixth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability (University of California, June 21 – July 18, 1970) (ed. Be Lucien Le Cam, Jerzy Neyman and Elizabeth L Scott), Berkeley and Los Angeles, 1972, pp.267 – 318.

5. Comtet, Louis. Polynomes de Bell et formule explicite des derivees sucesives d'une fonction implicite. // Comptes rendus de l'Academie des Sciences de Paris, 1968, T. 267, №14 (30septembre), p. A457-A460.

6. Faa di Bruno, Francesco. Sullo sviluppo delle funzioni. // Annali di Scienze Mathematiche e Fisiche (di Tortolini), 1885 (novembre), - p. 479-480.

7. Faa di Bruno, Francesco. Note sur une nouvelle formule de calcule differentiel. // The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics (ed. by J.J. Sylvester and N.M. Ferrers), 1857, 1, p. 359-360.

8. Faa di Bruno, Francesco. Theorie des formes binaries, Turin, Librairie Brero succ. de P. Marietti, 1876, I-XIII, 320 p., tables des invariant et des covariants.

9. Кнут Д.Э. Искусство программирования для ЭВМ, т.1. Основные алгоритмы. / Пер с англ. под ред. К.И. Бабенко и В.С. Штаркмана. М.: Мир, 1976, 735 с.

9'. Кнут, Дональд Эрвин. Искусство программирования, том1. Основные алгоритмы, 3-е изд. / Пер с англ. под общ ред. Ю.В. Казаченко. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004, 720 с.:ил.

10. Johnson, Warren P. The curious history of Faa di Bruno's formula. // American Mathematical Monthly, 2002, 109, №3 (March), p. 217-234.

11. Ожигова Е.П.. Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII – первой половине XIX – в., Л., «Наука», 1980, 221с.

12. Коганов Л.М. Псевдопорождаемые двухиндексные последовательности. – М.: Недра, 1989. – 86с., РЖ Мат 1990, 1В380К.
13. Гурвиц Адольф Теория аналитических и эллиптических функций / Пер. с нем. Ю.В. Икорникова под ред. Н.Е. Кочина. – М. – Л.: ГТТИ, 1933. – 344с.
14. Frucht, Roberto. A combinatorial approach to the Bell polynomials and their generalizations, in «Recent Progress in Combinatorics» (W.T. Tutte ed.), New York, Academic Press, 1967, p. 69-74.
15. Лисковец В.А. Об одном рекуррентном методе подсчёта графов с отмеченными вершинами. Доклады АН СССР, 1969, том 184, №6, с. 1284 – 1287. РЖ Мат 1969, 8В193.
18. Риордан, Джон. Введение в комбинаторный анализ / Пер. с англ. Л.Е. Садовского под ред. Л.Я. Куликова. – М.: ИЛ, 1963, 287 с., РЖ Мат , 1963, 9А124К.
17. Поляковъ А.П. О выражении производной любого порядка функции от функции. // Математический Сборникъ, 1909, том 27, вып. 2, с. 180-202.
18. Кац В.Г., Чен П. Квантовый анализ / Пер. с англ. Ф.Ю. Попеленского и Ж.Г. Тотровой. – М.:МЦНМО, 2005. – 128с.
19. Dowling T.A. A q -analog of the partition lattice. University of North Carolina at Chapel Hill. Institute of Statistics Mimeo Series №779, November, 1971, I+24p.
- 19' Dowling T.A. A q -analog of the partition lattice, in: «A Survey of Combinatorial Theory» / J.N.Srivastava et al., eds, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1983, Chapter II, pp. 101 – 115.

ЭВОЛЮЦИОННО-ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ ТРАССИРОВКИ ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ

И.В. Козин, ainc@ukrpost.net, Е. В. Кривцун, kryvtsun@ukr.net

Запорожский национальный университет

В работе рассматривается комбинаторная задача однослойной трассировки на плоской целочисленной решетке. Показано, что эта задача сводится к задаче поиска слов определенного вида над

конечным алфавитом. Получена комбинаторная оценка количества правильных слов. Показано, что задача поиска трассировки минимальной плотности имеет фрагментарную структуру. Предложена эволюционно-фрагментарная модель задачи трассировки, для малых размерностей получены оптимальные и близкие к оптимальным решения этой задачи.

In this paper we consider combinatorial problem of the single-layer routing on plane integer lattice. It is shown that this problem is reduced to a problem of searching for words with certain properties over a finite alphabet. There was derived combinatorial estimate for set of feasible words. It is shown that the task of searching for the minimum line density routing has a fragmentary structure. There was proposed evolutionary-fragmentary model for the routing problem, and obtained optimal and near-optimal solutions of this problem for small sizes.

Одна из основных задач трассировки заключается в построении соединений между заданными контактами таким образом, чтобы проводники не пересекались между собой и при этом выполнялись бы определенные конструктивные ограничения [1].

Рассматривается задача трассировки на квадрате $n \times n$ [2]. Допустимой будем называть трассировку без пересечений проводников с определенным порядком прохождения клеток квадрата (микродискрет). На рис. 1 приведен пример допустимого решения задачи для $n = 5$.

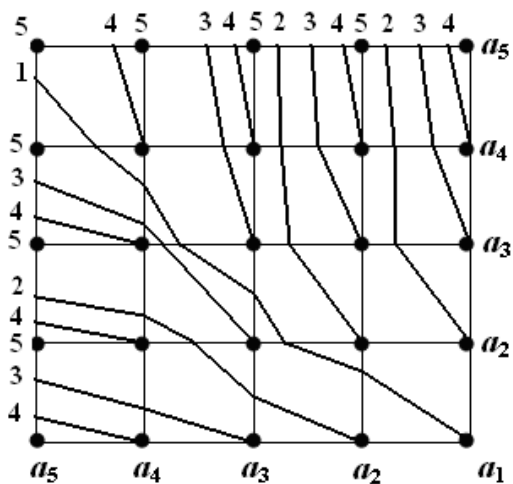


Рис.1

Рассмотрим слово в алфавите a, b, \dots . Обозначим через $A \setminus x$ слово, которое получается удалением всех вхождений буквы x в слово A .

Каждая реализация допустимой трассировки может быть описана некоторым словом A в алфавите a_1, a_2, \dots, a_n . Например, слово A_5 , определяющее трассировку, приведенную

на рис. 1, задано в алфавите a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и имеет вид

$$A_5 = a_5 a_4 a_3 a_5 a_4 a_2 a_5 a_4 a_3 a_5 a_1 a_5 a_4 a_5 a_3 a_4 a_5 a_2 a_3 a_4 a_5 a_2 a_3 a_4 a_5.$$

Пусть A – произвольное слово в алфавите a_1, a_2, \dots, a_n . Спектром слова будем называть последовательность слов

$$A_n = A, \quad A_{n-1} = A_n \setminus a_n, \quad A_{n-2} = A_{n-1} \setminus a_{n-1}, \dots, \quad A_0 = A_1 \setminus a_1 = \emptyset$$

Слово A будем называть *правильным*, если:

- 1) любое слово спектра A_i начинается и заканчивается буквой a_i , $i = 1, 2, \dots, n$;

2) буква a_i входит в слово A ровно $2i - 1$ раз.

Теорема. Каждому правильному слову соответствует допустимая трассировка в квадрате. Наоборот, каждая допустимая трассировка описывается правильным словом.

Показано, что количество правильных слов в алфавите a_1, a_2, \dots, a_n определяется формулой:

$$N = \prod_{k=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{k^2} C_{k^2-1}^{s-1} C_{2k}^s.$$

Рассмотрим теперь задачу об оптимальной трассировке, состоящей в отыскании такой допустимой трассировки A на заданном квадрате размером $n \times n$, для которой плотность проводников P_A^n в микродискрете - минимальна. Пусть P_i ($i = \overline{1, n^2}$) - количество проводников в i -м микродискрете. Задача состоит в поиске минимума целевой функции

$$P_A^n = \max P_i \rightarrow \min,$$

на множестве допустимых трассировок, или, что, то же самое, на множестве правильных слов в алфавите a_1, a_2, \dots, a_n .

В работе рассматривается эволюционно-фрагментарная модель [3] задачи трассировки. При этом допустимыми фрагментами являются все те слова, которые можно дополнить до правильного слова дописыванием букв. Элементарными фрагментами – однобуквенные слова.

Длина максимального фрагмента, т.е. слова A , равна $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

Фрагментарный алгоритм позволяет построить отображение из множества S_{n^2} всех перестановок размерности (n^2) на множество правильных слов.

Наличие фрагментарной модели позволяет перейти к эволюционно-фрагментарной модели. В качестве базового множества эволюционной модели предлагается множество перестановок S_{n^2} . Каждая перестановка соответствует определенному порядку следования фрагментов фрагментарной модели. В качестве оператора кроссовера выбирается бинарный оператор $K : S_{n^2} \times S_{n^2} \rightarrow S_{n^2}$, сохраняющий порядок.

В качестве оператора мутации предлагается оператор, случайным образом меняющий два наугад выбранных элемента в перестановке.

Благодаря этому подходу удалось получить оптимальные трассировки при значениях $n \leq 9$. Предлагаемый подход может быть легко обобщен на случай более сложных конфигураций печатных плат.

Литература.

- [1] Ильин В.Н. Автоматизация схемотехнического проектирования: Учеб. пособие для вузов / В. Н. Ильин, В. Т. Фролкин, А. И. Бутко и др. - М. : Радио и связь, 1987. – 368 с.
- [2] Невлюдов И.Ш. Трассировка подключающей пластины многозондового устройства контроля BGA-компонентов / Невлюдов И.Ш., Курапов С.В. и др. // VI Международная научная конференция «Функциональная база нанoeлектроники». Сборник научных трудов. –Харьков: ХНУРЭ. 2013. –С.129-132.
- [3] Козин И.В. Использование ЭВФ-алгоритмов для решения задачи прямоугольного раскроя / И.В. Козин, С.И. Полюга // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. праць; – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту ім. Олеся Гончара, – Дніпропетровськ, 2009. – С. 199-208.

ГРАЦИОЗНЫЕ РАЗМЕТКИ ГРАФОВ В ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Коновалов А. Д.

*Кировоградская летная академия Национального авиационного
университета*

Грациозная разметка и грациозные графы изучаются более сорока лет, с тех пор как они были открыты Роса в 1967 году [1]. Пусть задан граф $G=(V, E)$, разметка вершин $l : V \rightarrow \{0, \dots, |E|\}$ является грациозной, если не существует двух вершин с одинаковыми метками и каждое ребро маркируется уникальным числом, полученным из модуля разности меток

вершин на его концах. Эта разметка очень тесно связана с линейками Голомба [2].

Линейка Голомба – это особый тип линейки, при помощи которой выполняются все возможные измерения от 1 до m без повторения измерений и $m=C_n^2$. Разница каждой C_n^2 пары отметок дает разные измерения от 1 до C_n^2 . Это процесс связан с построением грациозного графа K_n . Граф будет грациозным, если он имеет грациозную разметку. Не все графы грациозные. Согласно теореме [3], доказанной Симмонсоном с помощью линейки Голомба, граф K_n для $n \geq 5$ не является грациозным. Полные графы имеют огромную сферу применения. Но тот факт, что не существует полного грациозного графа K_n для $n \geq 5$, представляет собой препятствие, которое можно преодолеть, введя допущения в требования грациозной разметки. В [4] рассмотрены три допущения. Пусть задан граф $G=(V, E)$. Разметка его вершин называется: диапазоно-слабой, если метки вершин могут принимать значения большие чем $|E|$; вершинно-слабой, если значения меток вершин могут повторяться; реберно-слабой, если значения меток ребер могут повторяться. Для диапазоно-слабой разметки Блум и Голомб [5] используют термин – «безизбыточная» разметка. Они так же создали «безизбыточную» линейку. Такая линейка используется в радиолокации для кодирования импульсов радара и может быть использована в гражданской авиации в сфере управления воздушным движением.

Физической основой радиолокации является рассеяние радиоволн объектами, отличающимися своими электрическими характеристиками от соответствующих характеристик окружающей среды при их облучении. Первой и основной задачей радиолокационной станции является обнаружение полезного радиосигнала, отраженного от объекта (цели), т.е. вынесение решения о присутствии полезного сигнала в поступающей на вход приемного тракта смеси полезного сигнала с помехами, называемой входной реализацией. Эта статистическая задача решается входящим в радиолокационное устройство специальным устройством — обнаружителем,

в котором стараются использовать алгоритм оптимального (наилучшего) обнаружения. Для этого сигнал предварительно проходит импульсную модуляцию. Качество процесса обнаружения характеризуется вероятностью правильного обнаружения, когда присутствующий во входной реализации сигнал обнаруживается, и вероятностью ложной тревоги, когда за полезный сигнал принимается помеха, а сам сигнал отсутствует.

Импульсная модуляция [6] — это модуляция, при которой в качестве несущего сигнала используется периодическая последовательность импульсов, а в качестве модулирующего может использоваться аналоговый или дискретный сигнал.

Поскольку периодическая последовательность характеризуется четырьмя информационными параметрами (амплитудой, частотой, фазой и длительностью импульса), то различают четыре основных вида импульсной модуляции:

- амплитудно-импульсная модуляция: происходит изменение амплитуды импульсов несущего сигнала;
- частотно-импульсная модуляция: происходит изменение частоты следования импульсов несущего сигнала;
- фазоимпульсная модуляция: происходит изменение фазы импульсов несущего сигнала;
- широтно-импульсная модуляция: происходит изменение длительности импульсов несущего сигнала.

В нашем случае применяется фазоимпульсная модуляция. Модуляция импульса может быть использована для исключения неопределенности между последовательными импульсами. Добавление модуляции к каждому импульсу позволяет ввести уникальное кодирование соседних импульсов. Это позволяет нам закодировать импульсы так, что задержка на двойное прохождение каждого импульса в прямом и обратном направлениях легко и однозначно измеряется благодаря уникальному кодированию каждого импульса, используемому в качестве средства разделения импульсов.

Линейки Голомба, основанные на диапазонно-слабой разметке, могут применяться для обнаружения местонахождения воздушного судна в пространстве. Рассмотрим следующий сценарий: пусть посылаемая череда импульсов, соответствует линейке $P = \{r_1, \dots, r_n\}$ длиной $l = r_n - r_1$, основанной на диапазонно-слабой разметке. Это означает, что первый импульс выпущен во время r_1 , второй во время r_2 и т.д. Передающая антенна излучает набор импульсов, который после отражения от цели (самолета) возвращается на приемную антенну вместе с шумами и помехами. Мы определяем продолжительность момента времени от излучения до возвращения импульсов, неоднократно сопоставляя последовательность возвращения с первичной. Нам необходимо, чтобы радиолокационная станция распознала именно тот сигнал, который нас интересует (отраженный от самолета). Когда поступающая последовательность соответствует первичной, генерируется высокоэнергетический сигнал силой n . В любом другом случае возникает низкоэнергетический сигнал, который из-за фильтра не возбudit детектор. Причина заключается в том, что, когда поступающий сигнал прибывает в каждой единице времени t , где $0 \leq t \leq l$, импульс, соответствующий r_i поступающей последовательности, совпадет с импульсом, соответствующим r_j первичной последовательности, если $|r_i - r_j| = t$. Так как кодирование импульса было основано на диапазонно-слабой разметке, каждое из чисел t , появляется лишь один раз.

Благодаря использованию диапазонно-слабой разметки в кодировании импульсов радара вероятность ложной тревоги существенно снижается, что повышает точность в определении местоположения объекта (цели).

Литература

1. Rosa A. On certain valuations of the vertices of a graph. Theory of Graphs (Internat. Symposium. Rome). 1966 – P. 349-355.
2. Gardner M. Mathematical games. Scientific American. 1972 – Vol. 226 P. 116-118.
3. <http://web.cs.gc.cuny.edu/~vmitsou/thesis2.pdf>.

4. Van F., Bussel. Relaxed graceful labeling of trees. The electronic journal of combinatorics. 2002 – 9(R4) P. 1.

5. Bloom G., Golomb S. Applications of numbered undirected graphs. Proceedings of the IEEE. 1977 – Vol. 65, № 4, P.562-570.

6. <http://conture.by/post/422>.

КЛАСИФІКАЦІЯ МІНІМАЛЬНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ НА КВАЗІГРУПАХ

Крайнічук Г.В. kraynichuk@ukr.net

Вінницький соціально-економічний інститут Університету «Україна»

Каждая конечная квазигруппа удовлетворяет некоторое тождество типа (m,2). В.Д. Белоусов классифицировал некоторые тождества типа (3,2) с точностью до парастрофной эквивалентности. В данной работе приводится классификация квазигрупповых тождеств типа (2,2).

Every finite quasigroup satisfies some identity of the type (m,2). V.D.Belousov had classified some identities of the type (3,2) up to parastrophic equivalency. Here, a classification of quasigroup identities of the type (2,2) is given.

Операція, що визначена на скінченній чи нескінченній множині називається квазігруповою або оборотною, якщо вона оборотна по кожній своїй змінній, тобто кожне із рівнянь $f(x, a) = b, f(a, y) = b$ має єдиний розв'язок для всіх $a, b \in Q$. Співставлення кожній парі (a, b) розв'язок першого рівняння називають лівим діленням і позначають ${}^l f$, а співставлення парі (a, b) розв'язок другого рівняння називають правим діленням і позначають ${}^r f$. Крім того, розглядають комутування, тобто ${}^s f(x, y) = f(y, x)$. Розглядають також ділення від ділення. Всі такі операції називають парастрофами. Кожна квазігрупа має не більше, ніж шість парастрофів.

Вивчення оборотних операцій спричинено різноманітними їх застосуваннями при плануванні проведення експериментів у комбінаториці [1], в алгебрі [2], в кодуванні [3], при побудові номографічних сіток в геометрії [1] тощо. Застосування скінченних квазігруп та їх комбінаторного

аналогу – латинських квадратів, наведено в монографіях [1], [3], [4].

На відміну від груп, кількість скінченних квазігруп стрімко зростає разом з кількістю елементів, на яких вони визначені. Лише з точністю до ізоморфізму квазігруп уже 10 порядку є понад 10^{30} , тоді як класів квазігруп десятого порядку з точністю до ізоtopії є 10^{18} . Порядком квазігрупи є число її елементів. Тому постає питання про побудову квазігруп з наперед заданими потрібними властивостями. Найкращими способами такої побудови є методи алгебри, які полягають у вивченні певних класів квазігруп. Найбільш вивченими серед усіх класів квазігруп є многовиди, тобто класи квазігруп, які визначаються тотожностями.

Кажуть, що тотожність і многовид, який вона визначає, має тип $(m;n)$, якщо вона має дві предметних змінних, кількість появ кожної з них дорівнює m і n відповідно. Зауважимо, що кожна скінченна квазігрупа задовольняє тотожність типу $(m;2)$ для деякого m .

В.Д. Білоусов [5] встановив, що мінімальними тотожностями в класі квазігруп є тотожності типу $(3;2)$ і довів, що кожна така тотожність гарантує квазігрупі ортогональність певних парастрофів, а також, що з точністю до парастрофної рівносильності таких тотожностей є сім. Нагадаємо [6], що дві тотожності називаються парастрофно рівносильними, якщо одну з іншої можна отримати за скінченну кількість застосувань тотожностей, які визначають квазігрупу:

$$f(lf(x,y),y) = x, \quad f(x, rf(x,y)) = y, \quad r(rf) = f, \quad l(lf) = f$$

та перейменування функційних і предметних змінних.

Проте, як виявилось, уже навіть тотожності типу $(2;2)$ мають широке застосування в криптографії [7], [8]. Тому природнім є питання класифікації тотожностей типу $(2;2)$ з точністю до парастрофної рівносильності.

Теорема. *Квазігрупа $(Q;\cdot)$ задовольняє тотожність*

$$\sigma f(x,y) = \pi f(x,y)$$

для деяких $\sigma, \pi \in S_3 := \{i, l, r, s, sl, sr\}$, тоді і тільки тоді, коли

- 1) $(Q; \cdot)$ є довільною квазігрупою, якщо $\sigma = \pi \in S_3$,
- 2) $(Q; \cdot)$ є комутативною квазігрупою з $xy = yx$, якщо $\sigma \in \{s, r, l\}$, $\pi = \iota$ або $\pi \in \{s, r, l\}$, $\sigma = \iota$ та $\sigma \in \{sl, sr\}$, $\pi \in \{s, r\}$ або $\pi \in \{sl, sr\}$, $\sigma \in \{s, r\}$,
- 3) $(Q; \cdot)$ є косиметричною квазігрупою з $y = xy \cdot x$, якщо $\{\sigma, \pi\} \in \{\{\iota, sl\}, \{r, l\}, \{sl, sr\}, \{s, r\}, \{s, l\}\}$.

Література

1. *Chein O., Pflugfelder H.O., Smith J.D.H.* Quasigroups and Loops: Theory and Applications// Sigma Series in Pure Mathematics, 1990. – Vol.8. – 567p.
2. *Taylor M.A.* A generalization of a theorem of Belousov // Bull. London Math. Soc. – 1978. – **10**, №3.– P. 285-286.
3. *Shcherbacov V.A.* Quasigroup in cryptology// Computer Science Journal of Moldova, 2009. – Vol.17, no. 2(50). – P.193-228.
4. *Denes J., Keedwell A.D.* Latin square and their applications. – Budapest: Academiai Kiado, 1974. – P.547.
5. *Belousov V.D.* Parastrophic-orthogonal quasigroups. Quasigroups and Related Systems 13 (2005), P.25-72
6. *Сохацький Ф.М.* Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах // Укр.мат.журн., – 2004.– **56**, №9.– С.1259-1266.
7. *Krapez A.* Cryptographically Suitable Quasigroups via Functional Equations. Publ. Inst. Math. of the Serbian Academy of Sciences and Arts Knez Mihailova 36 (Belgrade)
8. *Markovski S., Dimitrova V., Samardjiska S.* Identity sieves for quasigroups. Quasigroups and Related Systems 18 (2010), P.149-163.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТОГО ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМБИНАТОРНЫХ ПОЛИНОМОВ РАЗБИЕНИЙ

Кузьмин О. В., quzminov@mail.ru

Мельникова В. А., Vera_smart@rambler.ru

ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет (ИГУ)»,

ФГБОУ ВПО «ИГУ» филиал в г. Братске

Рассматривается актуальная задача разработки специализированного программного обеспечения для автоматизированного построения комбинаторных полиномов класса разбиений и реализации их приложений. Приведен пример использования разработанного программного обеспечения для моделирования процесса движения топливных запасов ТЭЦ, а также характеристика основных принципов разработки ПО.

The problem of development of special software designed for automated combinatorial polynomials construction and its application is considered. Example of software application in inventory management on thermoelectric plants is presented. The main principles of the software are described.

Комбинаторные полиномы разбиений представляют интерес с точки зрения их практического применения, так как они могут быть использованы для обращения комбинаторных сумм и моделирования дискретных распределений. Соотношения и основные свойства комбинаторных полиномов класса разбиений рассмотрены в ряде работ представителей Иркутской комбинаторной школы (см. например [1], [2] и др).

К классу комбинаторных полиномов разбиений относятся однородные полиномы Белла (А-полиномы) и однородные полиномы Платонова (В-полиномы), а также полиномы других видов. Рассматриваемые объекты являются аналитически сопряженными посредством выражения через компоненты разложения двух взаимобратных функций. Указанное свойство А- и В-полиномов является актуальным в случае их приложения для составления комбинаторных моделей случайных процессов и явлений. Выбор используемого вида полиномов в данном случае определяется наличием исходных данных, отражающих закономерности формирования характеристик исследуемого процесса.

В работах О.В. Кузьмина [1] и [2] приведены комбинаторно-вероятностные модели дискретных процессов восстановления различных видов. При этом под дискретным процессом восстановления в классическом понимании подразумевается процесс последовательного отказа и восстановления элементов сложной системы [3]. Однако, возможно применение концепции процесса восстановления не только для моделирования поведения сложных систем, но и для таких приложений, как: задачи теории надежности, прогнозирование экономических процессов, управление запасами и др. В частности, в работе [4] рассматривается вопрос применения комбинаторно-вероятностной модели простого дискретного процесса восстановления для решения задачи планирования запасов топлива ТЭЦ, проводится адаптация модели, предложенной О.В. Кузьминым, с учетом специфики выбранной предметной области, а также представлены результаты экспериментальных расчетов.

Рассматриваемые комбинаторно-вероятностные модели предполагают использование матриц из А- или В-полиномов. Часть бесконечных нижних треугольных матриц, содержащих в качестве своих элементов А- или В-полиномы представлена в таблицах источника [2]. Однако, размерность представленных матриц для А-полиномов составляет 10, а для В – 8 строк, что выступает ограничением для длительности периода моделирования дискретного процесса восстановления. Следовательно, для проведения прогнозирования на более длительный период необходимо построение дополнительных полиномов. Эта операция может осуществляться на основе различных соотношений, в том числе и рекуррентных, опубликованных в работах [1], [2] и др. Однако, осуществление построения вручную – довольно трудоемкий процесс, предполагающий проведение многочисленных операций дифференцирования полиномов, сопряженных с повышением риска допустить ошибку. Поэтому актуальной является задача автоматизации процесса построения А- и В-полиномов на основе специально разработанного программного обеспечения. На сегодняшний день на рынке

программных средств практически отсутствуют продукты, реализующие функцию построения А-полиномов, а вопрос формирования В-полиномов не охвачен разработчиками программного обеспечения вообще.

Вопросы проектирования, разработки и апробации программного комплекса, предназначенного для автоматизированного построения комбинаторных полиномов разбиений, а также реализации их приложений рассмотрены в работах [4], [5].

Разработанное программное обеспечение обладает следующими функциями:

- автоматизированное построение А-, В-полиномов и матриц из них;
- автоматизированное нахождение ряда характеристик простого дискретного процесса восстановления на основе заданных вероятностей отказа элементов системы (см. рис. 1).

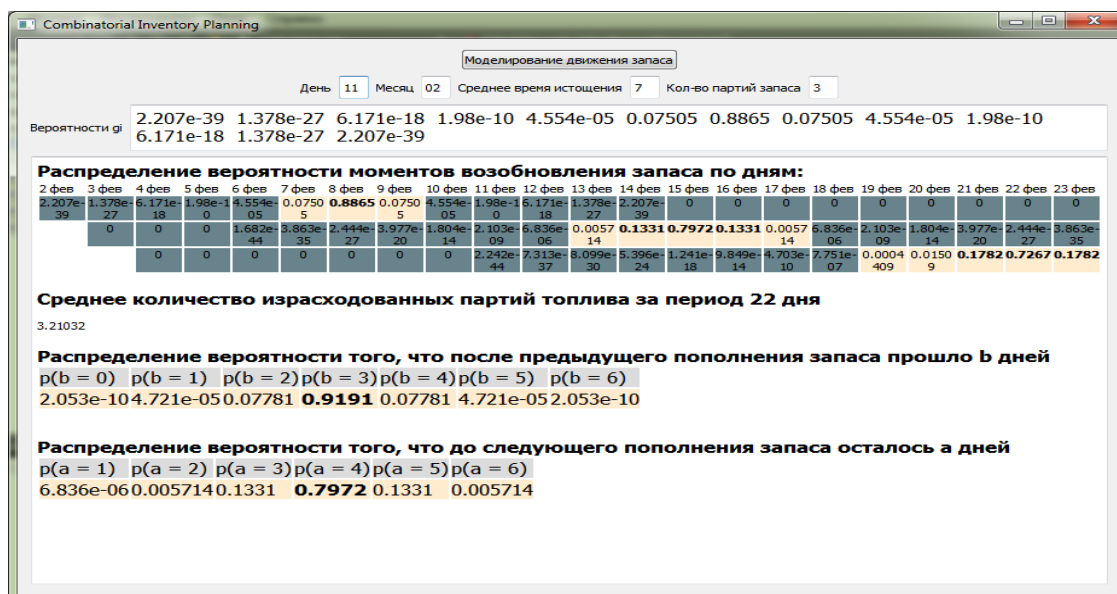


Рис. 1 – Пример рабочего окна программного комплекса с результатами расчета параметров процесса движения топливных запасов ТЭЦ.

В данном случае осуществляется нахождение вероятностных распределений некоторых параметров процесса движения топливных запасов ТЭЦ, рассматриваемых как случайные величины, и прогнозирование на их

основе наиболее вероятной даты очередного события пополнения запаса топлива.

При разработке программного обеспечения использованы следующие принципы:

- экономичное расходование задействованной оперативной памяти, которое достигается за счет применения специально разработанной динамической структуры данных, предложенной в [4].;

- оперативность построения комбинаторных объектов;

- наглядность представления результатов для конечного пользователя.

По итогам анализа результатов компьютерного моделирования процесса движения топливных запасов, осуществленного средствами разработанного ПО, можно заключить, что применение адаптированной комбинаторно-вероятностной модели и разработанного программного комплекса позволяет:

- эффективно осуществлять моделирование независимо от сезона, закона распределения моментов пополнения топливных запасов, без учета вида используемого топлива и архитектуры ТЭЦ без кардинального изменения принципов и алгоритмов расчета;

- оперативно корректировать прогноз движения топливных запасов при резком изменении интенсивности их расходования.

Литература

1. Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 294 с.
2. Кузьмин О.В. Комбинаторные методы моделирования дискретных распределений. – 2-е изд., испр. и доп. – Иркутск: Иркут.ун-т, 2006. – 138 с.
3. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967. - 299 с.
4. Кузьмин О.В., Мельникова В.А. Вычисление параметров процесса планирования запасов топлива ТЭЦ на основе матриц из однородных

полиномов Белла // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2013. – № 4 (40). – С.8-14.

Кузьмин О.В., Мельникова В.А. Алгоритмический комплекс построения однородных полиномов Платона на основе метода рекуррентных соотношений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 2 (38). С.46-51.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКРИПТОСТОЙКИХ ГЕНЕРАТОРОВ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Лысенко И. А., Смирнов А. А.

i1978@inbox.ru

Кировоградский национальный технический университет

Наибольшее распространение в технике военной связи получили ГПСЧ основанные на использовании регистров сдвига с линейными обратными связями (РСЛОС). РСЛОС состоит из двух частей: регистра сдвига и функции обратной связи. Простейший регистр сдвига с линейной обратной связью представлен на рис.1.

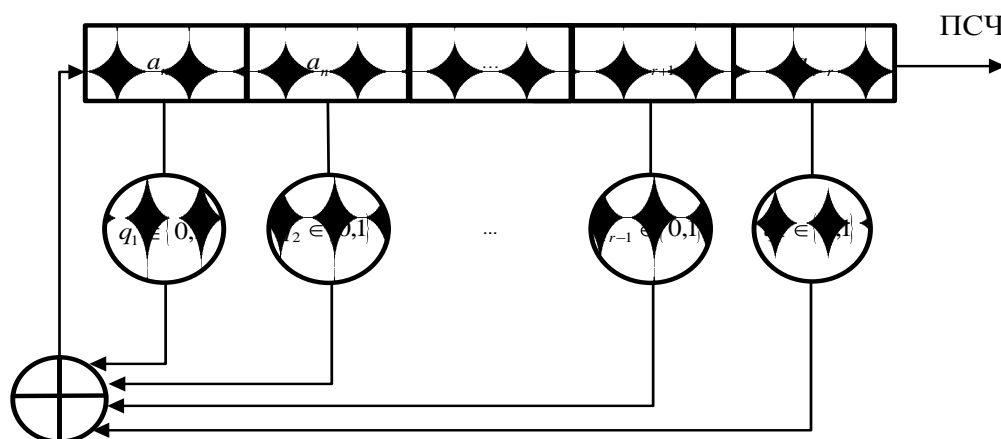


Рис.1. Регистр сдвига с линейной обратной связью

Теоретической основой для реализации ГПСЧ на РСЛОС является теория конечных полей и теория линейных последовательных машин.

Практическая реализация ГПСЧ на основе РСЛОС возможна с использованием двух способов формирования ПСП (комбинирование и фильтрование). Способ комбинирования состоит в использовании нелинейной функции от нескольких выходных значений, параллельно расположенных РСЛОС. Схема комбинирующего генератора представлена на рис.2.

Генераторы, основанные на способе фильтрования генерируют выходную последовательность как некоторую функцию от состояния единственного РСЛОС. Общая схема такого генератора представлена на рис. 3.

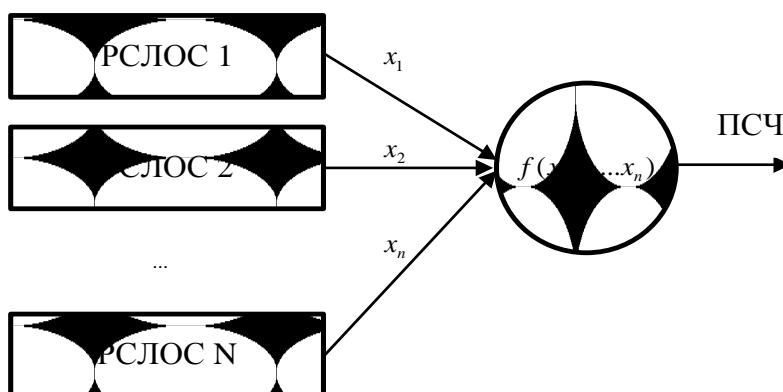


Рис.2. Комбинирующий генератор

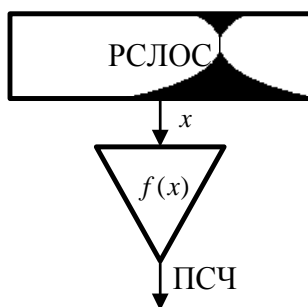


Рис 3. Фильтрующий генератор

Основными достоинствами ГПСЧ реализованных на РСЛОС являются:

– максимальный период формирующей последовательности

$$P_{\max} = 2^l - 1,$$

где l - количество ячеек памяти РСЛОС

– простота программной и аппаратной реализации;

– высокая статистическая безопасность.

Основным недостатком ГПСЧ основанных на РСЛОС является низкая структурная скрытность.

Следующим, широко используемым классом некриптостойких генераторов, являются конгруэнтные генераторы. Для этого класса генераторов можно сделать строгое математическое заключение о том, какими свойствами обладают выходные последовательности этих генераторов с точки зрения периодичности и случайности.

Проведенный анализ показал, что чаще всего на практике используются линейные конгруэнтные генераторы. Сформированные в таких генераторах последовательности можно представить в виде аналитического выражения:

$$x_i = (ax_{i-1} + b) \bmod m \quad (1)$$

где x_i – i -й элемент псевдослучайной последовательности;

$a \neq 0$ – множитель;

b – приращение;

m – мощность последовательности (модуль).

Для любых $k \geq 1, t \geq 0$ общий элемент конгруэнтной последовательности, определяемый выражением (1.1) удовлетворяет соотношению:

$$x_{t+k} = \begin{cases} (x_t + kb) \bmod m, & \text{если } a = 1 \\ (a^k x_t + \frac{a^k - 1}{a - 1} b) \bmod m, & \text{если } a > 1. \end{cases}$$

При этом найдется такой номер $0 \leq \alpha \leq m - 1$, что последовательность, описываемая выражением (1), начиная с этого номера α , повторяться с периодом $1 \leq T \leq m$, таким, что $\alpha + T \leq m$:

Для линейной конгруэнтной последовательности максимальное значение периода m_{\max} достигается тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. $\text{НОД}(b, m) = 1$;

2. $m = p_1^{r_1} * p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k} \Rightarrow (\forall i \in \overline{1, k} \Rightarrow a - 1 = l_i * p_i)$, p_i - простые числа $\forall i \in \overline{1, k}$;

3. $m = 4 * l_1 \Rightarrow a - 1 = 4 * l_2$, $l_1, l_2 \in N$.

Основными достоинствами конгруэнтных генераторов и генераторов, основанных на РСЛОС, являются:

- максимальный период формирующей последовательности;
- простота программной и аппаратной реализации;
- возможность построения на их основе генераторов, обладающих свойствами, необходимыми для решения прикладных вопросов защиты информации.

Таким образом, недостатком таких генераторов является формирование псевдослучайных чисел не криптостойких к различным видам криптоанализа (корреляционный, инверсный и др.). Поэтому конгруэнтные генераторы и генераторы, основанные на РСЛОС, используются для решения задач защиты информации в качестве составных элементов криптосхем.

МАГИЧЕСКИЙ ТЕССЕРАКТ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н. В. Макарова, natalimak1@yandex.ru

г.Саратов, Россия

В данной статье рассматривается четырёхмерный магический гиперкуб – тессеракт – третьего порядка. Получена общая формула тессеракта, с помощью которой составлен нетрадиционный тессеракт из различных натуральных чисел. Высказана гипотеза об ассоциативности любого магического тессеракта третьего порядка. Поставлена задача – найти магический тессеракт третьего порядка из различных простых чисел.

4-dimensional magical hypercube (tesseract) of order 3 is considered. The common formula was developed which provided the non-traditional magical tesseract consisting of different integers. Hypothesis is stated regarding the associative property of the magical tesseract with the order of 3. The problem of finding the magical tesseract consisting of different prime numbers was stated.

Определение 1 (magic tesseract) A magic tesseract is a four-dimensional array, equivalent to the magic cube and magic square of lower dimensions, containing the numbers 1, 2, 3, ..., m^4 arranged in such a way that the sum of the numbers in each of the m^3 rows, m^3 columns, m^3 pillars, m^3 files and in the eight major quadragonals passing through the center and joining opposite corners is a constant sum S, called the magic sum, which is given by: $S = m(m^4+1)/2$ and where n is called the order of the tesseract. [1]

Определение дано для классического магического тессеракта порядка m . В статье рассматриваются магические тессеракты порядка $m=3$ – классические и нетрадиционные (определение нетрадиционного тессеракта дано ниже). В дальнейшем для краткости будем вместо “магический тессеракт третьего порядка” говорить “тессеракт-3”.

Классический тессеракт-3 составляется из чисел от 1 до 3^4 .
Магическая константа классического тессеракта-3

$$S = 3*(3^4 + 1)/2 = 123$$

На рис. 1 изображён классический тессеракт-3 [2].

Всего существует 58 различных классических тессерактов-3 с точностью до поворотов и отражений. ([3], [6])

В дальнейшем будем изображать тессеракт-3 в виде проекции на плоскость. Это будет квадрат 9×9 , который вследствие свойств тессеракта-3 является магическим ассоциативным квадратом с магической константой, равной утроенной магической константе тессеракта-3.

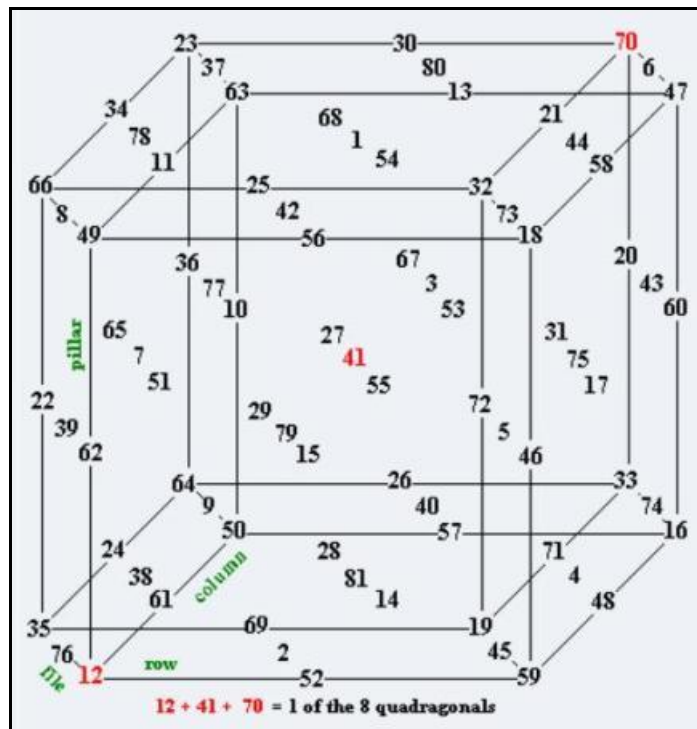


Рис. 1

На рис. 2 изображён классический тессеракт с рис. 1 в виде проекции на плоскость.

23	37	63	30	80	13	70	6	47
34	78	11	68	1	54	21	44	58
66	8	49	25	42	56	32	73	18
36	77	10	67	3	53	20	43	60
65	7	51	27	41	55	31	75	17
22	39	62	29	79	15	72	5	46
64	9	50	26	40	57	33	74	16
24	38	61	28	81	14	71	4	48
35	76	12	69	2	52	19	45	59

Рис. 2

Магическая константа этого квадрата равна $3S$, где S – магическая константа классического тессеракта-3. Этот квадрат 9×9 не только является магическим ассоциативным квадратом. В нём имеется несколько зависимостей между элементами, которые возникают вследствие свойств тессеракта-3 (см. определение 1).

Классический тессеракт-3 является *ассоциативным* (другой эквивалентный термин – “*центрально-симметричный*”). Это означает, что сумма любых двух элементов, симметрично расположенных относительно центра тессеракта-3, равна одному и тому же числу, называемому константой ассоциативности тессеракта-3.

Обозначим константу ассоциативности тессеракта-3 K . Утверждение об ассоциативности классического тессеракта-3 доказано в [3].

Используя свойство ассоциативности, легко доказать, что в классическом тессеракте-3

$$K=1+3^4$$

$$S=3 \cdot K/2$$

и центральный элемент равен $K/2$.

Построить классический тессеракт-3 можно, например, с помощью гиперкуба Эйлера (рис. 3).

2110	0021	1202	1001	2212	0120	0222	1100	2011
0201	1112	2020	2122	0000	1211	1010	2221	0102
1022	2200	0111	0210	1121	2002	2101	0012	1220
0221	1102	2010	2112	0020	1201	1000	2211	0122
1012	2220	0101	0200	1111	2022	2121	0002	1210
2100	0011	1222	1021	2202	0110	0212	1120	2001
1002	2210	0121	0220	1101	2012	2111	0022	1200
2120	0001	1212	1011	2222	0100	0202	1110	2021
0211	1122	2000	2102	0010	1221	1020	2201	0112

Рис. 3

Примечание: гиперкуб также изображён в проекции на плоскость.

Данный гиперкуб – аналог греко-латинского квадрата третьего порядка, а также Эйлера трёхмерного куба третьего порядка. Точно так же, как греко-латинский квадрат Эйлера получается из ортогональных латинских квадратов, Эйлеровы кубы и гиперкубы получаются из ортогональных латинских кубов и гиперкубов. [4]

Рассматривая числа в этом гиперкубе Эйлера в троичной системе счисления и преобразовав их в десятичные числа, получим классический тессеракт-3, изображённый на рис. 4 (после перевода в десятичную систему все элементы увеличены на 1, чтобы получить традиционное заполнение тессеракта-3 числами от 1 до 81, а не числами от 0 до 80).

67	8	48	29	78	16	27	37	59
20	42	61	72	1	50	31	80	12
36	73	14	22	44	57	65	6	52
26	39	58	69	7	47	28	77	18
33	79	11	19	41	63	71	3	49
64	5	54	35	75	13	24	43	56
30	76	17	25	38	60	68	9	46
70	2	51	32	81	10	21	40	62
23	45	55	66	4	53	34	74	15

Рис. 4

Это второй из 58 различных классических тессерактов-3.

Определение 2. Нетрадиционным тессерактом-3 называется тессеракт-3, заполненный произвольными натуральными (или целыми) числами.

Если в тессеракте-3 есть отрицательные целые числа, от них легко избавиться, увеличив все элементы тессеракта-3 на одно и то же число.

Поэтому в конечном итоге будем рассматривать нетрадиционные тессеракты-3, составленные из произвольных натуральных чисел.

Ещё добавим условие, что все элементы нетрадиционного тессеракта-3 попарно различны (по аналогии с классическим тессерактом-3, который составляется из различных чисел от 1 до 81).

Гипотеза. *Любой нетрадиционный тессеракт-3 является ассоциативным.*

Эта гипотеза высказана на основании известного (доказанного) факта, что все магические квадраты и магические кубы третьего порядка, как классические, так и нетрадиционные, являются ассоциативными. Как сказано выше, свойство ассоциативности для классического тессеракта-3 тоже доказано. Доказательства гипотезы у автора пока нет. Однако на форуме доказано, что центральный элемент любого тессеракта-3 равен $S/3$, где S – магическая константа тессеракта-3. [5]

Далее будут рассматриваться ассоциативные тессеракты-3. На рис. 5 вы видите общую схему любого ассоциативного тессеракта-3 (классического и нетрадиционного) в проекции на плоскость. Понятно, что если высказанная гипотеза верна, это будет общая схема любого тессеракта-3, как классического, так и нетрадиционного.

x1	x2	y1	x6	x7	y6	x10	x11	y11
x4	x5	y2	x8	x9	y7	x12	x13	y12
y3	y4	y5	y8	y9	y10	y13	y14	y15
x14	x15	y16	x18	x19	y17	x20	x21	y19
x16	x17	k-x22	y18	k/2	k-y18	x22	k-x17	k-x16
k-y19	k-x21	k-x20	k-y17	k-x19	k-x18	k-y16	k-x15	k-x14
k-y15	k-y14	k-y13	k-y10	k-y9	k-y8	k-y5	k-y4	k-y3
k-y12	k-x13	k-x12	k-y7	k-x9	k-x8	k-y2	k-x5	k-x4
k-y11	k-x11	k-x10	k-y6	k-x7	k-x6	k-y1	k-x2	k-x1

Рис. 5

Здесь k – константа ассоциативности тессеракта-3.

Формулы для переменных первого уровня y_i , $i=1,2,3,\dots,19$:

$$y_1=s-x_1-x_2$$

$$y_2=s-x_4-x_5$$

$$y_3=s-x_1-x_4$$

$$y_4=s-x_2-x_5$$

$$y_5=-s+x_1+x_2+x_4+x_5$$

$$y_6=s-x_6-x_7$$

$$y_7=s-x_8-x_9$$

$$y_8=s-x_6-x_8$$

$$y_9=s-x_7-x_9$$

$$y_{10}=-s+x_6+x_7+x_8+x_9$$

$$y_{11}=s-x_{10}-x_{11}$$

$$y_{12}=s-x_{12}-x_{13}$$

$$y_{13}=s-x_{10}-x_{12}$$

$$y_{14}=s-x_{11}-x_{13}$$

$$y_{15}=-s+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}$$

$$y_{16}=s-x_{14}-x_{15}$$

$$y_{17}=s-x_{18}-x_{19}$$

$$y_{18}=4s/3-2*x_{18}-x_{19}$$

$$y_{19}=s-x_{20}-x_{21}$$

Напомним: $s=3k/2$.

Эти формулы получены на основании свойств тессеракта-3 (см. определение 1).

Составим систему линейных уравнений, описывающих оставшиеся свойства тессеракта-3 (в этих уравнениях фигурируют переменные второго уровня x_i и магическая константа тессеракта-3 s):

$$x_1+x_6+x_{10}=s$$

$$x_4+x_8+x_{12}=s$$

$$x_2+x_7+x_{11}=s$$

$$x_5+x_9+x_{13}=s$$

$$x_1+x_2+x_6+x_7+x_{10}+x_{11}=2*s$$

$$x_4+x_5+x_8+x_9+x_{12}+x_{13}=2*s$$

$$x_{14}+x_{18}+x_{20}=s$$

$$2*x_{18}-x_{16}+x_{19}-x_{22}=s/3$$

$$x_{14}+x_{16}-x_{18}-x_{19}+x_{20}+x_{22}=2*s/3$$

$$x_{15}+x_{19}+x_{21}=s$$

$$x_{15}+x_{17}+x_{19}+x_{21}+x_{23}=5*s/3$$

$$x_{14}+x_{15}+x_{18}+x_{19}+x_{20}+x_{21}=2*s$$

$$x_{16}+x_{17}+x_{22}+x_{23}-2*x_{18}-x_{19}=s/3$$

$$x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}-x_{18}+x_{20}+x_{21}+x_{22}+x_{23}=7*s/3$$

$$x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{20}=5*s/3$$

$$\begin{aligned}
x_{15}+x_{17}-x_{21}&=s/3 \\
x_{16}+x_{17}-x_{22}&=s/3 \\
x_{17}+x_{23}&=2*s/3 \\
x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}-x_1-x_{14}&=2*s/3 \\
x_4+x_{12}+x_{13}+x_{16}&=4*s/3 \\
x_1+x_4+x_{14}+x_{16}-x_{10}-x_{11}&=2*s/3 \\
x_2+x_{15}+x_{11}+x_{13}&=4*s/3 \\
x_5+x_{17}-x_{13}&=s/3 \\
x_2+x_5+x_{15}+x_{17}+x_{11}&=5*s/3 \\
x_1+x_2+x_{14}+x_{15}-x_{10}-x_{12}&=2*s/3 \\
x_4+x_5+x_{16}+x_{17}+x_{12}&=5*s/3 \\
x_7+x_8+x_9-x_{18}&=2*s/3 \\
2*x_8+x_9-2*x_{18}-x_{19}&=0 \\
x_7+x_{18}+x_{19}-x_8&=2*s/3 \\
2*x_7+x_9+x_{19}&=4*s/3
\end{aligned}$$

Решив данную систему уравнений, получаем общую формулу любого классического и ассоциативного нетрадиционного тессеракта-3:

$$\begin{aligned}
x_{10}&\rightarrow s-x_1-x_6, \\
x_{11}&\rightarrow s-x_2-x_7, \\
x_{12}&\rightarrow s-x_4-x_8, \\
x_{13}&\rightarrow s-x_5-x_9, \\
x_{14}&\rightarrow (10*s)/3-2*x_1-x_2-x_4-x_5-x_6-x_7-x_8-x_9, \\
x_{15}&\rightarrow -((2*s)/3)+x_5+x_7+x_9, \\
x_{16}&\rightarrow -((2*s)/3)+x_5+x_8+x_9, \\
x_{17}&\rightarrow (4*s)/3-2*x_5-x_9, \\
x_{18}&\rightarrow -((2*s)/3)+x_7+x_8+x_9, \\
x_{19}&\rightarrow (4*s)/3-2*x_7-x_9, \\
x_{20}&\rightarrow -((5*s)/3)+2*x_1+x_2+x_4+x_5+x_6, \\
x_{21}&\rightarrow s/3-x_5+x_7, \\
x_{22}&\rightarrow s/3-x_5+x_8
\end{aligned}$$

Имеем 8 свободных переменных (элементы тессеракта-3:

$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$), 13 зависимых переменных второго уровня – x_i и 19 зависимых переменных первого уровня – y_i . Магическая константа тессеракта-3 s тоже свободная переменная; она может быть выбрана произвольно, но должна быть кратна 3 (чтобы центральный элемент тессеракта-3 не получился дробным числом).

Примечание: в системе уравнений присутствует переменная x_{23} ; понятно, что эта переменная присутствовала и в решении системы уравнений, но удалена, так как она определяется по свойству ассоциативности: $x_{23}=k-x_{17}$. В системе уравнений и в решении присутствовала также переменная x_3 ; эта переменная заменена на переменную первого уровня: $x_3=y_1$.

Классический тессеракт-3, изображённый на рис. 4, получается по данной формуле при таких значениях свободных переменных:

$$x_1 = 67, x_2 = 8, x_4 = 20, x_5 = 42, x_6 = 29, x_7 = 78, x_8 = 72, x_9 = 1, s = 123.$$

Задав любые значения свободных переменных и значение магической константы, по данной формуле получим нетрадиционный тессеракт-3. Следует заметить, что в решении, полученном по формуле при произвольных значениях свободных переменных, могут быть отрицательные целые числа или одинаковые числа. Выше сказано, как избавиться от отрицательных целых чисел. Чтобы избавиться от одинаковых чисел, надо запрограммировать формулу и программно проверять повторяемость значений элементов тессеракта-3, варьируя значения свободных переменных до тех пор, пока все значения элементов не будут различными.

Пример построения по общей формуле нетрадиционного тессеракта-3.

Значения свободных переменных заданы следующие:

$$x_1 = 107, x_2 = 262, x_4 = 419, x_5 = 163, x_6 = 524, x_7 = 88, x_8 = 170, x_9 = 367, s = 813.$$

На рис. 6 изображён ассоциативный нетрадиционный тессеракт-3 из различных натуральных чисел, полученный по формуле при заданных значениях свободных переменных:

107	262	444	524	88	201	182	463	168
419	163	231	170	367	276	224	283	306
287	388	138	119	358	336	407	67	339
503	76	234	83	541	189	227	196	390
158	391	264	377	271	165	278	151	384
152	346	315	353	1	459	308	466	39
203	475	135	206	184	423	404	154	255
236	259	318	266	175	372	311	379	123
374	79	360	341	454	18	98	280	435

Рис. 6

Интересно было бы составить тессеракт-3 из различных простых чисел. Автору пока не удалось решить эту задачу. Найдено следующее приближение к решению (рис. 7):

6599	1373	15101	7793	12539	2741	8681	9161	5231
6173	11369	5531	14519	1013	7541	2381	10691	10001*
10301	10331	2441	761	9521	12791	12011	3221	7841
8933	9539	4601*	12689	4673	5711	1451	8861	12761*
11519	7013	4541*	713*	7691	14669	10841*	8369	3863
2621	6521	13931	9671*	10709	2693	10781	5843	6449
7541	12161	3371	2591	5861	14621	12941	5051	5081

5381	4691	13001	7841	14369	863	9851	4013	9209
10151	6221	6701	12641	2843	7589	281	14009	8783

Рис. 7

В данном решении всего 7 элементов не являются простыми числами (эти элементы помечены символом *), кроме того, два элемента повторены – 7541 и 7841.

Константа ассоциативности этого тессеракта-3 $K=15382$, магическая константа $S=23073$.

Автор полагает, что найти решение данной задачи достаточно сложно. Однако теоретически такое решение существует. Если мы возьмём арифметическую прогрессию из простых чисел длины 81 (то есть состоящую из 81 члена), составить тессеракт-3 из чисел такой прогрессии не составит никакого труда. Такая прогрессия из простых чисел теоретически существует, это доказано. Правда, практически её пока не нашли.

Можно даже предположить (на основании приведённого приближения к решению), что тессеракт-3 составит и из набора 81 различных простых чисел, не образующих арифметическую прогрессию.

Литература

[1] http://members.shaw.ca/hdhcubes/cube_perfect.htm

[2] http://members.shaw.ca/hdhcubes/cube_perfect.htm

[3] К. Y. Lin. Magic cubes and hypercubes of order 3

<http://yadi.sk/d/1EGOJXcyKExTi>

[4] <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/>

[5] [http://e-](http://e-science.ru/forum/index.php?s=&showtopic=20641&view=findpost&p=168464)

[science.ru/forum/index.php?s=&showtopic=20641&view=findpost&p=168464](http://e-science.ru/forum/index.php?s=&showtopic=20641&view=findpost&p=168464)

[6] Complete list of order 3 normalized magic tesseracts

http://www.magichypercubes.com/Encyclopedia/DataBase/Hypercube_Order3.htm

О СВОЙСТВАХ ПОПАРНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ПЯТИЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, СОХРАНЯЮЩИХ РАЗБИЕНИЯ

НАГОРНЫЙ А. С.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

anagorny@list.ru

Пусть $E_5 = \{1, 2, 3, 4\}$, P_5 — множество всех конечноместных функций на E_5 .

Разбиение множества E_5 на непустые подмножества называется *нетривиальным*, если оно состоит из 2, 3 или 4 подмножеств.

Замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс H функций из P_5 назовем *предполным* в P_5 , если $H \neq P_5$, но для любой функции из P_5 , не принадлежащей классу H , замыкание множества $H \cup \{f\}$ совпадает с P_5 [2].

Рассматриваются классы функций из P_5 , сохраняющих нетривиальные разбиения множества E_5 . Известно [1], что все такие классы функций являются попарно различными, замкнутыми (относительно операции суперпозиции) и предполными в P_5 . Семейство всех таких предполных классов обычно обозначается в литературе через U^5 .

Обозначим классы функций пятизначной логики, сохраняющие разбиения $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ и $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$, через $U_{0\{2,3,4\}}$, $U_{\{1\}\{3,4\}}$, $U_{01\{3,4\}}$, $U_{012\{3,4\}}$ и $U_{012\{3,4\}}$, соответственно. Аналогично определяются все остальные классы семейства U^5 (легко видеть, что все они получаются из перечисленных классов с помощью некоторой подстановки индексов на E_5 , такие вложения будем называть *двойственными*). Семейство U^5 содержит ровно 50 классов.

Селекторной функцией назовем функцию из P_5 , равную одной из своих переменных. Легко показать, что пересечение **всех** классов из семейства U^5 *тривиально*, т.е. состоит только из константных и селекторных функций из P_5 . Однако тривиальным может быть и пересечение меньшего числа таких классов.

Теорема 1. Ни одно пересечение двух предполных классов из семейства U^5 не является тривиальным.

Теорема 2. Все тривиальные пересечения трех предполных классов из семейства U^5 суть пересечения двух видов $U_{\{ab\}\{cde\}} \cap U_{c\{da\}\{eb\}} \cap U_{d\{ea\}\{bc\}}$ (60 троек) и $U_{a\{bc\}\{de\}} \cap U_{b\{cd\}\{ea\}} \cap U_{d\{eb\}\{ac\}}$ (20 троек).

С тривиальными пересечениями четырех и более классов из семейства U^5 можно ознакомиться по ссылке [3].

Теперь рассмотрим вопрос о том, в каких случаях пересечение двух классов из U^5 вложено в какой-нибудь другой класс из U^5 . Исчерпывающий ответ на этот вопрос дают следующие пять теорем.

Теорема 3. В P_5 имеется ровно 45 вложений пересечений пар классов из U^5 в класс $U_{0\{1234\}}$, они перечислены в нижеследующей таблице:

№	Вложение в класс $U_{0\{1234\}}$	Двойственных вложений
1.	$U_{01\{234\}} \cap U_{02\{134\}} \subseteq U_{0\{1234\}}$	6
2.	$U_{01\{234\}} \cap U_{0\{12\}\{34\}} \subseteq U_{0\{1234\}}$	12
3.	$U_{01\{234\}} \cap U_{023\{14\}} \subseteq U_{0\{1234\}}$	12
4.	$U_{0\{12\}\{34\}} \cap U_{0\{13\}\{24\}} \subseteq U_{0\{1234\}}$	3
5.	$U_{0\{12\}\{34\}} \cap U_{013\{24\}} \subseteq U_{0\{1234\}}$	12

Теорема 4. Имеется ровно 13 вложений пересечений пар классов из U^5 в класс $U_{\{01\}\{234\}}$, они перечислены в нижеследующей таблице:

№	Вложение в класс $U_{\{01\}\{234\}}$	Двойственных вложений
1.	$U_{01\{234\}} \cap U_{2\{34\}\{01\}} \subseteq U_{\{01\}\{234\}}$	3
2.	$U_{01\{234\}} \cap U_{234\{01\}} \subseteq U_{\{01\}\{234\}}$	1
3.	$U_{2\{34\}\{01\}} \cap U_{3\{42\}\{01\}} \subseteq U_{\{01\}\{234\}}$	3
4.	$U_{2\{34\}\{01\}} \cap U_{013\{24\}} \subseteq U_{\{01\}\{234\}}$	6

Теорема 5. Имеется ровно 6 вложений пересечений пар классов из U^5 в класс $U_{01\{234\}}$, они перечислены в нижеследующей таблице:

№	Вложение в класс $U_{01\{234\}}$	Двойственных вложений
1.	$U_{0\{1234\}} \cap U_{1\{2340\}} \subseteq U_{01\{234\}}$	1
2.	$U_{0\{1234\}} \cap U_{\{01\}\{234\}} \subseteq U_{01\{234\}}$	2
3.	$U_{012\{34\}} \cap U_{013\{24\}} \subseteq U_{01\{234\}}$	3

Теорема 6. *Имеется ровно 4 вложения пересечений пар классов из U^5 в класс $U_{0\{12\}\{34\}}$, они перечислены в нижеследующей таблице:*

№	Вложение в класс $U_{0\{12\}\{34\}}$	Двойственных вложений
1.	$U_{0\{1234\}} \cap U_{\{12\}\{034\}} \subseteq U_{0\{12\}\{34\}}$	2
2.	$U_{\{12\}\{034\}} \cap U_{\{34\}\{012\}} \subseteq U_{0\{12\}\{34\}}$	1
3.	$U_{012\{34\}} \cap U_{034\{12\}} \subseteq U_{0\{12\}\{34\}}$	1

Теорема 7. *Имеется ровно 42 вложения пересечений пар классов из U^5 в класс $U_{012\{34\}}$, они перечислены в нижеследующей таблице:*

№	Вложение в класс $U_{012\{34\}}$	Двойственных вложений
1.	$U_{0\{1234\}} \cap U_{12\{034\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	3
2.	$U_{0\{1234\}} \cap U_{1\{20\}\{34\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	6
3.	$U_{\{01\}\{234\}} \cap U_{\{02\}\{134\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	3
4.	$U_{\{01\}\{234\}} \cap U_{02\{134\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	6
5.	$U_{\{01\}\{234\}} \cap U_{012\{34\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	6
6.	$U_{\{34\}\{012\}} \cap U_{01\{234\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	3
7.	$U_{01\{234\}} \cap U_{02\{134\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	3
8.	$U_{01\{234\}} \cap U_{0\{12\}\{34\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	6
9.	$U_{01\{234\}} \cap U_{2\{34\}\{01\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	3
10.	$U_{0\{12\}\{34\}} \cap U_{1\{20\}\{34\}} \subseteq U_{012\{34\}}$	3

Пересечения трех и более классов семейства U^5 , вложенные в некоторые другие классы из U^5 , можно найти в [3].

Автор виражає благодарність А.А. Вороненко за постановку задачі и С.С. Марченкову за постійне уваження к роботі.

Литература

1. Яблонский С.В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. — 1958.— Т. 51. — С. 5–142.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.
3. Нагорный А.С. Intersections and embedding of intersections of U^5 classes to some U^5 classes // (https://googledrive.com/host/0B7d_hlk8RpGET1ZKNUtxLUJuZHM/)

Доповнення до статті “Властивості графів мінімального базису проективної площини”

В. І. Петренюк, В.С. Гермак, Кіровоградський національний технічний університет

Задача - перевірка гіпотези про покриття кожного графа із мінімального базису проективної площини двома копіями графів гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$. Зважаючи на відомий факт адитивності неорієнтовного роду графа матимемо надію на фактичне підтвердження гіпотези.

Розв’язок задачі для об’єднання графів як варіанту покриття графа, тобто коли кожне ребро належить принаймні одній з двох копій графів гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$, можливо побачити в онлайн-дисертації Nur Suhjin «The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10».

В авторській статті “Властивості графів мінімального базису проективної площини”, де термін покриття означав, що кожне ребро графа G належить принаймні одній з двох копій породжених підграфів, т.то не частин, графа G

гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$, підтверджувалася гіпотеза за винятком графа A_2 .
 Доповнення до статті складається з наступних тверджень.

Твердження 1. Для графа A_2 з мінімального базису проєктивної площини існує φ -перетворення графа $K_5 \setminus e$ та K_5 визначене наступним чином:

$$\varphi(K_5 \setminus e + St_M(K_5), \sum_{i=1}^5 (i' + i'')) \rightarrow (A_2, \{i\}_{i=1}^5), \quad \text{де} \quad K_5^0 = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{a, b\}, \quad K_5^0 \setminus (1', 2') = \{i'\}_{i=1}^5,$$

$N = \{i'\}_{i=1}^5$, $M = \{i''\}_{i=1}^5$. Доведення твердження 1 випливає з рис.1 та нерівності $\gamma(A_2) \leq \gamma(K_5 \setminus e) + \gamma(K_5 \setminus e) + t_{K_5 \setminus e}(N, P) + t_{St_M(K_5 \setminus e)}(M, P) = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$.

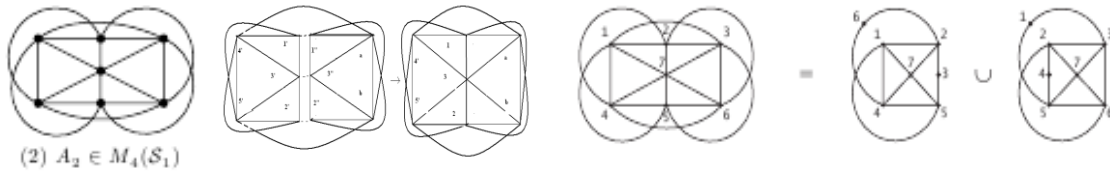


Рис.1. Для графа A_2 з мінімального базису проєктивної площини існує φ -перетворення графа $K_5 \setminus e$ та $St_M(K_5 \setminus e)$, де $M = \{i''\}_{i=1}^5$.

Твердження 2. Гіпотеза про покриття кожного графа із мінімального базису проєктивної площини двома копіями графів гомеоморфних K_5 чи $K_{3,3}$ може стати вірною для графа A_2 шляхом заміни умови покриття породженими підграфами графа на умову покриття частинами графа.

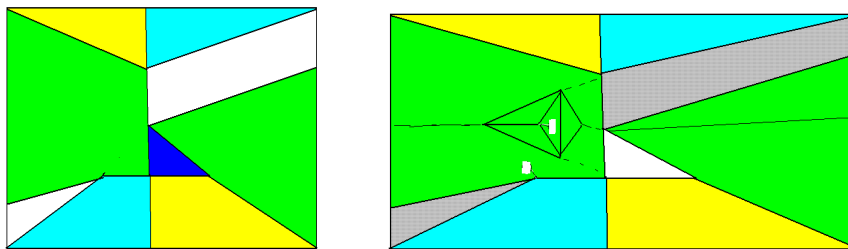


Рис.2. Вкладення до проєктивної площини P графа $K_5 \setminus e$, що має досяжну множину вершин т.то $t_{K_5 \setminus e}(K_5^0 \setminus e, P) = t_{St_M(K_5 \setminus e)}(K_5^0 \setminus e, \sigma_0) - 1 = 1$, та вкладення графа A_2 до пляшки Клейна.

Зменшення числа досяжності відбулося завдяки тому, що ребро u , яке розділяло на площині σ_0 множину вершини e графа $K_5^0 \setminus e$, стає несуттєвим,

бо при вкладенні f до не 2-клітини s графа $K_5^0 \setminus e$ розміщується як частина геодезичної (незтискаємої) кривої проективної площини P , яка розтинає s .

Твердження 3. Граф $B_1 = \langle K_8^0, K_8^1 \setminus K_3^1 \rangle$ -граф-обструкція для тору має покриття, або чотирма копіями графа K_5 , або двома копіями графа $K_{3,3}$ та копією графа K_5 .

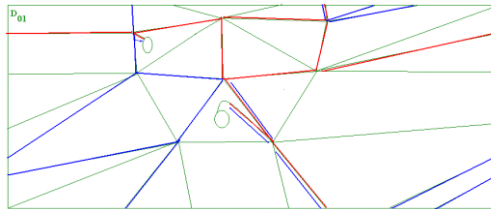


Рис.3. Вкладений до подвійного тору граф B_1 має два варіанти покриття множини ребер – червоне фарбування та сине-чорне розфарбування.

Висновок. Гіпотеза не перевірена для тора та підтверджена для проективної площини (умовно для A_2 якого неможливо розбити на два потрібних підграфи, тільки на частини).

Література

1. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation, Ohio State University, 2008.
2. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. *Combinatorica* 6,3, 1986 245-260
3. Петренюк В.І. Властивості графів мінімального базису проективної площини. Сборник трудов Международной конференции «ПОО-XXXV» г.Казивели, 2009 г., стр. 194-198

ГРУПОВА ДИСТАНЦІЙНА МАГІЧНА РОЗМІТКА ГРАФА

Петренюк Д.А., Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ

petrenewk@rambler.ru

Петренюк А.Я., Кіровоградський національний технічний університет

ptrnkpl@mail.ru

Груповою дистанційною магічною розміткою або Γ -дистанційною магічною розміткою графа $G(V, E)$ з кількістю вершин $|V| = n$ називають бієкцію f з множини V в абелеву групу Γ порядку n , при якій вага $w(x)$ кожної вершини $x \in V$ дорівнює одному й тому ж елементу $\mu \in \Gamma$, який називається *магічною константою*. Вагою вершини називають суму номерів усіх сусідніх вершин $w(x) = \sum_{y \in N_G(x)}$.

Ще в 1994 році для розв'язання проблеми побудови магічних квадратів Вільфредом було вперше введено дистанційну магічну розмітку [2], проте лише останніми роками вона привернула активну увагу дослідників [1]. З'ясувалося, що цей тип магічної розмітки накладає надто великі обмеження, і навіть багато класів найбільш «симетричних» не є дистанційно магічними. Тому в 2012 Д. Фрончек [1] було запропоновано її ослаблений варіант – групову дистанційну магічну розмітку. Було показано, що таку розмітку допускають значно більше класів графів. Д. Фрончек в [1] повністю охарактеризував усі декартові добутки $C_k \square C_m$, що допускають групову дистанційну магічну розмітку групою Z_{km} . Зокрема, він довів, що $C_k \square C_m$ є Z_{km} -дистанційно магічним лише за умови, що km парне, а також отримав Z_2^{2k} -дистанційну магічну розмітку для добутків $C_{2k} \square C_{2k}$ для всіх $k \geq 2$. Також він знайшов клас циклічних добутків, що допускають групову дискантну магічну розмітку групою $Z_2 \times Z_2 \times \dots \times Z_2$ та поставив питання про існування інших класів $C_k \square C_m$, які допускали б групову дистанційну магічну розмітку іншими абелевими групами.

М. Анхольцер та інші [3] розглянули групові дистанційні магічні розмітки прямих добутків графів. Вони довели, що, якщо G – r -регулярний

граф порядку n , $m = 4$ або $m = 8$ та r парне, то прямий добуток $C_m \times G$ є Γ -дистанційно магічним для будь-якої абелевої групи порядку mn . Також вони показали, що $C_m \times C_n$ є Z_{mn} -дистанційно магічним лише за умови, що $m \in \{4, 8\}$ or $n \in \{4, 8\}$ або $m, n \equiv 0 \pmod{4}$. Крім того, вони довели, що, якщо $m, n \not\equiv 0 \pmod{4}$, то $C_m \times C_n$ не є Γ -дистанційно магічним для будь-якої абелевої групи Γ порядку mn .

С. Ціхач показала [4], що, якщо граф G має порядок $n = 2^p(2k + 1)$ для деяких натуральних чисел p, k , таких що $\deg(v) \equiv c \pmod{2^{p+1}}$ для деякої константи c для всіх $v \in V(G)$, де $\deg(v)$ – ступінь вершини v , то існує Γ -дистанційна магічна розмітка для будь-якої абелевої групи Γ для графа $G[C_4]$. Крім того, в [4] доведено, що, якщо Γ є довільною абелевою групою порядку $4n$, причому $\Gamma \cong Z_2 \times Z_2 \times A$ для деякої абелевої групи A порядку n , то існує Γ -дистанційна магічна розмітка для будь-якого графа $G[C_4]$.

Також вона довела [5], що, якщо граф G має порядок $n = 2^p(2k + 1)$ для деяких натуральних чисел p, k , таких що $\deg(v) \equiv c \pmod{2^{p+2}}$ для деякої константи c для всіх $v \in V(G)$, де $\deg(v)$ – ступінь вершини v , то існує Γ -дистанційна магічна розмітка для будь-якої абелевої групи Γ для прямого добутку $G \times C_4$. Крім того, якщо c парне, то існує Γ -дистанційна магічна розмітка для будь-якої абелевої групи Γ порядку $8n$ для прямого добутку $G \times C_8$.

Література

1. Froncek D. Group distance magic labeling of Cartesian product of cycles / D. Froncek // Australasian Journal Of Combinatorics. — 2013. — V. 55 — pp. 167–174
2. Vilfred V. Σ -labelled Graph and Circulant Graphs. Ph.D. Thesis / University of Kerala, Trivandrum, India. — 1994.
3. [Anholcer](#) M. Group Distance Magic Labeling of Direct Product of Graphs / [M. Anholcer](#), [S. Cichacz](#), [I. Peterin](#), [A. Tepeh](#) // October 5, 2012 <http://www.mp.feri.uni-mb.si/osebne/peterin/clanki/20121005groupDMgraphsDirProdS.pdf>

4. Cichacz S. Note on group distance magic graphs $G[C_4]$ / S. Cichacz // Springer: Graphs and Combinatorics. — February 2013.
5. Cichacz S. Note on group distance magic graphs $G \times C_n$ / S. Cichacz // Elsevier. —arXiv:1302.6561v1 [math.CO] 26 Feb 2013

КОРДІАЛЬНІСТЬ РОМАШКА-ГРАФІВ ТА ЗУБЧАСТИХ ГРАФІВ.

Петровська Т.В., Терновський П.А.

Кіровоградський національний технічний університет

$\{0,1\}$ -нумерацією вершин звичайного графа G називають відображення $\varphi: V(G) \rightarrow \{0,1\}$. Множина вершин, які відображаються в 0, позначимо V_0 і введемо додаткові позначення $V_1 = V(G) - V_0$, $v_0 = |V_0|$, $v_1 = |V_1|$. Нумерація вершин графа G породжує $\{0,1\}$ -нумерацію його ребер: ребро одержує номер 0, якщо номери його кінців однакові, та номер 1 у протилежному випадку. Вершину з номером 0 називають 0-вершиною, із номером 1 – 1-вершиною. Подібним чином, ребро з номером i називають i -ребром, $i \in \{0,1\}$. Множину i -ребер позначимо E_i , $i \in \{0,1\}$.

1. Кордіальність нумерацій та графів

$\{0,1\}$ -нумерація графа G кордіальна, якщо

$|v_1 - v_0| \leq 1$ і одночасно $|e_1 - e_0| \leq 1$. Граф, що допускає кордіальну нумерацію, називається *кордіальним*. Кордіальну нумерацію графу G назвемо *нейтральною*, якщо для неї $e_1 = e_0$, *дужою*, якщо $e_1 > e_0$, та *слабкою*, якщо $e_1 < e_0$. Наприклад, нумерація на рис.1 нейтральна. Цікаво, що існують графи, які одночасно допускають як дужу, так і слабку нумерації. Графи з такою властивістю ми називаємо *кордіально універсальними*.

2. Побудова кордіальної нумерації ромашка-графів.

Розглянемо графи, які складаються з трикутників, розташованих так, що отримується ромашка (рис 1). На рис.1 зображено ромашка-граф 9 порядку та його $\{0,1\}$ -нумерація. Неважко впевнитися безпосередньо, що дана нумерація нейтральна.

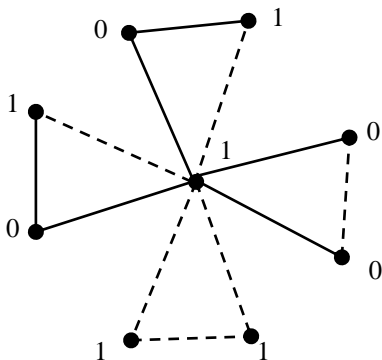


Рис.1. ромашка-граф–кордіальний граф. $e_0 = e_1 = 6$. Нумерація нейтральна.

Теорема. Якщо число трикутників при діленні на 4 дає остачу 0, то граф кордіальний з нейтральною нумерацією, якщо остача при діленні на 4 дорівнює 1, то граф має дужу нумерацію, якщо остача 2, граф не кордіальний, якщо остача 3, то граф має слабку нумерацію.

Доведення

1) Нехай $n=4k$ (рис.1), де n –кількість трикутників ($n \equiv 0 \pmod{4}$).

Нумеруємо вершини таким чином: 01, 00, 11, 01, ... (одне одиничне ребро, одне нульове, ...), посередині 0, або 1.

Кількість вершин графа: $V = 8k + 1$, з них $V_0 = 4k$, $V_1 = 4k + 1$.

Кількість ребер графа: $e = 4k \cdot 3 = 12k$, з них $e_0 = 2k + 4k = 6k$, $e_1 = e_0 = 6k$. Нумерація нейтральна.

2) Нехай $n=4k+1$ (рис. 2).

Нумеруємо вершини 01, 00, 01, 11, 01, ... (одне одиничне ребро, одне нульове, ...), посередині 0, або 1.

Кількість вершин графа: $V = (4k + 1) \cdot 2 + 1 = 8k + 3$, нехай з них $V_0 = 4k + 1$, $V_1 = 4k + 2$.

Кількість ребер графа: $e = (4k + 1) \cdot 3 = 12k + 3$, з них

$e_0 = (4k + 1) + 2k = 6k + 1$, $e_1 = (4k + 1) + (2k + 1) = 6k + 2$.

Нумерація дужа.

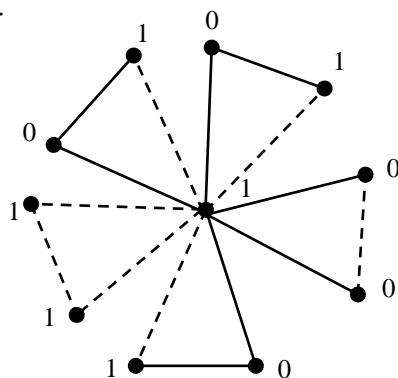


Рис.2. $n \equiv 1 \pmod{4}$. Кордіальний граф. $e_0 = 7, e_1 = 8$. Нумерація дужа.

3) Нехай $n=4k+2$ (рис. 3).

Нумеруємо вершини 01, 00, 01, 11, 01, ... (одне одиничне ребро, одне нульове, ...), посередині 1.

Кількість вершин графа: $V = (4k + 2) \cdot 2 + 1 = 8k + 5$, з них

$V_0 = 4k + 3$, $V_1 = 4k + 2$.

Кількість ребер графа: $e = (4k + 1) \cdot 3 = 12k + 3$, з них

$e_0 = (4k + 1) + (2k + 1) = 6k + 2$, $e_1 = (4k + 3) + (2k + 1) = 6k + 4$.
 $|e_0 - e_1| = 2$. Граф не кордіальний.

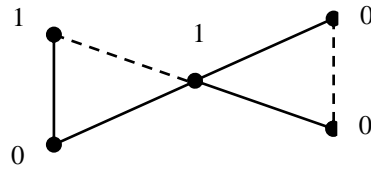


Рис.3. $n \equiv 2 \pmod{4}$. Некордіальний граф. $e_0 = 2, e_1 = 4$.

4) Нехай $n=4k+3$ (рис. 4).

Нумеруємо вершини 01, 00, 01, 11, 01, ... (одне одиничне ребро, одне нульове, ...), посередині 0 або 1.

Кількість вершин графа: $V = (4k + 3) \cdot 2 + 1 = 8k + 7$, з них
 $V_0 = 4k + 3$, $V_1 = 4k + 4$.

Кількість ребер графа: $e = (4k + 3) \cdot 3 = 12k + 9$, з них
 $e_0 = (4k + 3) + (2k + 2) = 6k + 5$, $e_1 = (4k + 3) + 2k + 1 = 6k + 4$.

Граф має слабку нумерацію.

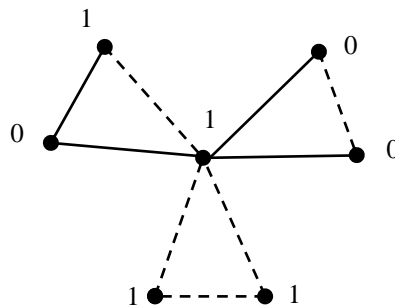


Рис.4. $n \equiv 3 \pmod{4}$. Кордіальний граф, нумерація слабка.

$e_0 = 5, e_1 = 4$.

Теорема доведена.

3. Побудова кордіальної нумерації зубчастих графів (рис 5)

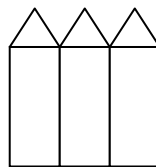


Рис.5 зубчастий граф

Теорема. Якщо кількість зубців парна, то граф кордіально універсальний, якщо кількість зубців непарна, то граф кордіальний з нейтральною нумерацією.

Доведення

1) Побудуємо кордіальну нумерацію даного графа при парній кількості зубців (рис 6).

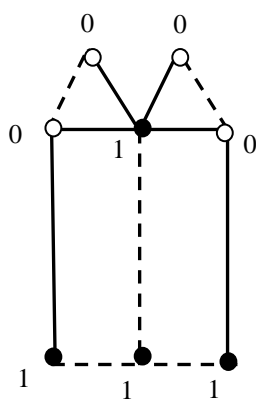
Вершини нижньої основи нумеруємо одиницями, верхньої 0,1,0,1,... Щоб виконувалось необхідне співвідношення між нульовими та одиничними вершинами, вершини, які залишились, нумеруємо нулями.

Підрахуємо кількість нульових, та одиничних вершин:

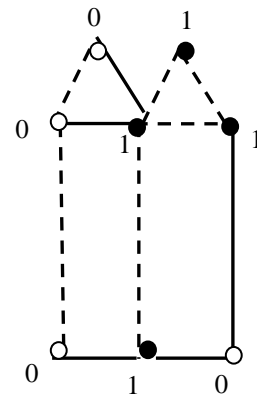
Нехай $n=2k$, де n -кількість зубців, тоді $V_0 = V_1 = 4k$, кількість ребер буде дорівнювати $e_0 = 2k + 2k + k = 5k, e_1 = 2k + 2k + k + 1 = 5k + 1$. Нумерація дужа. Міняємо нумерацію вершин так, як показано на малюнку 6 (б), посередині дві нульові вершини та одно одинична, зверху 0, 1 (зліва направо).

Підрахуємо кількість нульових, та одиничних вершин:

$V_0 = V_1 = 4k$, кількість ребер буде дорівнювати $e_0 = 2k + 2k + k = 5k, e_1 = 2k + 2k + k + 1 = 5k + 1$ Нумерація слабка.



а) дужа нумерація графа
($e_0 = 5, e_1 = 6$).



б) слабка нумерація графа
($e_0 = 6, e_1 = 5$).

Рис.6 Кордіально універсальний граф при парній кількості вершин.

2) Побудуємо кордіальну нумерацію даного графа при непарній кількості зубців (рис 7).

Вершини нижньої основи нумеруємо одиницями, верхньої 0,1,0,1,..., або 1,0,1,... Щоб виконувалось необхідне співвідношення між нульовими та одиничними вершинами, вершини, які залишились, нумеруємо нулями.

Підрахуємо кількість нульових, та одиничних вершин:

Нехай $n=2k+1$, де n -кількість зубців, тоді $V_0 = 4k + 1, V_1 = 4k + 3$, а кількість ребер буде дорівнювати $e_0 = (2k + 1) + (2k + 1) + (k + 1) = 5k + 3$, так само $e_1 = 5k + 3$. Нумерація нейтральна. Теорема доведена.

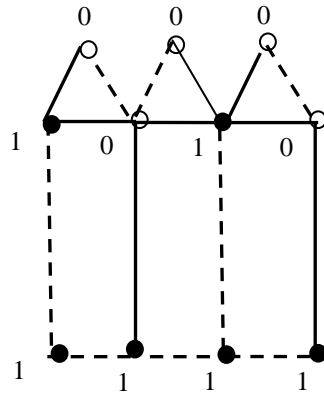


Рис.7 нейтральна нумерація зубчастого графа при непарній кількості зубців ($e_0 = 8, e_1 = 8$).

3. Перевіримо наші розрахунки за допомогою комп'ютера.

Кордальні нумерації ромашка-графа (рис 1).

Матриця інцидентності:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0	0	1	1	1	0	1	0	1	3	6	6
1	1	0	0	1	0	1	0	1	6	6	6
1	0	1	1	0	0	1	0	1	7	6	6
1	1	0	1	0	0	1	0	1	8	6	6
1	1	1	0	0	0	1	0	1	9	6	6
0	1	1	1	0	0	1	0	1	10	6	6
1	1	0	0	0	1	1	0	1	13	6	6
0	0	1	1	0	1	1	0	1	16	6	6
0	1	0	0	1	1	1	0	1	17	6	6
0	0	1	0	1	1	1	0	1	18	6	6
0	0	0	1	1	1	1	0	1	19	6	6
1	0	0	0	1	1	1	0	1	20	6	6
1	0	1	0	1	1	0	0	1	22	6	6
1	0	0	1	1	1	0	0	1	23	6	6
1	0	1	1	0	1	0	0	1	24	6	6
1	1	0	1	0	1	0	0	1	25	6	6
1	1	1	0	0	1	0	0	1	26	6	6
1	1	0	1	1	0	0	0	1	27	6	6
1	1	1	0	1	0	0	0	1	28	6	6
1	0	1	1	1	0	0	0	1	30	6	6
0	1	0	1	1	1	0	0	1	32	6	6
0	1	1	0	1	1	0	0	1	33	6	6
0	1	1	1	0	1	0	0	1	34	6	6
0	1	1	1	1	0	0	0	1	35	6	6
1	1	0	0	0	1	0	1	1	38	6	6
0	0	1	1	0	1	0	1	1	41	6	6
0	1	0	0	1	1	0	1	1	42	6	6
0	0	1	0	1	1	0	1	1	43	6	6
0	0	0	1	1	1	0	1	1	44	6	6
1	0	0	0	1	1	0	1	1	45	6	6

0	0	1	1	1	0	0	1	1	48	6	6
1	1	0	0	1	0	0	1	1	51	6	6
1	0	1	1	0	0	0	1	1	52	6	6
1	1	0	1	0	0	0	1	1	53	6	6
1	1	1	0	0	0	0	1	1	54	6	6
0	1	1	1	0	0	0	1	1	55	6	6
0	1	0	1	0	0	1	1	1	57	6	6
0	1	1	0	0	0	1	1	1	58	6	6
0	1	0	0	1	0	1	1	1	59	6	6
0	0	1	0	1	0	1	1	1	60	6	6
0	0	0	1	1	0	1	1	1	61	6	6
0	0	1	0	0	1	1	1	1	62	6	6
0	0	0	1	0	1	1	1	1	63	6	6
0	1	0	0	0	1	1	1	1	65	6	6
1	0	1	0	0	0	1	1	1	67	6	6
1	0	0	1	0	0	1	1	1	68	6	6
1	0	0	0	1	0	1	1	1	69	6	6
1	0	0	0	0	1	1	1	1	70	6	6
1	1	0	0	1	1	0	1	0	71	6	6
1	1	1	1	0	0	0	1	0	79	6	6
1	0	1	1	0	0	1	1	0	81	6	6
1	1	0	1	0	0	1	1	0	82	6	6
1	1	1	0	0	0	1	1	0	83	6	6
1	1	0	0	1	0	1	1	0	84	6	6
1	0	0	0	1	1	1	1	0	89	6	6
1	1	0	0	0	1	1	1	0	90	6	6
1	1	0	0	1	1	1	0	0	93	6	6
1	1	1	1	0	0	1	0	0	96	6	6
1	1	1	0	1	1	0	0	0	97	6	6
1	1	1	1	0	1	0	0	0	98	6	6
1	1	1	1	1	0	0	0	0	99	6	6
1	1	0	1	1	1	0	0	0	100	6	6
1	0	1	1	1	1	0	0	0	105	6	6
0	0	1	1	1	1	1	0	0	106	6	6
0	1	1	1	1	1	0	0	0	111	6	6
0	0	1	1	1	1	0	1	0	112	6	6
0	0	1	1	1	0	1	1	0	113	6	6
0	0	1	1	0	1	1	1	0	114	6	6
0	0	1	0	1	1	1	1	0	115	6	6
0	1	0	0	1	1	1	1	0	116	6	6
0	0	0	1	1	1	1	1	0	117	6	6
0	1	1	1	0	0	1	1	0	118	6	6

Кордiальнi нумерацiї ромашка-графа (рис 3).

Матриця iнцидентностi:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = 0$$

Граф некордiальний.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРЕХ АГЕНТОВ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

А.В. Стёпкин stepkin.andrey@rambler.ru

Славянский государственный педагогический университет

Существует множество сред, требующих изучения [1]. Это является основной причиной развития теории дискретных динамических систем. Исследование среды – это своего рода дискретная система, представленная как модель взаимодействия управляющей и управляемой систем, взаимодействие которых зачастую представляется как процесс перемещения управляющего автомата по графу управляемой системы. Что, в конечном итоге, и привело к обширному и интенсивно развивающемуся исследованию поведения автоматов в лабиринтах. Исследованию неориентированных графов при помощи одного агента посвящено много работ, при этом остается малоисследованно распознавание графа при помощи нескольких блуждающих по нему агентов. Что делает актуальной задачу исследования экспериментов по распознаванию графа несколькими блуждающими по нему агентами. При таком распознавании основной проблемой является проблема эффективности их взаимодействия, с целью уменьшения затрат времени и памяти на распознавание.

В работе рассматривается коллектив из трех агентов: два агента-исследователя A и B одновременно передвигаются по неизвестному конечному неориентированному графу без петель и кратных ребер, окрашивают его элементы, обмениваются по каналу связи необходимой информацией с агентом-экспериментатором, который и восстанавливает исследуемый граф по данным полученным от агентов-исследователей. Взаимодействие агентов-исследователей осуществляется за счет окраски элементов графа. Разработана процедура, позволяющая агентам после завершения распознавания своей территории искать новые территории для распознавания. Что решило проблему простоя агента, в случае, когда

начальное расположение агентов не позволило распознавать граф в равных частях и одному из агентов приходилось стоять, пока второй агент продолжал работу над распознаванием оставшейся части, которая могла в разы превышать часть, распознанную простаивающим агентом. Поэтому начальное расположение агентов сильно влияло на конечную временную сложность алгоритма, а в некоторых случаях приводило к тому, что весь граф (кроме вершины, в которой находился второй агент) распознавался одним агентом.

Ранее полученные нами алгоритмы [2,3] решения рассматриваемой задачи имеют кубическую (от числа вершин графа) и квадратическую временные сложности, соответственно, при неизменных квадратических емкостной и коммуникационной сложностей. В данной работе предложен алгоритм построения маршрутов агентами-исследователями по графу, позволяющих агенту-экспериментатору точно восстановить граф среды. При описании алгоритма используются результаты и обозначения из [2].

Для предложенного в работе алгоритма доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Выполнив алгоритм распознавания, агенты распознают любой граф G с точностью до изоморфизма.

Теорема 2. Временная сложность алгоритма распознавания равна $O(n^3)$, емкостная – $O(n^2)$, а коммуникационная – $O(n^2 \cdot \log n)$. При этом алгоритм использует 3 краски.

Литература

1. S. Albers and M.R. Henzinger. Exploring unknown environments. SIAM Journal on Computing, 29(4): 1164 – 1188, 2000.
2. Грунский И.С. Распознавание конечного графа коллективом агентов / И.С. Грунский, А.В. Стёпкин // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 19. – С. 43–52.
3. Стёпкин А.В. Возможность и сложность распознавания графов тремя агентами / А.В. Стёпкин // Таврический вестник информатики и математики. – 2012. – №1 (20). – С. 88–98.

АНАЛИЗ ТРЕБОВАНИЙ К КАЧЕСТВУ ОБСЛУЖИВАНИЯ В ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Смирнов А.А., Мохамад Абу Таам Гани

assa_s@mail.ru

Кировоградский национальный технический университет

Проведенный анализ литературы [1, 3, 4] показал, что большинство современных исследований в общих целях синтеза информационно-телекоммуникационных систем ставят задачу обеспечения показателей качества предоставляемых услуг. Большая часть этих показателей определена государственными стандартами Украины (ДСТУ 2481-94, ДСТУ В 3265 – 95, ГОСТ 34.003-90 и др.), рекомендациями международного союза электросвязи (МСЭ) (МСЭ Е.800, Х.134 –137) и других международных организаций (ETSI, IETF, TL 9000 и др.) [2, 5].

В соответствии с рекомендациями Е.430, Е.800, Х.134 и др. международного союза электросвязи под качеством обслуживания (Quality of Service, QoS) понимается обобщенный (интегральный) полезный эффект от обслуживания, который определяется степенью удовлетворения пользователя как от полученной услуги, так и от самой системы обслуживания [4].

Проведенные исследования показали, что качество обслуживания характеризуется четырьмя потребительскими свойствами услуг: обеспеченностью (Service Support Performance), удобством использования (Service Operability Performance), действенностью (Serveability) и безопасностью обслуживания (Service Security Performance) .

Анализ показателей выявил, что реализация перечисленных свойств, в основном зависит от способности сети «обрабатывать трафиковые нагрузки» (Trafficability Performance). Качество такой обработки зависит от ресурсных

возможностей телекоммуникационных сетей, задействованных оператором (Resources and Facilities), надежности каналов связи и сетевого оборудования (Dependability), а так же качества информационного обмена (Transmission Performance).

В докладе подчеркивается, что система показателей качества информационного обмена является одной из важнейших составляющих общей системы показателей качества обслуживания, и от обеспечения требуемых параметров именно этой системы во многом зависит выполнение практических задач передачи данных в информационно-телекоммуникационных системах.

Литература

1. Вегешна Ш. Качество обслуживания в сетях IP / Ш. Вегешна; пер.с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 386 с.

2. ДСТУ ISO 9000:2007 Системи управління якістю. Основні положення та словник термінів [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <http://document.ua/docs/tdoc14237.php>

3. Семенов С.Г. Структурно-функциональный анализ современных информационных систем с разработкой комплексного показателя эффективности их функционирования / С.Г. Семенов // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС. – 2011. – Вип. 2(92). – С. 145-150.

4. Семенов С.Г. Модели и методы управления сетевыми ресурсами в информационно-телекоммуникационных системах: монография / С.Г. Семенов, О.А. Смирнов, Є.В. Мелешко. Х.: НТУ «ХПИ». – 2012. – 212 с.

5. TL 9000 Quality Management System for Telecommunications [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.tuvam.com/services/qmservices/tl9000.cfm>

О ДИСТАНЦИОННОЙ МАГИЧЕСКОЙ РАЗМЕТКЕ ГРАФОВ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КОНСТРУКЦИЯМИ

Семенюта М. Ф., Черноусова Ж. Т. semenyuta_marina@mail.ru
Кировоградская летняя академия НАУ
Национальный технический университет Украины «Киевский
политехнический институт»

Дистанционная магическая разметка графов была исследована под разными названиями, такими как сигма разметка и 1-вершинно магическая вершинная разметка. В статье [1] приведен обзор существующих результатов по дистанционным магическим графам и выделены нерешенные проблемы, а также сформулированы гипотезы.

Кроме теоретического интереса, дистанционная магическая разметка используется при планировании неполных турниров, а также служит естественной моделью в проблеме распределения радиочастот в сетях связи.

Под графом G мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множества вершин и ребер, графа G соответственно, а через $deg(v)$ – степень вершины v .

Пусть $N(x)$ – множество смежности вершины x . *Дистанционной магической разметкой* графа $G=(V, E)$ порядка n называют биекцию $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, для которой существует положительное целое число k такое, что для каждой вершины x , $k = \sum_{y \in N(x)} f(y)$. Постоянная k называется

магической постоянной разметки f , сумма $\sum_{y \in N(x)} f(y)$ – *весом* вершины x . Граф, допускающий дистанционную магическую разметку, называют *дистанционным магическим графом*.

Граф $G = \langle C_m : P_k : C_n \rangle$ – это граф, полученный отождествлением концевых вершин цепи P_k , с произвольной вершиной цикла C_n и соответствующей вершиной цикла C_m .

Пусть графы G_1, G_2, \dots, G_k ($k \geq 2$) представляют собой k копий некоторого графа G . Тогда граф, полученный соединением ребром вершины графа G_i с

соответствующей вершиной графа G_{i+1} для $i=1, 2, \dots, k-1$ называют *цепным соединением* графов G_1, G_2, \dots, G_k .

Теорема 1.1. [2] Дистанционная магическая разметка дерева существует тогда и только тогда, когда дерево является цепью P_1 или P_3 .

Теорема 1.2. [3, 4] Пусть u и v вершины дистанционного магического графа G . Тогда $|N(u) \oplus N(v)| = 0$ или ≥ 3 ($A \oplus B$ обозначается симметрическая разность двух множеств A и B).

Следствие 1.3. [3, 4] Если граф G содержит цепь (u, v, w, t, p) с $\deg(v) = \deg(t) = 2$, тогда G не является дистанционным магическим графом.

Теорема 1.2, следствие 1.3, выражающие структурные свойства графов, и теорема 1.1 применены нами в доказательстве следующих двух теорем.

Теорема 1.4. Граф $G = \langle C_m; P_t; C_n \rangle$, отличный от $\langle C_2; P_1; C_2 \rangle$, не является дистанционным магическим графом, где $t, m \geq 2$ и $n \geq 2$ – натуральные числа.

Теорема 1.5. Граф G , являющийся цепным соединением t копий цикла C_m , не допускает дистанционной магической разметки для любых натуральных чисел $t \geq 2, m \geq 2$.

Представленные в теоремах 1.4, 1.5 результаты, дают возможность ограничить класс дистанционных магических графов.

В [2] доказано, что для четного n , r -регулярный дистанционный магический граф порядка n существует тогда и только тогда, когда $2 \leq r \leq n-2$, $r \equiv 0 \pmod{2}$ и $n \equiv 0 \pmod{4}$ или $n \equiv r+2 \pmod{4}$. К одной из нерешенных проблем, сформулированных в [1, 5], относится исследование графов операндов в декартовых произведениях $K_n \times C_m$, где $n \geq 2, m \geq 3$; $C_m \times P_n$, где $n \geq 2, m \geq 3$; $C_m \times K_{n,t}$, где $m \geq 3, n, t \geq 1$, допускающих дистанционную магическую разметку. Мы приступили к ее решению и доказали теорему 1.6.

Теорема 1.6. Граф $K_n \times C_{4m}$ является дистанционным магическим для любого нечетного $n \geq 5$.

Литература

1. Arumugam S., Fronček D., Kamatchi N. Distance magic graphs – a survey. / S. Arumugam, D. Fronček, N. Kamatchi // J. Indones. Math. Soc., Special Edition. – 2011. – P. 1-9.
2. Miller M., Rodger C., Simanjuntak R. Distance magic labelings of graphs / M. Miller, C. Rodger, R. Simanjuntak // Australian Journal of combinatorics. – 2003. – Vol. 28. – P. 305–315.
3. Vilfred V. Σ -labelled graph and circulant graphs. / V. Vilfred // Ph. D. Thesis, University of Kerala, Trivandrum, India, 1994.
4. Jinnah M. I. Σ -labelled graphs. // M. I. Jinnah / In technical Proceedings of Group Discussion on Graph Labeling Problems, eds. B.D. Acharya and S.M. Hedge. – 1999, P. 71-77.
5. Seoud M.A., Abdel Maqsoud A.E.I., Aldiban Y.I. New classes of graphs with and without 1-vertex magic vertex labeling / M. A. Seoud, A. E. I. Abdel Maqsoud, Y. I. Aldiban // Proc. Pakistan Acad. Sci. – 2009 – 46(3), p. 159-174.

TOP-LATIN CUBES

Sokhatsky F.M.¹ (fmsokha@ukr.net), Pirus I.E.M.² (pirus@ukr.net)

¹ Vinnytsia Regional Institute of Postgraduate Pedagogical Education of employees

² Donbass State Teachers' Training University, Slovyansk

Some theorems of existence about Latin cubes which have 24 triple-wise orthogonal parastrophes (adjugates) are proved.

Доказаны некоторые теоремы о существовании латинских кубов, которые имеют 24 парастрофа, каждые три из которых ортогональны.

A quasigroup is said to be *totally parastrophically orthogonal (top-quasigroup)*, if all its different parastrophes are orthogonal.

General problem: Describe all finite top-quasigroups up to parastrophy-isomorphy relation.

The class of all top-quasigroups can be divided into subclasses depending on the number of different parastrophes.

Theorem 1. *The number of all different parastrophes of an n -ary quasigroup $(Q; f)$ is equal to $|\{\alpha^{-1}Sym(f)\alpha \mid \alpha \in S_{n+1}\}|$, where*

$$Sym(f) := \{\sigma \mid \sigma f = f\}.$$

The division can be made with help of the following series of identities:

$$\sigma f = f \text{ for all } \sigma \in H, \text{ where } H \neq S_{n+1} \text{ is a subgroup of } S_{n+1}.$$

A quasigroup $(Q; f)$ is called *linear over a group $(Q; f)$* if there exist automorphisms $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ of $(Q; f)$ such that

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \dots + \varphi_n x_n + a.$$

Subproblem: Describe all finite linear top-quasigroups up to parastrophismorphism relation.

Theorem 2. *Linear n -ary top-quasigroups do not exist if $n > 3$.*

If $n = 2$ then there exist tree parastrophically closed classes of top-quasigroups:

- *asymmetric*, i.e., its symmetry group is trivial;
- *one-side symmetric*, i.e., its symmetry group contains two elements;
- *skewsymmetric*, i.e., its symmetry group contains three elements.

Theorem 3. [1] *A binary linear asymmetric top-quasigroup over an m -order cyclic group exists iff the least prime factor of m is greater than 7.*

Theorem 4. *If the least prime factor of m is greater than 107, then $(Q; f)$, where $f(x; y; z) := 2x + 8y + 11z$, is an asymmetric top-quasigroup of the order m .*

Lemma 5. *Let p be the least prime factor of m . If $23 \leq m \leq 107$, then $(Q; g)$ defined by $g(x; y; z) := \alpha x + \beta y + \gamma z$ is an asymmetric top-quasigroup of the order p , where p and $\{\alpha; \beta; \gamma\}$ are taken from the following table:*

p	$\{\alpha; \beta; \gamma\}$
23,103	{12,14,21}
29,83,97	{6,8,16}
31	{3,4,25}
37,61	{2,7,29}
41,67	{7,14,21}
43,53,107	{21,31,35}

47	{2,5,41}
59,61,71,79,89,101	{2,8,11}

Theorem 6. *A ternary linear asymmetric top-quasigroup over an m -order cyclic group exists iff the least prime factor of m is greater than 19.*

Literature

[1] Belyavskaya G.B., Popovich T.V. Totally conjugate orthogonal quasigroups and complete graphs, *Fundamental and Applied Mathematics*, Moscow, 2010, vol. 16, 35–45 (in Russian).

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ ПЕРЕСТАНОВОК

Тимофієва Н. К. TymNad@gmail.com

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій
та систем НАН та МОН України

Рассмотрено множество перестановок, в котором следующая образуется из предыдущей одной транспозицией двух соседних элементов. Доказано, что для парных значений n при таком упорядочении образованное множество содержит тождественные перестановки. С этой целью введено среднее число, которое разделяет множество перестановок, заданное таблицей, на внутреннее и внешнее поля. Показано, что элементы внутреннего поля не попадают во внешнее и наоборот. Разработаны правила упорядочения множества нетождественных перестановок, которые позволяют всем элементам поочередно занимать позиции в обоих полях.

A set of permutations in which the following is formed from the previous one transposition of two adjacent elements is considered. It is proved that for odd values n of organizing such an established set contains identical permutation. To this end, introduced the average number that divides the set of permutations that set the table for the internal and external field. It is shown that the elements of the internal field does not fall in the external and vice versa. A rules of organization of set of unidentical permutations which allow all elements by turns to occupy positions in both fields are developed.

Вступ. В природі існує скінченне число множин перестановок, кожна з яких може бути упорядкована $(n!)!$ способами. В літературі описано множини, які упорядковані так, що наступна перестановка в них одержується

з попередньої однією транспозицією двох сусідніх елементів. Але на прикладах можна побачити, що для n парних на певному інтервалі усі наступні перестановки в ньому повторюють попередні. Дослідимо детальніше цю властивість. Упорядкуємо їхню множину так, що перша перестановка чергового інтервалу (обмежувальна) утворюється оператором транспозиції кількох елементів [1].

Перестановки та їхня множина. Нехай задано скінченну множину (базову) $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, яка складається з n елементів будь-якої природи. Перенумеруємо їх від 1 до n і вважатимемо, що елементами A виступають саме ці числа. Назвемо перестановкою $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ розміщення чисел $1, 2, \dots, n$ у деякому порядку. Їхню множину позначимо Ω . Якщо в заданій перестановці поміняти місцями будь-які елементи (не обов'язково розміщені поряд), а всі інші залишимо на місці, то одержимо нову перестановку. Операцію, яка змінює порядок елементів у перестановці, називають підстановкою. Підстановка розкладається на цикли. Цикли довжиною два називають транспозиціями, тобто транспозиції це – найпростіші підстановки і означають переміщення двох елементів. В подальшому користуємося цим терміном.

Дві перестановки ω та ω^* назвемо нетотожними, якщо вони відрізняються порядком слідування в них елементів.

Упорядкуємо перестановки $\omega^k \in \Omega$ так, що наступна ω^{k+1} утворюється з попередньої ω^k рекурентним комбінаторним оператором (або операцією) транспозиції $\alpha(\omega_j^k, \omega_s^k)$, $k \in \{1, \dots, n!\}$ – порядковий номер ω^k в Ω , $j, s \in \{1, \dots, n\}$. Оскільки в упорядкованій множині Ω перестановки $\omega^k \in \Omega$ розміщені в певному порядку, то при розробленні процедур їхнього генерування базову множину A , з елементів якої оператором вибирання вони утворюються, розглянемо як упорядковану і позначимо її $A = (a_1, \dots, a_n)$. Вважаємо $\omega^k \in \Omega$ також упорядкованою і позначимо її $\omega^k = (\omega_1^k, \dots, \omega_n^k)$.

У будь-якій впорядкованій комбінаторній множині Ω назвемо інтервалом $L_{b,c}$ ($b < c$) підмножину послідовних перестановок ω^k з початковим номером b та кінцевим c . Його довжиною назвемо кількість ω^k , які містяться в цьому інтервалі включаючи b і c .

Множину Ω подамо у вигляді таблиці, рядками якої є перестановки $\omega^k \in \Omega$, а елементи j -го стовпця складаються з чисел, що знаходяться в j -й позиції k -го рядка, $k = \overline{1, n!}$. Позначимо стовпець Δ_j , $j \in \{1, \dots, n\}$.

Лема 1. Будь-який стовпець Δ_j множини усіх нетотожних перестановок Ω містить n різних символів, причому кожен із n символів повторюється в стовпці $(n - 1)!$ раз.

Для генерування множини перестановок використаємо рекурентно-періодичний метод, який ґрунтується на властивості періодичності, що характерна для їхнього впорядкування. З цією метою необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються: а) інтервал нульового рангу, б) обмежувальна перестановка (перша в інтервалі нульового рангу), в) інтервал σ -го рангу.

Середнє число множини перестановок. Розглянемо підмножину $\Omega_{4!} \subset \Omega$. Ця підмножина складається з чотирьох інтервалів довжиною $3!$. Якщо перестановки в ній утворено з попередніх однією транспозицією двох сусідніх елементів, то в четвертому інтервалі вони повторюються, тобто тотожні попереднім. Це пов'язано з тим, що елементи в першій позиції обмежувальної перестановки 4-го інтервалу не змінюються. Для одержання нетотожних перестановок в цьому інтервалі при утворенні обмежувальної перестановки уведемо додаткову транспозицію.

Покладемо $Z \in \{2, 4, \dots, 2j\}$, $Z_1 \in \{1, 3, \dots, 2j - 1\}$.

Правило. Перестановки ω^{k+1} в інтервалах нульового рангу довжиною $3!$ утворюються з попередньої ω^k однією транспозицією двох сусідніх

(першого та другого або другого та третього) елементів $\omega_1^k, \omega_2^k, \omega_3^k$,
 $\omega^k = (\omega_1^k, \omega_2^k, \omega_3^k, \dots, \omega_n^k)$.

Лема 2. Підмножина перестановок $\Omega_{4!}$ для $n = 4$, яка упорядкована інтервалами нульового рангу довжиною $3!$ за наведеним правилом, обмежувальна перестановка другого і четвертого інтервалів першого рангу утворюється з попередніх операцією $\alpha(\omega_{n-1}^k, \omega_n^k)$, а обмежувальна перестановка третього інтервалу – операціями $\alpha(\omega_{n-1}^k, \omega_n^k)$ та $\alpha(\omega_1^k, \omega_2^k)$ містить нетотожні перестановки. Початкова перестановка задана.

Наслідок 1. У підмножині $\Omega_{4!}$, утвореною згідно з лемою 2, остання перестановка – інверсія першої перестановки.

Розглянемо підмножину $\Omega_{5!} \subset \Omega$, яка упорядковується п'ятьма інтервалами 1-го рангу, кожен з яких має довжину $4!$.

Лема 3. Підмножина $\Omega_{5!}$, яка упорядкована інтервалами нульового та першого рангу згідно з лемою 2, а обмежувальна перестановка t -го інтервалу утворена з попередньої двома транспозиціями $\alpha(\omega_1^k, \omega_2^k)$ та $\alpha(\omega_4^k, \omega_5^k)$, містить нетотожні ω^k , $t = \overline{2, 5}$. Початкова перестановка задана.

Наслідок 2. Остання перестановка упорядкованої підмножини $\Omega_{5!}$ відрізняється від першої таким чином:

$$\begin{array}{l} 1) \quad 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dots \\ 5!) \quad 2 \ 1 \ 3 \ 5 \ 4 \end{array}$$

тобто міняються місцями елементи першої і другої, четвертої і п'ятої позицій. Елементи в третій позиції свого значення не змінюють.

Використовуючи лему 3 і наслідок 2, упорядкуємо множину перестановок для n непарного так, що обмежувальна перестановка утворюється з попередньої кількома транспозиціями двох сусідніх елементів. Оскільки

$n \in Z_1$, то згідно з наслідком 2, один елемент в останній перестановці множини Ω по відношенню до першої, залишається в тій же позиції.

Означення 1. Середнім числом перестановки $\omega^k \in \Omega$ назвемо позицію, елемент якої при утворенні обмежувальної перестановки t -го інтервалу σ -го рангу для n непарного свого значення не змінює. Позначимо номер цієї позиції як Ξ .

З наслідку 2 випливає, що Ξ набуває лише непарні значення і дорівнює

$$\Xi = \begin{cases} n+1/2, & \text{якщо } n+1/2 \in Z_1, n \in Z_1, \\ n/2, & \text{якщо } n/2 \in Z_1, n \in Z, \\ n-2/2, & \text{якщо } n/2 \in Z, n \in Z, \\ n-1/2, & \text{якщо } n+1/2 \in Z, n \in Z_1. \end{cases}$$

Розглянемо упорядковану підмножину $\Omega^* \subset \Omega$, в яку входять лише обмежувальна (перша) і остання перестановки t -го інтервалу n -го рангу довжиною $(n-1)!$. Упорядковану підмножину $\Omega^* \subset \Omega$ подамо у вигляді таблиці, рядками якої є перестановки, а елементи j -го стовпця – елементи ω_j^k , що знаходяться в j -й позиції k -го рядка ($j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, 2n}$).

Стовпець Δ_Ξ , номер якого збігається з позицією, в якій знаходиться середнє число, назвемо середнім розділювальним стовпцем. Внутрішнім полем таблиці Ω^* назвемо Δ_j -і стовпці, для яких $j \in \{1, 2, \dots, \Xi - 1\}$. Зовнішнім полем таблиці Ω^* назвемо Δ_t -і стовпці, для яких $t \in \{\Xi + 1, \dots, n\}$.

Означення 2. Траєкторією j -го елемента ω_j^k в таблиці Ω^* назвемо шлях послідовної зміни його положення в стовпцях та рядках внаслідок операції транспозиції, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Лема 4. Множина Ω для $n \in Z$, що упорядкована інтервалами нульового рангу за наведеним правилом, у якій обмежувальна перестановка з номером $(l-1)(n-1)!+1$, $l \in \{2, \dots, n\}$, $\frac{n}{2}$ -го інтервалу σ -го рангу формується з

попередньої $(l-1)(n-1)!$ транспозиціями $\alpha(\omega_j^k, \omega_{j+1}^k)$, $j \in Z$, (змінюються місцями два сусідні елементи), містить тотожні перестановки.

Доведення. Упорядкуємо множину Ω для $n \in Z$ таким способом. Перестановку з номером $(l-1)(n-1)!+1$ утворимо з попередньої $(l-1)(n-1)!$ (вона визначається з урахуванням наслідку 2) транспозицією $\alpha(\omega_j^k, \omega_{j+1}^k)$, $j \in Z_1$. Виділимо із множини Ω підмножину Ω^* і подамо її таблицею. Покладемо $p = (n-1)!$, $x = n - 1/2$, $y = n/2$.

1)	1, 2, 3, 4, ..., Ξ , $\Xi+1$, ..., $n-3$, $n-2$, $n-1$, n	
p)	2, 1, 4, 3, ..., Ξ , i , ..., $n-4$, $n-1$, $n-2$, n	
p+1)	1, 2, 3, 4, ..., i , Ξ , ..., $n-1$, $n-4$, n , $n-2$	
2p)	2, 1, 4, 3, ..., i , s , ..., b , n , $n-4$, $n-2$	
	...	
2p+1)	1, 2, 3, 4, ..., s , i , ..., n , b , $n-2$, $n-4$	(1)
3p)	2, 1, 4, 3, ..., s , ..., ζ , $n-2$, b , $n-4$	
	...	
x·p+1)	1, 2, 3, 4, ..., n , $n-1$, $n-2$, ..., Ξ	
y·p)	2, 1, 4, 3, ..., n , $n-2$, $n-1$, ..., Ξ	
	...	
(n-2)n+1)	1, 2, 3, 4, ..., Ξ , ..., $n-3$, $n-2$, $n-1$, n	

Як видно з таблиці (1), обмежувальна перестановка $(n-1)$ -го інтервалу n -го рангу повторює перший інтервал n -го рангу, а множина Ω містить тотожні перестановки, що і доводить лему 4.

Наслідок 3. Якщо у множині Ω обмежувальна перестановка t -го інтервалу σ -го рангу, $t \in \{1, \dots, n\}$, для $\sigma \in Z$ утворюється за правилами, викладеними у лемі 4, то елементи ω_j^k перестановки ω^k , що знаходяться у

внутрішньому полі підмножини Ω^* , не попадуть у зовнішнє, а елементи ω_j^k із зовнішнього поля не переміщуються у внутрішнє.

Наслідок 4. Траєкторія елементів підмножини $\Omega^* \subset \Omega$ змінюється як періодична функція з амплітудою Y та довжиною основного періоду d .

Значення амплітуди Y дорівнює кількості сусідніх стовпців, у яких почергово перебуває заданий елемент ω_j^k у процесі свого руху. Траєкторія кожного елемента ω_j^k для Δ_j, Δ_{j+1} стовпців внутрішнього поля підмножини $\Omega^* \subset \Omega$, перетинає лише стовпці Δ_j, Δ_{j+1} , $j \in \{1, 3, 5, \dots, \Xi - 2\}$. Траєкторія кожного елемента зовнішнього поля підмножини Ω^* перетинає стовпці Δ_l , $l \in \{\Xi, \dots, n + 1\}$. Якщо елементи ω_j^k перебувають у внутрішньому полі підмножини Ω^* , то $Y = 2$, а $d = 3$. Якщо елементи ω_j^k перебувають у зовнішньому полі підмножини Ω^* , то $Y = (n - \Xi) + 1$, а $d = 4n - 4$.

Теорема. Якщо множина Ω (для $n \geq 4$) упорядкована інтервалами нульового рангу за наведеним правилом, а обмежувальна перестановка, крім першої, будь-якого t -го інтервалу σ -го рангу утворена з попередньої транспозиціями кількістю $\lfloor n/2 \rfloor$ двох сусідніх елементів $\alpha(\omega_j^k, \omega_{j+1}^k)$ для $j \in \{1, 3, \dots, \Xi - 2, \Xi + 1, \dots, n - 1\}$, якщо $n \in Z_1$, а для $n \in Z$ ($n/2 - 2$) транспозиціями $\alpha(\omega_s^k, \omega_p^k)$, де ω_s^k належить внутрішньому, а ω_p^k – зовнішньому полю таблиці Ω^* , то вона містить усі нетотожні перестановки.

Доведення проводимо методом математичної індукції окремо для n парних і n непарних. Справедливість теореми для $n = 4$ і $n = 5$ впливає з лем 2 та 3.

Покладемо, що теорема справедлива для значення $n \in Z$. Доведемо, що вона справедлива і для $(n + 1) \in Z_1$.

Побудуємо множину Ω для $(n + 1) \in Z_1$ утворенням $((i - 1)n! + 1)$ -ї перестановки з попередньої операцією $\alpha(\omega_j^{(i-1)n!}, \omega_{j+1}^{(i-1)n!})$ для позицій

утворюється точно так, як і для t -го інтервалу $(n+1)$ -го рангу, $t \in \{1, \dots, n/2\}$, тобто по відношенню до середнього інтервалу $(n+1)/2 + 1$ у множині Ω^* має місце симетрія. Отже, якщо з обмежувальних і останніх перестановок t -го інтервалу для $(n+1) \in Z$ утворити таблицю Ω^* , то можна побачити, що стовпець Δ_{n+1} містить $n+1$ різних символів, які повторюються $n!$ раз, що задовольняє лемі 1. Тому Ω – всіляка і містить нетотожні перестановки.

Таким чином, щоб елементи таблиці Ω^* із зовнішнього поля перемістилися у внутрішнє, а із внутрішнього – у зовнішнє, необхідно вводити транспозицію, яка змінює місцями елементи цих полів.

Теорему доведено.

Висновок. Отже, при утворенні перестановок в процесі генерування їхньої множини однією транспозицією двох сусідніх елементів наступні перестановки на певному інтервалі можуть повторювати попередні. Для уникнення такої ситуації необхідно при утворенні обмежувальної перестановки вводити додаткові транспозиції двох елементів.

Література

1. Тимофеева Н.К. К вопросу о перестановках / Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН УССР. – К., 1989.– 22 с. Деп. в ВИНТИ 17.05.89, № 3286-В89. – Реф. в: Математика. – 1989. – № 8.

ПОБУДОВА ІЗОМОРФІЗМІВ ДЕЯКИХ 4-РЕГУЛЯРНИХ ГАМІЛЬТОНОВО РОЗКЛАДНИХ ГРАФІВ. II

К. М. Шевченко

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка

$\theta(H, F)$ — це граф, отриманий в результаті підрозбиття кожного ребра u_i деякої паросполуки F графа H порядку ν новою вершиною b_i і наступного топологічного склеювання всіх нових вершин b_i в одну вершину $a_{\nu+1}$ [1].

θ -твірним називається граф Q порядку $2k$, в якому існує такий 1-фактор F , що в графі $\theta(Q, F)$ є підграф, ізоморфний Q [2].

Для $k = 2$ існує лише 3 θ -твірні графи Q_1, Q_2, Q_3 .

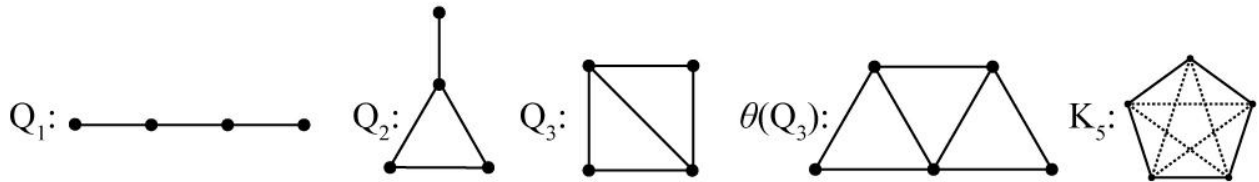
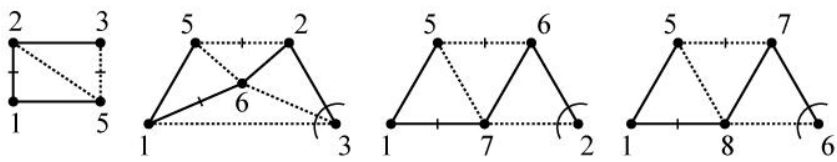


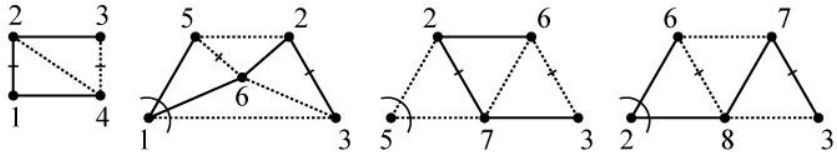
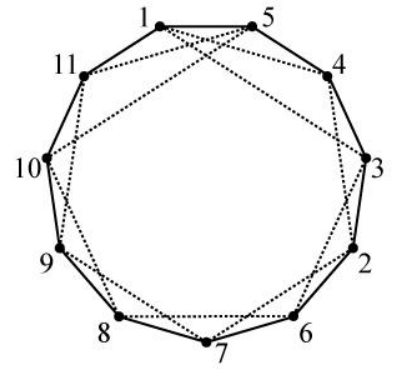
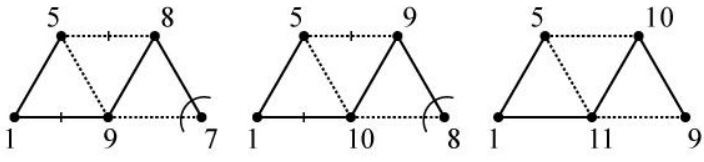
Рис. 1.

В [1] побудовано послідовність $R_{4,\theta}$ [2], в якій є по одному графу кожного порядку $\nu \geq 6$. В [2] побудовано послідовність $R_{6,\theta} = H_i$. В ній кожен граф $H_{i+1} = \theta(H_i, F_i)$ визначається однозначно тому, що при вибиранні паросполуки F_i враховується гамільтонів розклад графа H_i , який продовжується до гамільтонового розкладу графа H_{i+1} .

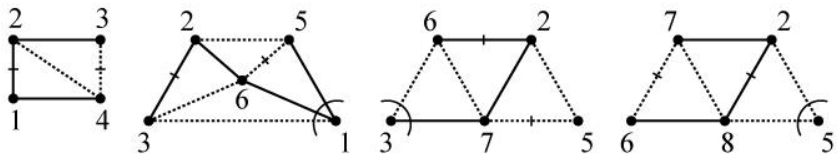
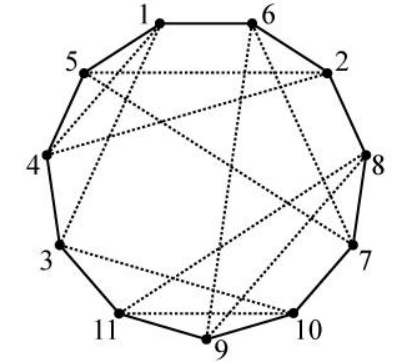
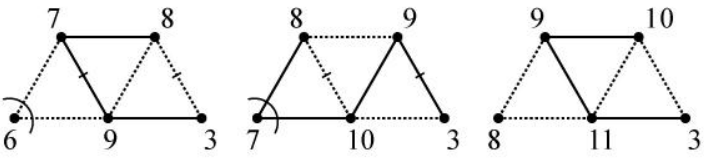
Опишемо побудову послідовностей $R_{4,\theta}$, які починаються з гамільтоново розкладеного графа K_5 (рис. 1). Q_1 і Q_2 можна вибрати в K_5 як підграфи підграфа Q_3 , тому можна користуватись лише θ -твірним підграфом Q_3 графа K_5 . В графі $\theta(Q_3)$ є дві паросполуки розміру 2 такі, що ребра кожної з них належать до різних компонент гамільтонового розкладу графа $\theta(K_5)$. Побудувавши елемент H_i послідовності $R_{4,\theta}$, можемо вибрати будь-яку з цих паросполук. Це дає велику різноманітність варіантів. На рис. 2 зображено графи порядку 11 з 5 послідовностей (всі вони попарно не ізоморфні), а також зірки з центрами, які мають найбільші номери в графах з H_i разом з графами оточень цих вершин. Відмічено паросполуки F_i , за допомогою яких побудовано по 6 графів кожної з цих послідовностей.



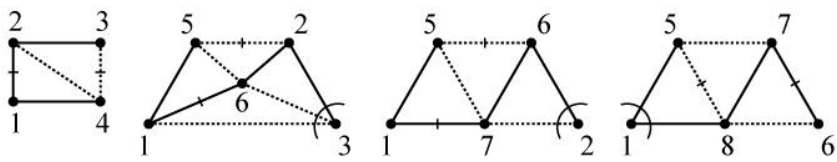
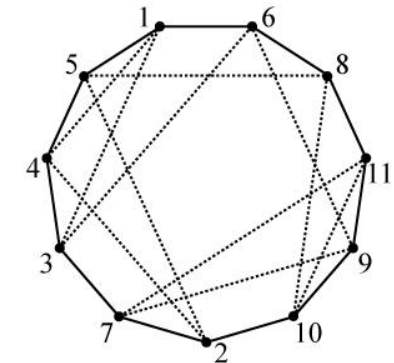
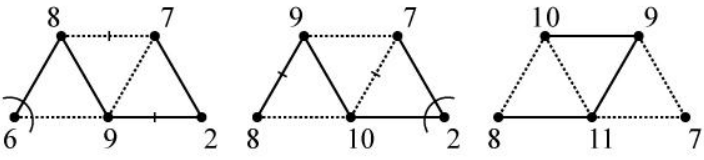
1)



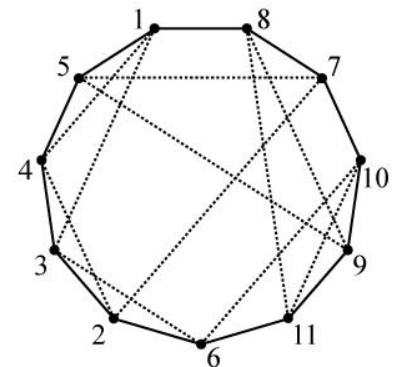
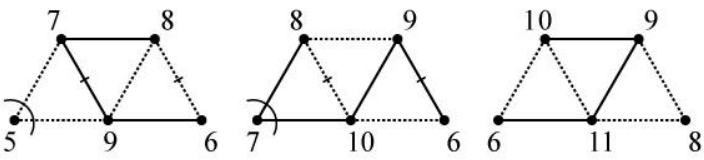
2)



3)



4)



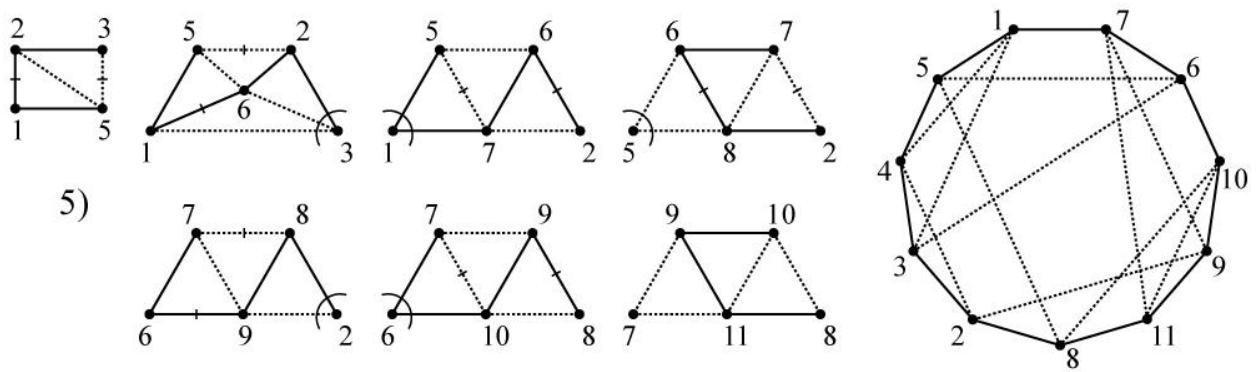


Рис. 2

Граф θQ_3 є півколесом, тому граф оточення вершини a_ν графа H_i є ланцюгом P_4 . Тому яку б із двох паросполук у відповідному підграфі графа H_i порядку ν не було вибрано, в графі H_{i+1} порядку $\nu+1$ граф оточення вершини $a_{\nu+1}$ також є ланцюгом P_4 . Це дає змогу легко побудувати ізоморфізм графа G порядку $\nu+1$ на граф H_{i+1} з деякої послідовності $R_{4,\theta}$, якщо вони ізоморфні, або довести, що вони не ізоморфні. Справді, нехай треба встановити, чи граф G порядку $\nu+1$ ізоморфний графу H_{i+1} порядку $\nu+1$ з деякої послідовності $R_{4,\theta} = H_i$. Нехай вершина a графа G має графом свого оточення ланцюг P_4 , як і вершина $a_{\nu+1}$ графа H_{i+1} . Припишемо вершині a номер $\nu+1$. Існує лише два ізоморфізми ланцюга P_4 на граф оточення вершини $a_{\nu+1}$ графа H_{i+1} . Виберемо один з цих двох ізоморфізмів і занумеруємо відповідно вершини з оточення вершини a в G . З побудови графів H_i видно, що серед цих вершин є вершина з номером ν , а також принаймні одна вершина з її оточення в графі $\theta^{-1} H_{i+1}, a_{\nu+1}$. Цього досить, щоб визначити однозначно не лише вершину, якій треба приписати номер ν , а й нумерацію всіх вершин з її оточення в графі $\theta^{-1} G, a$. Побудуємо граф $\theta^{-1} G, a$, тобто, видалимо з G зірку з центром a і приєднаємо до графа оточення вершини a в G (ланцюга $x_1 x_2 x_3 x_4$) паросполуку $x_1 - x_3, x_2 - x_4$ (вона визначається однозначно). Переходимо до відшукування ізоморфізму

графа $\theta^{-1} G, a$ на граф H_i з H_i . Тепер уже немає вибору: вершина з найбільшим номером ν в $\theta^{-1} G, a$ і вершини з її оточення нумеруються однозначно. Переходимо до розгляду графів порядку $\nu-1$, і т. д., доки не занумеруємо всі вершини графа G . Якщо його матриця при такій нумерації вершин співпадає з матрицею графа H_{i+1} , то вже побудовано ізоморфізм G на H_{i+1} . Якщо ж на деякому кроці виявиться суперечність, яка унеможливило б побудову ізоморфізму G на H_{i+1} , то, можливо, нумерацію вершин з оточення вершини a в G було обрано неправильно. Оберемо другий її варіант і виконаємо ще раз усі наступні дії. Якщо знову не вдається побудувати ізоморфізм G на H_{i+1} , то вони неізоморфні, якщо в G лише одна вершина a має графом свого оточення P_4 . Якщо ж таких вершин в графі G k , $1 < k \leq \nu + 1$, то кожна з них випробуємо в ролі a . Лише після цього можна стверджувати, що G та H_{i+1} не ізоморфні.

Отже, перебирається не більш ніж $2n$ варіантів, де n — порядок графа G .

Література

1. Шевченко К. М. Побудова ізоморфізмів деяких 4-регулярних гамільтоново розкладних графів, Матеріали 11-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 15-16 квітня 2011 р., м. Кіровоград, ст. 194-198.

2. Шевченко К. М. Побудова ізоморфізмів деяких 6-регулярних гамільтоново розкладних графів, Матеріали 13-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 13-14 квітня 2012 р., м. Кіровоград.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНЫМ РАЗМЕТКАМ ГРАФОВ

З. О. Шерман

sherman.zoya@rambler.ru

Кировоградский кибернетико-технический колледж

Под графом понимаем неориентированный конечный граф без петель и кратных ребер. Мы используем терминологию, предложенную в [1].

Функцию f называют *Фибоначчи грациозной разметкой* графа $G=(V, E)$ с q ребрами, если f – инъекция из $V(G)$ в множество $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, F_q\}$, где F_q это q -тое число Фибоначчи в последовательности $F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, \dots$ и, индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u,v)=|f(u)-f(v)|$, является биекцией из $E(G)$ на множество $\{F_1, F_2, \dots, F_q\}$. Граф, допускающий Фибоначчи грациозную разметку, называют Фибоначчи грациозным графом.

Пусть G_1, G_2, \dots, G_k ($k \geq 2$) – графы из некоторого семейства графов. Добавлением ребра между вершиной графа G_i и соответствующей вершиной графа G_{i+1} для $i=1, 2, \dots, k-1$ получим произвольное цепное соединение G_1, G_2, \dots, G_k .

В данной работе исследуется Фибоначчи грациозность таких типов графов: $G=\langle C_m:P_k:C_n \rangle$ – цепное соединение циклов; одноточечное соединение циклов; произвольное цепное соединение циклов. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Граф $G=\langle C_{3m+2}:P_k:C_{3n} \rangle$ допускает Фибоначчи грациозную разметку для любых натуральных чисел k, m, n .

Теорема 2. Одноточечное соединение C_{3m_i} произвольного числа циклов C_{3m_i} , где $i=1, 2, \dots, k$ является Фибоначчи грациозным графом для любых натуральных чисел k, m_i .

Следствие 3. Одноточечное соединение произвольного числа циклов C_{m_i} , где $m_1 \equiv 2 \pmod{3}$ и $m_i \equiv 0 \pmod{3}$ для $i=2, 3, \dots, k$ является Фибоначчи грациозным графом для любых натуральных чисел k, m_i .

Теорема 3. Произвольное цепное соединение графов G_1, G_2, \dots, G_k ($k \geq 2$) из семейства графов $G_1 = C_{3m+2}$, $G_i = C_{3n_{i-1}}$, где $i=2, 3, \dots, k$ является Фибоначчи грациозным графом для любых натуральных чисел m, n_i .

Соответственно к изложенному в доказательстве теорем способу построения Фибоначчи грациозной разметки представленных графов создан алгоритм. Он реализован с помощью ассоциативного массива языка C++. Результаты работы программы представлены на рис.1-3.

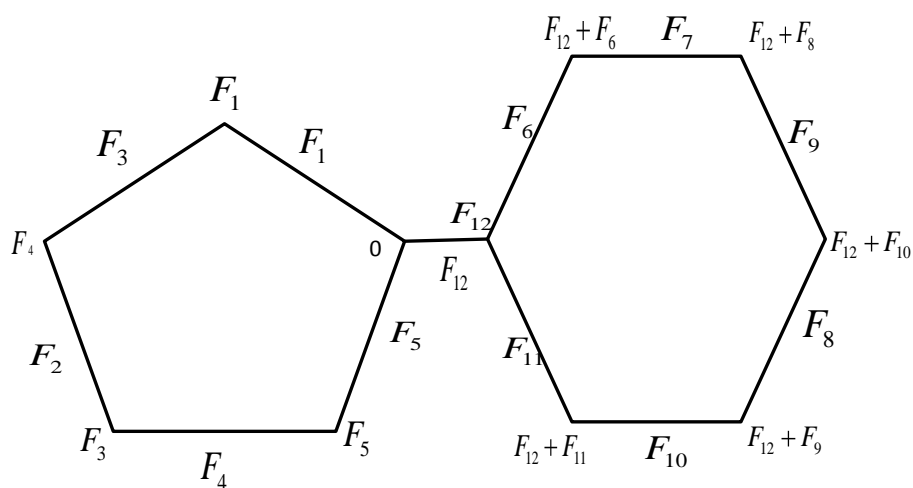


Рис.1. Фибоначчи грациозная разметка графа $G = \langle C_5:P_2:C_6 \rangle$

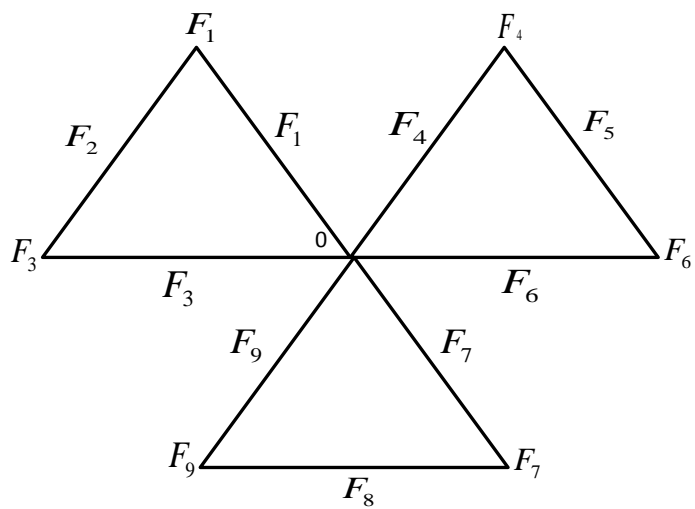


Рис.2. Фибоначчи грациозная разметка графа $G=\langle C_3:C_3:C_3\rangle$

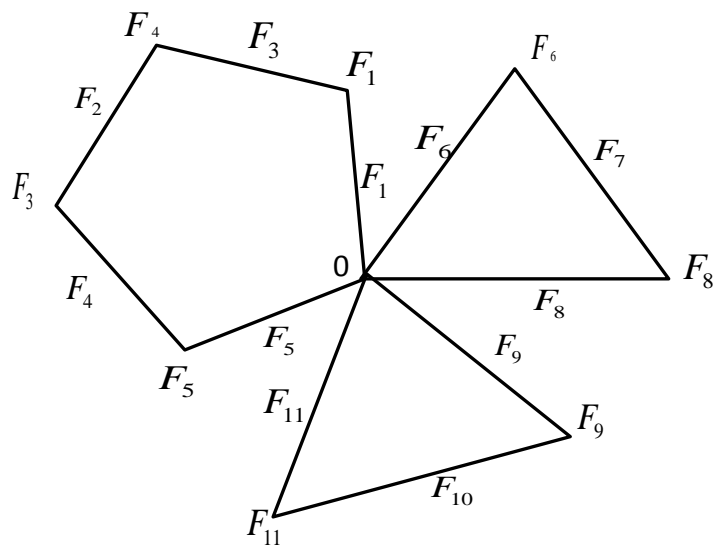


Рис.3. Фибоначчи грациозная разметка графа $G=\langle C_5:C_3:C_3\rangle$

Литература

1. Bange D. W., Barkauskas A. E. Fibonacci graceful graphs. Fibonacci quarterly. 1983 – Vol. 21, № 3, pp. 174-188.

СЛАВЕТНА ПОСТАТЬ УКРАЇНСЬКОЇ НАУКИ

Володимир Козирський[†] і Василь Шендеровський[‡]

[†]kozyrski@ukr.net, Інститут теоретичної фізики ім. М. Боголюбова НАН України

[‡]schender@iop.kiev.ua, Інститут фізики НАН України, Київ

Подано короткий зарис життя й наукового доробку легендарного українського математика академіка Остапа Парасюка.

The paper gives a short sketch of the life and scientific contribution of legendary Ukrainian mathematician Professor Ostar Parasiuk.

Представлен краткий очерк жизни и научного вклада легендарного украинского математика академика Остапа Парасюка.

Понад шість років немає з нами великого українського вченого, педагога й організатора науки, математика, механіка, фізика-теоретика академіка Остапа Парасюка, що відійшов до ліпшого світу 22 листопада 2007 року.

Ціла епоха української й світової науки. Невтомний генератор ідей і неупинний ініціатор і стимулятор їхніх реалізацій. Фронтвик. Орденоносець. Великий Патріот України. Фундатор, натхненник і керівник багатьох наукових напрямів. Засновник двох академічних інститутів. Творець і очільник наукових колективів.

Жива легенда й, мабуть, останній енциклопедист. Людина унікальної життєдайної енергетики, що запалювала й осявала собою усе й усіх довкола.

М'який, часами глибоко ліричний у щирих стосунках з людьми, він був завше незламний і засадничо твердий у питаннях наукової істини, етики й

моралі. Безмежно залюблений у науку, якій він віддав усе свідоме життя, він глибоко розумівся на краснім письменстві й мистецтві.

Надзвичайно глибоко й прозоро осягав він так сучасну науку, як і доволі складні перипетії суспільного життя. Він завше тримав руку на пульсі громади. Без його коронного: *“А що чувати поза тим?”* не обходилася жадна зустріч чи бесіда. Та передовсім була наука. Остап Степанович ніколи не був сухим кабінетним науковцем. Він любив людей, він любив життя.

Він невтомно дошукувався первісного, головного, початкового, визначального. Як знамениті перипатетики античності, він полюбляв розмірковувати під час проходів парками й вулицями Києва. Певно, багато хто з фізиків і математиків можуть зі щирою й глибокою вдячністю пригадати цей його дещо незвичний спосіб спілкування й міркування над таємницями природи. Яке багатство ідей, які інтелектуальні глибини розкривалися перед кожним, хто мав щастя знати Остапа Степановича й насолоду спілкуватися з ним!

О С народився 20 грудня 1921 р. в с. Білки біля Перемишлян на Львівщині. Навчався в перемишлянській гімназії та Львівській ліцеї, який закінчив 1939 р. Від січня 1940 р. студент фізико-математичного факультету Львівського ун-ту, що зібрав зірок світової математики – С. Банах, А. Мазур, Г. Штейнгауз... Постійний семінар чолив фундатор сучасного функціонального аналізу С. Банах. О. Парасюк не пропускав жадного засідання.

1941 р. німці окупували Львів і закрили університет. Остап вчиться самотужки. Захоплюється фізикою, вивчає квантову механіку й електродинаміку. 1944 р. до Львова вступила Червона Армія, юнаків мобілізують. Остап воює на 4-ім Українським фронті. Травень 1945 р. зустрів під Прагою. За хоробрість дістав бойові нагороди. Груднем його поновлюють у Львівським університеті й за два роки він закінчує його екстерном.

1947–49рр. О. Парасюк – аспірант щойно відкритого у Львові відділення Інституту математики. Під проводом Г. М. Савина працює над проблемами

механіки й вереснем 1949 захищає дисертацію “Пластичні зони при концентрації напруженостей навколо отворів”.

Перший цикл наукових праць стосувався проблем класичної математичної фізики й механіки. Він винайшов потужній загальний засадничо новий результативний метод знаходження контуру, що в пласкодеформованім стані матеріялу розмежовує пружню й пластичну зони й застосовний до багатьох важливих проблем теорії пружности й пластичности, що є основа сучасного матеріялознавства.

1948 р. О С з Мейзлером і Рвачовою публікує доведення багатовимірної граничної теореми теорії ймовірности, без якої годі уявити локальну теорему Колмогорова для ланцюгів Маркова, що є математичний ґрунт квантової статистики і складає основу однойменної монографії О.Я.Хінчіна (“Математичні основи квантової статистики” 1951 р.).

Значний вплив на розуміння делікатних аспектів ергодичної гіпотези статистичної фізики, ґрунтованої на концепції спектра динамічної системи, зумовило віртуозне дослідження О С методами груп Лі потоку гороциклів.

1952-53рр. О С виконав цикл праць зі статистичної теорії динамічних систем, зокрема, довів перемішування гороциклічного потоку на поверхнях сталої від’ємної кривини й установив умови ергодичности. У наступних роботах виконано узагальнення на тривимірні многовиди. Ці праці містять вельми глибокі ідеї й алгоритмічні знахідки, що розвинено згодом іншими авторами й складають істотню частину стохастичної динаміки.

1949–51рр. О. С. Парасюк – старший науковий співробітник Львівського відділення Інституту математики. Читає лекції з механіки й гідродинаміки у Львівськiм університеті, один із засновників Інституту машинознавства й автоматики. З 1952 року О. С. Парасюк заступник директора цього інституту.

Незважаючи на практичні завдання Інституту, осягає проблематику квантової електродинаміки й загальної теорії квантованих полів, математичну природу розбіжностей у фізичних теоріях.

На рекомендацію Б. М. Делоне О С запрошують до докторантури Математичного інституту ім. В. А. Стеклова. Першого ж дня перебування у Москві в кабінеті директора “Стекловки“ І. М. Виноградова січнем 1953 р. відбувається знайомство з М. М. Боголюбовим.

М М цікавили проблеми, з якими прибув О С, тому скоро сформулювали задачу про розбіжності в квантовій теорії поля. Вже за півроку О С розвинув нову техніку усунення розбіжностей і довів теорему про ренормовність квантової електродинаміки в довільнім порядку теорії збурень. Опубліковано десять робіт. Це всесвітньо знана класика квантової теорії.

Травнем 1955 р. в Математичнім інституті ім. В. А. Стеклова О С захищає докторську дисертацію “Теорія множення польових операторів“. Вертає до Львова старшим науковим співробітником Інституту математики АН УРСР і водночас викладає у Львівськiм університеті. 1956 р. О С переведено до Києва в Інститут математики, де він очолив відділ функціонального аналізу, з 1963 р. – відділ теоретичної фізики. 1958 р. О С обрано член-кореспондентом, 1964 – академіком АН УРСР. З 1966 по 1970 р. О. С. Парасюк – член Президії АН УРСР, академік-секретар Відділення фізики й астрономії. Тоді за його активного сприяння Академія наук зросла на два нові інститути – Інститут теоретичної фізики й Інститут ядерних досліджень.

Чи не найважливіше наукове досягнення О.С.Парасюка є побудова ним і М.М.Боголюбовим віднімальної процедури усунення розбіжностей у квантовій теорії поля (R-операції Боголюбова–Парасюка). Підхід Парасюка до проблеми розбіжностей у квантвой теорії поля з допомогою теорії множення узагальнених функцій виявив глибоку фізичну природу цього, як спочатку вважалося, “математичного казусу“. Після праць М.М.Боголюбова, О.С.Парасюка й інших авторів про ренормгрупову інтерпретацію віднімальної процедури стало зрозуміло, що поява розбіжностей є закономірний прояв ієрархії масштабів, яка об’єктивно існує в природі. Квантова теорія поля, оперуючи поняттям локального поля й претендуючи на

опис природи на довільно малих масштабах, неодмінно стикається з проблемами взаємозв'язку величин, якими оперує теорія, зі спостережуваними величинами. Тому ренормовність стає важливим евристичним принципом сучасної квантової теорії поля. Це було яскраво продемонстровано побудовою єдиної теорії електрослабких взаємодій, авторів якої С. Вайнберга й А. Салама удостоєно Нобелевої премії.

Опрацьована О С з Боголюбовим теорія множення узагальнених функцій відкрила новий етап розвитку квантової теорії поля. "Теорема Боголюбова-Парасюка – найважливіший етап у квантовій теорії поля 50-80-х років, який за значенням можна зрівняти з відкриттям калібрувальних полів і способів їхнього квантування" (Успіхи мат. наук, 1994, т. 49, в. 5, С. 61– 70), що, як відомо, відзначено Нобелевою премією. Теорема Боголюбова–Парасюка є квінт-есенція монографії М. Боголюбова й Д. Ширкова "Вступ до теорії квантованих полів", що від 1957 р. витримала вже багато видань, але й досі є справжня Біблія сучасної квантової теорії поля.

Від появи теорії R–операції не згасає інтерес дослідників до проблеми ренормувань у квантовій теорії поля. Опубліковано сотні робіт, що розвивають і застосовують основоположні ідеї М. М. Боголюбова й О. С. Парасюка. Теорема Боголюбова–Парасюка й рецепт R–операції не втрачають незмінного й актуального "робочого" статусу. З'явилися нові ефективні схеми ренормувань. Проте кожна нова схема набирає "прав громадянства" лише після перевірки на узгодженість з R–операцією.

1956 року О С писав "... глибокий математичний аналіз цієї розбіжності був би вельми корисний." (О.С.Парасюк, "Узагальнені функції в теорії поля", Праці Третього всесоюзного математичного з'їзду т. III, вид-во АН ССРСР, М. 1958). Нова хвиля концептуального обґрунтування R–операції Боголюбова–Парасюка принесла в теорію поля нові математичні методи.

Фейнманів граф задає множина вершин і ліній, які поділяють на внутрішні й зовнішні. Його називають вакуумним, якщо немає зовнішніх ліній, головоастиком, якщо має одну зовнішню лінію, власноенергетичним,

якщо має дві зовнішні лінії, взаємодійним, якщо > 2 зовнішніх ліній. Вакуумні граfi й граfi з однією зовнішньою лінією фізики нехтують.

Правила Фейнмана кожному фейнмановому графу припорядковують амплітуду (інтеграл, взагалі, розбіжний) одержану інтегруванням по всіх внутрішніх і залежну від зовнішніх імпульсів діаграми. Цей інтеграл є узагальнена функція, що належить простору, дуальному простору основних функцій. Якщо інтеграл розбігається, потрібно його ренормалізувати. Для ренормалізації квантової теорії поля до лагранжіану теорії вводять доданок (контрчлен), побудований для кожної розбіжної сильнозв'язної діаграми.

Найзагальнішу схему знаходження скінченних частин розбіжних фейнманових амплітуд зі збереженням лоренцової коваріантності, причиновості (локальності) й унітарності забезпечує процедура, яку складають вибір методу регуляризації в комбінації з власне ренормалізацією (R–операцією).

Найразючіша риса так цього фундаментального результату, як і методу його отримання є просто фантастична майстерність поєднання тонких аналітичних процедур функціонального аналізу (часом званих конструктивною реалізацією теореми Хана–Банаха) й доволі непростих графо-комбінаторних міркувань, істотно ускладнених додатковими характеристиками засадничо фізичного походження. Неймовірна вправність О С у побудові такого часом непередбачуваного синтетичного підходу завше приносила плідні результати. І R–операція є блискуче свідчення цього.

Наукову й організаційну працю О. С. Парасюк поєднував з викладами у Львівським і Київським університетах. На його курсі “Вступ до квантової теорії поля”, започаткованим у Київським університеті, виросло не одне покоління вчених, що сьогодні плідно працюють в Україні й за її межами.

З 1957 року в Києві в Інституті математики під орудою О С розпочинає роботу семінар з проблем квантової теорії поля. На передній план вистає проблема побудови теорії сильних і електро-слабких взаємодій. 1964 року

виникла ідея кварків, що склала основу теорії сильних взаємодій у теорії елементарних частинок.

Тоді О. С. Парасюк корегує тематику семінару й відділу, додаючи теорію груп Лі й вивчення симетрій.

Під ту пору у Відділі теоретичної фізики Інституту математики О С сформував потужній науковий колектив. Тут зросли як науковці відомі вчені Д. Я. Петрина, В. П. Гачок, В. І. Фущич, П. І. Тацуняк, І. І. Костирко, В. І. Коломицев, В. Павлій, Б. І. Колодій, М. Мордовець, В. І. Пономаренко, Г. Чермалих, В.І. Мальченко, І.М. Бурбан, В.А. Яцун, А.У. Клімик, І. Герасим та інші.

1966 р. О С бере безпосередню участь у створенні Інституту теоретичної фізики АН УРСР, в якому очолює відділ математичних методів у теоретичній фізиці. Тут він працював до останніх днів.

О С ставив дуже високі вимоги до рівня наукових досліджень і якості наукових результатів. Не дивно, що деякі кандидати наук, що були чи є працівниками відділу, мають реальний науковий рівень доктора й професора.

Основні теми досліджень становили квантова теорія поля, аналітичні властивості амплітуд розсіяння, теорія симетрій І застосування теорії представлень груп Лі. З цієї тематики О. С. щосереди по обіді постійно провадив науковий семінар, у рамках якого особливої уваги було надавано новим перспективним напрямом квантової теорії поля, теорії елементарних частинок, теорії симетрій, тощо. Семінар працює й досі.

Проте тематику відділу не обмежувано дослідженням теорії симетрій. На семінарі обговорювано багато інших питань теорії квантованих полів, загальної теорії відносности, теорії надпровідности, статистичної фізики, тощо. Тут доповідають відомі в Україні й у світі науковці. Семінар має авторитет у світовім співтоваристві дослідників.

Відділ математичних методів, чолений ним 1966-83 роками, породив чотири самостійні високоорганізовані результативні наукові колективи зі спектром досліджень від потужних алгебричних методів сучасної квантової

теорії поля і статистичної фізики до модерних проблем математичної економіки й синергетики.

О. С. Парасюк дбайливо опікувався вихованням молоді. Зазвичай то була наукова молодь, що пройшла вишкіл у відділі через аспірантуру й стажування. Серед перших були В. І. Кучерявий, В. Коваленко, М. С. Гончар, В. Г. Козирський, О. В. Золотарюк, Р. С. Мацьків, Я. М. Якимів, О. М. Гаврилик, Л. М. Остафійчук, Е. М. Горбань, С. Й. Максимов, П. І. Голод та інші. Багато хто захистили докторські дисертації.

Незважаючи на втрату частини працівників з утворенням нових відділів, О. С. Парасюк піклується про розвій тематики досліджень відділу. Зокрема, з 1988 року з'являється нова тематика квантових груп.

Серед учнів Остапа Степановича – академік і член-кореспондент НАН України, доктори й кандидати, які успішно працюють у математиці, теоретичній й математичній фізиці.

1971 й 1981рр. О С нагороджено орденами Трудового Червоного прапора. 1992 року удостоєно почесного звання Заслуженого діяча науки й техніки України. Він лавреат премій НАН України ім. М. М. Крилова 1982 р. й ім. М. М. Боголюбова 1996 р. 1994 р. присуджено звання Соросівського професора. 1995 р. нагороджено орденом Вітчизняної війни.

Та найвища нагорода, якою увінчано Остапа Степановича – це визнання найавторитетнішими науковцями світу, велика повага й правдива пошана колег і учнів, добра пам'ять у серцях усіх, хто його знав.

Школа Остапа Парасюка живе й працює, творчо розвиваючи і втілюючи його ідеї й наукові заповіді, маючи за дороговказ його безприкладний взірець самозреченої відданости науці.

Докладніше: Остап Парасюк. Пропам'ятна збірка. К., 2011, 624 с.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИКЛАДНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ДЛЯ ПРОФИЛИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

Р.В. Гогаладзе, проф., д-р. техн. наук

Г.Г. Читаишвили, асс. пр. докторант

(Грузинский технический университет, ул. М. Костава, 77, 0175,

Тбилиси, Грузия)

В статье представлены методы профилирования режущего инструмента и его основных параметров. В качестве объектов исследования выбрано с поверхности вращения второго порядка. Результат исследования позволяет увеличить производительность формообразования сложных технических поверхностей деталей 3-5 раз.

In the article are considered the methods of cutter profiling and its main structural parameters. The surfaces of revolution of the second order were chooses as subject of inquiry. The result of research: this solution allows increasing the productivity of shaping of details' polysulfide in 3-5 times.

ВВЕДЕНИЕ

Прикладная геометрия неразрывно связана со всеми отраслями и видами производства, в частности, с инструментальной промышленностью.

Действительно, обработку получившейся поверхности желательно производить инструментом, имеющим форму, конгруэнтную с образующей поверхностью, или инструментом достаточно аппроксимирующим ее. При этом получается большая зона контакта инструмента с обрабатываемой поверхностью.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Эффективность применения гибких производственных систем (ГПС) в значительной мере определяется техническим уровнем используемого режущего инструмента.

В автоматизированном производстве при обработке сложных поверхностей широкое распространение получили фасонные фрезы, обеспечивающие высокую производительность и качество обрабатываемой поверхности.

Одним из основных вопросов теории профилирования режущего инструмента является определение профиля исходной инструментальной поверхности, сопряженной с поверхностью обрабатываемого изделия.

Сопряженные (взаимооггибающие) поверхности деталь-фреза касаются по линии, называемой характеристикой. При использовании станков с числовым программным управлением (ЧПУ) можно применять специальные инструменты с большой активной линией контакта исходной инструментальной поверхности с обрабатываемой поверхностью детали, что позволяет увеличить производительность формообразования сложных поверхностей деталей в 3-5 раз.

При соответствующей технологической подготовке станки с ЧПУ, в отличие от копировально-фрезерных станков, обеспечивают и более высокую точность и хорошее качество обработки поверхностей сложной формы.

Для задания профиля фрезы обычно применяют аналитические методы. Однако, в некоторых случаях, если профиль имеет сложную форму, то проще применять графический метод. Применение указанного метода значительно упрощает построения, выполняемые при профилировании фрез с помощью сечений, перпендикулярных оси инструмента.

Типизация обрабатываемых деталей по высоте обработки и величине малки требует типизации случая в качестве основных параметров фасонной гиперболической фрезы выступают величина малки и высота борта обрабатываемой поверхности.

Нам известны примеры изготовления фрез со сложной кинематической и гиперболической формой инструмента, получаемой вращением прямолинейного режущего зуба, скрещивающегося с осью вращения. Однако, жесткость и, следовательно, точность обработки деталей современных самолетов таким инструментом недостаточна.

На примере конкретной детали типа «Лонжерон» покажем методику определения параметров спецфрезы (рис. 1). Пусть высота обрабатываемого

борта $h_{\max} = 20$ мм и малка изменяется от 0 до 7° . Вычислим теоретические координаты x_i, y_i обрабатывающего инструмента в каждой точке и соответствующее значение малки. Будем аппроксимировать этот точечный базис для более точного приближения его к теоретическому контуру по методу наименьших квадратов.

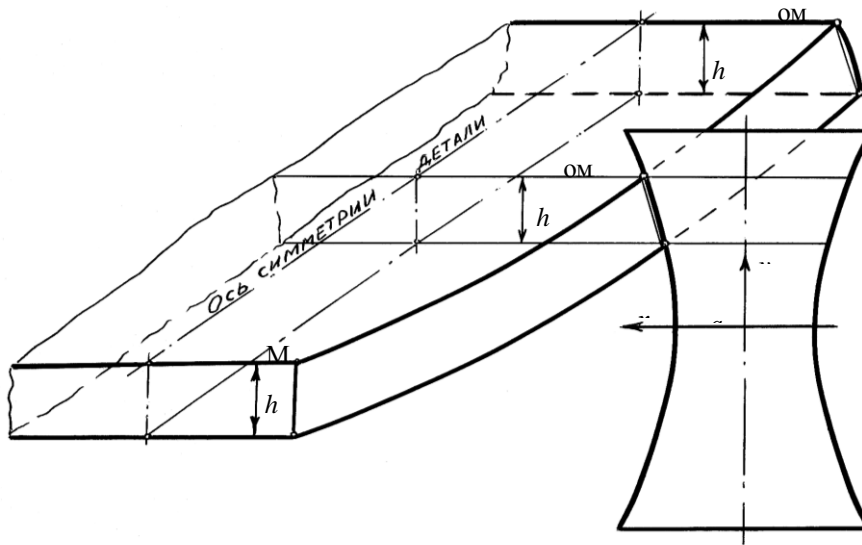


Рис. 1

Существует методика аппроксимации исходного дискретного обвода заданного координатами x_i, y_i в своих узловых точках общим уравнением кривой второго порядка

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1 = 0. \quad (1)$$

Составляется система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i + 1)x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i + 1)2x_i y_i = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i + 1)y_i^2 = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial d} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i + 1)2x_i = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial e} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + 2bx_i y_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i + 1)2y_i = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решение этих уравнений дает коэффициенты a, b, c, d, e . Однако, по ним затруднен выбор конкретного типа кривой второго порядка. Поэтому в качестве аппроксимирующей кривой будем использовать непосредственно уравнение гиперболы. Дадим алгоритм использовать непосредственно уравнение гиперболы. Дадим алгоритм определения основных геометрических параметров фрезы.

Уравнение гиперболы в декартовой прямоугольной системе координат будет

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

По методу наименьших квадратов будем минимизировать сумму квадратов невязок

Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = \delta; \quad \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \min; \quad (4)$$

тогда

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{y_i^2}{b^2} - 1 \right)^2 = \min.$$

Для определения неизвестных параметров a и b возьмем частные производные от функции S по этим параметрам

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{y_i^2}{b^2} - 1 \right) \left(-\frac{x_i^2 2a}{a^4} \right) = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{y_i^2}{b^2} - 1 \right) \left(-\frac{y_i^2 2b}{b^4} \right) = 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Решение этих уравнений обеспечивает нахождение основных параметров a и b .

Однако, конструктивные и технологические ограничения на основные параметры фрезы облегчают решение и этой задачи. Размер шейки фрезы (горловина поверхности вращения) задается конструктором. Пусть $a = 20$ мм. Тогда уравнение гиперболы будем:

$$\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.\tag{6}$$

По МНК будем иметь

$$S = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^2}{20^2} - \frac{y_i^2}{b^2} - 1 \right)^2 = \min ,\tag{7}$$

тогда

$$\frac{\partial s}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^2}{20^2} - \frac{y_i^2}{b^2} - 1 \right) \left(-\frac{y_i^2 2b}{b^4} \right) = 0.\tag{8}$$

Решение этого уравнения численными методами на ЭВМ позволяет найти параметр b нашей гиперболической фрезы.

Построение гиперболы по полученным параметрам и профиль инструмента даны на рис. 2 и рис. 3.

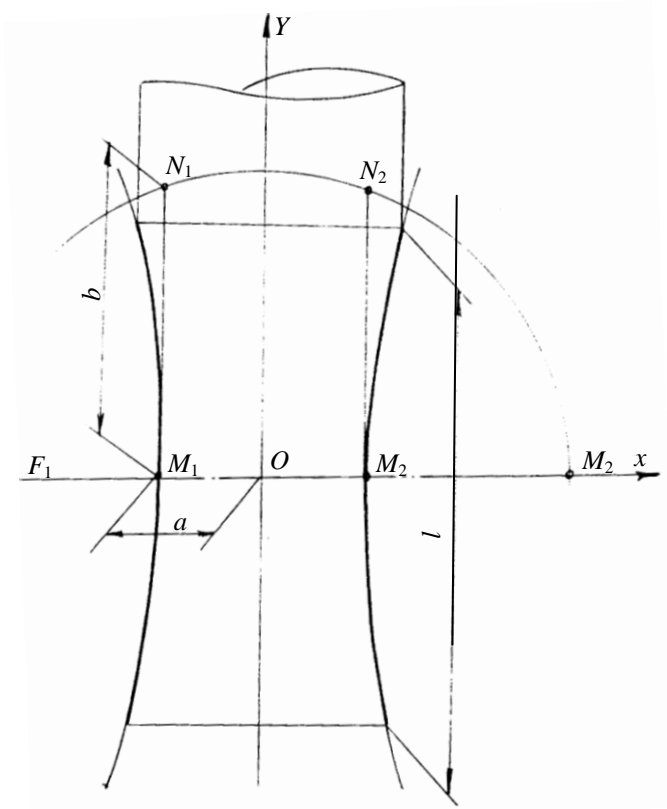


Рис. 2

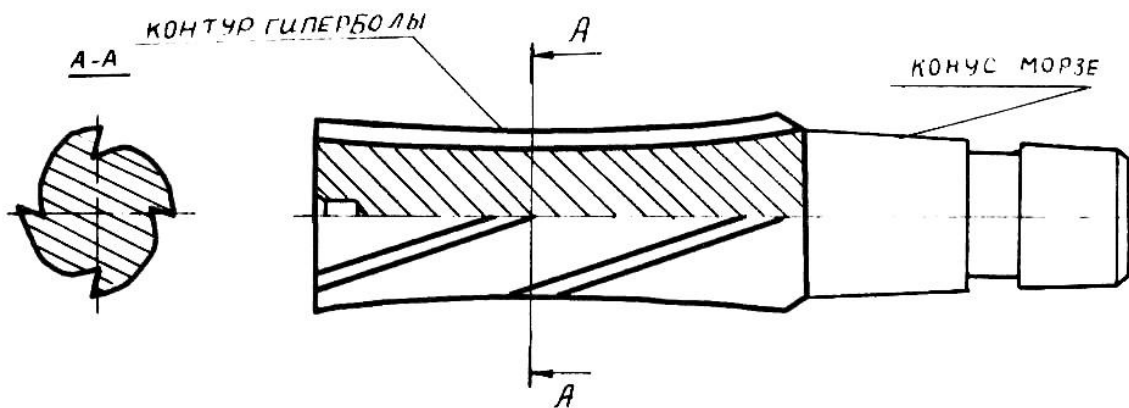


Рис. 3

Деталь типа «Лонжерон» состоит из элементов, ограниченных поверхностями сложной формы. Хотим отметить, что при обработке заданной детали, ограниченной поверхностью сложной формы, первичной является исходная инструментальная поверхность (ИИП), а кинематически

формообразование и резание являются вторичным. Методическая важность этого значения становится очевидной из того, что при обработке заданной детали, ограниченной относительно простой поверхностью, первичными являются кинематические схемы формообразования и резания, а ИИП является вторичной. В этом заключается принципиальная разница между обработкой простых и сложных поверхностей.

Важная особенность описания методов профилирования режущих инструментов состоит в том, что имеется возможность описания графических операций на всех этапах построения. Получив аналитические алгоритмы решения задач, их можно привлечь для составления управляющей программы.

Литература

1. **Рыжов Н.Н.** и другие. Прикладная геометрия поверхности. Труды Московского научно-методического семинара, вып. 242, МАИ, 1988.
2. **Тарасов А.П.** Проектированные фасонных фрез для автоматизированного производства. Москва, общество «Знание», РСФСР, 1991, с. 39-44.
3. **Тевлин А.М.** Винтовое проектирование и его применение для решения геометрических задач. Известия высших учебных заведений, вып. 2, «Машиностроение», Москва, 1962, с.130-141.