

УДК 658.512.2:519.87

**МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ ОЦІНКИ РІВНЯ НАДІЙНОСТІ ТА ЕФЕКТИВНОСТІ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ ТА ВИРОБНИЧИХ ЛІНІЙ****С.Г. Ковальов**, канд. пед. наук,**В.В. Аулін**, проф., д-р. техн. наук,**А.В. Гриньків**, ст. дослідник, канд. техн. наук,**Ю.Г. Ковальов**, доц., канд. техн. наук,*Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький*

Оцінка ефективності використання та надійності функціонування виробничих систем і автоматизованих виробничих ліній потребує впровадження точних і обґрунтованих методів моделювання. У процесі аналізу важливо враховувати складність досліджувальних систем, багатофакторний характер взаємодії між їхніми елементами та непередбачуваність впливу зовнішніх умов.

Математичний інструментарій для моделювання та оцінки ефективності й надійності виробничих систем і виробничих ліній охоплюють широкий спектр підходів, кожен із яких використовується залежно від специфіки завдання й особливостей.

Ланцюги Маркова є потужним інструментом для моделювання стохастичних процесів. Вони є особливо корисними для оцінки надійності, через те, що їх застосування дозволяє досліджувати поведінку системи в умовах ймовірнісних переходів між станами, таких як робочий, аварійний або стан технічного обслуговування. Завдяки своїй математичній суворості та здатності враховувати випадкові фактори, ланцюги Маркова стають універсальним методом для оцінки надійності виробничих систем та автоматизованих виробничих ліній та прогнозування їхньої продуктивності.

Механізм використання матриці стану та вектора стану є ключовим у моделюванні надійності та ефективності, зокрема у стохастичних процесах, якими є ланцюги Маркова. Розглянемо більш детально це питання.

Матриця стану (або матриця ймовірностей переходу) є квадратною матрицею, яка описує ймовірності переходу виробничої системи між усіма можливими станами за один крок. Кожний елемент цієї матриці, позначений як  $P\{ij\}$ , визначає ймовірність переходу із  $i$ -стану в  $j$ -стан. Важливо, що сума всіх елементів у кожному рядку матриці дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1. \quad (1)$$

Вектор стану описує розподіл ймовірностей перебування системи в кожному з її можливих станів у певний момент часу. Це рядок (або стовпчик), у якому кожен елемент  $p_i$  ( $p_j$ ) позначає ймовірність перебування системи в стані  $i$  ( $j$ ). Наприклад, для системи з трьома станами вектор може бути записаний як:

$$S_i = (S_1, S_2, S_3) \text{ або } S_j = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Механізм взаємодії матриці стану та вектора стану передбачає, що при кожному кроці часу новий стан системи визначається множенням поточного вектора стану  $S_i$  на матрицю стану  $P = \{p_{ij}\}$ :

$$S_{i+1} = S_i \cdot P, \quad (3)$$

де  $S_{i+1}$  – вектор стану на наступний момент часу.

Цей механізм дозволяє моделювати, як розподіл ймовірностей змінюється з часом.

Теорема про взаємозв'язок матриці стану та вектора стану, стверджує, що якщо

систему достатньо довго моделювати через множення вектора стану на матрицю стану, то розподіл ймовірностей досягне стаціонарного стану. Зазначене виконується за умови, що матриця відповідає певним властивостям, наприклад, є примітивною. Стаціонарний стан, позначений як  $S_i$ , задовольняє рівнянню:

$$S_i = S_0 \cdot P^i, \quad (4)$$

Це означає, що стаціонарний вектор стану є власним вектором матриці  $P$ , відповідним власному значенню, яке дорівнює одиниці. Стаціонарний стан описує стабільний розподіл ймовірностей, у якому система перебуватиме незалежно від початкового стану.

Метод Монте-Карло є потужним інструментом для моделювання складних систем і процесів у різних умовах. Він дозволяє проводити численні симуляції, що базуються на випадкових змінних, для оцінки імовірностей, надійності та ефективності виробничих процесів.

Можна пропонувати наступні етапи застосування цього методу:

1. Визначення параметрів системи.
2. Генерація випадкових значень.
3. Обчислення вихідних значень.
4. Прогнозування та оптимізація на основі обчислених вихідних даних.

Приклад застосування: уявімо, що досліджується виробнича лінія, що залежить від кількох факторів, таких як час простою обладнання  $T_d$  і швидкість обробки  $R_{ш}$ . При цьому вихідна продуктивність  $P_{пр}$  може бути змодельована функцією:

$$P_{пр} = \frac{R_{ш}}{t} (1 - T_d). \quad (5)$$

Застосування методу Монте-Карло дозволяє варіювати факторами  $T_d$  і  $R_{ш}$  у різних сценаріях, щоб оцінити середнє значення продуктивності  $\overline{P_{пр}}$  і ймовірність збоїв.

Теорію масового обслуговування (ТМО) рекомендують для моделювання потоків продукції, черги та навантаження на окремі елементи виробничої системи. Методи ТМО допомагають оцінити продуктивність і знаходити «вузькі місця» у виробничих процесах, що можуть призводити до простоїв або перевантаження.

ТМО аналізує процеси, в яких потоки заявок проходять через систему обслуговування. Основою методу ТМО є моделювання інтенсивності надходження заявок  $\lambda$  і швидкості їх обслуговування  $\mu_{об}$ .

Модель «М/М/1», як одна з найпоширеніших, описує систему з одним каналом обслуговування, де потік заявок і час обслуговування підпорядковуються експоненціальному розподілу. Основні формули моделі «М/М/1» дозволяють визначити, скільки заявок, що одночасно перебуває у системі, середній час очікування в черзі, а також загальну продуктивність виробничої системи.

Коефіцієнт завантаження виробничої системи:

$$r = \frac{\lambda}{\mu_{об}}, \quad (6)$$

де  $r < 1$ , для стабільної виробничої системи.

Середня кількість заявок у виробничій системі дорівнює:

$$\overline{L} = \frac{r}{1-r}. \quad (7)$$

Середній час перебування заявки у виробничій системі:

$$\overline{W} = \frac{1}{\mu_{об} - \lambda}. \quad (8)$$

Ймовірність того, що система вільна визначається за формулою:

$$P_0 = 1 - r. \quad (9)$$

Ймовірність перебування  $n$  заявок у системі:

$$P_n = (1 - r) \cdot r^n. \quad (10)$$

Застосування методу ТМО в реальних умовах дає можливість оптимізувати роботу виробничих ліній, оцінюючи черги та знаходячи «вузькі місця». Це корисно для вирішення задач, таких як покращення продуктивності, зменшення часу простою та адаптація до змін у потоці заявок. Результати аналізу слугують основою для прийняття стратегічних рішень і впровадження нових підходів до управління виробничими процесами.

Регресійний аналіз передбачає використання статистичних методів, таких як регресія. Застосовується регресійний аналіз для виявлення залежностей між параметрами виробництва, наприклад, витратами ресурсів та обсягами продукції. Це дає змогу розуміти ключові фактори, що впливають на надійність та ефективність. У контексті дослідження виробництва цей метод дозволяє виявити зміни у витратах ресурсів (незалежна змінна) та їх вплив на обсяги випуску продукції (залежна змінна). Головною метою даного методу є встановлення математичної моделі, яка описує цю залежність. Наприклад, у випадку лінійного регресійного рівняння, де залежна змінна це обсяги випуску продукції, незалежна змінна – це витрати ресурсів, а константа та коефіцієнт регресії, показують силу впливу незалежного параметра на залежний.

Під час проведення регресійного аналізу важливим етапом є оцінка значущості результатів. Для цього використовуються статистичні критерії, які дозволяють оцінити, наскільки вплив незалежної змінної на залежну є суттєвим. Також метод допомагає оцінювати точність прогнозів, будуючи інтервальні значення для очікуваних результатів.

Завдяки регресійному аналізу можна визначити ключові фактори, що найбільше впливають на ефективність виробничих процесів. Це дозволяє оптимізувати використання ресурсів, знаходити критичні точки для покращення виробництва, а також приймати обґрунтовані управлінські рішення. Зазначений математичний інструмент часто використовується для тестування нових стратегій, аналізу даних і прогнозування результатів.

Балансові моделі. Використовуються для оптимізації розподілу ресурсів (капіталу, праці, енергії) між різними елементами виробничої системи для досягнення максимального результату.

Моделі оптимізації – це прередусім моделі математичного програмування. Математичне програмування, включаючи лінійне, нелінійне та динамічне програмування, допомагає знаходити найкращі рішення для оптимізації витрат, продуктивності або енергоспоживання виробничих систем та ліній на підприємстві.

Моделі життєвого циклу – це моделі, які оцінюють ефективність і надійність виробничої системи протягом усього її життєвого циклу, враховуючи проектування, встановлення, експлуатацію та обслуговування.

Системна динаміка є методом, який дозволяє моделювати взаємодію різних елементів системи з урахуванням часової динаміки, що особливо корисно для аналізу довгострокових тенденцій у виробництві.

Існуючі математичний інструментарій для оцінки ефективності та надійності виробничих автоматизованих ліній охоплюють широкий спектр підходів – від класичних статистичних методів до сучасних симуляційних моделей. Методи прикладної математики, такі як регресійний аналіз і теорія масового обслуговування, дозволяють глибоко аналізувати ключові параметри виробничої системи, виявляти залежності між змінними, прогнозувати поведінку системи і оптимізувати виробничі процеси. Симуляційні моделі, як метод Монте-Карло, забезпечують можливість тестування альтернативних стратегій та сценаріїв без втручання у реальний виробничий процес. Однак, класичні математичні методи мають обмеження щодо складності й адаптивності до сучасних умов виробництва, які характеризуються великим обсягом даних і швидкими змінами в зовнішньому середовищі.

Ці виклики відкривають перспективи застосування методів штучного інтелекту (ШІ), який здатний обробляти великі масиви даних, моделювати складні взаємодії та автоматизувати процеси аналізу. ШІ пропонує гнучкі підходи до вирішення завдань оптимізації, прогнозування і оцінки надійності та ефективності, значно перевершуючи традиційні методи за адаптивністю та точністю.

## Список використаних джерел

1. Fesovets O., Strelko O., Berdnychenko Yu., Isaienko S., Pylypchuk O. Container Transportation by Rail Transport Within the Context of Ukraine's European Integration. Proceedings of 23rd International Scientific Conference «Transport Means 2019». 2019. P. 381–386.
2. Kulova D., Boyko M., Kosyakevych D. Assessment of Risk Factors and Improvement of Transportation Technology for Temperature-Sensitive Cargo in Refrigerated Containers. Central Ukrainian Scientific Bulletin. Technical Sciences. 2026. Issue 13(44), Part I. P. 1-10.
3. Lavrukhin O., Kovalov A., Schevchenko V., Kyman A., Kulova D. Construction of an integrated criterion for estimating the consequences of emergencies involving dangerous goods. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 2, Issue 3 (98). P. 25-31. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.163442>
4. Lavrukhin O., Kovalov A., Kulova D. Technological and economic estimation of efficiency of a route choice for transportation of dangerous goods. SHS Web of Conferences. 2019. Vol. 67. P. 1-6. DOI: <https://doi.org/10.1051/shsconf/20196702005>
5. Аулін В.В., Кульова Д.О., Гриньків А.В., Лисенко С.В. Оцінювання ризиків несхоронних перевезень нафтопродуктів автомобільним транспортом. Центральнотраїнський науковий вісник. Технічні науки. 2024. Вип. 10(41), ч.ІІ, С. 205-213. DOI: [https://doi.org/10.32515/2664-262X.2024.10\(41\).2.205-213](https://doi.org/10.32515/2664-262X.2024.10(41).2.205-213)
6. Кульова Д.О., Магопець С.О., Лівіцький О.М. Безпека дорожнього руху в Україні: оцінювання ризиків і перспективи цифровізації. Центральнотраїнський науковий вісник. Технічні науки. 2025. Вип. 11(42), ч.ІІ. С. 298-312. DOI: [https://doi.org/10.32515/2664-262X.2025.11\(42\).2.278-285](https://doi.org/10.32515/2664-262X.2025.11(42).2.278-285)
7. Кульова Д.О. Застосування концептуального підходу ризик-менеджменту в сфері безпеки руху на транспорті. Центральнотраїнський науковий вісник. Технічні науки. 2024. Вип. 10(41), ч.І. С. 261-269. DOI: [https://doi.org/10.32515/2664-262X.2024.10\(41\).1.261-269](https://doi.org/10.32515/2664-262X.2024.10(41).1.261-269)
8. Аулін В.В., Кульова Д.О., Варваров В.В. Виявлення, аналіз і прогнозування параметрів ризику безвідмовного навантаження готової продукції на транспортно-логістичному терміналі підприємства. Центральнотраїнський науковий вісник. Технічні науки. 2025. Вип. 11(42), ч.І. С. 263-271. DOI: [https://doi.org/10.32515/2664-262X.2025.11\(42\).1.263-271](https://doi.org/10.32515/2664-262X.2025.11(42).1.263-271)
9. Аулін В.В., Гриньків А.В., Лисенко С.В., Головатий А.О., Голуб Д.В. Теоретичні і методологічні основи логістики транспортних і виробничих систем / монографія під заг. ред. д.т.н., проф. Ауліна В.В. – Кропивницький: Видавель Лисенко В.Ф., 2021. – 503 с.
10. Аулін В. В., Митник М. М., Ляшук О. Л., Гевко І. Б., Цьонь О. П., Лисенко С. В., Гудь В. З., Гриньків А. В., Голуб Д. В., Бабій М. В. Формування та функціонування логістичних центрів в регіональних транспортно-логістичних системах України: монографія за заг. ред. д.т.н., проф. Ауліна В. В., д.т.н., проф. Ляшука О. Л. – Тернопіль : ФОП Паляниця В. А., 2024. – 393 с.
11. Wei L., Zheng X., Li Y., Li X., Liu L. Research on the impact effect of multimodal transport on domestic and international dual circulation: Evidence from China's railway and water transport. PLoS ONE. 2025. Vol. 20, Issue 4. Article e0319982. P. 1-18. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0319982>
12. Zhang Z., Jin J., Li S., Han Z., Wu Z., Xu X., Li Y., Peng T. Research review and development trend analysis of grain multimodal transport with a special emphasis upon China. Agriculture. 2026. Vol. 16. Article 592. P. 1-35. DOI: <https://doi.org/10.3390/agriculture16050592>
13. Uddin M. M., Huynh N. Routing model for multicommodity freight in an intermodal network under disruptions. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. 2016. No. 2548. P. 71–80. DOI: <https://doi.org/10.3141/2548-09>
14. Jayant, Arvind, Mohammed Azhar, and Priya Singh. "Interpretive structural modeling (ISM) approach: a state of the art literature review." Int. J. Res. Mech. Eng. Technol 5.1 (2015): 15-21. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1240/1/012010>
15. United Nations Conference on a Convention on International Multimodal Transport : Final Act and Convention on International Multimodal Transport of Goods. – New York : United Nations, 1981. Vol. 1. 16 p.
16. Про мультимодальні перевезення : Закон України від 17.11.2021 р. № 1887-IX станом на 19 груд. 2021 р. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1887-20#Text> (дата звернення: 10.03.2026).
17. United Nations Economic Commission for Europe (UNECE). Terminology on Combined Transport. New York and Geneva: United Nations, 2000. 13 p.