

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

**Варіанти контрольних робіт та приклади розв’язання
завдань з загального курсу вищої математики.**

Методичні вказівки для студентів ЦЗДО

КРОПІВНИЦЬКИЙ

2017

Варіанти контрольних робіт та приклади розв'язання завдань з загального курсу вищої математики. Методичні вказівки для студентів заочного відділення./ Укл.: Кривоблоцька Л.М., Личук М.В., Гончарова С.Я. – Кропивницький: ЦНТУ, – 88 с.

Дані методичні вказівки складені для студентів заочної форми навчання. Вказівки містять програму з вищої математики, завдання для виконання контрольних робіт, приклади розв'язання завдань, основні формули. Надано список літератури для самостійного вивчення предмета.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики та
фізики.

Протокол № 8
від 29.03.2017 р.

Теоретичні питання.

I. Лінійна алгебра.

1. Матриці. Основні поняття. Види матриць.
2. Лінійні операції з матрицями.
3. Транспонування матриць.
4. Множення матриць.
5. Визначники. Основні поняття. Властивості визначників.
6. Обернена матриця.
7. Ранг матриці.
8. Системи лінійних рівнянь. Основні поняття.
9. Матричний метод рішення систем.
10. Метод Крамера.
11. Метод Гауса.
12. Рішення довільних систем. Теорема Кронекера – Капеллі.
13. Однорідні системи лінійних рівнянь.

II. Границі.

1. Границі числової послідовності.
2. Границя функції.
3. Нескінченно малі величини, нескінченно великі величини та їх властивості.
4. Перша чудова границя.
5. Друга чудова границя.
6. Неперервні функції.
7. Порівняння нескінченно малих величин.

III. Похідна функції.

1. Визначення похідної функції.
2. Геометричний та фізичний зміст похідної.
3. Правила диференціювання.
4. Таблиця похідних.
5. Похідна складної функції.
6. Повторне диференціювання.

7. Похідна параметричної функції.
8. Похідна неявної функції.
9. Рівняння нормалі та дотичної.
10. Диференціал функції.
11. Використання диференціала до наближених обчислень.
12. Правило Лопітала.
13. Умова монотонності функції.
14. Екстремуми функцій.
15. Найменше та найбільше значення функції.
16. Опуклість, вгнутість, точки перегину.
17. Асимптоти.
18. Повне дослідження функції.

IV. Невизначений інтеграл.

1. Основні поняття.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиці інтегралів.
4. Інтегрування по частинам.
5. Заміна змінної.
6. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен у знаменнику.
7. Інтегрування раціональних дробів.
8. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.
9. Інтегрування тригонометричних функцій.
10. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.

V. Визначений інтеграл.

1. Поняття визначеного інтеграла, його геометричний зміст.
2. Формула Ньютона – Лейбніца.
3. Інтегрування по частинам.
4. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
5. Невласні інтеграли.
6. Геометричне застосування визначених інтегралів.

VI. Функції декількох змінних.

1. Основні означення.
2. Частинні похідні першого і другого порядку.
3. Диференціал та його застосування у наближених обчисленнях.
4. Локальні екстремуми функції двох змінних.
5. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.

VII. Диференціальні рівняння.

1. Диференціальні рівняння 1-го порядку.
2. Рівняння з відокремлюваними змінними.
3. Однорідні та лінійні рівняння 1-го порядку.
4. Диференціальні рівняння вищих порядків.
5. Рівняння, які допускають зниження порядку.
6. Лінійні однорідні рівняння.
7. Лінійні однорідні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.
8. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку. Рівняння із сталими коефіцієнтами.

VIII. Кратні інтеграли.

1. Подвійний інтеграл. Означення і геометричний зміст. Властивості.
2. Обчислення подвійного інтегралу в декартових координатах.
3. Потрійний інтеграл. Означення. Обчислення.
4. Заміна змінних в кратних інтегралах. Перехід від декартових координат до полярних в подвійному інтегралі. Перехід до циліндричних та сферичних координат в потрійному інтегралі.
5. Застосування кратних інтегралів.

IX. Теорія рядів.

1. Числові ряди. Ряди з додатними членами. Ознаки збіжності.
2. Знакозмінні ряди. Знакопереміжні ряди. Теорема Лейбніца. Абсолютна та умовна збіжність.
3. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал збіжності степеневого ряду. Інтегрування і диференціювання степеневих рядів.
4. Ряди Тейлора і Маклорена.

5. Застосування теорії рядів.

Х. Теорія ймовірностей.

1. Основні поняття комбінаторики.
2. Імовірність.
3. Геометричні ймовірності.
4. Незалежні випадкові події.
5. Умовні ймовірності.
6. Послідовні незалежні випробування. Схема Бернуллі.
7. Теореми Лапласа, Пуассона.
8. Імовірність відхилення частоти від імовірності в незалежних випробуваннях.
9. *Випадкові величини.*
10. Розподіли випадкових величин.
11. Математичне сподівання випадкової величини.
12. Нормальний розподіл.
13. Функція випадкової величини.

П о х і д н а***Правила диференціювання:***

1) $y = \text{const};$	$y' = 0.$
2) $y = cu; \quad c = \text{const.}$	$y' = cu'$
3) $y = u \pm v;$	$y' = u' \pm v'$
4) $y = u \cdot v;$	$y' = u'v + uv'$
5) $y = \frac{u}{v};$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6) $y = f(u), \quad u = \varphi(x)$	$y' = f'_u \varphi'_x$

Таблиця основних похідних елементарних функцій:

1) $y = x^\alpha;$	2) $y' = \alpha x^{\alpha-1}.$
3) $y = \sin x;$	4) $y' = \cos x.$
5) $y = \cos x;$	6) $y' = -\sin x.$
7) $y = \operatorname{tg} x;$	8) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
9) $y = \operatorname{ctg} x;$	10) $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
11) $y = \arcsin x;$	12) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
13) $y = \arccos x;$	14) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15) $y = \operatorname{arctg} x;$	16) $y' = \frac{1}{1+x^2}.$
17) $y = \operatorname{arcctg} x;$	18) $y' = -\frac{1}{1+x^2}.$
19) $y = a^x;$	20) $y' = a^x \ln a .$
21) $y = e^x;$	22) $y' = e^x;$
23) $y = \log_a x;$	24) $y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}.$
25) $y = \ln x;$	26) $y' = \frac{1}{x}.$

Основні правила інтегрування:

- 1) $\int f'(x) dx = \int df(x) = f(x) + C;$
 $\int f(x) dx = d(F(x) + C) = f(x) dx.$
- 2) $\int (\varphi(x) \pm \psi(x)) dx = \int \varphi(x) dx \pm \int \psi(x) dx.$
- 3) $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a = \operatorname{const}.$

- 4) якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ при умові, що a, b - постійні числа, $a \neq 0$.
- 5) якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ та $u = \varphi(x)$ - будь-яка диференційована функція, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблиця інтегралів від елементарних функцій:

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	2) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$
3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	4) $\int e^x dx = e^x + C.$
5) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	6) $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$	10) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C.$
11) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$	12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$
13) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C.$	14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + \lambda} \right + C$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Лінійна алгебра

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

трьома способами:

- а) за означенням (правило трикутника);
- б) розклавши за елементами рядка або стовпчика;

в) звівши за допомогою властивостей до трикутного вигляду.

Розв'язок: $\triangleright$

а) за означенням. Обчислимо визначник використовуючи схему показану на рис.1.

Маємо,

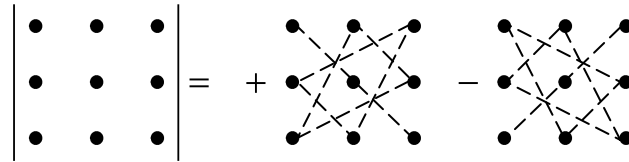


Рис. 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 7 + (-2) \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 5 \cdot 6 \cdot 0 -$$

$$-3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot 7 = 126 + 20 + 18 + 56 = 220;$$

б) розкладемо визначник за елементами першого рядка.

Так як,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

то

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (42 + 6) + 2 \cdot (28 + 10) = 3 \cdot 48 + 2 \cdot 38 = 144 + 72 = 220;$$

в) приводимо визначник до трикутного вигляду застосовуючи властивості визначників (в пояснювальних дужках $\langle \rangle$ вказані відповідні перетворення, де p_i – позначення i -го рядка):

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} &= \langle p_2 - p_1 \rangle = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \langle p_1 \leftrightarrow p_2 \rangle = - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \\
&= \langle p_2 - 3p_1 \rangle = - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \langle p_3 - 5p_1 \rangle = - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 0 & -37 & 17 \end{vmatrix} = \langle p_3 - p_2 \rangle = \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 0 & -11 & 11 \end{vmatrix} = \left\langle p_3 \times \frac{1}{11} \right\rangle = -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \langle p_2 - 26p_3 \rangle = \\
&= -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -20 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \langle p_1 \leftrightarrow p_2 \rangle = 11 \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = \\
&= 11 \cdot -1 \cdot -20 = 220.
\end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти:

$$3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T + 2 \cdot E,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок: Обчислення розіб'ємо на окремі дії

$$2.1) B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 6 \cdot 3 - 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 15 \\ 26 & 3 & 27 \\ 24 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

;

$$2.2) 3 \cdot A \cdot B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 14 & 1 & 15 \\ 26 & 3 & 27 \\ 24 & -7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 3 & 45 \\ 78 & 9 & 81 \\ 72 & -21 & 36 \end{pmatrix};$$

$$2.3) A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2.4) (A + B)^T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2.5) 2 \cdot E = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2.6) 3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T = \begin{pmatrix} 42 & 3 & 45 \\ 78 & 9 & 81 \\ 72 & -21 & 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 & 42 \\ 74 & 5 & 73 \\ 71 & -26 & 31 \end{pmatrix};$$

2.7)

$$3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T + 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 36 & -3 & 42 \\ 74 & 5 & 73 \\ 71 & -26 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -3 & 42 \\ 74 & 7 & 73 \\ 71 & -26 & 31 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

двома способами:

а) за формулами Крамера;

б) методом Гауса.

Розв'язок.

3.1) Формули Крамера.

Випишемо матрицю системи та матрицю складену з правих частин рівнянь:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Формули Крамера мають вигляд:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta = \det A$, а $\Delta_i, (i=1,3)$, визначники матриць отриманих з матриці A заміною в ній відповідного стовпчика матрицею B .

Знаходимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(-6 + 1) - 3(-9 + 2) - 2(3 - 4) = 5 + 21 + 2 = 28,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(-6 + 1) - 3(-12 + 3) - 2(4 - 6) = 25 + 27 + 4 = 56,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-12 + 3) + 5(-9 + 2) - 2(9 - 8) = 9 - 35 - 2 = -28,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(6 - 4) - 3(9 - 8) - 5(3 - 4) = -2 - 3 + 5 = 0.$$

Отже,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{56}{28} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-28}{28} = -1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{28} = 0.$$

Перевірка.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 0 = 6 - 2 = 4 \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 0 = 2 + 3 = 5 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 0 = 4 - 1 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$.

3.2) метод Гауса.

Випишемо розширену матрицю системи і зведемо її до трапецевидного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 4 \\ 1 & -3 & 2 & | & 5 \\ 2 & 1 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{p_1 \leftrightarrow p_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 5 \\ 3 & 2 & -1 & | & 4 \\ 2 & 1 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{p_2 - 3p_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 5 \\ 0 & 11 & -7 & | & -11 \\ 2 & 1 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xleftrightarrow{p_3 - 2p_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 5 \\ 0 & 11 & -7 & | & -11 \\ 0 & 7 & -7 & | & -7 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{p_3 \times \frac{1}{7}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 5 \\ 0 & 11 & -7 & | & -11 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{p_2 \leftrightarrow p_3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 11 & -7 & | & -11 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{p_3 - 11p_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{p_3 \times \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Перепишемо останню систему в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ y - z = -1 \\ z = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння $z = 0$.

Підставляємо $z = 0$ в друге рівняння

$$y - 0 = -1 \text{ або } y = -1.$$

Значення z і y підставляємо в перше рівняння

$$x - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 5 \text{ або } x = 2.$$

Відповідь: $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$.

Контрольні завдання

I. Обчислити визначник трьома способами (правило трикутників; розклад в ряд по елементам рядка або стовпця; використовуючи властивості):

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 8 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 5 & -7 & 8 \\ 9 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 8 & 9 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 10 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 10 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 5 \\ -6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

II. Виконати дії з матрицями: $3BA - (A + B)^T + 2E$

$$1. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

III. Розв'язати систему рівнянь (метод Крамера, метод Гаусса.):

$$1. \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + 2y + 3z = 8 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + 4z = 6 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ 4x + 4y - 3z = -5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - y + 2z = 5 \\ 4x + 3y - 4z = 7 \\ 4x + 8y - 12z = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21 \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + 2y - x = -3 \\ 3x + 4y + z = 1 \\ 5x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - 2y + 3z = -5 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 3y + 5z = -9 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - y + 2z = -7 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ x + 9y - 11z = 11 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x + 2y + 2z = -7 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ 3x + 4y - 2z = 6 \\ 2x - y - z = -9 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4 \\ x + y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -5 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 4x + y - 3z = 9 \\ x + y - z = -2 \\ 8x + 3y - 6z = 12 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33 \\ 7x - 5y = 24 \\ 4x + 1z = 39 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12 \\ 7x - 5y + z = -33 \\ 4x + z = -7 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 5y + 4z = -20 \\ 3x - 2y + 5z = -22 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \\ 2x - y - z = 10 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 12 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Границі. Диференціальне числення функції однієї змінної.

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 4. Знайти границі:

$$4.1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x^2 + 3x};$$

$$4.2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$4.3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5};$$

$$4.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x};$$

$$4.5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x}.$$

Розв'язок.

$$4.1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x^2 + 3x} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^3} \right)}{x^3 \left(6 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^3}}{6 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} =$$

$$= \frac{2 + 0 - 0}{6 - 0 + 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$4.2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3 - 4 + 1}{1 - 3 + 2} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle.$$

Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники. Для цього спочатку знаходимо їх корені:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 3 \cdot 4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \text{ або } x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{3};$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \text{ або } x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1) \left(x - \frac{1}{3} \right)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{3-1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2;$$

$$4.3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5} = \frac{2 - \sqrt{4}}{\sqrt{6 \cdot 4 + 1} - 5} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle.$$

Помножимо чисельник і знаменник на спряжені вирази:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{6x+1} + 5}{\sqrt{6x+1} - 5} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{6x+1} + 5}{6x+1-25} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x) \sqrt{6x+1} + 5}{2 + \sqrt{x} (6x-24)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x) \sqrt{6x+1} + 5}{2 + \sqrt{x} 6(x-4)} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{6 \cdot 4 + 1} + 5}{2 + \sqrt{4}} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{5 + 5}{2 + 2} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{10}{4} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12};$$

4.4) Застосуємо еквівалентність нескінченно малих

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3x}{2 \sin^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4}.$$

4.5) Застосуємо наслідок з другої „чудової” границі:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x} = \left\langle 1^\infty \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5} \cdot 5 \cdot 3} = e^{15}.$$

Приклад 5. Знайти першу похідну функції $y = y(x)$:

$$5.1) y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}; \quad 5.2) y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x; \quad 5.3) y = \operatorname{arccctg} 5x \cdot \ln(x-4);$$

$$5.4) y = e^{\arccos x}; \quad 5.5) x^2 y - y^2 x + (x-y)^3 = 0; \quad 5.6) y = (\operatorname{ctg} x)^{\arcsin x}.$$

Розв'язок.

5.1) З таблиці похідних та властивостей похідної маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \left(2x^5 - 4x^{-3} + x^{-1} + 3x^{\frac{1}{2}} \right)' = 2 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3)x^{-3-1} + -x^{-1-1} + 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 10x^4 + 12x^{-4} - x^{-2} + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} = 10x^4 + \frac{12}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

5.2) Застосовуємо властивості похідної та правило обчислення похідної від складної функції:

Функції $\sin^3 2x$, $\cos 8x$ є складними функціями, які складаються з елементарних функцій $y_1 = u^3$, $y_2 = \sin u$, $y_3 = 2x$ та $y_1 = \cos u$, $y_2 = 8x$ відповідно, тому

$$\begin{aligned} y' &= \sin^3 2x' \cdot \cos 8x + \sin^3 2x \cdot (\cos 8x)' = 3\sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' \cdot \cos 8x + \\ &+ \sin^3 2x \cdot (-\sin 8x) \cdot 8 = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 \cdot \cos 8x - \sin^3 2x \cdot \sin 8x \cdot 8 = \\ &= 6 \cdot \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x - 8\sin^3 2x \cdot \sin 8x. \end{aligned}$$

$$5.3) y' = (\operatorname{arccctg} 5x)' \cdot \ln(x-5) + \operatorname{arccctg} 5x \cdot (\ln(x-5))' =$$

$$= -\frac{1}{1+(5x)^2} (5x)' \cdot \ln(x-5) + \operatorname{arccctg} 5x \frac{1}{x-5} = -\frac{5}{1+25x^2} \ln(x-5) + \frac{\operatorname{arccctg} 5x}{x-5}.$$

$$5.4) \quad y' = e^{\arccos x} \cdot (\arccos x)' = e^{\arccos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

$$5.5) \quad x^2 y - y^2 x + (x-y)^3 = 0.$$

Функція задана неявно. Диференціюємо останню рівність по змінній x враховуючи, що $y = y(x)$:

$$x^2 y(x) - (y(x))^2 x + (x - y(x))^3 = 0,$$

$$2x \cdot y + x^2 \cdot y' - 2y \cdot y' \cdot x - y^2 \cdot 1 + 3(x-y)^2 \cdot (1-y') = 0.$$

З отриманої рівності знаходимо y' :

$$2xy + y' \cdot x^2 - y' \cdot 2xy - y^2 + 3(x-y)^2 - y' \cdot 3(x-y)^2 = 0,$$

$$y' (x^2 - 2xy - 3(x-y)^2) = -2xy + y^2 - 3(x-y)^2,$$

$$y' = \frac{-2xy + y^2 - 3(x-y)^2}{x^2 - 2xy - 3(x-y)^2}.$$

Приклад 6. Знайти похідні: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$\begin{cases} x = (t+3) \cdot \cos t \\ y = 3t^3. \end{cases}$$

Розв'язок.

Запишемо формули для знаходження похідних:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Знайдемо похідні функцій $x = x(t)$ та $y = y(t)$ по змінній t :

$$x'_t = (t+3)' \cos t + (t+3)(\cos t)' = \cos t - (t+3)\sin t,$$

$$x_{tt}'' = -\sin t - (t+3)' \sin t - (t+3)(\sin t)' = -\sin t - \sin t - (t+3)\cos t = \\ = -2\sin t - (t+3)\cos t,$$

$$y_t' = 9t^2,$$

$$y_{tt}'' = 18t.$$

Отже,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9t^2}{\cos t - (t+3)\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18t(\cos t - (t+3)\sin t) - 9t^2(-2\sin t - (t+3)\cos t)}{(\cos t - (t+3)\sin t)^3}.$$

Приклад 7. Знайти рівняння дотичної і нормалі:

$$y = x^2 - 7x + 3, \text{ в точці } x_0 = 1.$$

Розв'язок. Рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ мають вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \quad y - f(x_0) = -\frac{x - x_0}{f'(x_0)}, \quad (1.1)$$

відповідно.

Обчислюємо значення функції $f(x_0)$ та її першої похідної $f'(x_0)$ в точці $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = (x^2 - 7x + 3) \Big|_{x=1} = 1 - 7 + 3 = -3$$

$$f'(x_0) = (x^2 - 7x + 3)' \Big|_{x=1} = (2x - 7) \Big|_{x=1} = 2 - 7 = -5.$$

Підставляємо отримані значення в **Ошибка! Источник ссылки не найден.**

$$y + 3 = -5(x - 1) \text{ або } y = -5x + 5 - 3$$

$$y = -5x + 2 \quad - \text{рівняння дотичної до графіка функції.}$$

$$y + 3 = \frac{x - 1}{5} \text{ або } y = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} - 3$$

$$y = \frac{1}{5}x - \frac{16}{5} \quad - \text{рівняння нормалі до графіка функції.}$$

Контрольні завдання.

IV. Знайти границі функцій:

$$1.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x^2 + 3x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x}.$$

$$2.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}; \quad в) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}; \quad г) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

$$3.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}; \quad в) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{4x}.$$

$$4.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{3x-2}.$$

$$5.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x}.$$

$$6.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{5x}.$$

$$7.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}; \quad в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}; \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}.$$

$$8.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}; \delta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin}{\pi - 2x};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}.$$

$$9.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}; \delta) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}; \zeta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}.$$

$$10.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}; \delta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}; \zeta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x - \operatorname{tg} x};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1}.$$

$$11.a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}; \delta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$12.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$13.a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}.$$

$$14.a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 2}; \delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}; \epsilon) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}; \zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{3x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

$$15.a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}; b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}; e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 1} - 1}; z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x - 3} \right)^{3x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$16.a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12}; b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x + 2}; e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}; z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}.$$

$$17.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}; b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}; e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7} \cdot x}; z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \cdot \sin x}.$$

$$18.a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}; b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}; e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}; z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}.$$

$$19.a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10}; b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2}; e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}; z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$20.a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - x - 35}; b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}; e) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}; z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$21.a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}; b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}; e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}; z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}.$$

$$22.a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3+2x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}.$$

$$23.a) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - 3x}{5 - 3x} \right)^x;$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \cdot \arcsin x}.$$

$$24.a) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15 - 8}{3x^2 + 25x + 8}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{3x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \cos x}.$$

$$25.a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}.$$

$$26.a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x-x}}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{2x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}.$$

$$27.a) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \arcsin x}.$$

$$28.a) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{8+x} - 3}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

$$29.a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}.$$

$$30.a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}; \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1}; \text{в)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}; \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1};$$

$$\partial) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$$

V. Знайти першу похідну функцій:

$$1.a) y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}; \quad б) y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x;$$

$$в) y = \arctg 5x \cdot \ln(x-4); \quad г) y = e^{\arccos x}; \quad д) x^2 y - y^2 x + (x-y)^3 = 0;$$

$$2.a) y = \frac{3}{x} + \sqrt[3]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}; \quad б) y = \cos^5 3x \cdot \tg(x+1); \quad в) y = \arctg^3 2x \cdot \ln(x+5);$$

$$г) y = \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{x+5}}; \quad д) y = 3xy + \ln y = (x-y)^2;$$

$$3.a) y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}; \quad б) y = \tg^4 x \cdot \arcsin 4x; \quad в) y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1);$$

$$г) y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 + 5x - 1}}; \quad д) \cos y + \sin xy = y^3;$$

$$4.a) y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^3 + \frac{4}{x}; \quad б) y = \arcsin^3 2x \cdot \ctg 7x; \quad в) y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x};$$

$$г) y = \frac{e^{-5x}}{3x^2 - 4x + 2}; \quad д) \tg y + e^{xy} = 1;$$

$$5.a) y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \frac{6}{x}; \quad б) y = \cos^5 3x \cdot \sin^3 5x; \quad в) y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x+2);$$

$$г) y = \frac{\sqrt{7x^3 - 5x + 2}}{e^{\cos x}}; \quad д) y^3 x + x \ln y = e^x;$$

$$6.a) y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}; \quad б) y = \tg^3 2x \cdot \cos(x+2); \quad в) y = \arccos^2 4x \cdot \ln(x-3);$$

$$г) y = \frac{e^{\tg x}}{\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}; \quad д) \cos y + \ln(x+y) = 2y;$$

$$7.a) y = 3x^5 - \frac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}; \quad б) y = \ln^5 x \cdot \arctg 7x; \quad в) y = 5^{-x^2} \cdot \log_2(x-3);$$

$$г) y = \frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}; \quad д) 2^{x+y} + \ln(xy) = xy;$$

$$8.a) y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}; \quad б) y = \arctg^3 4x \cdot 3^{\sin x}; \quad в) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$г) y = \frac{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{e^{-x}}; \quad д) y^3 + (xy)^2 - \cos xy = 2;$$

$$9.a) y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}; \quad \delta) y = \cos^2 3x \cdot \operatorname{tg}^3 2x; \quad \epsilon) y = \lg(x-3) \cdot \arcsin^3 5x;$$

$$z) y = \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(x+4)^3}; \quad \partial) \cos xy + \ln y = xy;$$

$$10.a) y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}; \quad \delta) y = \operatorname{ctg}^5 3x \cdot \operatorname{tg}^3 5x; \quad \epsilon) y = \log_5(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^3;$$

$$z) y = \frac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}}; \quad \partial) (xy)^3 + \sqrt{x+y} = y^2;$$

$$11.a) y = 2x^5 - \frac{7}{x} + \sqrt[6]{x^{10}} + 5; \quad \delta) y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{tg} x; \quad \epsilon) y = \lg^3 x^2;$$

$$z) y = \frac{e^{\cos x}}{3 \operatorname{tg} x}; \quad \partial) 3x^2 + \sin y - \ln x + y = 0;$$

$$12.a) y = (3+4x+5x^2)^3; \quad \delta) y = 2 \operatorname{tg}^3 \frac{1}{x}; \quad \epsilon) y = x \arcsin \sqrt{x};$$

$$z) y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}; \quad \partial) x \sin y + y \sin x = 1;$$

$$13.a) y = \frac{1}{(4+x^2)^5}; \quad \delta) y = \sin^3(\sqrt{x}+1); \quad \epsilon) y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} \cdot \ln x;$$

$$z) y = \frac{\ln(4-5x)}{5^x}; \quad \partial) \sqrt{y} + xy + y^2 = 0;$$

$$14.a) y = x\sqrt{x+3}; \quad \delta) y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}; \quad \epsilon) y = x \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{9-x^2};$$

$$z) y = \ln(\sin x) \cdot \operatorname{tg} x; \quad \partial) y^2 = px, \quad p = \text{const};$$

$$15.a) y = \frac{x^2+5}{2x-3}; \quad \delta) y = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x; \quad \epsilon) y = 6 \arcsin(3-x^2) \cdot \ln 2x;$$

$$z) y = \frac{3 \sin x}{\ln(x^2+4)}; \quad \partial) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2};$$

$$16.a) y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2} \right) \sqrt{3x+x^2}; \quad \delta) y = 3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}; \quad \epsilon) y = \sin^4 3x \cdot \cos 7x;$$

$$z) y = \lg(x+9) \cdot \arcsin^2 x; \quad \partial) 3xy^2 + \arcsin x^2 y = 1.$$

$$17.a) y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}; \quad \delta) y = \ln \left(\frac{5+x}{x} \right); \quad \epsilon) y = \cos \sqrt[5]{x} \cdot \arcsin x;$$

$$z) y = \frac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}; \quad \partial) \ln(2x+y) + \sqrt{x^2+y} = 3;$$

$$18.a) y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}; \quad \partial) y = 2^{\arcsin(2x+1)/3}; \quad \epsilon) y = \cos^4 x \cdot \arctg x;$$

$$z) y = \ln(x-3) \cdot \cos 2x; \quad \partial) \sin(3x-y) + \cos(3y-x) = 3;$$

$$19.a) y = 1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad \partial) y = (1 + \operatorname{ctg}^2 3x) \cdot e^{-x}; \quad \epsilon) y = \operatorname{arccctg} 2x \cdot \ln(x+5);$$

$$z) y = \frac{e^{4x}}{(3x+5)^3}; \quad \partial) \operatorname{tg} xy + \ln(x^2 y) = 3y;$$

$$20.a) \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}; \quad \partial) y = (e^{-x^2}) \cdot \cos^3(2x+3); \quad \epsilon) y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x};$$

$$z) y = \frac{5x^2 + 4x - 2}{2^{-x}}; \quad \partial) \cos^2(x+y) + x^2 + y^2 = 1;$$

$$21.a) y = \sqrt{x+\sqrt{x}}; \quad \partial) y = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+e^{2x}}; \quad \epsilon) y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3;$$

$$z) y = \ln(x + \sqrt{x^2+9}); \quad \partial) \arcsin(x+2y) + xy^2 = 0;$$

$$22.a) y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}; \quad \partial) y = 3x^2 - \operatorname{tg}^4 2x; \quad \epsilon) y = \ln^4(x^5 - \sin^5 2x);$$

$$z) y = \arccos^3 x \cdot \operatorname{ctg} 2x; \quad \partial) e^{xy} - x^3 - y^3 = 3;$$

$$23.a) y = 8x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}; \quad \partial) y = x \cdot \sin^2 x \cdot 2^{x^2}; \quad \epsilon) y = \arcsin 2x \cdot \operatorname{tg}^3 5x;$$

$$z) y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}; \quad \partial) xy - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 3;$$

$$24.a) y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}; \quad \partial) y = 2^{-\cos^4 5x}; \quad \epsilon) y = \sin^3 5x \cdot \cos^5 3x;$$

$$z) y = \ln(x^2+1) \cdot 2^{3x}; \quad \partial) \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a;$$

$$25.a) y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}; \quad \partial) y = (\sin^3 x + \cos^3 2x)^2; \quad \epsilon) y = \operatorname{arctg}^3 5x;$$

$$z) y = 3^{\operatorname{tg}^3 5x}; \quad \partial) 2^x + 2^y = 2^{x+y};$$

$$26.a) y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6; \quad \partial) y = \sin^3 x \cdot \arcsin(x^2-1); \quad \epsilon) y = \ln^5(x-2^{-x});$$

$$z) y = x \cdot \cos^2 x \cdot e^{x^2}; \quad \partial) y^2 + x^2 - \sin(x^2 y^2) = 5;$$

$$27.a) y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}; \quad \partial) y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \arccos 2x; \quad \epsilon) y = (x+1) \ln(x^2-4);$$

$$z) y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}; \quad \partial) y - e^{\arcsin x^2} = xy;$$

$$28.a) y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}; \quad б) y = 2^{\lg x} \cdot \operatorname{arctg} x; \quad в) y = \log_3(x+5) \cdot e^{-x};$$

$$г) y = \frac{\arccos 3x}{(x+1)^2}; \quad д) xy = 2^{\lg x} \cdot 3^y;$$

$$29.a) y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6; \quad б) y = \sin^5 3x \cdot \cos \sqrt{x}; \quad в) y = \ln^2 x \cdot 4^{-\sin x};$$

$$г) y = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\arcsin x}; \quad д) xy = 2^{\cos^4 5x \cdot y};$$

$$30.a) y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}; \quad б) y = \cos^4 3x \cdot \frac{1}{x}; \quad в) y = \log_5(x+1) \cdot 2^{\cos x};$$

$$г) y = \frac{\cos 2x}{\operatorname{arctg} x}; \quad д) xy = 3^{\ln|\cos x| + y^2};$$

VI. Знайти $\frac{dy}{dx}; \frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1. \begin{cases} x = (2t+3)\cos t; \\ y = 3t^3 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x = 2\cos^2 t; \\ y = 3\sin^2 t \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} x = 6\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} x = \frac{1}{t+2}; \\ y = \frac{t}{t+2} \end{cases};$$

$$5. \begin{cases} x = e^{-2t}; \\ y = e^{4t} \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases};$$

$$7. \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^3}; \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases};$$

$$8. \begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}; \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2-1} \end{cases};$$

$$9. \begin{cases} x = 4t + 2t^2; \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases};$$

$$10. \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}; \\ y = t \ln t \end{cases};$$

$$11. \begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t \end{cases};$$

$$12. \begin{cases} x = t^4; \\ y = \ln t \end{cases};$$

$$13. \begin{cases} x = 5\cos t; \\ y = 4\sin t \end{cases};$$

$$14. \begin{cases} x = 5\cos^2 t; \\ y = 3\sin^2 t \end{cases};$$

$$15. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases};$$

$$16. \begin{cases} x = t + \cos t; \\ y = t - \sin t \end{cases};$$

$$17. \begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = \cos^2 t \end{cases};$$

$$18. \begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = \cos t \end{cases};$$

$$19. \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t \end{cases};$$

$$20. \begin{cases} x = 2t^2 + t \\ y = \ln t \end{cases};$$

$$21. \begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases};$$

$$22. \begin{cases} x = \ln t \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases};$$

$$23. \begin{cases} x = \sin \frac{t}{2} \\ y = \cos t \end{cases};$$

$$24. \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases};$$

$$25. \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \cos t \end{cases};$$

$$26. \begin{cases} x = t \operatorname{tg} t + c \operatorname{tg} t \\ y = 2 \ln c \operatorname{tg} t \end{cases};$$

$$27. \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = e^{t^2} \end{cases};$$

$$28. \begin{cases} x = 3 \cos^2 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases};$$

$$29. \begin{cases} x = t \cos t \\ y = a t \sin t \end{cases};$$

$$30. \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin^2 t \end{cases};$$

VIII. Знайти рівняння дотичної та нормалі у точці $A(x_0, y_0)$:

$$1. y = x^2 - 7x + 3, x_0 = 1$$

$$2. y = x^2 - 16x + 7, x_0 = 1$$

$$3. y = \sqrt{x-4}, x_0 = 8$$

$$4. y = \sqrt{x+4}, x_0 = -3$$

$$5. y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7, x_0 = 2, y_0 = 1$$

$$6. y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2, x_0 = 1, y_0 = 1$$

$$7. y = x^2 - 6x + 2, x_0 = 2$$

$$8. y = \frac{x^2}{4} - x + 5, x_0 = 4$$

$$9. y = -\frac{x^2}{2} + 7x - \frac{15}{2}, x_0 = 3$$

$$10. y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + 4, x_0 = 1$$

$$11. y = \frac{x^4}{4} + 27x + 60, x_0 = 2$$

$$12. y = 3x^2 - 4x + 6, x_0 = 1$$

$$13. y = 5x^2 - 4x + 1, x_0 = 0$$

$$14. y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}, x_0 = 2$$

$$15. y^2 + x^2 = 25, x_0 = 4, y_0 = 3$$

$$16. y = \ln x, x_0 = 1, y_0 = 0$$

$$17. y = 3 \operatorname{tg} 2x + 1, x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$18. y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 7x + 9, x_0 = 0$$

$$19. y = 4 \sin 6x, x_0 = \frac{\pi}{18}$$

$$20. y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7, x_0 = 1$$

$$21. y = \frac{x^4}{4} - 7, x_0 = 1$$

$$22. y = -3x^2 + 4x + 7, x_0 = 1$$

$$23. y = 3x^2 - 4x + 6, x_0 = 1$$

$$24. y = 5x^2 - 4x + 1, x_0 = -1$$

25. $y = 3x^2 - 5x - 11, x_0 = 0$

26. $y = -x^2 + 7x + 16, x_0 = 1$

27. $y = 4x^2 - 10x + 13, x_0 = 1$

28. $y = 7x^2 - x + 4, x_0 = 0$

29. $y = \frac{x^2}{4} - 7x + 5, x_0 = 1$

30. $y = \frac{x^3}{12}, x_0 = 1.$

Інтегральне числення функції однієї змінної.**Приклади розв'язання контрольних завдань****Приклад 8.** Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5 - 2 \cos x}};$ б) $\int \frac{(3x - 1)dx}{x^2 - 6x + 10};$ в) $\int x \ln x dx;$ г) $\int \frac{x + \sqrt{1 + x}}{\sqrt[3]{1 + x}} dx.$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 2 \cos x}} dx &= - \int \frac{d \cos x}{\sqrt{5 - 2 \cos x}} = - \int (5 - 2 \cos x)^{-\frac{1}{2}} d \cos x = \\ &= - \frac{(5 - 2 \cos x)^{-\frac{1}{2} + 1}}{\left(-\frac{1}{2} + 1\right) \cdot (-2)} + C = \frac{-2}{-2} (5 - 2 \cos x)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{5 - 2 \cos x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \frac{3x - 1}{x^2 - 6x + 10} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x - 6) + 9 - 1}{x^2 - 6x + 10} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10} dx + \\ &+ 8 \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + 1} = \frac{3}{2} \cdot I_1 + 8 \cdot I_2, \end{aligned}$$

де

$$I_1 = \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10} dx = \left\langle \frac{x^2 - 6x + 10 = t}{(2x - 6)dx = dt} \right\rangle = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C_1 = \ln |x^2 - 6x + 10| + C_1$$

,

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x - 3) + C_2.$$

Отже,

$$\int \frac{(3x - 1)dx}{x^2 - 6x + 10} = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 6x + 10| + 8 \operatorname{arctg}(x - 3) + C.$$

В)

$$\int x \ln x dx = \left\langle \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = \ln x, \quad dv = x dx \\ du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\rangle = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

$$\Gamma) \int \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \left\langle \begin{array}{l} x+1=t^6, \quad dx=6t^5 dt \\ x=t^6-1, \quad t=\sqrt[6]{x+1} \end{array} \right\rangle = \int \frac{t^6-1+t^3}{t^2} 6t^5 dt =$$

$$= 6 \int (t^9 + t^6 - t^3) dt = 6 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C =$$

$$= \frac{3}{5} \sqrt[6]{(1+x)^{10}} - \frac{3}{2} \sqrt[6]{(1+x)^4} + \frac{6}{7} \sqrt[6]{(1+x)^7} + C.$$

Приклад 9. Обчислити визначений інтеграл:

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}.$$

Розв'язок.

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx = \left\langle \begin{array}{l} x=t^2, \sqrt{x}=t, dx=2t dt \\ x_1=4, t_1=2; x_2=9, t_2=3 \end{array} \right\rangle = \int_2^3 \frac{t}{t-1} 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt =$$

$$= 2 \int_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \left(t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) \Big|_2^3 =$$

$$= 2 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) \Big|_2^3 = 2 \left(\frac{9}{2} + 3 + \ln 2 - \frac{4}{2} - 2 - \ln 1 \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{5}{2} + 1 + \ln 2 \right) = 7 + 2 \ln 2.$$

Приклад 10. Знайти площу фігури, обмежену лініями

$$y = x^3, y = 4x.$$

Розв'язок. Знайдемо точки перетину графіків функцій:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x, \end{cases}$$

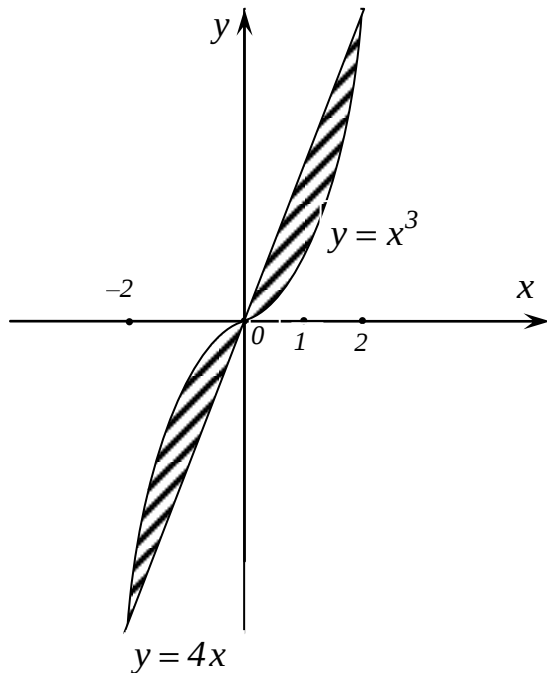


Рис. 5.

$$x^3 = 4x,$$

$$x(x^2 - 4) = 0.$$

Отже, точки перетину графіків

$$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2.$$

Будуємо графіки функцій (рис. 5).

Потрібно знайти площу заштрихованої області:

$$S = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left(4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$= 2 \left(2 \cdot 4 - \frac{16}{4} \right) = 2(8 - 4) = 8 \text{ од. кв.}$$

Приклад 11. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією, яка задана в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

Розв'язок. Фігура, площу якої потрібно знайти зображено на рис. 6. Точки A та B отримуються при $t_1 = 0$ і $t_2 = \pi/2$, відповідно.

Отже,

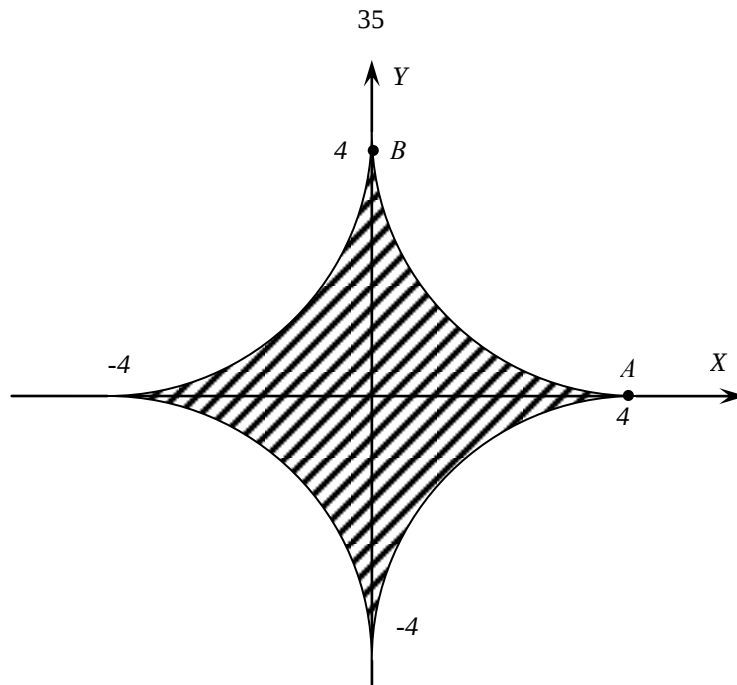


Рис. 6.

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_{t_A}^{t_B} y(t)x'(t)dt = 4 \int_0^{\pi/2} 4 \sin^3 t \cdot 4 \cos^3 t \cdot dt = 64 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t \sin t dt = \\
 &= 192 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = 192 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
 &= 24 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2t) (1 - \cos 2t) dt = 24 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 2t - \sin^2 2t \cos 2t) dt = \\
 &= 24 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt - 4 \sin^3 2t \Big|_0^{\pi/2} = 12 \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} - 0 = 6\pi \text{ од. кв.}
 \end{aligned}$$

Приклад 12. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність.

$$\text{А) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}; \quad \text{Б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$$

Розв'язок.

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{x}{16x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx^2}{16x^4 + 1} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx^2}{(4x^2)^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 4x^2}{4} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{8}(\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{16}.$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{2-4x}} dx &= \int_0^1 (2-4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \left\langle \begin{array}{l} 2-4x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} (2-4x)^{-\frac{1}{3}} dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (2-4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(2-4x)^{-\frac{1}{3}+1}}{\left(-\frac{1}{3}+1\right)(-4)} \bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{(2-4x)^{-\frac{1}{3}+1}}{\left(-\frac{1}{3}+1\right)(-4)} \bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= -\frac{3}{8} \left[(2-4x)^{\frac{2}{3}} \bigg|_0^{\frac{1}{2}} + (2-4x)^{\frac{2}{3}} \bigg|_{\frac{1}{2}}^1 \right] = -\frac{3}{8} \left(0 - 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} - 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Контрольні завдання

VIII. Знайти невизначені інтеграли:

- | | | | |
|---|--|---|--|
| 1.a) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5-2\cos x}};$ | б) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-6x+10};$ | в) $\int x \ln x dx;$ | г) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$ |
| 2.a) $\int \frac{x^3-5x^2+1}{\sqrt{x}} dx;$ | б) $\int x \cos 2x dx;$ | в) $\int \frac{\sin x dx}{1-\cos x};$ | г) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x+1}};$ |
| 3.a) $\int \sqrt{x^3} (5\sqrt[3]{x^2}-1) dx;$ | б) $\int \ln x dx;$ | в) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{ctg} x};$ | г) $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}};$ |
| 4.a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}};$ | б) $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx;$ | в) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x};$ | г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}};$ |
| 5.a) $\int \frac{2^{x-2}+3^{x-1}}{6^x} dx;$ | б) $\int \arcsin 2x dx;$ | в) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx;$ | г) $\int \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{3}{2}} dx.$ |
| 6.a) $\int (3^x-2)(3^{-x}+2) dx;$ | б) $\int \ln(x^2+1) dx;$ | в) $\int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)^2};$ | г) $\int x \sqrt[3]{2x-1} dx.$ |
| 7.a) $\int \left(\sqrt{t^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \right) dt;$ | б) $\int x^2 5^x dx;$ | в) $\int \frac{dx}{1+\cos x + \sin x};$ | г) $\int \frac{x+1+\sqrt{x+2}}{x+3} dx.$ |

- 8.a) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$; б) $\int (x-2) \arcsin x dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x}$; г) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+4}) \sqrt[6]{(x+4)^5}}$.
- 9.a) $\int e^{-x}(e^x + 5) dx$; б) $\int (1+x) \sin x dx$; в) $\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}$; г) $\int \sqrt{\frac{x-3}{x}} \cdot \frac{dx}{x}$.
- 10.a) $\int 5^{x-1} e^x dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; в) $\int \frac{\sin x}{6 \cos^2 x + \sin^2 x} dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+25}}{x} dx$.
- 11.a) $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$; б) $\int x \cdot e^x dx$; в) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx$.
- 12.a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; б) $\int (x+2) \cos(3x+7) dx$; в) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx$; г) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$.
- 13.a) $\int \frac{dx}{16x^2 - 9}$; б) $\int \operatorname{arctg} x dx$; в) $\int \frac{dx}{3+5 \cos x}$; г) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$.
- 14.a) $\int \frac{5-\cos x}{\cos x} dx$; б) $\int x \cos x dx$; в) $\int \frac{dx}{8-4 \sin x + 7 \cos x}$; г) $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$.
- 15.a) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$; б) $\int x \ln^2 x dx$; в) $\int \frac{dx}{4+3 \operatorname{tg} x}$; г) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}) \cdot \sqrt[6]{x+2}}$.
- 16.a) $\int \frac{x^3 - 1}{x+1} dx$; б) $\int x 6^x dx$; в) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$; г) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$.
- 17.a) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}$; б) $\int (x-3) \ln x dx$; в) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin x} dx$; г) $\int \sqrt{x}(1+2\sqrt[6]{x})^3 dx$.
- 18.a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$; б) $\int x^3 e^{-x^2} dx$; в) $\int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x}$; г) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$.
- 19.a) $\int \operatorname{tg}^2 7x dx$; б) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; в) $\int \frac{dx}{8 \sin^2 x - 16 \sin x \cos x}$; г) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$.
- 20.a) $\int \cos 2x \cdot \sin 10x dx$; б) $\int x e^{-7x} dx$; в) $\int \frac{dx}{16 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$.
- 21.a) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$; б) $\int \arccos x dx$; в) $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}$; г) $\int \frac{x dx}{2+\sqrt{x+4}}$.
- 22.a) $\int \frac{3x+2}{x^2+9} dx$; б) $\int \ln^2 x dx$; в) $\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$; г) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$.
- 23.a) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$; б) $\int x \cos\left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$; в) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} dx$; г) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx$.
- 24.a) $\int \frac{x+3}{x+1} dx$; б) $\int x \cdot 2^{3x} dx$; в) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

25.a) $\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6 \right) dx;$	б) $\int \sin x \cdot 2x dx;$	в) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x};$	г) $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx.$
26.a) $\int \frac{x-3}{1-4x^2} dx;$	б) $\int \ln(x-7) dx;$	в) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x};$	г) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}.$
27.a) $\int \frac{x^2 + \sin x}{x^2 \sin x} dx;$	б) $\int x \sin^2 x dx;$	в) $\int \sin^4 x \cdot \sin^2 x dx;$	г) $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx.$
28.a) $\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6 \right) dx;$	б) $\int \arctg(x+5) dx;$	в) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx;$	г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$
29.a) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} - \frac{7}{x^3} + 5 \right) dx;$	б) $\int x^2 \cos \frac{x}{3} dx;$	в) $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$	г) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[4]{x}}.$
30.a) $\int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx;$	б) $\int x^2 e^{-x} dx;$	в) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx;$	г) $\int \frac{(\sqrt{3x+1}-1)dx}{\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt{3x+1}}.$

IX. Обчислити визначений інтеграл:

1. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1};$	2. $\int_0^{0.5} \arcsin x dx;$	3. $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x};$
4. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}};$	5. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x+1};$	6. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^3 x dx;$
7. $\int_0^1 x e^{-2x} dx;$	8. $\int_0^3 \ln(x+3) dx;$	9. $\int_0^{\pi} x \sin x dx;$
10. $\int_{-1}^0 \sqrt{2-3x} dx;$	11. $\int_{-2}^2 e^{3x+4} dx;$	12. $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx;$
13. $\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}};$	14. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1};$	15. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx;$
16. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\cos x};$	17. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2+1};$	18. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}};$
19. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}};$	20. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx;$	21. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x};$
22. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$	23. $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx;$	24. $\int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$
25. $\int_0^1 3(x^2 + x^2 e^{x^3}) dx;$	26. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6};$	27. $\int_0^{\pi/2} \frac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx;$

$$28. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$$

$$29. \int_0^1 x \sqrt{3+4x^2} dx;$$

$$30. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1-\sin^2 x}.$$

X. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$1. y = x^3, y = 4x$$

$$2. y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2$$

$$3. xy = 4, x + y - 5 = 0$$

$$4. y^2 = 16 - 8x, y^2 = 24x + 48$$

$$5. y^2 = x, y = \frac{1}{2}x$$

$$6. y = \sqrt{6x}, y = \sqrt{16-x^2}$$

$$7. y = x^2, x = y^2$$

$$8. x^2 + y^2 = 16$$

$$9. y = x^2, y = 1$$

$$10. y = -x^2, y + x + 2 = 0$$

$$11. y^2 = x + 1, y^2 = 9 - x, y = 0$$

$$12. x^2 = 4y, y = \frac{8}{x^2 + 4}$$

$$13. y = x + 1, y = \cos x, y = 0$$

$$14. y = \sin x, y = \cos x, x = 0$$

$$15. y = x^2 \text{ Ю } y = 3 - x$$

$$16. y = \sqrt{x}, y = x^3$$

$$17. y^2 = x + 1, y = 9 - x$$

$$18. y^2 = 9x, y = 3x$$

$$19. y = x^2, y = 2 - x^2$$

$$20. y = x^3, y = 1, x = 0$$

$$21. xy = 6, x + y - 7 = 0$$

$$22. y = x + 1, y = \cos x, y = 0$$

$$23. y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$$

$$24. y = x^3, y = 0, x = 2$$

$$25. y^2 = 4x, x^2 = 4y$$

$$26. y = x^3, y = 1, x = 0$$

$$27. y^2 = x^3, x = 2$$

$$28. y = \sqrt{x}, y = x^2$$

$$29. y^2 = 9x, x^2 = 9y$$

$$30. y^2 = (x+1)^3, x = 4.$$

XI. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1.a) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1};$$

$$б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$$

$$2.a) \int_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4 - 1};$$

$$б) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

$$3.a) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}};$$

$$б) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^3 + \frac{1}{x}}{x^2}.$$

$$4.a) \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}};$$

$$5.a) \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}};$$

$$6.a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}};$$

$$7.a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16 + x^2)^5}};$$

$$8.a) \int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}};$$

$$9.a) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)};$$

$$10.a) \int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$11.a) \int_0^{\infty} \frac{\arctg 2x}{\pi(1 + 4x^2)} dx;$$

$$12.a) \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16 dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)};$$

$$13.a) \int_0^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5};$$

$$14.a) \int_0^{\infty} \frac{(x + 2) dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 4x + 1)^4}};$$

$$15.a) \int_0^{\infty} \frac{3 - x^2}{x^2 + 4} dx;$$

$$16.a) \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx;$$

$$17.a) \int_1^{\infty} \frac{4 dx}{x(1 + \ln^2 x)};$$

$$18.a) \int_0^{\infty} x \sin x dx;$$

$$b) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - x)^5}}.$$

$$b) \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x - 1)}{3x - 1} dx.$$

$$b) \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

$$b) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1 - x) \ln^2(1 - x)}.$$

$$b) \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2 - 3x)}}{2 - 3x} dx.$$

$$b) \int_0^1 \frac{x dx}{1 - x^4}.$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1 - \sin 3x)^5}} dx.$$

$$b) \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$b) \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 3x}}.$$

$$b) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3 - 4x}}.$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x} dx.$$

$$b) \int_0^1 \frac{2e^{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin x}}{\pi \sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$b) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x - x^2 - 4}}.$$

$$b) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$$

$$b) \int_{\frac{3}{4}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x + 3}}.$$

$$19.a) \int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2 - 4x) \ln 5};$$

$$б) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3} \ln 2}.$$

$$20.a) \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1 + 9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x};$$

$$б) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$$

$$21.a) \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{(4 + x^2) \sqrt{\pi \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}};$$

$$б) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$22.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x) \ln 3};$$

$$б) \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} dx}{\sqrt[3]{9 - x^2}}.$$

$$23.a) \int_0^{\infty} e^{-3x} x dx;$$

$$б) \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1 - x^5}}.$$

$$24.a) \int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx;$$

$$б) \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}.$$

$$25.a) \int_0^1 \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1};$$

$$б) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1 - 2x}}.$$

$$26.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x + 1)};$$

$$б) \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3 - 1)}}.$$

$$27.a) \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2};$$

$$б) \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}.$$

$$28.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1) \ln \frac{3}{4}};$$

$$б) \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16 - x^2)^3}}.$$

$$29.a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2};$$

$$б) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 4x}}.$$

$$30.a) \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2};$$

$$б) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x - 1)^2}.$$

Диференціальне числення функції декількох змінних.

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 13. Знайти перші частинні похідні функції:

$$z = \ln(y^2 - e^{-x}).$$

Розв'язок.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2 - e^{-x}} \cdot (-e^{-x}) \cdot (-1) = \frac{e^{-x}}{y^2 - e^{-x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2 - e^{-x}} \cdot 2y = \frac{2y}{y^2 - e^{-x}}.$$

Приклад 14. Дослідити на екстремум функцію:

$$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$$

Розв'язок.

Знайдемо частинні похідні першого та другого порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} - 4y + 14,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{y}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{y}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{y}{4} x^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Знайдемо критичні точки, для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - 4y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{y - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \\ \sqrt{x} = 4y - 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x}, & x \neq 0 \\ \sqrt{x} = 4 \cdot 2\sqrt{x} - 14 \end{cases}.$$

З останньої системи маємо

$$-7\sqrt{x} = -14 \quad \text{або} \quad x = 4,$$

$$y = 2 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Дослідимо критичну точку $x_0 = 4$ і $y_0 = 4$ на екстремум. Для цього складемо визначник

$$\Delta(x_0; y_0) = \begin{vmatrix} z_{xx}''(x_0; y_0) & z_{xy}''(x_0; y_0) \\ z_{xy}''(x_0; y_0) & z_{yy}''(x_0; y_0) \end{vmatrix},$$

де

$$z_{xx}''(x_0; y_0) = -\frac{y}{4} x^{-\frac{3}{2}} \bigg|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = -\frac{4}{4} 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{8}, \quad z_{yy}''(x_0; y_0) = -4 \bigg|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = -4,$$

$$z_{xy}''(x_0; y_0) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \bigg|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Отже,

$$\Delta(x_0; y_0) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -4 \end{vmatrix} = \frac{4}{8} - \frac{1}{16} = \frac{8-1}{16} = \frac{7}{16} > 0$$

і $z_{xx}''(x_0; y_0) = -\frac{1}{8} < 0$, тому в точці $(4; 4)$ функція досягає максимуму:

$$\begin{aligned} z_{\max} = z(4; 4) &= 4 \cdot \sqrt{4} - 2 \cdot 4^2 - 4 + 14 \cdot 4 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 16 - 4 + 56 = \\ &= 8 - 32 - 4 + 56 = 28 \end{aligned}$$

Відповідь: $z_{\max} = z(4; 4) = 28$.

Приклад 15. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 3x + y - xy \quad \text{в області } D: y = x, y = 4, x = 0.$$

Розв'язок. Найбільше та найменше значення функція може приймати або в критичних точках або на границі області D .

1) Знаходимо критичні точки функції $z(x; y)$:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases},$$

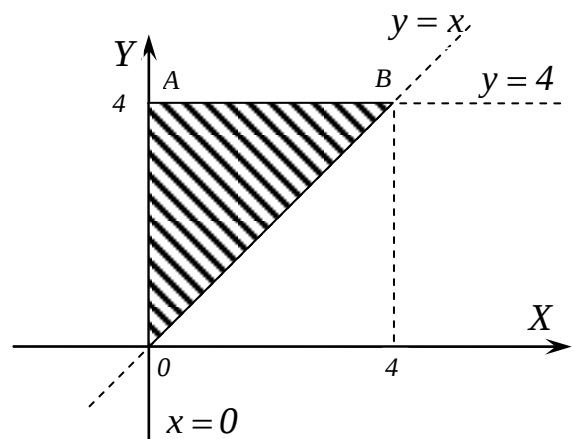


Рис.

де $z'_x = 3 - y$, $z'_y = 1 - x$.

Отже,

$$\begin{cases} 3 - y = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

тобто точка $(1; 3)$ – критична. Обчислимо значення функції в цій точці

$$z(x; y) \Big|_{\substack{x=1 \\ y=3}} = 3 \cdot 1 + 3 - 1 \cdot 3 = 3.$$

2) Дослідимо поведінку функції на границі області.

а) Відрізок OA . Він задається рівнянням $x = 0$ при $y \in [0; 4]$. Тоді

$$z(x; y) \Big|_{x=0} = 3 \cdot 0 + y - 0 \text{ або } z(0; y) = y$$

і

$$z(0; y)'_y = 1 > 0$$

тобто на відрізку OA функція $z(x, y)$ монотонна:

$$z(0; y) \Big|_{y=0} = 0, \quad z(0; y) \Big|_{y=4} = 4.$$

б) Відрізок AB : йому відповідає рівняння $y = 4$ при $x \in [0; 4]$. Маємо

$$z(x; y) \Big|_{y=4} = 3x + 4 - 4x = -x + 4 \text{ або } z(x; 4) = -x + 4$$

і

$$z(x; 4)'_x = -1 < 0$$

тобто на відрізку AB функція $z(x, y)$ теж монотонна:

$$z(x; 4) \Big|_{x=0} = 4, \quad z(x; 4) \Big|_{x=4} = -4 + 4 = 0.$$

в) Відрізок OB : йому відповідає рівняння $y = x$ при $x \in [0; 4]$. Тоді

$$z(x; y) \Big|_{y=x} = 3x + x - x^2 = 4x - x^2 \text{ або } z(x; x) = 4x - x^2$$

$$z(x; x)'_x = 4 - 2x,$$

$$z(x; x)'_x = 0 \Leftrightarrow 2x = 4, \quad x = 2$$

$$z(x; x) \Big|_{x=2} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$$

Отже,

$$z_{\text{найм}} = z(0; 4) = 0,$$

$$z_{\text{найб}} = z(2; 2) = 4.$$

Контрольні завдання

ХІІ. Знайти частинні похідні функції $z = f(x, y)$:

$$1. z = \ln(y^2 - e^{-x});$$

$$2. z = \arcsin \sqrt{xy};$$

$$3. z = \arctg(x^2 + y^2);$$

$$4. z = \cos(x^3 - 2xy);$$

$$5. z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}};$$

$$6. z = \tg(x^3 + y^2);$$

$$7. z = \ctg \sqrt{xy^3};$$

$$8. z = e^{-x^2 + y^2};$$

$$9. z = \ln(3x^2 - y^4);$$

$$10. z = \arccos\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$11. z = \arctg(xy^2);$$

$$12. z = \cos \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$13. z = \sin \sqrt{x - y^3};$$

$$14. z = \tg(x^3 y^4);$$

$$15. z = \ctg(3x - 2y);$$

$$16. z = e^{2x^2 - y^5};$$

$$17. z = \ln(\sqrt{xy} - 1);$$

$$18. z = \arcsin(2x^3 y);$$

$$19. z = \arctg\left(\frac{x^2}{y^3}\right);$$

$$20. z = \cos(x - \sqrt{xy^3});$$

$$21. z = \sin \frac{x+y}{x-y};$$

$$22. z = \tg \frac{2x - y^2}{x};$$

$$23. z = \ctg \sqrt{\frac{x}{xy}};$$

$$24. z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$25. z = \ln(3x^2 - y^2);$$

$$26. z = \arccos(x - y^2);$$

$$27. z = \arctg\left(\frac{x^3}{y}\right);$$

$$28. z = \cos \frac{x-y}{x^2 + y^2};$$

$$29. z = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}};$$

$$30. z = e^{-(x^3 + y^3)}.$$

XIII. Дослідити на екстремум функції:

1. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$

2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$

3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$

4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$

5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$

6. $z = x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$

7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$

8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

9. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$

10. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$

11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$

12. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10.$

13. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1.$

14. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$

16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$

17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$

18. $z = xy(12 - x - y).$

19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9.$

20. $z = 2y - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

24. $z = xy(6 - x - y).$

25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$

26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

27. $z = (x - 1)^2 + 2y^2.$

28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2.$

29. $z = x^2 3(y + 2)^2.$

30. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2.$

XIV. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області $\bar{D}$, обмеженої заданими лініями:

1. $z = 3x + y - xy,$

$\bar{D} : y = x, y = 4, x = 0.$

2. $z = xy - x - 2y,$

$\bar{D} : x = 3, y = x, y = 0.$

3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$

$\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$

4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2,$

$\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$

5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,$

$\bar{D} : x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$

6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8,$

$\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$

7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2,$

$\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 6.$

8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2,$

$\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$

$$9. z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$$

$$10. z = x^2 + 2xy - 10,$$

$$11. z = xy - 2x - y,$$

$$12. z = \frac{1}{2}x^2 - xy,$$

$$13. z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2,$$

$$14. z = 2x^2 + 3y^2 + 1,$$

$$15. z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1,$$

$$16. z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1,$$

$$17. z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x,$$

$$18. z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x,$$

$$19. z = xy - 3x - 2y,$$

$$20. z = x^2 + xy - 2,$$

$$21. z = x^2 y(4 - x - y),$$

$$22. z = x^3 + y^3 - 3xy,$$

$$23. z = 4(x - y) - x^2 - y^2,$$

$$24. z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,$$

$$25. z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y,$$

$$26. z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y,$$

$$27. z = 4 - 2x^2 - y^2,$$

$$28. z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4,$$

$$29. z = x^2 + 2xy + 4x - y^2,$$

$$30. z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2,$$

$$\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0.$$

$$\bar{D} : y = 0, y = x^2 - 4.$$

$$\bar{D} : x = 0, x = 3, y = 0, y = 4.$$

$$\bar{D} : y = 8, y = 2x^2.$$

$$\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$$

$$\bar{D} : y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, y = 0.$$

$$\bar{D} : x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0.$$

$$\bar{D} : x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0.$$

$$\bar{D} : y = 2x, y = 2, x = 0.$$

$$\bar{D} : x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$$

$$\bar{D} : x = 0, x = 4, y = 0, y = 4.$$

$$\bar{D} : y = 4x^2 - 4, y = 0.$$

$$\bar{D} : x = 0, y = 0, y = 6 - x.$$

$$\bar{D} : x = 0, x = 2, y = -1, y = 2.$$

$$\bar{D} : x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$$

$$\bar{D} : x = 3, y = 0, y = x + 1.$$

$$\bar{D} : x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$$

$$\bar{D} : y = x + 2, y = 0, x = 2.$$

$$\bar{D} : y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\bar{D} : x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$$

$$\bar{D} : x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0.$$

$$\bar{D} : x = 0, y = 0, x + y = 6.$$

Диференціальні рівняння.

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок дифференціального рівняння $x^2 y^2 y' = 1 - x^3$.

Це рівняння з відокремлюваними змінними

а) $x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = 1 - x^3$; б) $x^2 y^2 dy = (1 - x^3) dx$; в) $y^2 dy = \frac{1 - x^3}{x^2} dx$; г)

$$\int y^2 dy = \int \left(\frac{1}{x^2} - x \right) dx;$$

Розв'язок $\frac{y^3}{3} = -\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + C$.

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок дифференціального рівняння $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$.

Це лінійне рівняння I порядку. Заміна $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{e^x}{x}$,

$$u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) = \frac{e^x}{x}, \quad v' + \frac{v}{x} = 0. \quad \text{Розв'язуємо} \quad v' = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x| = \ln \frac{1}{|x|}, \quad v = \frac{1}{x}. \quad \text{Підставляємо} \quad u'v = \frac{e^x}{x}, \text{ т.е. } u' \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}, \quad u' = e^x; \quad \frac{du}{dx} = e^x,$$

$$du = e^x dx \quad \int du = \int e^x dx, \quad u = e^x + C, \quad \text{тоді розв'язок} \quad y = u \cdot v = (e^x + C) \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Приклад 18. Знайти частинний розв'язок дифференціального рівняння II порядку $y'' - 3y' - 4y = 50 \sin 2x$, який задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді $y = \bar{y} + y^*$

а) Однорідне рівняння $y'' - 3y' - 4y = 0$. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k - 4 = 0, \quad D = 9 + 16 = 25 > 0, \quad k_1 = -1; \quad k_2 = 4 \Rightarrow \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

б) Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y^* = M \sin 2x + N \cos 2x;$$

Знаходимо $y^* = M \cos 2x + N \sin 2x$; $y^{*'} = -2M \sin 2x + 2N \cos 2x$;

$$(y^{*''}) = -4M \cos 2x - 4N \sin 2x. \quad \text{Підставимо в неоднорідне рівняння:}$$

$$y^{*''} - 3y^{*'} - 4y^* = 50 \sin 2x + 0 \cos 2x$$

$$-4M \cos 2x - 4N \sin 2x + 6M \sin 2x - 6N \cos 2x - 4M \cos 2x - 4N \sin 2x = 50 \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x$$

$$\cos 2x (-4M - 6N - 4M) + \sin 2x (-4N + 6M - 4N) = 50 \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ і $\sin 2x$ в лівій і правій частині тотожності

$$\begin{cases} \cos 2x: -8M - 6N = 0 \\ \sin 2x: 6M - 8N = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = -\frac{4}{3}M \\ 6M - 8 \cdot \left(-\frac{4}{3}M\right) = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = -4 \\ M = 3 \end{cases}. \quad \text{Таким чином,}$$

$$y^* = 3 \cos 2x - 4 \sin 2x.$$

в) Загальний розв'язок: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} + 3 \cos 2x - 4 \sin 2x$.

г) Знайдемо частинний розв'язок при початкових умовах:

$$y' = -c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{4x} - 6 \sin 2x - 8 \cos 2x.$$

Підставимо початкові умови: $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = -1$

$$\begin{cases} 0 = c_1 e^{-0} + c_2 e^{4 \cdot 0} + 3 \cos 0 - 4 \sin 0 \\ -1 = -c_1 e^{-0} + 4c_2 e^{4 \cdot 0} - 6 \sin 0 - 8 \cos 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 = c_1 + c_2 \\ 7 = -c_1 + 4c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -3 - c_2 \\ 4 = 5c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = -3 - \frac{4}{5} = -\frac{19}{5} \\ c_2 = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Частинний розв'язок: при $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = -1$; $y = -\frac{19}{5}e^{-x} + \frac{4}{5}e^{4x} + 3 \cos 2x - 4 \sin 2x$.

Контрольні завдання

XV завдання:

- 1) Знайти загальний розв'язок дифференціального рівняння I порядку.
- 2) Знайти частинний розв'язок дифференціального рівняння II порядку $y'' + py' + qy = f(x)$, який задовольняє початковим умовам $y|_{x=0} = y_0$, $y'|_{x=0} = y_1$.

$$1. \quad 1) y' - y \operatorname{tg} x = \cos x; \quad 2) y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

$$2. \quad 1) y' - 2y = e^{2x}; \quad 2) y'' - 6y' = 12x + 10, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$3. \quad 1) y' - \frac{2y}{1-x^2} = 1+x; \quad 2) y'' + 4y = e^{-2x}, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

$$4. \quad 1) y' + \frac{4x}{x^2+1} = \frac{3}{x^2+1}; \quad 2) y'' - 2y' + 5y = 2 \cos 2x, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

$$5. \quad 1) y' - 2xy = x; \quad 2) y'' + 5y' + 6y = 12 \sin 2x, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 2$$

$$6. \quad 1) y' + y = 2e^x; \quad 2) y'' - 5y' = 12x - 7, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1$$

$$7. \quad 1) y' + \frac{y}{x} = \ln x; \quad 2) y'' - 4y' - \frac{9}{4}y = 2 \sin x + \cos x, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 0$$

$$8. \quad 1) y' + \frac{y}{x} = 1+x; \quad 2) y'' - 4y' = 6x + 5, \quad y_0 = 2, \quad y_1 = 3$$

$$9. \quad 1) y' - 2y = -x; \quad 2) y'' - 2y' + y = 16e^x, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 2$$

$$10. \quad 1) y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}; \quad 2) y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}, \quad y_0 = 3, \quad y_1 = 2$$

$$11. \quad 1) y' - y \operatorname{tg} x = \cos x; \quad 2) y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

$$12. \quad 1) y' - 2y = e^{2x}; \quad 2) y'' - 6y' = 12x + 10, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$13. \quad 1) y' - \frac{2y}{1-x^2} = 1+x; \quad 2) y'' + 4y = e^{-2x}, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0$$

14. 1) $y' + \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{3}{x^2 + 1}$; 2) $y'' - 2y' + 5y = 2 \cos 2x$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$
15. 1) $y' - 2xy = x$; 2) $y'' + 5y' + 6y = 12 \sin 2x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$
16. 1) $y' + y = 2e^x$; 2) $y'' - 5y' = 12x - 7$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$
17. 1) $y' + \frac{y}{x} = \ln x$; 2) $y'' - 4y' - \frac{9}{4}y = 2 \sin x + \cos x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$
18. 1) $y' + \frac{y}{x} = 1 + x$; 2) $y'' - 4y' = 6x + 5$, $y_0 = 2$, $y_1 = 3$
19. 1) $y' - 2y = -x$; 2) $y'' - 2y' + y = 16e^x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$
20. 1) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; 2) $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$, $y_0 = 3$, $y_1 = 2$
21. 1) $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$; 2) $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$
22. 1) $y' - 2y = e^{2x}$; 2) $y'' - 6y' = 12x + 10$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$
23. 1) $y' - \frac{2y}{1-x^2} = 1 + x$; 2) $y'' + 4y = e^{-2x}$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$
24. 1) $y' + \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{3}{x^2 + 1}$; 2) $y'' - 2y' + 5y = 2 \cos 2x$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$
25. 1) $y' - 2xy = x$; 2) $y'' + 5y' + 6y = 12 \sin 2x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$
26. 1) $y' + y = 2e^x$; 2) $y'' - 5y' = 12x - 7$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$
27. 1) $y' + \frac{y}{x} = \ln x$; 2) $y'' - 4y' - \frac{9}{4}y = 2 \sin x + \cos x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$
28. 1) $y' + \frac{y}{x} = 1 + x$; 2) $y'' - 4y' = 6x + 5$, $y_0 = 2$, $y_1 = 3$
29. 1) $y' - 2y = -x$; 2) $y'' - 2y' + y = 16e^x$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$
30. 1) $y' + y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$; 2) $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}$, $y_0 = 3$, $y_1 = 2$

Кратні інтеграли.

Приклади розв'язання контрольних завдань

Приклад 19. Змінити порядок інтегрування у кратному інтегралі $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x, y) dy$.

Розв'язання. Маємо кратному інтеграл, записаний за формулою (11). Будуємо область D , враховуючи межі інтегрування. Вона обмежена лініями

$$y = \varphi_1(x) = \sqrt{x}, \quad y = \varphi_2(x) = 2 - x^2, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Тому проекцією цієї області на вісь Ox є відрізок $[0; 1]$ (рис.).

Якщо функція неперервна у заданій області D , то можна змінити порядок інтегрування і записати кратний інтеграл за формулою (12). Проекцією області D на вісь Oy є відрізок $[0; 2]$. Зліва область D обмежена прямою $\varphi_1 = 0$, а справа- кривою

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{2-y}, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Тому маємо

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$

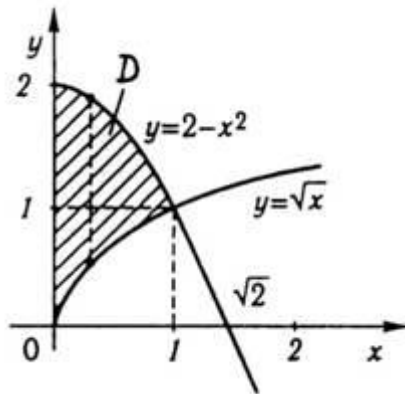


Рис.

Приклад 20. Обчислити $\iint_D (x+y) dx dy$, якщо область D , обмежена лініями. $y = x, y = 2 - x$

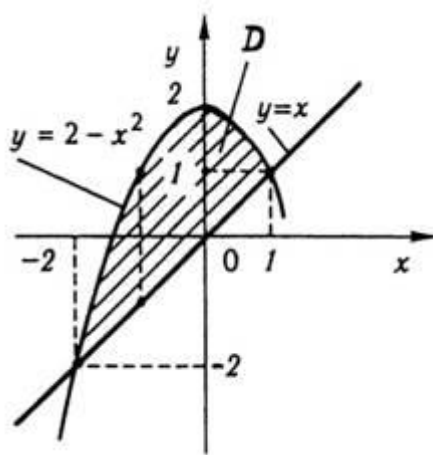
Розв'язання. Побудуємо область D . Координати точок перетину ліній знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 1, x_2 = -2, y_1 = 1, y_2 = -2$. (рис.)

Оскільки область D правильна в напрямі осі Oy , то подвійний інтеграл обчислюється за формулою :

$$\begin{aligned}
\iint_D (1+x-y) dx dy &= \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} (1+x-y) dy = \int_{-2}^1 \left(y + xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{2-x^2} dx = \\
&= \int_{-2}^1 \left(2 - x^2 + x(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2} - x - x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \\
&= \int_{-2}^1 \left(x - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-2}^1 = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} - \frac{32}{10} + \frac{8}{6} = \frac{9}{20}.
\end{aligned}$$



Контрольні завдання.

XVI, XVII завдання:

Варіант 1.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dx \int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{2-\frac{x^2}{2}} f(x,y) dy$$

2. Обчислити подвійні інтеграли по області D , що обмежена заданими лініями:

$$\text{а) } \iint_{(D)} (x^3 + 3) dx dy; \quad D: y + x = 1, x \geq 0, \quad \text{б) } \iint_{(D)} y^2 e^{\frac{xy}{4}} dx dy; \quad D: y = x, y = 2, x = 0.$$

Варіант 2.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{e^x} f(x,y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена вказаними лініями:

a) $\iint_{(D)} x^2 y \, dx dy$; $D: y = 2x^3, y = 0, x = 1$. б) $\iint_{(D)} x \, dx dy$; $D: y = \sqrt{x}, y = x$

Варіант 3

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y) dx + \int_2^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена вказаними лініями:

a) $\iint_{(D)} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx dy$; $D: y = x, y = \sqrt{2}, x = 0$. б) $\iint_{(D)} (x + y^2) dx dy$; $D: y = x^2, y = x$

Варіант 4.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі: .

$$\int_2^4 dx \int_1^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y) dy + \int_4^9 dx \int_{x-3}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y) dy.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями .

a) $\iint_{(D)} e^y dx dy$; $D: x = 2, y = \ln x, y = 0$. б) $\iint_{(D)} (x^2 + y + 10) dx dy$; $D: y = 0, y = 2, x = 0, x = 1$

Варіант 5.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^0 f(x,y) dx + \int_2^3 dy \int_{y-3}^0 f(x,y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями :

a) $\iint_{(D)} y^2 e^{-xy} dx dy$; $D: y = 2, y = x, x = 0$. б) $\iint_{(D)} \frac{x^2}{y^2} dx dy$; $D: y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2$.

Варіант 6.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{1-\sqrt{2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена заданими лініями:

$$\text{a) } \iint_{(D)} xy \sqrt{-9x^4 y^4} dx dy; \quad D: y = -x^2, \quad y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1.$$

$$\text{б) } \iint e^{x+y} dx dy, \text{ де } D: y = e^x, y = 3, x = 0.$$

Варіант 7.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_1^3 dx \int_0^{\frac{x-1}{2}} f(x, y) dy + \int_3^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

$$\text{a) } \iint_{(D)} y \cos 2xy dx dy; \quad D: y = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{3\pi}{2}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 2.$$

$$\text{б) } \iint_D \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy, \quad D: y \geq x^2, y \leq 4 - x^2.$$

Варіант 8.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^3 dx \int_0^4 f(x, y) dy + \int_3^5 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

$$\text{a) } \iint_{(D)} (x^2 y - 6xy^3) dx dy; \quad D: y = x^3, \quad y = -\sqrt{x}, \quad x = 1.$$

$$\text{б) } \iint_{(D)} e^{3x-y} dx dy; \quad D: y = 2x, \quad y = 8 - 2x, \quad y = 0.$$

Варіант 9.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

$$\text{a) } \iint_{(D)} y \sin xy dx dy; \quad D: y = \frac{\pi}{2}, \quad y = \pi, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

$$\text{б) } \iint_{(D)} (x + y + 3) dx dy; \quad D: x + y = 2, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Варіант 10.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями.

а) $\iint_{(D)} (x^2 y^2 + 16x^3 y^3) dx dy; D: y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}, x = 1.$

б) $\iint_{(D)} y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy; D: y = 2x, y = \sqrt{2\pi}, x = 0.$

Варіант 11.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^3 dy \int_0^{\frac{4}{9}y^2} f(x, y) dx + \int_3^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями.

а) $\iint_{(D)} y^2 \sin 2xy dx dy; D: y = 2x, y = \sqrt{2\pi}, x = 0.$

б) $\iint_{(D)} (x^2 y^2 - 8x^3 y^3) dx dy; D: y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}, x = 1.$

Варіант 12.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dx \int_{4-2x}^{\sqrt{16-2x}} f(x, y) dy + \int_2^8 dx \int_0^{\sqrt{16-2x}} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями.

а) $\iint_{(D)} (xy + 3x^2 y^2) dx dy; D: y = x^2, y = -\sqrt{x}, x = 1.$ б) $\iint_{(D)} y^2 e^{\frac{xy}{8}} dx dy; D: x = 0, y = 2x, y = 4.$

Варіант 13.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{1-x} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{8}} dx \int_{\frac{x^2}{4}}^2 f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_{(D)} y^2 (1 + 2x) dx dy; D: x = 2 - y^2, x = 0.$ б) $\iint_{(D)} 6ye^{\frac{xy}{3}} dx dy; D: x = 3, x = 6, y = \ln 2, y = \ln 3.$

Варіант 14.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_{(D)} (x^3 + 3y) dx dy; D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0.$

б) $\iint_{(D)} y \cos xy dx dy; D: x = 1, x = 2, y = \pi, y = \frac{\pi}{2}.$

Варіант 15.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^4 dy \int_{\frac{1}{2}y+1}^{7-y} f(x, y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_{(D)} (6x^2 y^2 - 96x^3 y^3) dx dy; D: x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}.$

б) $\iint_{(D)} y^2 \cos xy dx dy; D: x = 0, y = 2x, y = \sqrt{\pi}.$

Варіант 16.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x, y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями.

а) $\iint_{(D)} \frac{x^2}{y^2} dx dy; D: y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2;$ б) $\iint_{(D)} x dx dy; D: y = \sqrt{x}, y = x,$

Варіант 17.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_{(D)} 2y dx dy; D: y = 1, y = -x^3, x = 0.$ б) $\iint_{(D)} 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy; D: x = 0, y = \frac{2}{3}x, y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}.$

Варіант 18.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями.

а) $\iint_{(D)} e^{\frac{x}{y}} dx dy; D: y^2 = x, y = 1, x = 0.$ б) $\iint_{(D)} x \ln(x + y) dx dy; D: x + y + 5 = 0, y = x + 5, x \leq 0.$

Варіант 19.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

a) $\iint_{(D)} x^2 y \, dx dy; D: y = 2 - x, y = x, x = 0.$ б) $\iint_{(D)} (x + y) \, dx dy; D: y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1.$

Варіант 20.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями.

a) $\iint_{(D)} (x + y) \, dx dy; D: x + y = 3, y = 0, x = 0.$ б) $\iint_{(D)} 3y^2 e^{\frac{xy}{8}} \, dx dy; D: x = 0, y = 2, y = \frac{x}{2}.$

Варіант 21.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

a) $\iint_{(D)} (y^3 - x) \, dx dy; D: y = x + 2, y = 0, x = 0.$ б) $\iint_{(D)} (x + 3xy) \, dx dy; D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1.$

Варіант 22.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_1^{e^2} dy \int_0^{\ln x} f(x, y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

a) $\iint_{(D)} (y - 4x + 2y - 1) \, dx dy; D: y = x^2, y = 0, x = 1.$
 б) $\iint_{(D)} (xy + 24x^3 y^3) \, dx dy; D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}.$

Варіант 23.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями.

a) $\iint_{(D)} 12xy + 9x^2 y^2 \, dx dy; D: y = -x^2, y = \sqrt{x}, x = 1.$ б) $\iint_{(D)} e^{x+y} \, dx dy; D: y = e^x, y = 2, x = 0.$

Варіант 24.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x, y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

a) $\iint_{(D)} (x + y) dx dy; D: y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3.$ б) $\iint_{(D)} 4y^2 \sin xy dx dy; D: y = x, y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, x = 0.$

Варіант 25.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

a) $\iint_{(D)} (x - y) dx dy; D: y = 2 - x^2, y = 2x - 1.$ б) $\iint_{(D)} y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dx dy; D: y = \frac{x}{2}, y = 2, x = 0.$

Варіант 26.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_1^{e^2} dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області G , що обмежена заданими лініями:

a) $\iint_{(D)} \cos(x + y) dx dy; D: x = 0, y = \pi, y = x.$ б) $\iint_{(D)} y(x - x) dx dy; D: y^3 = x, y = x.$

Варіант 27.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-x^3}^{-x} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-x}^{-x^3} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

a) $\iint_{(D)} (x + y^2 + 1) dx dy; D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$ б) $\iint_{(D)} x \cos(x + y) dx dy; D: y = x, y = 0, x = \pi.$

Варіант 28.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

a) $\iint_D (x^2 + 2y) dx dy, x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$ б) $\iint_{(D)} (x^3 + y) dx dy; D: x + y = 1, x + y = 2, x \leq 1, x \geq 0.$

Варіант 29.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_D \sqrt{x} y dy dx, D: y^2 = x, x = 4.$

б) $\iint_{(D)} x^3 dx dy; D: y = x^2, y = x + 2.$

Варіант 30.

1. Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі:

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$$

2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , що обмежена заданими лініями:

а) $\iint_D e^{x+y} dx dy, D: y = e^x, x = 0, y = 3.$ б) $\iint_{(D)} (x - y) dx dy; D: y = 2 - x^2, y = 2x - 1.$

Числові та степеневі ряди.**Приклади розв'язання контрольних завдань.**

Приклад 21. Ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ збігається, так як він є нескінченно спадною

геометричною прогресією із знаменником $q = \frac{1}{2}, |q| < 1$, суму якого можна знайти за

формулою $s = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$

Приклад 22. Розглянемо ряд $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$. Запишемо загальний член

ряда у вигляді: $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Тоді частинна сума s_n буде виглядати таким

чином:

$$s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Звідси випливає, що ряд збігається, і його сума дорівнює $\frac{1}{2}$.

Приклад 23. Ряд $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ розбігається, так як $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

Приклад 24. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ також розбігається, так як послідовність його частинних сум має вигляд: $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$ і т.д., а така послідовність границі не має.

Приклад 25. Застосуємо інтегральну ознаку Коші до дослідження збіжності рядів вигляду

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, порівняємо їх з інтегралами $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$. Розглянемо наступні можливі значення α :

а) $\alpha > 1$. Тоді $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \right) = \frac{1}{\alpha-1}$ (так як при $\alpha > 1$

$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$). Тобто, невластний інтеграл збігається, а значить, збігається й розглядуваний ряд.

б) $\alpha = 1$. При цьому $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln x \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$ - інтеграл розбігається, тому

розбігається й розглядуваний ряд.

в) $\alpha < 1$. Тоді $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \right) = \infty$ (так як при $\alpha < 1$

$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} = \infty$). З розбіжності невластного інтеграла випливає розбіжність розглядуваного ряду.

Приклад 26. Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$, порівняємо його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Цей ряд збігається, так як послідовність його членів є нескінченно спадною геометричною прогресією із знаменником $q = \frac{1}{2}, |q| < 1$, сума якої дорівнює $\frac{1}{2}$. При будь якому $n > 1$ $n \cdot 2^n > 2^n$, значить, $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$, тому досліджуваний ряд збігається.

Приклад 27. Застосуємо ознаку Даламбера до дослідження збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1, \text{ значить, ряд збігається.}$$

Приклад 28. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ - ряд

збігається.

Приклад 29. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ряд з модулів має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Такий ряд збігається, тому досліджуваний ряд збігається абсолютно.

Приклад 30. Дослідимо на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

$$|u_n| = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \text{ (так як } \ln n < n), \text{ тому за першою ознакою порівняння ряд } \sum_{n=2}^{\infty} |u_n|$$

розбігається, тобто абсолютну збіжність досліджуваний ряд не має.

Знакоперемінність забезпечується множником $(-1)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, а з монотонного зростання функції $y = \ln x$ випливає, що $\ln(n+1) > \ln n$, а $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}$. Значить, за ознакою

Лейбница ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ збігається умовно.

Приклад 31. Знайдемо розклад в ряд Тейлора при $x_0 = 0$ функції $f(x) = 2^x$.

$$a_0 = 2^0 = 1, \quad a_1 = \frac{2^0}{\ln 2 \cdot 1!} = \frac{1}{2! \ln 2}, \dots, \quad a_n = \frac{2^0}{\ln^n 2 \cdot n!} = \frac{1}{n! \ln^n 2}.$$

Тобто,

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \ln^n 2} x^n.$$

Приклад 32. Для обчислення інтеграла $\int_0^a e^{-x^2} dx$ розкладемо підінтегральну функцію в ряд

Тейлора, застосовуючи розклад функції e^x : $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots$

$$\text{Тоді } \int_0^a e^{-x^2} dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{1! \cdot 3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \dots$$

За допомогою цієї рівності можна обчислити досліджуваний інтеграл при будь-якому a з будь-якою точністю.

Приклад 33. Обчислимо інтеграл $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx$, для чого розкладемо функцію $\frac{\sin x}{x}$ в ряд:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$$\text{Інтегруючи почленно, одержимо: } \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots$$

Контрольні завдання.

XVIII, XIX, XX завдання.

Варіант № 1

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{5n-3}}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/3}}{n!}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(3n+4)}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n! (x-5)^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 9^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 18^\circ$.

Варіант № 2

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^5}{1+n^6} \right)^2, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{4n!}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(n+1)}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)2^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити $\operatorname{tg} 9^\circ$ з точністю до 0,001:

Варіант № 3

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^9}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n(n+2)!}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-5)^n}{n \cdot n!}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити e^1 з точністю до 0,0001.

Варіант № 4

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln^2 n}}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+3)!}{(2n)!}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{3^n(2n-1)}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\ln 1,2$.

Варіант № 5

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^4}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{0,5}$.

Варіант № 6

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n + \sqrt{n}}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+2)!}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n!}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\cos 10^\circ$.

Варіант № 7

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{25n+1}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+3}{2n-1} \right)^n, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt[3]{1,025}$.

Варіант № 8

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{8n-1} \right)^n, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{12^n + 3^n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n\sqrt{n}}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{(n+1)3^n}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt[3]{1,015}$.

Варіант № 9

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4\sqrt[4]{n^5}}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)\ln^2(1+n)}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt{n}}{2^n}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[3]{75}$.

Варіант № 10

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \dots (6n-7)(6n-4)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 \dots (8n-11)(8n-7)}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^9}}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sqrt[4]{n^4+8}}{(n+1)!}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n + 6^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 5^\circ$.

Варіант № 11

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{9n-1}}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 21n - 7}{2n^2 + 28n + 9} \right)^{2n^2}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{0,3}$.

Варіант № 12

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^5(n^3+9)}}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n!}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^2}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[3]{129}$.

Варіант № 13

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+9)}}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+4}{3n+1} \right)^n, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n}{9n-1}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)x^n}{9^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[4]{132}$.

Варіант № 14

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+3n-1}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n)}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+n+1}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+7)^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[3]{132}$.

Варіант № 15

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n+1)!}{(2n)!}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\ln \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \right)^n, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{9n\sqrt{n}} \right), \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 13^n + n}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} x^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Варіант № 16

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+5)}}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+4}{3n+1} \right)^n, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}} x^n \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot 3^n (x-5)^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\arctg 1,2$.

Варіант № 17

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{4n}{4n+3} \right)^{n^2}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln(2n+2)}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n n^2 (x+3)^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \sqrt{n}} x^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\ln 1,25$.

Варіант № 18

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n} \cdot 3^n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n} \sqrt{n+1}}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^4}{(3n)!}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+5) \ln(n+5)}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt[10]{1000}$.

Варіант № 19

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n+7)}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+100}{8n+1} \right)^n, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^{n+2}}{7^n}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{(n+1)!} (x+6)^{2n+1}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \sqrt{7n+5}}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 15^\circ$.

Варіант № 20

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!}{(2n+5)!}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^3}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x+3)^n}{n^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n (n+2)} x^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\ln 2$.

Варіант № 21

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5n}{\sqrt{9n^2 + 1}}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10n+1}{10n+5} \right)^{\frac{n^2}{3}}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\sqrt{\ln(n-1)}}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{8n-7}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^n}{5^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{1,3}$.

Варіант № 22

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n}{n^3}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2+2n+2)\ln^2(n+1)}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 13^n}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{9}{5n}\right).$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{3^n} \cdot x^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\arctg 0,5$.

Варіант № 23

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{8}{9n}\right)^n, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{-n^2}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)\ln^2(n+2)}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n-1}}{5^n(n^2-5n)}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\ln 1,12$.

Варіант № 24

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{13n+7}{\sqrt{n} 2^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{7^{n+1}}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{9n^3+16}}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 8^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{0,4}$.

Варіант № 25

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n(2n-1)}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \left(\frac{3n-1}{5n+2} \right)^{2n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sin^2 n} \right), \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+5}{\sqrt{n^3}}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)2^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)3^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $e^{1,4}$.

Варіант № 26

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}, \quad г) 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{5} + \dots$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^2}{n^2}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{5^n \sqrt{n}}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 13^\circ$.

Варіант № 27

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1+3^{-n}))^n, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n9^n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n^5}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}} x^n, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n (x-2)^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\arctg 1,2$.

Варіант № 28

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 13^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{e^n}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^{n-1}} x^n, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x-1)^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sqrt{1,0004}$.

Варіант № 29

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n+1}{n^3-n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{5n^2-3}}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n!}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^3(3n+4)}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n^2+1}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)2^n}.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\frac{1}{\sqrt[3]{0,997}}$.

Варіант № 30

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n+3}{3} \ln^2(n+8)}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1} n^2}, \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^3+2n+n^2}.$$

2. Визначити область збіжності ряду:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

3. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001 $\sin 17^\circ$.

**Теорія ймовірностей.
Випадкові події.**

Приклади розв'язання задач.

Приклад 34.

В лотереї з 100 білетів 10 виграшних. Яка ймовірність того, що серед 5 навання куплених білетів 2 виявляться виграшними?

Розв'язок. Запишемо коротку умову задачі за допомогою наступної схеми:

Всього	Виграшних	Невиграшних
100	10	90
Купили		
5	2	3

Нехай A – випадкова подія “серед 5 навання куплених білетів 2 виявляться виграшними”.

За класичним означенням імовірності

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування,

m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів навмання вибрати 5 білетів із 100, тобто кількості сполучень із 100 по 5, а саме $n = C_{100}^5$.

Визначимо кількість сприятливих події A результатів випробування – 2 білети серед 5 навмання куплених виявляться виграшними. 2 виграшних білети можна вибрати з 10 виграшних C_{10}^2 способами, при цьому ті, що залишилися $5 - 2 = 3$ білети повинні бути невиграшними, і взяти їх можна з $100 - 10 = 90$ невиграшних білетів C_{90}^3 способами. Таким чином, за основним принципом комбінаторики (правилом добутку) $m = C_{10}^2 \cdot C_{90}^3$.

Отримаємо:

$$P(A) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{90}^3}{C_{100}^5} = \frac{\frac{10!}{2!(10-2)!} \cdot \frac{90!}{3!(90-3)!}}{\frac{100!}{5!(100-5)!}} = \frac{\frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{90!}{3! \cdot 87!}}{\frac{100!}{5! \cdot 95!}} = \frac{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 9 \cdot 30 \cdot 89 \cdot 44}{5 \cdot 33 \cdot 49 \cdot 97 \cdot 86} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 89 \cdot 22}{11 \cdot 49 \cdot 97 \cdot 43} = \frac{176220}{2248169} \approx 0,0784.$$

Відповідь: $P(A) \approx 0,0784$.

Приклад 35.

З семи карток розрізної абетки “а”, “і”, “о”, “з”, “к”, “н”, “ч” навмання беруть 4 картки.

Яка ймовірність, що з вибраних карток можна скласти слово ”ніч”?

Розв’язок. Нехай A – випадкова подія з “вибраних карток можна скласти слово ”ніч”.

За класичним означенням імовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування,

m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів навмання вибрати 4 картки із 7, тобто кількості сполучень із 7 по 4, а саме $n = C_7^4$.

Кількість сприятливих події A результатів випробування m рівна 4, так як сприятливими будуть набори з чотирьох букв:

“н”, “і”, “ч”, “а”;

“н”, “і”, “ч”, “о”;

“н”, “і”, “ч”, “з”;

“н”, “і”, “ч”, “к”.

Отримаємо:

$$P(A) = \frac{4}{C_7^4} = \frac{4}{\frac{7!}{4!(7-4)!}} = \frac{4}{\frac{7!}{4!3!}} = \frac{4}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}} = \frac{4}{7 \cdot 5} = \frac{4}{35}.$$

Відповідь: $P(A) = \frac{4}{35}.$

Приклад 36.

З восьми карток розрізної абетки “а”, “о”, “і”, “г”, “н”, “р”, “с”, “ь” навмання беруть 5 карток і складають їх в порядку вибирання. Яка ймовірність отримання слова ”осінь”?

Розв’язок. Нехай A – випадкова подія “отримаємо слово ”осінь””.

За класичним означенням імовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість всіх рівноможливих несумісних результатів випробування,

m – кількість сприятливих події A результатів випробування.

Кількість всіх результатів випробування дорівнює кількості способів навмання вибрати 5 карток із 8 і скласти їх в порядку вибирання, тобто, кількості впорядкованих 5-елементних підмножин з 8-елементної множини карток – кількості розміщень з 8 по 5, а саме $n = A_8^5$.

Кількість сприятливих події A результатів випробування m рівна 1.

Отримаємо:

$$P(A) = \frac{1}{A_8^5} = \frac{1}{\frac{8!}{(8-5)!}} = \frac{1}{\frac{8!}{3!}} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{6720} \approx 0,00015.$$

Відповідь: $P(A) \approx 0,00015.$

Приклад 37.

Три стрільці проводять по одному пострілу в ціль, імовірність влучення в яку для першого стрільця рівна 0,6, для другого – 0,7, для третього – 0,8. Знайти ймовірність того, що:

- 1) всі стрільці влучають в ціль;
- 2) всі стрільці не влучають в ціль;
- 3) один стрілець влучить в ціль;

- 4) два стрільці влучають в ціль;
 5) хоча б один стрілець влучить в ціль.

Розв'язок. Нехай випадкові події:

A – “перший стрілець влучить в ціль”,

B – “другий стрілець влучить в ціль”,

C – “третій стрілець влучить в ціль”.

Протилежні до цих подій:

$\bar{A}$ – “перший стрілець не влучить в ціль”,

$\bar{B}$ – “другий стрілець не влучить в ціль”,

$\bar{C}$ – “третій стрілець не влучить в ціль”.

За умовою задачі $P(A)=0,6$, $P(B)=0,7$, $P(C)=0,8$.

Тоді

$$P(\bar{A})=1-0,6=0,4,$$

$$P(\bar{B})=1-0,7=0,3,$$

$$P(\bar{C})=1-0,8=0,2.$$

При розв'язанні задачі скористаємось знаками:

$\cap$ – означає добуток або суміщення чи перетин подій, тобто, що події відбудуться одночасно;

$\cup$ – означає суму або об'єднання подій, тобто, що відбудеться принаймні одна з цих подій.

1) Випадкова подія “всі стрільці влучають в ціль” полягає в тому, що відбудуться одночасно події A, B, C , тобто $A \cap B \cap C$.

З умови задачі події A, B, C незалежні, тому ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

Відповідь: $P = 0,336$.

2) Випадкова подія “всі стрільці не влучають в ціль” полягає в тому, що відбудуться одночасно події $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, тобто $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

З умови задачі події $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ незалежні, тому ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

Відповідь: $P = 0,024$.

3) Випадкова подія “один стрілець влучить в ціль” полягає в тому, що відбудуться несумісні між собою події “перший стрілець влучить в ціль і другий – не влучить, і третій – не влучить” або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – влучить, і третій не влучить”, або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – не влучить, і третій влучить”, що можна записати за допомогою знаків суміщення та об’єднання подій у вигляді

$$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C).$$

Знайдемо шукану ймовірність, використовуючи аксіому ймовірності суми несумісних подій:

$$P = P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) = P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) + P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C).$$

З умови задачі події $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ незалежні в сукупності, тому за означенням ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей.

Отримаємо:

$$P = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,036 + 0,056 + 0,096 = 0,188.$$

Відповідь: $P = 0,188$.

4) Випадкова подія “два стрільці влучать в ціль” полягає в тому, що відбудуться несумісні між собою події “перший стрілець влучить в ціль і другий – влучить, і третій не влучить” або “перший стрілець влучить в ціль і другий – не влучить, і третій – влучить”, або “перший стрілець не влучить в ціль і другий – влучить, і третій – влучить”, що можна записати у вигляді

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C).$$

Знайдемо шукану ймовірність, використовуючи аксіому ймовірності суми несумісних подій:

$$P = P(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Отримаємо:

$$P = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,084 + 0,144 + 0,224 = 0,452.$$

Відповідь: $P = 0,452$.

5) 1 спосіб.

Випадкова подія “хоча б один стрілець влучить в ціль” полягає в тому, що відбудуться несумісні між собою події “один стрілець влучить в ціль” або “два стрільці влучать в ціль”, або “три стрільці влучать в ціль”.

З пунктів 3), 4), 1) знайдемо шукану ймовірність:

$$P = 0,188 + 0,452 + 0,336 = 0,976.$$

2 спосіб.

Нехай G – випадкова подія “хоча б один стрілець влучить в ціль”, тоді $\bar{G}$ – протилежна до неї подія “всі стрільці не влучать в ціль”.

Ймовірність події G рівна

$$P(G) = 1 - P(\bar{G}).$$

Використавши пункт 2), знайдемо шукану ймовірність:

$$P(G) = 1 - 0,024 = 0,976.$$

Відповідь: $P = 0,976$.

Зауваження. Очевидно, другий спосіб розв’язання коротший. Цей спосіб називають способом розв’язання від протилежної події.

Приклад 38.

Кинуто три гральних кубики. Яка ймовірність того, що на всіх кубиках випаде різна кількість зерен?

Розв’язок. Нехай випадкові події

A – “кількість зерен, що випали на першому кубіку”,

B – “кількість зерен, що випали на другому кубіку”,

C – “кількість зерен, що випали на третьому кубіку”.

За умовою задачі події A, B, C залежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/(A \cap B)).$$

На першому кубіку може випасти довільна кількість зерен, тому за класичним означенням імовірності $P(A) = \frac{6}{6} = 1$.

На другому кубіку не може випасти та кількість зерен, що випала на першому кубіку, тому за класичним означенням імовірності $P(B/A) = \frac{5}{6}$.

На третьому кубіку не може випасти та кількість зерен, що випала на першому кубіку і та – що випала на другому, тому за класичним означенням імовірності $P(C/(A \cap B)) = \frac{4}{6}$.

Отримаємо:

$$P(A \cap B \cap C) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}.$$

Відповідь: $P(A \cap B \cap C) = \frac{5}{9}.$

Приклад 39.

В урні містяться 5 однакових кульок з номерами від 1 до 5. Навмання витягають по одній 3 кульки. Знайти ймовірність того, що послідовно з'являться кульки з номерами 1, 2, 3, якщо кульки витягають:

- а) без повернення;
- б) з поверненням.

Розв'язок. Нехай випадкові події

A – “з'явиться кулька з номером 1”,

B – “з'явиться кулька з номером 2”,

C – “з'явиться кулька з номером 3”.

а) За умовою задачі події A, B, C залежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/(A \cap B)).$$

За класичним означенням імовірності першою з'явиться кулька з номером 1 з ймовірністю $P(A) = \frac{1}{5}.$

Умовна ймовірність того, що другою з'явиться кулька з номером 2, при умові що вже витягли першу кульку з номером 1, рівна $P(B/A) = \frac{1}{4},$ так як в урні залишилось чотири кульки і одна з них з номером 2.

Третьою з'явиться кулька з номером 3, при умові, що першою з'явиться кулька з номером 1 і другою з'явиться кулька з номером 2, з умовною ймовірністю $P(C/(A \cap B)) = \frac{1}{3},$ так як в урні залишилось три кульки і одна з них з номером 3.

Отримаємо:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}.$$

Відповідь: $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{60}.$

б) За умовою задачі події A, B, C незалежні.

За формулою множення шукана ймовірність рівна

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

За класичним означенням імовірності першою з'явиться кулька з номером 1 з ймовірністю $P(A) = \frac{1}{5}$.

Другою з'явиться кулька з номером 2 з ймовірністю $P(B) = \frac{1}{5}$, так як в урну повернули першу кульку і серед п'яти кульок – одна з номером 2.

Третьою з'явиться кулька з номером 3 з ймовірністю $P(C) = \frac{1}{5}$, так як в урну повернули другу кульку і серед п'яти кульок – одна з номером 3.

Отримаємо:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}.$$

$$\text{Відповідь: } P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{125}.$$

Приклад 40.

Пасажира для придбання квитка може наважитися звернутись до однієї з трьох кас. Ймовірності наявності квитка в касах відповідно рівні 0,6, 0,7, 0,8. Яка ймовірність того, що придбаний квиток буде з першої каси?

Розв'язок. Нехай випадкові події:

A – “пасажир придбає квиток”,

H_1 – “пасажир вибере для купівлі квитка першу касу”,

H_2 – “пасажир вибере для купівлі квитка другу касу”,

H_3 – “пасажир вибере для купівлі квитка третю касу”.

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3 утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже,

$$\sum_{i=1}^3 P(H_i) = 1.$$

Також, за умовою задачі події H_1, H_2, H_3 рівноможливі, тобто, жодна з подій не має переваги появи при випробуванні, тому вони мають однакові ймовірності:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

За умовою задачі умовні ймовірності

$P(A/H_1) = 0,6$ – “пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі першу касу”,

$P(A/H_2) = 0,7$ – “пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі другу касу”,

$P(A/H_3) = 0,8$ – “пасажир придбає квиток при умові, що він вибере для купівлі третю касу”.

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,7 + \frac{1}{3} \cdot 0,8 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (0,6 + 0,7 + 0,8) = \frac{2,1}{3} = 0,7. \end{aligned}$$

Ймовірність події “придбаний квиток буде з першої каси” знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,6}{0,7} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2}{7}.$$

$$\text{Відповідь: } P(H_1/A) = \frac{2}{7}.$$

Приклад 41.

Три автомати виготовляють однакові деталі, які подаються на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата в 2 рази більша продуктивності другого, а продуктивність другого автомата в 3 рази більша продуктивності третього. Перший автомат виготовляє в середньому 90 % деталей відмінної якості, другий – 95 %, а третій – 99 %, Яка ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь виготовлена другим автоматом, якщо вона має відмінну якість ?

Розв’язок. Нехай випадкові події

A – “взяли деталь відмінної якості”,

H_1 – “деталь виготовлена першим автоматом”,

H_2 – “деталь виготовлена другим автоматом”,

H_3 – “деталь виготовлена третім автоматом”.

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3 – гіпотези – утворюють повну групу, так як вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже,

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Позначивши через N продуктивність третього автомата, запишемо кількість деталей, що подаються на конвеєр, за допомогою наступної схеми:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I автомат - } 6N \text{ деталей} \\ \text{II автомат - } 3N \text{ деталей} \\ \text{III автомат - } N \text{ деталей} \end{array} \right\} 10N \text{ деталей.}$$

За класичним означенням імовірності гіпотез рівні

$$P(H_1) = \frac{6N}{10N} = \frac{6}{10} = 0,6,$$

$$P(H_2) = \frac{3N}{10N} = \frac{3}{10} = 0,3,$$

$$P(H_3) = \frac{N}{10N} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Перевірка. $0,6 + 0,3 + 0,1 = 1.$

За умовою задачі умовні ймовірності рівні

$$P(A/H_1) = \frac{90}{100} = 0,9,$$

$$P(A/H_2) = \frac{95}{100} = 0,95,$$

$$P(A/H_3) = \frac{99}{100} = 0,99.$$

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ &= 0,6 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,1 \cdot 0,99 = 0,54 + 0,285 + 0,099 = 0,924. \end{aligned}$$

Імовірність події “взята з конвеєра деталь відмінної якості виготовлена другим автоматом” знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,95}{0,924} = \frac{3 \cdot 95}{924} = \frac{95}{308}.$$

$$\text{Відповідь: } P(H_2/A) = \frac{95}{308}.$$

Приклад 42.

В урні було 6 чорних і 4 білих кульки. З неї випадковим чином вийняли 3 кульки. Яка ймовірність того, що вийняті після цього 2 кульки виявляться білими?

Розв’язок. Введемо позначення “Б” – вийняли білу кульку, “Ч” – вийняли чорну кульку.

Нехай випадкові події

A – “вийняті в кінці 2 кульки виявляться білими”,

H_1 – “БББ”,

H_2 – “ЧББ” або “БЧБ”, або “ББЧ”,

H_3 – “ЧЧБ” або “ЧБЧ”, або “БЧЧ”

H_4 – “ЧЧЧ”.

За умовою задачі події H_1, H_2, H_3, H_4 – гіпотези – утворюють повну групу, так як

вичерпують всі можливі результати в даному випробуванні, а отже, $\sum_{i=1}^4 P(H_i) = 1$.

Знайдемо ймовірності гіпотез за формулою множення:

$$P(H_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{24}{720},$$

$$P(H_2) = 3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{216}{720},$$

$$P(H_3) = 3 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{360}{720},$$

$$P(H_4) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720}.$$

Перевірка. $\frac{24}{720} + \frac{216}{720} + \frac{360}{720} + \frac{120}{720} = \frac{720}{720} = 1.$

Аналогічно, знайдемо умовні ймовірності:

$$P(A/H_1) = \frac{1}{7} \cdot 0 = 0,$$

$$P(A/H_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{42},$$

$$P(A/H_3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42},$$

$$P(A/H_4) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}.$$

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^4 P(H_i) P(A/H_i) = \frac{24}{720} \cdot 0 + \frac{216}{720} \cdot \frac{2}{42} + \frac{360}{720} \cdot \frac{6}{42} + \frac{120}{720} \cdot \frac{12}{42} = \\ &= \frac{9}{30} \cdot \frac{1}{21} + \frac{15}{30} \cdot \frac{3}{21} + \frac{5}{30} \cdot \frac{6}{21} = \frac{84}{30 \cdot 21} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Відповідь: $P(A) = \frac{2}{15}.$

Контрольні завдання.

XXI, XXII завдання.

Завдання 1. В урні знаходиться a білих і b чорних куль. З урни послідовно виймають 2 кулі.

Знайти ймовірність, що обидва різних кольорів. Розглянути 2 ситуації:

- а) перший шар повертають в урну,
б) перший шар не повертають в урну.

Завдання 2. У двох ящиках знаходяться деталі. У першому ящику a_1 стандартних і b_1 нестандартних деталей. У другому ящику a_2 стандартних і b_2 нестандартних деталей. З першого ящика випадково вийняли деталь і перенесли у другий ящик. Після цього для контролю з другого ящика вийняли деталь. Знайти ймовірність, що ця деталь – стандартна.

Варіанти значень параметрів контрольних завдань

№ вар. значень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	2	4	5	5	4	5	6	7	5	4	2	4	5	5	4
b	4	3	6	4	6	3	7	8	9	9	4	3	6	4	6
a_1	2	3	2	4	3	4	5	4	4	5	2	3	2	4	3
b_1	3	2	4	2	4	3	4	5	2	2	3	2	4	2	4
a_2	3	2	3	2	2	3	2	2	3	4	3	2	3	2	2
b_2	4	4	1	3	4	2	3	4	4	5	4	4	1	3	4

№ вар. значень	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	2	3	5	5	4	4	6	7	5	4	2	4	5	5	4
b	4	3	6	4	5	3	7	9	9	9	3	3	5	4	5
a_1	2	3	2	4	3	5	5	4	4	3	2	1	2	4	3
b_1	3	5	4	2	2	3	4	4	2	2	1	2	4	2	2
a_2	1	2	2	2	2	2	2	2	3	4	2	2	5	2	2
b_2	4	4	1	3	3	2	3	3	4	5	3	4	1	3	1

Випадкові величини.

Приклади розв'язання задач.

Задача 43. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x_i	2	3	4	6	8
P_i	$\frac{4}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{16}{64}$	$\frac{16}{64}$

Для випадкової величини X :

- 1) побудувати многокутник розподілу;
- 2) знайти:
 - а) математичне сподівання;
 - б) дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок.

- 1) Побудуємо многокутник розподілу на рис. :

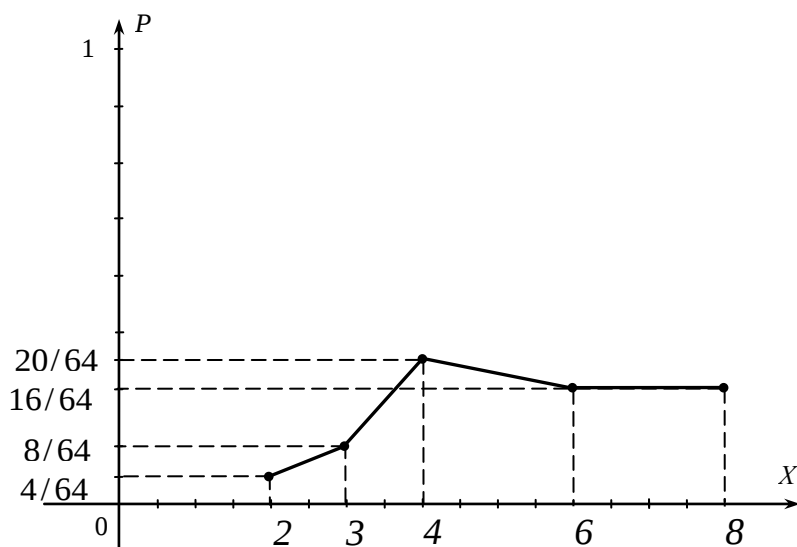


Рис.

- 2) а) математичне сподівання випадкової величини X будемо шукати за формулою:

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i .$$

Отримаємо:

$$MX = 2 \cdot \frac{4}{64} + 3 \cdot \frac{8}{64} + 4 \cdot \frac{20}{64} + 6 \cdot \frac{16}{64} + 8 \cdot \frac{16}{64} = \frac{336}{64} = \frac{21}{4} = 5,25.$$

- б) Дисперсію випадкової величини X шукатимемо за формулою:

$$DX = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (MX)^2.$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} DX &= 2^2 \cdot \frac{4}{64} + 3^2 \cdot \frac{8}{64} + 4^2 \cdot \frac{20}{64} + 6^2 \cdot \frac{16}{64} + 8^2 \cdot \frac{16}{64} - \left(\frac{21}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{2008}{64} - \frac{441}{16} = \frac{61}{16} = 3,8125. \end{aligned}$$

Середнє квадратичне відхилення рівне $\sigma X = \sqrt{DX}$.

Отже, $\sigma X = \sqrt{3,8125} \approx 1,95$.

Задача 44.

Приклад 1.

Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ k \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Знайти:

- 1) множник k ;
- 2) щільність розподілу $p(x)$;
- 3) математичне сподівання випадкової величини X ;
- 4) дисперсію випадкової величини X ;
- 5) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;
- 6) імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a, b) при $a = 1$, $b = 2$.
- 7) Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Розв'язок. 1), 2) Щільність розподілу рівна першій похідній від функції розподілу:

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ c \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + 3 \right) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ c(2x^2 + 3) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Множник k шукатимемо, скориставшись властивістю щільності розподілу випадкової величини X :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x) dx = 1.$$

За межами відрізка $[0, 3]$ функція $p(x) = 0$, тому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= \int_0^3 k(2x^2 + 3) dx = \\ &= k \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_0^3 = k \left(\left(\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot 0 \right) \right) = k \cdot 27 = 1. \end{aligned}$$

Знайдемо $k = \frac{1}{27}$.

Тоді щільність розподілу рівна

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{27} \cdot (2x^2 + 3) & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

3) Математичне сподівання випадкової величини X шукатимемо за формулою

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} MX &= \int_0^3 x \cdot \frac{1}{27} \cdot (2x^2 + 3) dx = \frac{1}{27} \int_0^3 (2x^3 + 3x) dx = \frac{1}{27} \cdot \left(2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(\left(\frac{2 \cdot 3^4}{4} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) - \left(\frac{2 \cdot 0^4}{4} + \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right) \right) = \frac{1}{3^3} \cdot \frac{3^4 + 3^3}{2} = \frac{3^3(3+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

4) Дисперсію випадкової величини X шукатимемо за формулою

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - (MX)^2.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} DX &= \int_0^3 x^2 \cdot \frac{1}{27} \cdot (2x^2 + 3) dx - 2^2 = \frac{1}{27} \int_0^3 (2x^4 + 3x^2) dx - 4 = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(2 \cdot \frac{x^5}{5} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 - 4 = \frac{1}{27} \cdot \left(\left(\frac{2 \cdot 3^5}{5} + 3^3 \right) - \left(\frac{2 \cdot 0^5}{5} + 0^3 \right) \right) - 4 = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{2 \cdot 3^5}{5} + 3^3 \right) - 4 = \frac{1}{3^3} \left(\frac{2 \cdot 3^3 \cdot 3^2}{5} + 3^3 \right) - 4 = \frac{3^3}{3^3} \left(\frac{2 \cdot 3^2}{5} + 1 \right) - 4 = \frac{18}{5} + 1 - 4 = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

5) Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X шукатимемо за формулою

$$\sigma X = \sqrt{DX}.$$

Отримаємо

$$\sigma X = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,7746.$$

6) Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a, b) знайдемо за формулою

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

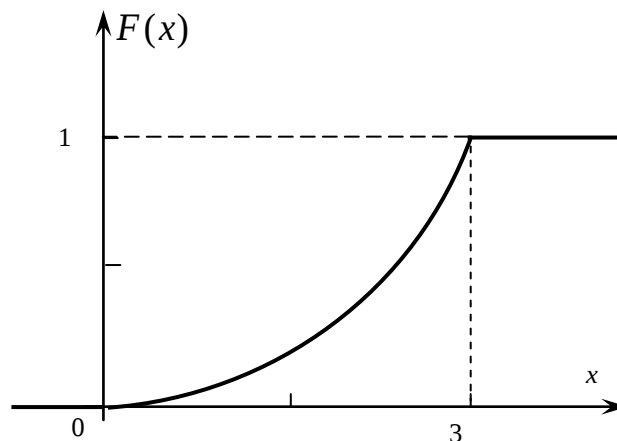
При $a=1, b=2$ отримаємо

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2) &= F(2) - F(1) = \frac{1}{27} \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{27} \left(\left(\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 3 \cdot 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{16}{3} + 6 - \frac{2}{3} - 3 \right) = \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{14}{3} + 3 \right) = \frac{1}{27} \cdot \frac{23}{3} = \frac{23}{81}. \end{aligned}$$

7) Знайдемо значення функції розподілу при $x=0$ і при $x=3$:

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{27} \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{27} \left(\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 3 \cdot 0 \right) = 0, \\ F(3) &= \frac{1}{27} \left(\frac{2x^3}{3} + 3x \right) \Big|_{x=3} = \frac{1}{27} \left(\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3 \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

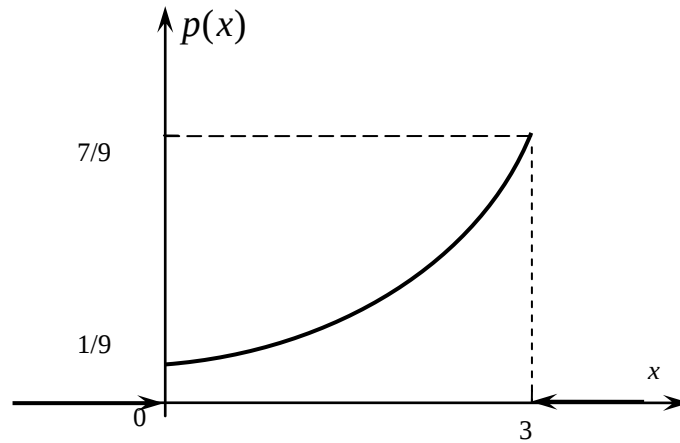
Побудуємо графік функції розподілу $F(x)$:



Знайдемо значення щільності розподілу при $x=0$ і при $x=3$:

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{1}{27} (x^2 + 3) \Big|_{x=0} = \frac{1}{27} (0^2 + 3) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}, \\ p(3) &= \frac{1}{27} (x^2 + 3) \Big|_{x=3} = \frac{1}{27} (3^2 + 3) = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Побудуємо графік щільності розподілу $p(x)$:



Задача 45. Для нормально розподіленої випадкової величини X з математичним сподіванням a , середнім квадратичним відхиленням σ знайти:

- 1) ймовірність попадання в інтервал (α, β) ;
- 2) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $X - a$ буде меншою за δ , якщо $a = 3, \sigma = 4, \alpha = 2, \beta = 6, \delta = 7$.

Розв'язок. 1) Ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал (α, β) знайдемо за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Отримаємо

$$P(2 < X < 6) = \Phi\left(\frac{6-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{4}\right) = \Phi\left(\frac{3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{4}\right) = \Phi(0,75) + \Phi(0,25).$$

Значення функції $\Phi(x)$ знайдемо за таблицею з додатків:

$$\Phi(0,75) = 0,27337, \quad \Phi(0,25) = 0,09871.$$

Отримаємо

$$P(2 < X < 6) = 0,27337 + 0,09871 = 0,37208. \triangleleft$$

2) Знайдемо ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $X - a$ буде меншою за δ , скориставшись формулою ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини X в інтервал (α, β) :

$$P(|X - a| < \delta) = P(-\delta < X - a < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta)$$

$$= \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right).$$

Так як функція Лапласа непарна, отримаємо

$$P\left|\frac{1}{4} - a\right| < \delta = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Для даної випадкової величини матимемо

$$P\left|\frac{1}{4} - 3\right| < 7 = 2\Phi\left(\frac{7}{4}\right) = 2\Phi(1,75) = 2 \cdot 0,45994 = 0,91988. \blacktriangleleft$$

Контрольні завдання.

Завдання XXIII. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x_i	-1	0	1	2
P_i	P_1	P_2	P_3	P_4

- 1) побудувати багатокутник розподілу;
- 2) знайти:
 - а) математичне сподівання;
 - б) дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Завдання XXIV. Неперервна випадкова величина X задана функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{k}, & 0 < x \leq R. \\ 0, & x > R \end{cases}$$

Знайти:

- 1) множник k ;
- 2) щільність розподілу $p(x)$;
- 3) математичне сподівання випадкової величини X ;
- 4) дисперсію випадкової величини X ;
- 5) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;
- 6) імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (c, d) .
- 7) Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Завдання 3. Для нормально розподіленої випадкової величини X з математичним сподіванням a , середнім квадратичним відхиленням σ знайти: ймовірність потрапляння в

інтервал (α, β) ;**Варіанти значень параметрів контрольних завдань**

<i>№ вар.</i> <i>значень</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,2	0,15	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
p_2	0,3	0,25	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,25	0,3	0,5
p_3	0,3	0,3	0,3	0,15	0,1	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3
p_4	0,2	0,3	0,2	0,25	0,2	0,2	0,1	0,35	0,1	0,1
c	-0,5	-0,2	-0,8	-0,3	-0,4	0,2	0,1	-0,1	0,2	-0,1
d	0,4	1,2	1,8	0,7	1,2	1,2	1,5	0,5	1,3	1,1
R	2	1	3	1/2	1/4	1/3	1/5	2/5	3/4	2/3
a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	2
σ	4	5	1	2	3	1	5	2	5	4
α	2	5	4	3	2	1	2	3	4	6
β	13	14	9	10	11	12	11	10	9	10

<i>№ вар.</i> <i>значень</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_1	0,1	0,25	0,15	0,21	0,4	0,15	0,23	0,15	0,25	0,15
p_2	0,3	0,25	0,35	0,39	0,4	0,3	0,3	0,25	0,3	0,45
p_3	0,4	0,3	0,3	0,15	0,1	0,35	0,4	0,3	0,35	0,3
p_4	0,2	0,2	0,2	0,25	0,1	0,2	0,07	0,3	0,1	0,1
c	-0,5	-0,2	-0,8	-0,3	-0,4	0,2	0,1	-0,1	0,2	-0,1
d	0,4	1,2	1,8	0,7	1,2	1,2	1,5	0,5	1,3	1,1
R	2	1	3	1/2	1/4	1/3	1/5	2/5	3/4	2/3
a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	2
σ	4	5	1	2	3	1	5	2	5	4
α	2	5	4	3	2	1	2	3	4	6
β	10	12	19	11	10	11	10	15	19	8

<i>№ вар.</i> <i>значень</i>	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p_1	0,24	0,15	0,1	0,2	0,3	0,15	0,1	0,1	0,25	0,2
p_2	0,3	0,25	0,45	0,4	0,35	0,3	0,2	0,25	0,3	0,4
p_3	0,26	0,3	0,3	0,1	0,15	0,4	0,5	0,35	0,4	0,3
p_4	0,2	0,3	0,15	0,3	0,2	0,15	0,2	0,3	0,05	0,1
c	-0,6	-0,2	-0,4	-0,1	-0,5	0,3	0,15	-0,15	0,1	0,1
d	0,4	1,2	1,8	0,7	1,2	1,2	1,5	0,5	1,3	1,1
R	2	1	3	1/2	1/4	1/3	1/5	2/5	3/4	2/3
a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	2
σ	4	5	1	2	3	1	5	2	5	4
α	2	5	4	3	2	1	2	3	4	6

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1972.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов.– 10-ое издание. – М.: Наука, 1990.
3. Валеев К. Г., Джаладова І. А., Лютий О.І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2002.
4. Апатенок Р.Ф. Элементы линейной алгебры.- Минск:Вышейш.шк., 1985.
5. Апатенок Р.Ф. Сборник задач по линейной алгебре.- Минск: Вышейш.шк., 1980.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высш.шк., 1986.- Ч.1, Ч.2.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов.- М.: Наука, 1978.- Т.2.- 576 с.
8. Берман А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа.- М.: Наука, 1971.- 664 с.
9. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике.- Харьков, 1966.- Ч.4.- 236 с.
10. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. 1977-2006 гг.