

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ АВТОМАТИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
КАФЕДРА АВТОМАТИЗАЦІЇ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ

«ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ДИНАМІКИ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ»

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт
для студентів навчання за напрямом підготовки:
6.050201 «Системна інженерія»

Затверджено на засіданні кафедри
автоматизації виробничих процесів,
протокол № 13 від 29 травня 2013 р.

Кіровоград 2013

Основи статистичної динаміки систем управління. Методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів навчання за напрямом підготовки: 6.050201 «Системна інженерія» / С. І. Осадчий, І. А. Березюк, О. П. Голик. – Кіровоград: КНТУ. -2013. - 72 с.

Укладачі: Осадчий С. І., доктор технічних наук, професор;

Березюк І. А., кандидат технічних наук, доцент кафедри АВП;

Голик О. П., кандидат технічних наук, доцент кафедри АВП.

Рецензент: Каліч В. М., кандидат технічних наук, професор.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ПРАКТИЧНА РОБОТА №1	
ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМ.....	5
ПРАКТИЧНА РОБОТА №2	
ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗІМКНУТОЇ СИСТЕМИ ПРИ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕННЯХ.....	14
ПРАКТИЧНА РОБОТА №3	
ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛІВ.....	23
ПРАКТИЧНА РОБОТА №4	
ДОСЛІДЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЮЧИХ ФІЛЬТРІВ.....	31
ПРАКТИЧНА РОБОТА №5	
ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕННЯХ. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	39
ПРАКТИЧНА РОБОТА №6	
ОБЧИСЛЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ.....	45
ПРАКТИЧНА РОБОТА №7	
ОПТИМАЛЬНИЙ СТОХАСТИЧНИЙ СПОСТЕРІГАЧ (ФІЛЬТР КАЛМАНА).....	57
ПРАКТИЧНА РОБОТА №8	
СТРУКТУРНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА.....	64
ЛІТЕРАТУРА	70

ВСТУП

Метою дисципліни є формування у студентів знань методів створення сучасних високоякісних систем управління та практичних засобів їх самостійного застосування при виробничій діяльності на основі теоретичних підходів до аналізу та синтезу систем управління в умовах дії на них зовнішніх збурень, похибок вимірювання приладів та систем, а також сучасного математичного забезпечення етапів проектування систем управління.

Згідно з модульно-рейтинговою системою курс *«Основи статистичної динаміки систем управління»* складається з 6 змістових модулів. Лабораторні роботи є складовою частиною кожного з модулів. Метою лабораторного практикуму є закріплення та поглиблення базових знань з основ статистичної динаміки систем управління й отримання навиків з практичного їх застосування.

Вчасно захищеною вважається робота захист якої студентом відбувся в межах часу передбаченого для цієї роботи в робочій навчальній програмі та згідно з розкладом занять.

*Якщо за результатами модульно-рейтингового контролю студент отримав середнє арифметичне за три змістовні модуля, яке менше ніж 60 балів (тобто в сумі менше 36 підсумкових балів), то студент не допускається до іспиту і вважається таким, що не виконав всі види робіт, які передбачаються навчальним планом на семестр з дисципліни *«Основи статистичної динаміки систем управління»*.*

ПРАКТИЧНА РОБОТА №1

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМ

Мета роботи: ознайомлення з основними характеристиками динамічних систем та засвоєння методів первинного аналізу кореляційних функцій та спектрів сигналів за допомогою блоків *Auto Correlator* та *Power Spectral Density* середовища MATLAB-SIMULINK.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Випадковий процес – це випадкова функція часу. Це означає, що спостерігач «бачить» лише одну реалізацію випадкового процесу (вона виділена на рис. 1.1 штрих-пунктиром) з безлічі можливих функцій (суцільні лінії).

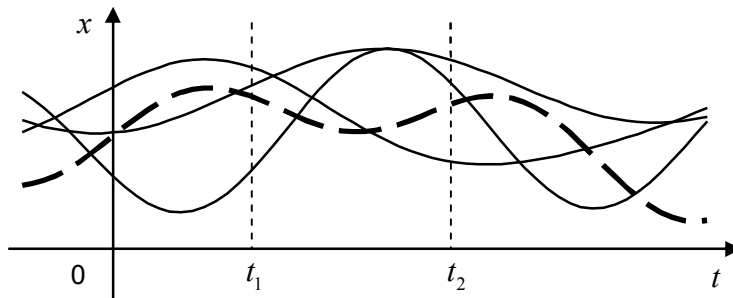


Рис. 1.1

Повний набір всіх можливих реалізацій називають *ансамблем*. Випадковий процес – це і є ансамбль реалізацій, а не функція в звичайному розумінні. Далі позначатимемо весь ансамбль (випадковий процес) через $X(t)$, а окрему реалізацію – через $x(t)$.

Характеристикою випадкового процесу (точніше – характеристикою ансамблю реалізацій) в кожен фіксований момент часу $t = t_1$ є *щільність розподілу імовірності (вірогідності)* $f(X_1)$ випадкової величини $X_1 = X(t_1)$.

За цими даними можна знайти середнє значення (математичне очікування), дисперсію, середнє квадратичне відхилення (СКВВ) та інші характеристики випадкового процесу. Процеси з нульовим середнім значенням називаються *центрованими*.

Для багатьох (хоча і не для всіх) випадкових процесів значення в моменти часу t_1 і t_2 якимось зв'язані. Для того щоб оцінити зв'язок випадкових величин $X_1 = X(t_1)$ і $X_2 = X(t_2)$ використовують *кореляцію* – математичне очікування добутку $X_1 \cdot X_2$:

$$R_{X_1 X_2} = E\{X_1 \cdot X_2\}, \quad (1.1)$$

Кореляція дозволяє виявити *лінійну* залежність між двома величинами. У випадку $R_{X_1 X_2} > 0$ знаки X_1 і X_2 найчастіше співпадають (обоє позитивні або обоє негативні), а при $R_{X_1 X_2} < 0$ - більше вірогідність того, що знаки різні. Якщо $R_{X_1 X_2} = 0$, величини X_1 і X_2 називаються *некорельованими*. Важливо розуміти, що це не означає, що вони незалежні. З іншого боку, незалежні величини завжди некорельовані. Для випадкових величин з нормальним розподілом некорельованість одночасно означає і незалежність.

Згадуючи, що X_1 і X_2 - це значення випадкового процесу в моменти t_1 і t_2 , можна розглядати кореляцію як функцію двох аргументів: $R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\}$.

Ця функція називається *кореляційною* (або *автокореляційною*) функцією випадкового процесу $X(t)$. У цій формулі використовується *усереднювання по ансамблю*, тобто по всіх можливих реалізаціях випадкового процесу. Практично ця операція важкоздійснювана, оскільки потрібно мати повну інформацію про процес (розподіли вірогідності, імовірності).

Якщо випадковий процес - ця напруга у вольтах, то його кореляційна функція вимірюється у V^2 , так само, як середній квадрат і дисперсія.

Стаціонарність.

Якщо усі властивості випадкового процесу (щільність розподілу вірогідності) не залежать від часу, випадковий процес називається *стаціонарним* (у вузькому сенсі). Інакше процес - *нестационарний*, його властивості з часом змінюються. Строго кажучи, усі реальні процеси - нестационарні, вони колись почалися і колись закінчаться. Проте часто на практиці можна вважати, що на інтервалі часу (наприклад, під час переходу судна з одного порту в інший) властивості випадкових процесів (хвилювання, вітри), що цікавить нас, не змінюються. Це допущення дозволяє істотно спростити рішення багатьох завдань.

Стаціонарність - це дуже сильне допущення. Щоб довести його справедливості, треба знати усю щільність розподілу у будь-який момент часу, а вони найчастіше невідомі. На щастя, стаціонарність (у вузькому сенсі) зовсім не потрібна в інженерних завданнях. Замість цього досить розглядати процеси, стаціонарні в широкому сенсі, для яких:

- математичне очікування не залежить від часу;
- кореляційна функція $R_X(t_1, t_2)$ залежить тільки від того, наскільки моменти t_1 і t_2 далекі один від одного, тобто від різниці $t_1 - t_2$, тому її часто записують у вигляді:

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\}, \quad (1.2)$$

де $\tau = t_1 - t_2$.

Далі, кажучи про стаціонарні процеси, ми матимемо на увазі процеси, стаціонарні в широкому сенсі.

Ергодичність.

При першому знайомстві з випадковими процесами завжди виникає закономірне питання: «Як же вивчати випадкові процеси на практиці?» Річ у тому, що у багатьох випадках ми спостерігаємо лише одну реалізацію зі всього ансамблю, і повторити експеримент з тими ж умовами неможливо. Дослідники майже завжди передбачають, що тривале спостереження за однією реалізацією випадкового процесу дозволяє вивчити властивості ансамблю, тобто, один елемент ансамблю містить інформацію про всі останні елементи. Випадкові процеси, що володіють такою властивістю, називають *ергодичними*. Відмітимо, що лише стаціонарний процес може бути ергодичним.

З одного боку, в реальних ситуаціях дуже складно довести ергодичність. З іншої – зазвичай має сенс передбачити, що процес ергодичний, якщо немає вагомих аргументів проти цього. Для ергодичних процесів по одній реалізації можна знайти всі основні характеристики, замінивши усереднювання по ансамблю на усереднювання за часом. Наприклад, математичне очікування стаціонарного випадкового процесу можна теоретично знайти через його щільність розподілу:

$$\bar{x} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad (1.3)$$

Якщо ми знаємо тільки одну реалізацію, можна спробувати оцінити середнє значення на інтервалі $[-T, T]$, поділивши інтеграл від функції $x(t)$ на ширину інтервалу:

$$\hat{x}_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (1.4)$$

Переходячи до межі при $T \rightarrow \infty$ (застосовуючи усереднювання на нескінченному інтервалі), отримуємо оцінку середнього значення по одній реалізації $x(t)$:

$$\hat{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (1.5)$$

Для ергодичних процесів це значення збігається з \bar{x} , яке отримане шляхом усереднювання по ансамблю.

Кореляційна функція.

Кореляційна функція $R_X(\tau)$ стаціонарного процесу $X(t)$ також може бути обчислена двома способами: усереднюванням по ансамблю (через спільну щільність вірогідності) і усереднюванням однієї реалізації за часом. Для ергодичного процесу обидва методи дають один і той же результат. Далі ми розглядатимемо лише ергодичні процеси, для яких можна знайти кореляційну функцію по одній реалізації. Щоб обчислити $R_X(\tau)$ для деякого τ , потрібно

знайти середнє значення добутку $x(t) x(t+\tau)$:

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt, \quad (1.6)$$

Побудувати графік функції $R_X(\tau)$ можна по крапках, виконавши таку інтеграцію для кожного значення τ з деякого масиву.

Кореляційна функція володіє рядом властивостей:

- $R_X(0)$ - це середній квадрат випадкового процесу, тому завжди $R_X(0) \geq 0$;
- для центрованих процесів (з нульовим середнім) ця величина збігається з дисперсією;
- при $\tau = 0$ кореляційна функція має найбільше значення, в тому числі й найбільше за модулем, тобто $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ при всіх τ ;
- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$, тобто $R_X(\tau)$ - симетрична (парна) функція.

Як приклад приведемо кореляційну функцію дискретного сигналу, який перемикається між значеннями A і $-A$ у випадкові моменти часу (рис. 1.2).

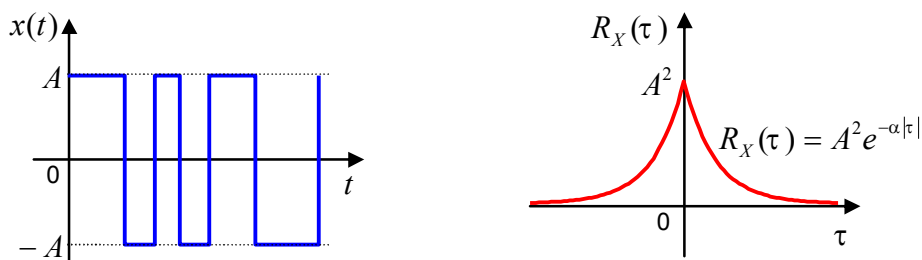


Рис. 1.2

Кореляційна функція не завжди позитивна. На рис. 1.3 показана зміна ординати поверхні морського хвилювання і кореляційна функція цього сигналу (одна з теоретичних моделей):

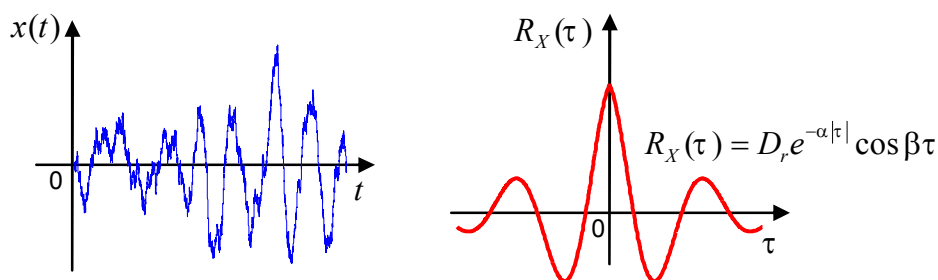


Рис. 1.3

Тут D_r - дисперсія хвилевої ординати, α - коефіцієнт загасання і β - середня частота хвилювання. Відмітимо також, що найчастіше кореляційна функція зменшується по модулю, тобто чим далі від нуля, тим менше значення модуля кореляційної функції (чим більше відстань між відліками, тим менше зв'язок між ними). Це справедливо не для всіх випадкових процесів, але для більшості практичних ситуацій.

Спектральна щільність.

У теорії управління існують і взаємно доповнюють один одного два підходи:

- *часовий* – дослідження процесів в часі;

- *частотний* – дослідження частотних властивостей сигналів і систем (за допомогою передаточних функцій і частотних характеристик).

Аналогічна ситуація спостерігається і при розгляді випадкових процесів. Основна часова характеристика стаціонарного процесу – це кореляційна функція, а частотні властивості описуються *спектральною щільністю*.

Спектральна щільність – це функція, яка показує розподіл потужності сигналу по частотах. Така інформація про корисні сигнали, перешкоди і збурення дуже важлива для розробника систем управління. Система має бути спроектована так, щоб підсилювати сигнали з «корисними» частотами і пригнічувати «шкідливі» частоти, характерні для перешкод і збурень. Для переходу від часового опису детермінованих (не випадкових) процесів до частотного, використовують перетворення Фур'є і Лапласа. Аналогічно спектральна щільність випадкового процесу може бути знайдена як перетворення Фур'є від кореляційної функції:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F\{R_X(\tau)\}, \quad (1.7)$$

Спектральна щільність чимось схожа на щільність розподілу вірогідності, але вона характеризує щільність розподілу потужності сигналу по частотах. Якщо випадковий процес – це напруга у вольтах, то його кореляційна функція вимірюється у V^2 , а спектральна щільність – у $V^2/\Gamma\text{ц}$.

На рис. 1.4 зліва показана кореляційна функція, а справа – відповідна їй спектральна щільність потужності:

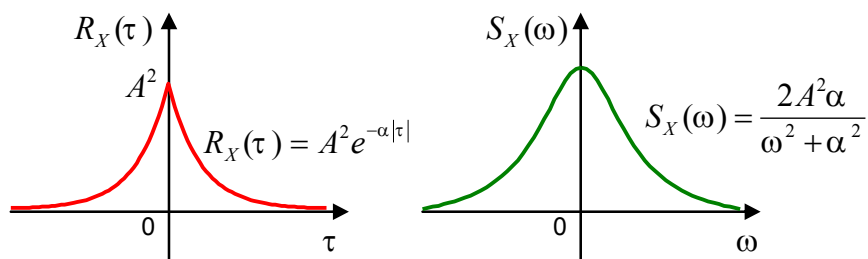


Рис. 1.4

Гармонійний сигнал.

Розглянемо гармонійний сигнал:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta), \quad (1.8)$$

де θ – випадкова фаза, рівномірно розподілена в інтервалі від 0 до 2π . Три реалізації цього процесу (з різними фазами θ) показано на рис. 1.5:

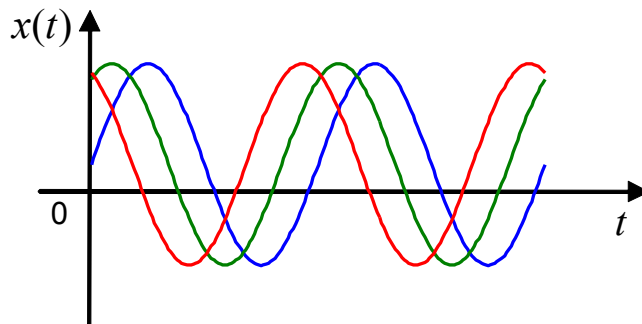


Рис. 1.5

Це теж випадковий процес, проте його відмінність від «класичних» випадкових процесів полягає в тому, що знаючи (або визначивши) випадкову фазу θ , ми можемо обчислити значення цього сигналу при будь-якому t . Такі процеси називають *квазідетермінованими*. Як тільки фаза θ визначена, процес стає детермінованим (не випадковим).

Білий шум.

У математиці для теоретичних досліджень інколи зручно використовувати математичні об'єкти, які не реалізуються на практиці (наприклад, дельта-функцію). У теорії випадкових процесів важливу роль грає *білий шум* (назва пов'язана з білим світлом, спектр якого вміщує всі частоти видимого спектру), що має рівномірну спектральну щільність по всіх частотах, тобто $S_x(\omega) = S_0 = \text{const}$.

Очевидно, що при цьому площа під кривою спектральної щільності (що визначає середній квадрат процесу) нескінченна, тобто сигнал має нескінченну потужність і не може існувати в природі. Якщо немає жодної інформації про властивості випадкових збурень, що діють на системи, часто вважають, що вони приблизно описуються моделлю білого шуму. Якщо ми доведемо, що навіть в цьому випадку характеристики системи залишаться задовільними, то вони будуть не гірші і при будь-якій іншій випадковій перешкоді.

Аналіз процесів в Simulink.

Оцінка кореляційної функції.

Для візуальної оцінки кореляційної функції сигналу за серією останніх відліків можна використовувати блок *Auto Correlator* (група *Simulink Extras – Additional Sinks*). Для роботи цього блоку необхідно встановити пакет *Signal Processing Toolbox*. Під час моделювання виводяться два графіка – процес у часі та його кореляційна функція (для $\tau < 0$), наведено на рис. 1.6.

Відмітимо, що значення кореляційної функції праворуч графіка – це середній квадрат процесу. Штрих-пунктирна лінія являє собою двосторонню кореляційну функцію. Кореляційну функцію оцінюють за невеликою вибіркою

значень в реальному часі. При цьому іноді внаслідок невеликої вибірки можна побачити невірні результати. Для того щоб цього не сталося, інтервал спостереження вихідного сигналу повинен бути значно більшим, ніж інтервал, на якому будується кореляційна функція.

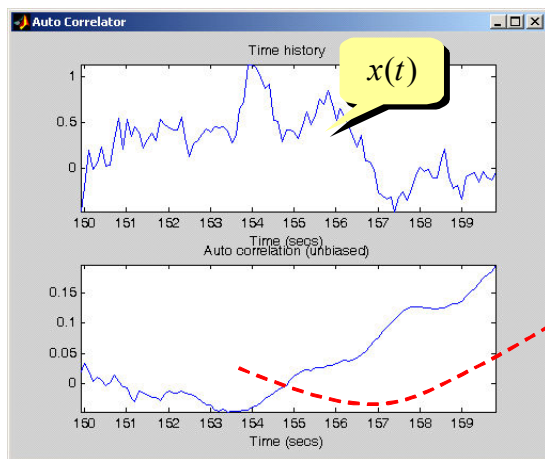
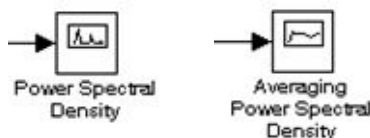


Рис. 1.6

Оцінка спектральної щільності.

Для візуальної оцінки спектральної щільності можна використовувати блоки *Power Spectral Density* та *Averaged Power Spectral Density* (група *Simulink Extras – Additional Sinks*). Для роботи цих блоків також необхідно встановити пакет *Signal Processing Toolbox*.



Блок *Power Spectral Density* оцінює спектральну щільність за останніми вимірюваннями, а блок *Averaged* усереднює її, враховуючи минулі значення (спектр буде більш згладженим).

Під час моделювання на екрані з'являються три графіки – процес у часі, оцінка його спектральної щільності (для додатних частот) та оцінка фази сигналу (третій графік ми використовувати не будемо). Для прикладу, на рис. 1.7 видно, що процес має сигнали з частотами 5 та 10 Гц.

Джерело шуму.

Випадкові процеси в *Simulink* зазвичай генеруються за допомогою блоку *Band-Limited White Noise* (білий шум з обмеженою полосою, група *Sources*).

В параметрах цього блоку можна налаштувати наступне (рис. 1.8):

- інтенсивність шуму (*Noise Power*, значення спектральної щільності при нульовій частоті);
- інтервал кореляції τ_k (*Sample Time*, інтервал, через який два вимірних значення стають некорельованими);

- початкове значення послідовності випадкових чисел, які використовуються для побудови сигналу (*Seed*).

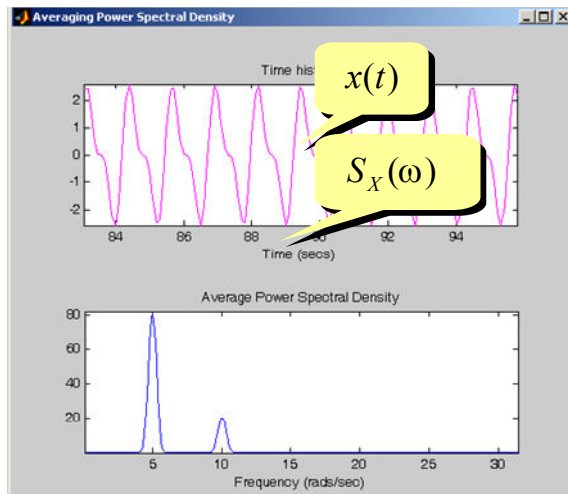


Рис. 1.7

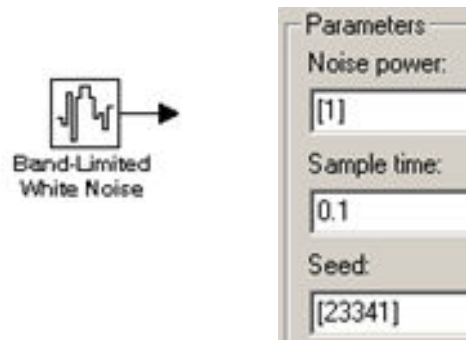


Рис. 1.8

Фактично на виході блоку буде ступінчастий сигнал, який змінюється випадковим чином через інтервал τ_k . Його кореляційна функція має трикутну форму (рис. 1.9):

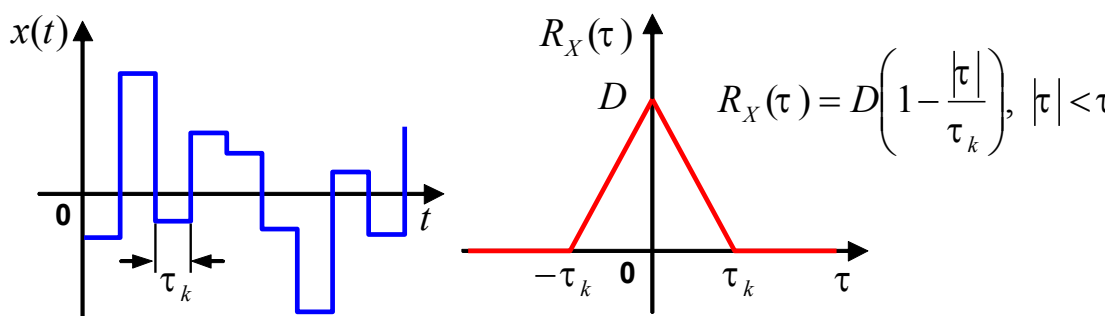


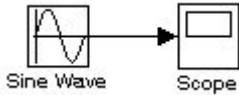
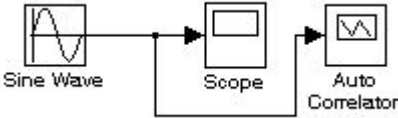
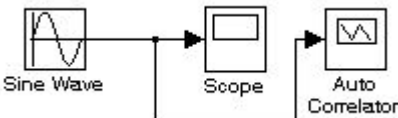
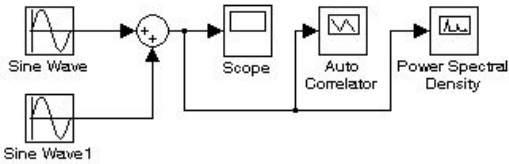
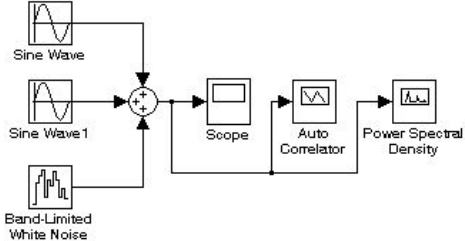


Рис. 1.9

Чим менший інтервал кореляції, тим ближче спектр цього сигналу до рівномірного (на низьких частотах).

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Основна частина команд вводиться в командному вікні середовища MATLAB. Команди, які необхідно використовувати в інших вікнах, позначені іконками відповідних програм.

Етап виконання завдання	Команди та ілюстрації
Завантажте <i>Simulink</i> та створіть нову модель. Встановіть час моделювання 100 с (меню <i>Simulation – Simulation Parameters – Stop Time</i>).	 на панелі інструментів,  у вікні <i>Simulink</i>
Додайте в модель блоки <i>Sine Wave</i> (гармонійний сигнал, синус, група <i>Sources</i>) та <i>Scope</i> (осцилограф, група <i>Sinks</i>). Встановіть для синусоїди частоту 10 рад/с (параметр <i>Frequency</i>).	
Додайте блок <i>Auto Correlator</i> (автокореляційна функція, група <i>Simulink Extras – Additional Sinks</i>). Завантажте модель та подивіться на кореляційну функцію цього сигналу.	
Скопіюйте графік кореляційної функції у звіт. Використовуйте клавіші <i>Alt+PrintScreen</i> для копіювання зображення активного вікна до буферу обміну. Потім вставте рисунок у звіт за допомогою клавіш <i>Ctrl+V</i> .	
Під'єднайте до виходу блок <i>Power Spectral Density</i> (спектральна щільність, група <i>Simulink Extras – Additional Sinks</i>). Завантажте модель та подивіться на спектр цього сигналу. Скопіюйте графік спектральної щільності у звіт.	
Додайте до вхідного сигналу ще одну синусоїду з частотою 5 рад/с та амплітудою 2 (параметр <i>Amplitude</i>). Подивіться, як зміняться автокореляційна функція та спектральна щільність. Поясніть результат.	
Додайте до сигналу випадкову перешкоду. Для цього використовуйте блок <i>Band-Limited White Noise</i> (білий шум з обмеженою полосою, група <i>Sources</i>). Подивіться, як зміняться автокореляційна функція та спектральна щільність. Поясніть результат.	
Встановіть для білого шуму параметр <i>Noise Power</i> (потужність), яка дорівнює 0,1. Завантажте модель та скопіюйте у звіт графіки кореляційної функції та спектральної щільності. Тепер збільшіть потужність шуму до 1 та повторіть моделювання. Поясніть результати.	

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

1. Дослідити (авто)кореляційну функцію та спектральну щільність для гармонійних сигналів.
2. Дослідити вплив перешкод вимірювань на кореляційну функцію та спектр сигналу.

СКЛАД ЗВІТУ:

1. Назва і мета роботи.
2. Результати виконання завдання.

Звіт з практичної роботи повинен бути виконаний на аркушах формату А4 (297*210 мм).

ПРАКТИЧНА РОБОТА №2

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗІМКНУТОЇ СИСТЕМИ ПРИ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕННЯХ

Мета роботи: вивчити статистичні характеристики сигналів на виході лінійної системи та виконати аналіз випадкових процесів, використовуючи програмне середовище MATLAB.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

В прикладних задачах часто потрібно визначити кореляційну функцію і спектральну щільність за експериментальними даними. При цьому ми можемо спостерігати і аналізувати лише «шматок» реалізації на тимчасовому інтервалі від нуля до деякого T , тому неможливо використовувати усереднювання по ансамблю. Залишається сподіватися на те, що процес ергодичний, і застосовувати усереднювання за часом.

Нехай відома реалізація випадкового процесу $x(t)$ на інтервалі від 0 до T . Для оцінки кореляційної функції при $0 \leq \tau \ll T$ (тобто при додатних τ , достатньо невеликих у порівнянні з T) можна використовувати формулу:

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t) x(t+\tau) dt, \quad (2.1)$$

Зверніть увагу, що час усереднення дорівнює $T-\tau$, а не T , оскільки інтервал $[0; T-\tau]$ має як t , так і $t+\tau$. Нажаль, точно розрахувати цей інтеграл неможливо, оскільки ми не знаємо математичну формулу для $x(t)$. В реальності

зазвичай відомі лише значення цієї функції (*вибірка*) в моменти $0, \Delta, 2\Delta, \dots, N\Delta$, де Δ – інтервал між вимірюваннями. Тоді $\hat{R}_x(\tau)$ можна приблизно розрахувати тільки для $\tau = 0, \Delta, 2\Delta, \dots, M\Delta$ (де $M \ll N$) за формулою:

$$\hat{R}_x(i\Delta) = \frac{1}{N-i+1} \sum_{k=0}^{N-i} x(k\Delta) \cdot x(k\Delta + i\Delta), \quad i = 0, 1, \dots, M \ll N, \quad (2.2)$$

Оцінка спектральної щільності.

Використання оцінки кореляційної функції.

Передбачимо, що ми досліджуємо ергодичний процес і знаємо одну реалізацію $x(t)$ на інтервалі від 0 до деякого T . Вище було показано, що за цими даними можна побудувати оцінку кореляційної функції. Якби ми знали повністю безперервну кореляційну функцію, для оцінки спектральної щільності можна було б використовувати перетворення Фур'є:

$$\hat{S}_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \hat{R}_x(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau, \quad (2.3)$$

В реальності відомі лише значення $\hat{R}_x(i\Delta)$ в окремих точках, тому останню формулу потрібно перевести в дискретний вигляд, замінивши інтеграл на кінцеву суму:

$$\hat{S}_x(\omega) = 2\Delta \sum_{i=0}^M \hat{R}_x(i\Delta) \cos \omega i\Delta, \quad (2.4)$$

Цей метод оцінки спектральної щільності називають *методом Блекмана-Тьюки*. На жаль, такий підхід не завжди дає задовільні результати. Річ у тому, що ми знаємо лише частину кореляційної функції, для значень τ від 0 до $\tau_m = M\Delta$. Ця неповнота знань може дуже істотно впливати на результати оцінки спектру, аж до того, що обчислення за формулою (2.4) можуть дати для деяких частот від'ємні значення спектральної щільності. Цього не може бути в принципі, оскільки потужність сигналу (і будь-якій його складовій) не може бути від'ємною.

Вікна.

Щоб виправити ситуацію, потрібно якимось «згладити» незнання кореляційної функції при великих τ і зробити оцінку спектральної щільності більш надійною. Для цього використовуються так звані «вікна» – парні функції, на які треба перемножити кореляційну функцію перед тим, як застосувати до неї перетворення Фур'є. Одне з простих «вікон» – *вікно Хемінга*:

$$w_h(\tau) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m}, & \tau \geq \tau_m \\ 0, & \tau < \tau_m \end{cases}, \quad (2.5)$$

На рис. 2.1 зліва показано вікно Хемінга, а праворуч – вихідна оцінка кореляційної функції $\hat{R}_X(\tau)$ та результат використання до неї вікна Хемінга $w_h(\tau)\hat{R}_X(\tau)$ (штрих-пунктир):

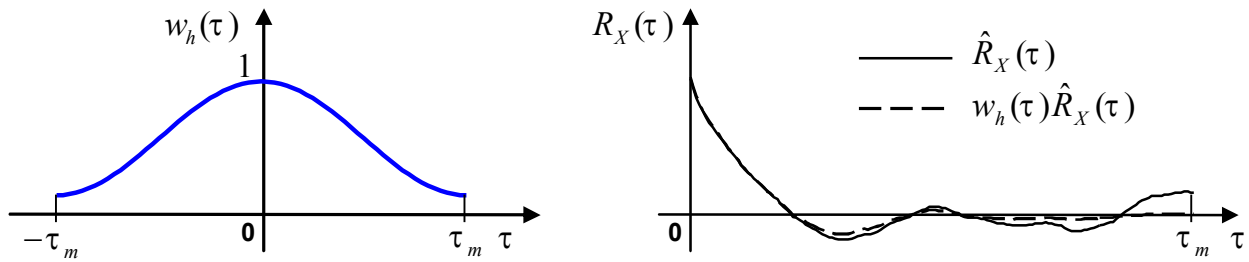


Рис. 2.1

Ясно видно, що використання цього вікна (і інших теж) практично не змінює форму кореляційної функції при малих τ , але згладжує всі викиди при великих τ , які, швидше за все, викликані випадковими помилками.

Для оцінки спектральної щільності з урахуванням вікна $w(\tau)$ використовують формулу, аналогічну (2.4):

$$\hat{S}_X(\omega) = 2\Delta \sum_{i=0}^M w(i\Delta) \hat{R}_X(i\Delta) \cos \omega i\Delta, \quad (2.5)$$

Не варто засмучуватися з приводу того, що вікно вносить додаткове спотворення. Так або інакше, «вікно» використовується завжди. Фактично, усікаючи кореляційну функцію, ми застосовуємо прямокутне вікно:

$$w_r(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq \tau_m \\ 0, & \tau < \tau_m \end{cases}, \quad (2.6)$$

На рис.2.2 наведені оцінки спектру сигналу, отримані при використанні прямокутного вікна ($S_X(\omega)$, суцільна лінія) та вікна Хемінга ($S_X^h(\omega)$, штрих-пунктир).

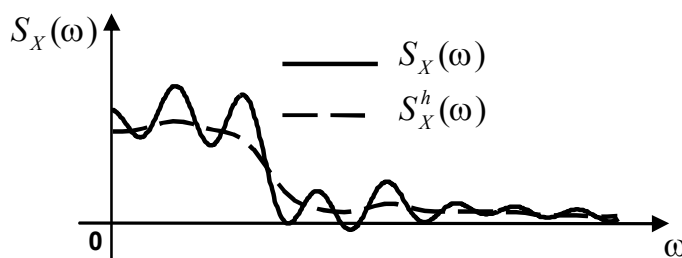


Рис. 2.2

Добре видно, що графік $S_X(\omega)$ заходить в негативну зону, що неможливе з фізичної точки зору. Вживання вікна Хемінга дозволило позбавитися від цієї

проблеми і згладити стрибкоподібні зміни оцінки спектру.

Головний недолік класичного методу оцінки спектральної щільності (методу Блекмана-Тьюки) – великий обсяг обчислень. Значно менше операцій потрібно при використанні прямого методу, заснованого на використанні *дискретного перетворення Фур'є* (ДПФ) і сучасних обчислювальних алгоритмах *швидкого перетворення Фур'є* (ШПФ). При цьому не потрібно будувати кореляційну функцію, а можна відразу знайти спектральну щільність, обробивши вибірку значень вихідного сигналу. В теорії обробки аналогових сигналів для переходу з тимчасової області в частотну використовується перетворення Фур'є:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.7)$$

Воно має сенс для будь-якої детермінованої (невипадковою) функції $f(t)$, яка абсолютно інтегрована, тобто інтеграл від її модуля на всій осі сходиться:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad (2.8)$$

Для стаціонарного випадкового процесу, не рівного нулю, ця умова ніколи не виконуватиметься, тому використовувати перетворення Фур'є в звичайному сенсі для аналізу спектру випадкових процесів не можна.

Для оцінки спектру в теорії обробки сигналів зазвичай використовують сітку частот (у герцах):

$$f_m = \frac{m}{N \cdot \Delta t}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.9)$$

з кроком $\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t}$. В теорії управління прийнято будувати спектри як функції *кутової частоти* (у радіанах в секунду), яка виходить з «звичайної» частоти множенням на 2π :

$$\omega_m = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t} \cdot m, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.10)$$

Для частоти ω_m отримуємо:

$$F_X(\omega_m) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi j}{N} mk} = \Delta t \cdot X_m, \quad (2.11)$$

де через X_m позначена сума, яка називається *дискретним перетворенням Фур'є* (ДПФ):

$$X_m = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi j}{N} mk}, \quad (2.12)$$

Відмітимо, що ця величина – комплексна, така, що містить як речову, так і

уявну частині. Легко підрахувати, що при розрахунку ДПФ по цих формулах для N частот кількість операцій складання і множення буде пропорційна N^2 (позначається $O(N^2)$). Це означає, що якщо N збільшується, скажімо, в 10 разів, то кількість операцій – приблизно в 100 разів. Для великих N , особливо при аналізі сигналів в реальному часі, такі розрахунки виконуються недопустимо довго.

Для швидкого обчислення ДПФ були розроблені спеціальні алгоритми, які називаються *швидким перетворенням Фур'є (БПФ)*. Вони дозволили скоротити кількість операцій з $O(N^2)$ до $O(N \log N)$.

У функції `fft` середовища MATLAB використовується модифікація алгоритму БПФ, запропонованого Дж. Кулі і Дж. Тьюки. Цей алгоритм найбільш ефективний, якщо число відліків N є степінь двійки ($N = 2^p$ при цілому $p > 0$). Відмітимо, що якщо це не так, завжди можна доповнити ряд нулями до найближчої степені двійки.

Згідно з теоремою Котельникова-Шенона, по дискретних вимірах з періодом Δt можна відновити частотні властивості сигналу лише до частоти $f_{\max} = \frac{1}{2\Delta t}$ (або до відповідної кутової частоти $\omega_{\max} = \frac{\pi}{\Delta t}$, яка називається частотою Найквіста, синусоїду необхідно вимірювати більше 2 раз за період). Тому лише оцінка спектру на частотах $\omega_0, \dots, \omega_{N/2}$ дає нам практично корисну інформацію (можна довести, що $X_{N-k} = X_k^*$, де * позначає комплексно-спряжену величину).

Підведемо підсумок. Для оцінки спектру сигналу по N відліках x_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) потрібно виконати наступні дії:

- 1) за допомогою ШПФ (функція `fft` в MATLAB) знайти масив X_m ($m = 0, 1, \dots, N-1$);
- 2) взяти першу половину цього масиву, розрахувати відповідні значення $F_X(\omega_m) = \Delta t \cdot X_m$ ($m = 0, 1, \dots, N/2$) для частот, які не перевищують частоту Найквіста $\omega_{\max} = \omega_{N/2} = \frac{\pi}{\Delta t}$;
- 3) для кожної частоти ω_m ($m = 0, 1, \dots, N/2$) знайти оцінку спектральної

щільності потужності за формулою: $\hat{S}_X(\omega_m) = \frac{|F_X(\omega_m)|^2}{T} = \frac{|F_X(\omega_m)|^2}{N \cdot \Delta t}$.

Для згладжування спектральної щільності так само, як і в методі Блекмана-Тьюки, використовуються вікна. Лише тепер на вагову функцію множиться не оцінка кореляційної функції, а сама реалізація на інтервалі $[0; T]$, рис. 2.3.

Для цього випадку вікно Хемінга на інтервалі $[0; T]$ має вигляд:

$$w_h(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}, \quad (2.13)$$

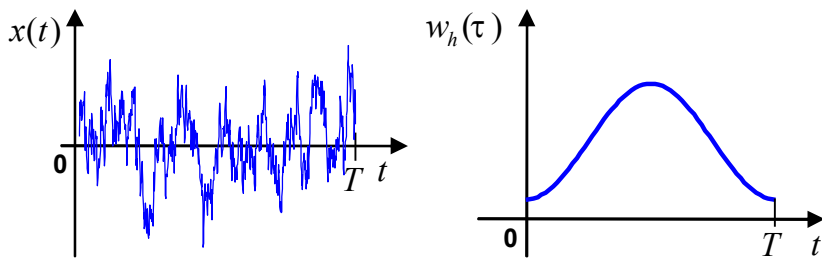
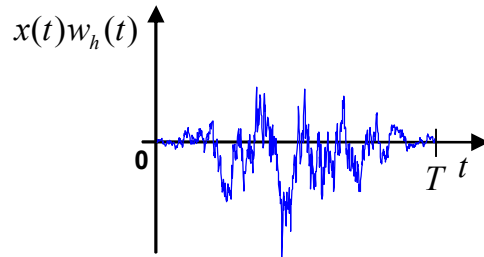


Рис. 2.3



Далі дискретне перетворення Фур'є обчислюється для відліків зваженої функції, тобто:

$$F_X(\omega_m) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k w_k e^{-\frac{2\pi j}{N} m k}, \text{ де } w_k = w_h(k \cdot \Delta t), \quad (2.14)$$

Використання вікна для вихідного сигналу приводить до зменшення його енергії і, як наслідок, до занижених оцінок спектральної щільності. Щоб компенсувати ці втрати, вагова функція множиться на додатковий коефіцієнт q , який визначається з умови нормування (збереження енергії вагової функції вікна, яка повинна залишитися такою ж, як для прямокутного вікна):

$$\int_0^T q^2 w_h^2(t) dt = \int_0^T 1 dt = T, \quad (2.15)$$

Нескладно підрахувати, що для вікна Хемінга з цієї умови отримуємо:

$$q = \frac{1}{\sqrt{0,54^2 + 0,46^2/2}} \approx 1,586, \quad (2.16)$$

Проходження випадкових сигналів через лінійні системи.

Існує два підходи до дослідження систем управління при випадкових збуреннях:

- 1) імовірнісний – на основі щільностей розподілу імовірностей;
- 2) статистичний – за допомогою усереднених характеристик математичного очікування, дисперсії, кореляційної функції та спектральної щільності.

Використання імовірнісного підходу, як правило, пов'язане із значними

труднощами. З одного боку, вони викликані недоліком інформації про щільність розподілу випадкових сигналів. З іншого боку, існуючий математичний апарат досить складний. Приведемо лише один важливий факт: якщо вхідний сигнал має нормальний розподіл, то на виході лінійної системи буде також сигнал з нормальним розподілом.

У прикладних завданнях нас найчастіше цікавить не щільність розподілу імовірності на виході системи, а деякі відчутніші характеристики – середнє значення, дисперсія і так далі. Тому в переважній більшості випадків використовується статистичний підхід. Далі ми передбачатимемо, що на вхід лінійної системи з відомою передаточною функцією $F(s)$ діє стаціонарний випадковий процес із заданою спектральною щільністю $S_X(\omega)$.

Перш за все, відзначимо, що при стаціонарному випадковому вході вихід $y(t)$ лінійної системи – теж стаціонарний випадковий процес (лінійна система його не «псує»). Для процесу $y(t)$ потрібно знайти: математичне очікування \bar{y} ; дисперсію D_y ; кореляційну функцію $R_Y(\tau)$; спектральну щільність $S_Y(\omega)$.

Виділимо один важливий випадок, коли вхідний сигнал – це *одиничний* білий шум з постійною спектральною щільністю $S_X(\omega) = 1$ (білий шум одиничної інтенсивності). Тоді отримуємо:

$$S_Y(\omega) = F(j\omega) \cdot F(-j\omega), \quad (2.17)$$

Таким чином, спектральна щільність виходу системи, на вхід якої діє одиничний білий шум, дорівнює квадрату її амплітудної характеристики.

Нехай передаточна функція лінійної системи рівна $F(s) = \frac{1}{s+1}$. Білий шум, проходячи через таку ланку, перетворюється на сигнал, що має спектральну щільність:

$$S_Y(\omega) = F(j\omega)F(-j\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}, \quad (2.18)$$

графік якої наведено на рис. 2.4.

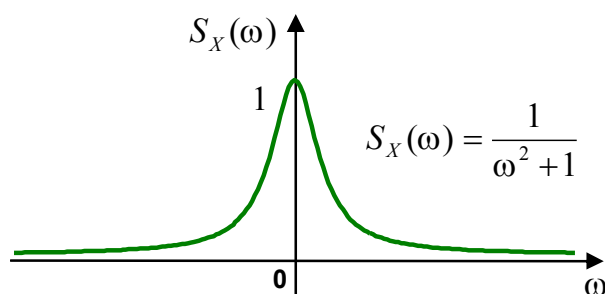


Рис. 2.4

Білий шум «містить» всі частоти, але вони по-різному перетворюються. Постійний сигнал (що має частоту $\omega = 0$) передається на вихід системи без змін. На низьких частотах спотворення досить малі, а високі частоти пригнічуються (фільтруються) системою. Це типовий *фільтр низьких частот* (він пропускає

низькочастотні сигнали і блокує високочастотні). Відзначимо дуже важливий факт: оскільки високі частоти пригнічуються, відхилення спектру вхідного сигналу від рівномірного спектру білого шуму в цій області істотно не впливатимуть на спектр виходу. На цій ідеї засновано комп'ютерне моделювання випадкових процесів (див. далі).

Аналіз випадкових процесів в MATLAB.

Для того щоб розрахувати дисперсію та СКВВ випадкового процесу, значення якого записані до масиву **x**, використовують функції **var** та **std**:

```
v = var(x);           % дисперсія
sigma = std(x);      % СКВВ
```

Для аналізу кореляційної функції зручно використовувати функції пакету *Signal Processing Toolbox* (обробка сигналів).

Функція **xcorr** розраховує двосторонню кореляційну функцію $R_x(\tau)$. Для того, щоб отримати правильні абсолютні значення кореляційної функції, результат треба поділити на кількість відліків вихідного сигналу. Наприклад, якщо значення сигналу знаходяться в масиві **x**, кореляційна функція може бути розрахована таким чином:

```
R = xcorr(x) / length(x);
```

Якщо побудувати її ми отримаємо значення як для додатних, так і для від'ємних τ . Якщо потрібні лише значення при $\tau > 0$, першу частину доводиться «обрізувати», враховуючи, що графік симетричний.

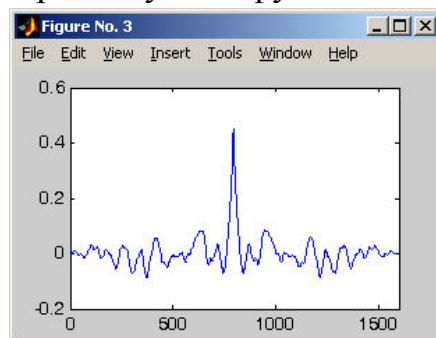
```
Rplus = R(floor(length(R)/2):end);
```

Тут функція **length** розраховує довжину масиву, а **floor** – округлює результат в менше сторону.

Для оцінки спектру в заданому частотному діапазоні, наприклад, $\omega \in [0,5]$ рад/с, можна використовувати два підходи. Метод Блекмана-Тьюки використовує перетворення Фур'є кореляційній функції:

```
w = [0:0.1:5];
Sw = [];
for i=1:length(w)
    Sw(i) = sum(Rplus .* cos(w(i)*t));
end;
Sw = 2*T*Sw;
```

Тут в масиві **t** записаний час, відповідний відлікам оцінки кореляційної



функції R_{plus} для додатних τ , а T – це інтервал між цими відліками. Операція $.*$ (крапка і знак множення) позначає поелементне множення масивів одного розміру.

При використанні вікна потрібно заздалегідь помножити кореляційну функцію на вагові коефіцієнти. Наприклад, для вікна Хеммінга:

```

    hamm = 0.54 + 0.46*cos(pi*t/max(t));
    Rplus = Rplus .* hamm;

```

Потім виконується програма оцінки спектру, приведена вище.

Другий метод використовує дискретне перетворення Фур'є для вихідного сигналу.

```

    N = 512;           % кількість точок (ступінь двійки)
    w = 2*pi*[0:N/2] / N / T; % сітка кутових частот
    Fw = T * fft(x, N); % оцінка F_X(w)
    Sw = Fw .* conj(Fw) / N / T; % оцінка S_X(w)
    Sw = Sw(1:N/2+1); % взяли першу половину
                    % до частоти Найквіста

```

Іноколи потрібно забезпечити заданий крок $\Delta\omega$ по частоті. Для цього потрібно відповідним чином вибрати N , враховуючи, що $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t}$. Звідси отримуємо $N = \frac{2\pi}{\Delta\omega \cdot \Delta t}$. Це значення потрібно округлити «вгору» до найближчої степені двійки – це можна зробити за допомогою функції **nextrpow2**, яка обчислює найближчу ступінь двійки, яка більше заданого числа. У програмі це виглядає так (для $\Delta\omega = 0,5$ рад/с):

```

    dw = 0.5;           % шаг по частоті
    N = 2*pi / dw / T; % кількість точок в ДПФ
    N = 2^nextrpow2(N); % привели до степені двійки

```

При використанні спектрального вікна потрібно заздалегідь помножити вихідний сигнал на вагові коефіцієнти. При цьому для збереження енергії сигналу враховується масштабний коефіцієнт для конкретного вікна. Наприклад, для вікна Хеммінга:

```

    hamm = hamming(length(x));
    scale = 1 / sqrt(0.54^2 + 0.46^2/2);
    hamm = hamm * scale;

```

Тут для побудови вікна використовується функція **hamming** з пакету *Signal Porcessing Toolbox*, при визові якої в дужках вказують кількість відліків сигналу. Потім ДПФ виконується для зваженого сигналу:

```
Fw = T * fft(x.*hamm, N); % оцінка F_X(w)
```

Інші команди в програмі не змінюються.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Використовуючи наведену вище інформацію виконати наступне (*варіанти для розрахунків отримати у викладача*):

- обчислити СКВВ і дисперсію на виході лінійної системи, що збуджується одиничним білим шумом;
- змодельовати випадкові процеси, використовуючи як джерело сигналу білий шум (з обмеженою смугою);
- оцінити СКВВ і дисперсію випадкового процесу, отриманого при моделюванні;
- обчислити автокореляційну функцію випадкового процесу.

СКЛАД ЗВІТУ:

1. Назва і мета роботи.
2. Результати виконання завдання.

Звіт з практичної роботи повинен бути виконаний на аркушах формату А4 (297*210 мм).

ПРАКТИЧНА РОБОТА №3

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛІВ

Мета роботи: виконати моделювання випадкових сигналів та визначити автокореляційну функцію і спектральну щільність випадкового процесу, використовуючи MATLAB-SIMULINK.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Моделювання випадкових сигналів.

На жаль, аналіз системи далеко не завжди можна виконати теоретично. Це особливо актуально для нелінійних систем. В цьому випадку єдиним методом залишається імітаційне моделювання. Тому важливо уміти моделювати випадкові процеси, що діють на систему: збурення (наприклад, вплив вітру і хвиль на судно) і перешкоди виміру (похибки вимірювальної системи).

Зазвичай задана спектральна щільність $S_X(\omega)$ і потрібно отримати процес, що має таку спектральну щільність. Пригадаємо, що спектральна щільність невід’ємна для будь-якої частоти. Тоді функція $S_X(s)$, отримана при підстановці $\omega^2 = -s^2$ в $S_X(\omega)$, невід’ємна на уявній осі, тобто при $s = j\omega$ для всіх ω . Можна довести, що в цьому випадку її можна представити у вигляді добутку $S_X(s) = F(s)F(-s)$.

При цьому завжди можна вибрати передаточну функцію $F(s)$ так, щоб вона була стійкою (не мала полюсів в правій напівплощині) і мінімально-фазовою (не мала нулів в правій напівплощині). Такий перехід від $S_X(s)$ до $F(s)$ називається *факторизацією* (англ. *розкладання на множники*).

Якщо на вхід ланки з передаточною функцією $F(s)$ подати одиничний білий шум, процес на виході матиме задану спектральну щільність $S_X(\omega)$. Функція $F(s)$ називається *передаточною функцією формуючого фільтру*.

У складніших випадках факторизація виконується за допомогою чисельних методів. Потрібно розкласти на прості співмножники чисельник і знаменник $S(s)$ і включити в $F(s)$ лише ті множники, корені яких знаходяться в лівій напівплощині.

Отже, формуючий фільтр ми побудували. Тепер залишається одне дуже практичне питання: як отримати білий шум, який, як відомо, є сигналом з нескінченною енергією? Пригадаємо, що білий шум – це лише допоміжний сигнал, який, проходячи через систему з передаточною функцією $F(s)$, генерує сигнал із заданою спектральною щільністю. Виявляється, можна замінити його на інший сигнал (який просто отримати на комп’ютері), і при цьому спектральна щільність виходу виявляється досить близька до заданої.

Відомо, що на комп’ютері легко отримати випадкову послідовність чисел з рівномірним або нормальним розподілом. По цих числах можна побудувати ступінчастий сигнал, фіксуючи кожне значення протягом деякого часу τ_k , рис. 3.1.

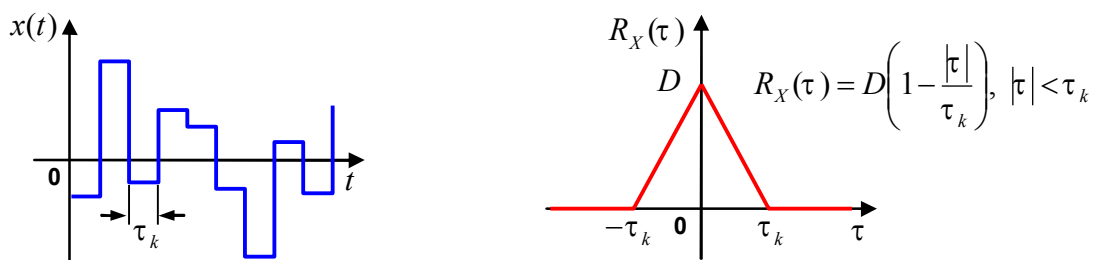


Рис. 3.1

Теоретично ці числа некорельовані; при цьому можна показати, що кореляційна функція $R_X(\tau)$ ступінчастого сигналу – трикутна (див. рис. 3.1 праворуч). При $\tau = 0$ вона дорівнює дисперсії D послідовності випадкових

чисел, а при $|\tau| > \tau_k$ перетворюється на нуль (оскільки моменти часу t і $t+\tau$ знаходяться на різних інтервалах і, отже, відповідні значення некорельовані). Число τ_k називають *інтервалом кореляції* – так називається інтервал, після якого можна рахувати кореляційну функцію (приблизно) рівною нулю.

Взявши перетворення Фур'є від кореляційної функції:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} D \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_k} \right), & |\tau| < \tau_k \\ 0, & |\tau| \geq \tau_k \end{cases}, \quad (3.1)$$

отримаємо спектральну щільність:

$$S_X(\omega) = \frac{2D(1 - \cos\omega\tau_k)}{\omega^2\tau_k}, \quad (3.2)$$

Обчислюючи межу цієї функції при $\omega \rightarrow 0$, знаходимо $\lim_{\omega \rightarrow 0} S_X(\omega) = D\tau_k$, так що при виборі $D = 1/\tau_k$ це значення дорівнює 1 (як в білого шуму). Відмітимо, що $S_X(\omega) = 0$, коли $\cos\omega\tau_k = 1$, тобто $\omega\tau_k = 2\pi m$ при будь-якому цілому m . Форма спектральної щільності показана на рис. 3.2 (тут і далі приймається $D = 1/\tau_k$).

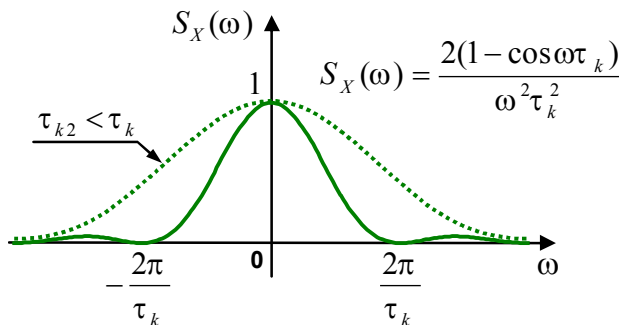


Рис. 3.2

Звичайно, це далеко не білий шум, в якого спектральна щільність має бути постійною на всіх частотах. Проте, при зменшенні інтервалу кореляції τ_k «дзвін» розширюється, і для низьких частот можна вважати, що $S_X(\omega) \approx 1$. У межі при $\tau_k \rightarrow 0$ спектр приближається до рівномірного спектру одиничного білого шуму. Далі буде показано, що при грамотному виборі τ_k такий сигнал можна використовувати як джерело замість білого шуму.

Для прикладу передбачимо, що потрібно отримати сигнал із спектральною щільністю $S_Y(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$, тобто формуючий фільтр має передаточну функцію

$F(s) = \frac{1}{s+1}$. Як вхідний сигнал для цієї ланки використовуватимемо описаний вище ступінчастий сигнал при $\tau_k = 0,5$ с. На рис. 3.3 приведені графіки спектральної щільності ступінчастого сигналу (жирна суцільна лінія), бажаної

спектральної щільності (тонка суцільна лінія) і фактичної спектральної щільності виходу (штрихова лінія).

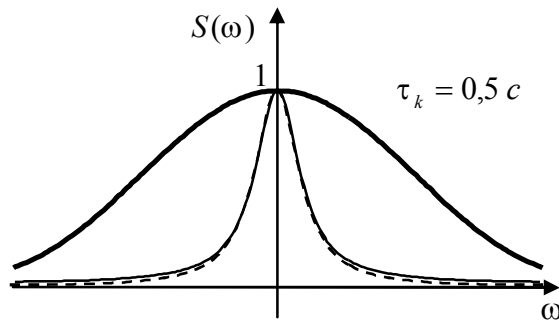


Рис. 3.3

По графіку видно, що в існуючій смузі частот (де частотна характеристика ланки ненульова) спектр вхідного сигналу істотно нерівномірний, тому бажаний і фактичний спектри на виході системи трохи розрізняються в області високих частот. Приймавши $\tau_k = 0,01 c$, маємо абсолютно іншу картину рис. 3.4.

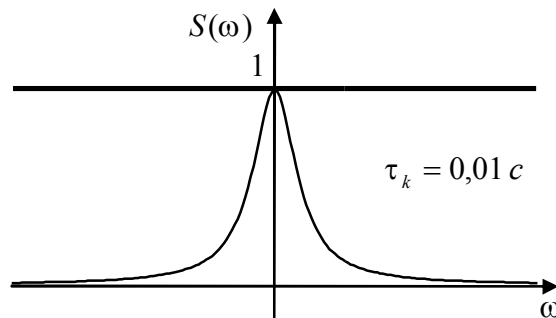


Рис. 3.4

Спектр вхідного сигналу в області, що цікавить нас, практично рівномірний, а спектр реального виходу практично точно збігається із заданим.

Очевидно, що при виборі τ_k потрібно враховувати частотні властивості формуючого фільтру, точніше, смугу частот, де його частотна характеристика досить відрізняється від нуля.

Для цього використовують поняття *смуги пропускання* системи ω_b – так називається частота, для якої амплітудна частотна характеристика зменшується на 3 дБ (децибела) порівняно з максимальним значенням (складає приблизно 0,708 від максимуму). Розробники MATLAB рекомендують при моделюванні використовувати значення:

$$\tau_k = \frac{1}{100} \cdot \frac{2\pi}{\omega_b}, \quad (3.3)$$



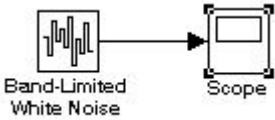
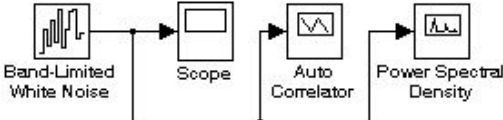
У нашому випадку амплітудно-частотна характеристика (аперіодичної ланки) має вигляд $|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$, її максимум дорівнює 1 (при $\omega = 0$), тому

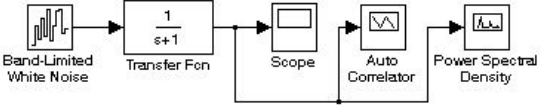

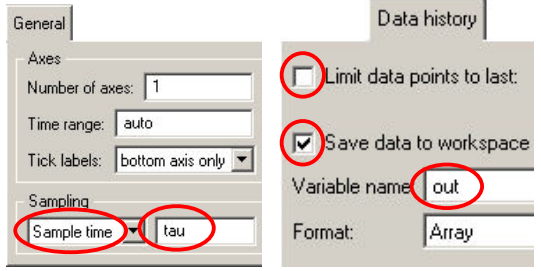
смуга пропускання визначається рівністю $\frac{1}{\sqrt{\omega_b^2 + 1}} = 0,708$.

Звідси слідує $\omega_b = \sqrt{\frac{1}{0,708^2} - 1} \approx 0,998$, так що $\tau_k \approx 0,063$.

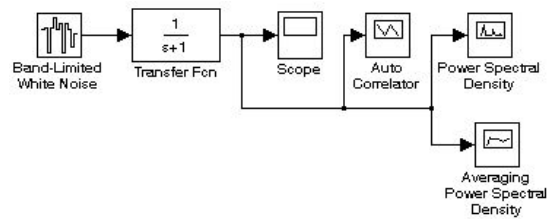
ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Основна частина команд вводиться в командному вікні середовища MATLAB. Команди, які необхідно використовувати в інших вікнах, позначені іконками відповідних програм.

Етап виконання завдання	Команди та ілюстрації
1. Очистіть робочий простір MATLAB (пам'ять).	<code>clear all</code>
2. Очистіть вікно MATLAB.	<code>clc</code>
3. Введіть передаточну функцію $F(s) = \frac{1}{s+1}$.	<code>F = tf(1, [1 1])</code>
4. Використовуючи функцію <code>norm</code> , розрахуйте СКВВ виходу цієї системи при одиничному білому шумі на вході.	<code>norm (F)</code>
5. Розрахуйте дисперсію виходу системи при одиничному білому шумі на вході.	<code>norm (F) ^2</code>
6. Знайдіть полосу пропускання ω_b цієї системи (в рад/с).	<code>bw = bandwidth (F)</code>
7. Знайдіть рекомендований максимальний інтервал кореляції для моделювання за формулою $\tau = \frac{1}{100} \cdot \frac{2\pi}{\omega_b}$	<code>tau = 2*pi/100/bw</code>
8. Завантажте <i>Simulink</i> та створіть нову модель. Встановіть час моделювання 100 с (меню <i>Simulation – Simulation Parameters – Stop Time</i>).	 на панелі інструментів,  у вікні <i>Simulink</i>
9. Додайте в модель блоки <i>Band-Limited White Noise</i> (білий шум з обмеженою площею, група <i>Sources</i>) та <i>Scope</i> (осцилограф, група <i>Sinks</i>). Встановіть для білого шуму параметр <i>Noise Power</i> (потужність) рівну 1. Завантажте модель та подивіться, що представляє собою цей сигнал.	
10. Під'єднайте блоки <i>Auto Correlator</i> (автокореляційна функція) та <i>Power Spectral Density</i> (спектральна щільність) з групи <i>Simulink Extras – Additional Sinks</i>). Подивіться властивості цього сигналу.	

<p>11. Додайте в схему ланку з передаточною функцією $F(s) = \frac{1}{s+1}$ так, як показано на схемі.</p>	
<p>12. В параметрах блока <i>Band-Limited White Noise</i> зменште час кореляції (<i>Sample Time</i>) до значення, розрахованого в п. 7. Для цього можна ввести в потрібне поле ім'я змінної <i>tau</i>.</p>	
<p>13. Відкрийте вікно осцилографа, натисніть кнопку  та налаштуйте параметри так, як показано на рисунку. На вкладці <i>General</i> в списку <i>Sampling</i> оберіть варіант <i>Sampling time</i> (встановіть інтервал вручну), а в сусідньому полі введіть ім'я змінної <i>tau</i>. На вкладці <i>Data history</i> треба прибрати флажок <i>Limit data points to last</i>, встановіть флажок <i>Save data to workspace</i>, ввести ім'я змінної <i>out</i> та вибрати формат даних <i>Array</i>. Завантажте моделювання.</p>	
<p>14. перейдіть у вікно MATLAB, знайдіть СКВВ та дисперсію сигналу на виході ланки. Порівняйте їх із значеннями, отриманими в п. 4 і 5 за теоретичними формулами. Розрахуйте відносну похибку при визначенні СКВВ за допомогою моделювання.</p>	<pre>t = out(:,1); y = out(:,2); std (y) var (y)</pre>
<p>15. У вікні блока <i>Auto Correlator</i> подивіться, як виглядає кореляційна функція процесу, визначена за результатами моделювання.</p>	
<p>16. Розрахуйте автокореляційну функцію на виході, використовуючи функції MATLAB, та побудуйте її графік. Порівняйте його з теоретичною кореляційною функцією $R(\tau) = 0,5 \cdot e^{-\tau}$. Зручно створити новий m-файл та записати в нього такі команди (без номерів рядків):</p> <pre>1 R = xcorr(y)/length(y); 2 Rplus = R(floor(length(R)/2):end); 3 M = 200; 4 t = t(1:M); Rplus = Rplus(1:M); 5 R_teor = 0.5*exp(-abs(t)); 6 figure(1); 7 plot(t, R, t, R_teor) 8 xlim([0 max(t)]);</pre>	

17. Під'єднайте блок *Averaging Power Spectral Density* (усереднена спектральна щільність) з групи *Simulink Extras – Additional Sinks*). Виконайте моделювання ще раз та порівняйте спектри, отримані за допомогою двох різних блоків. Зробіть висновки.



18. Побудуйте спектральну щільність сигналу для частот від 0 до 5 рад/с. За отриманими даними порівняйте її з теоретичною спектральною щільністю $S(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$.

```

1      T = t(2) - t(1);
2      w = 0:0.02:5;
3      Sw = []; Sw_teor = [];
4      for i=1:length(w)
5          Sw(i) = sum(Rplus .* cos(w(i)*t));
6          Sw_teor(i) = 1 / (w(i)*w(i) + 1);
7      end;
8      Sw = 2*T*Sw;
9      figure(2);
10     plot ( w, Sw, w, Sw_teor );

```

Коментар:

- 1 – знаходимо інтервал дискретизації (він повинен бути рівним tau)
- 2 – задаємо сітку частот, від 0 до 5 рад/с з кроком 0,02 рад/с
- 3 – звільняємо масиви
- 4-7 – цикл по всім обраним частотам
- 5 – знаходимо спектр як перетворення Фур'є кореляційної функції
- 6 – теоретичний спектр

19. Використовуючи формулу

$$v_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega,$$

за допомогою функції `trapz` (чисельне інтегрування методом трапецій), оцініть дисперсію по експериментальному та теоретичному спектрах. Поясніть результати, порівнявши їх із значеннями дисперсії, отриманими в п. 5.

`trapz(w, Sw)/pi`

`trapz(w, Sw_teor)/pi`

20. Побудуйте згладжену оцінку кореляційної функції за допомогою вікна Хемінга. Для цього треба додати (в потрібне місце скрипта) команди

```
hamm = 0.54 + 0.46*cos(pi*t/max(t));
```

```
Rhamm = Rplus .* hamm;
```

та при побудові кореляційних функцій вивести третю лінію

```
plot(t, Rplus, t, R_teor, t, Rhamm)
```

Перенести у звіт отриманий графік.

21. Побудуйте оцінку спектральної щільності, використовуючи згладжену кореляційну функцію. На графіку мають бути три спектри (теоретичний, оцінка без згладжування і оцінка із згладжуванням). Скопіюйте графік в звіт.

22. Додайте в скрипт команди для оцінки спектральної щільності потужності за допомогою швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) і виконаєте його.

```
1     N = 2*pi/0.5/T;  
2     N = 2^nextpow2(N);  
3     Fw = T * fft(y, N);  
4     Sw_fft = Fw .* conj(Fw) / N / T;  
5     Sw_fft = Sw_fft(1:N/2+1);  
6     w1 = 2*pi*[0:N/2] / N / T;  
7     plot ( w, Sw_teor, w1, Sw_fft );  
8     xlim([0 max(w)]);
```

Коментар:

- 1 – рахуємо кількість точок для ШПФ, таким чином щоб крок по частоті був рівним 0,5 рад/с
- 2 – визначаємо найближчу більшу степінь двійки
- 3 – виконуємо ШПФ
- 4 – розраховуємо оцінку спектру
- 5 – беремо першу половину спектру до частоти Найквіста
- 6 – сітка кутових частот для побудови графіка
- 7 – будуємо теоретичний спектр та оцінку за допомогою ШПФ

Порівняйте отриманий результат з теоретичною кривою. Зробіть висновки.

23. Повторіть побудову спектральної щільності, використовуючи вікно Хемінга з масштабуванням. Для цього додайте в скрипт наступні команди:

```
1     scale = 1/sqrt(0.54^2 + 0.46^2/2);  
2     hamm = hamming(N) * scale;  
3     yHamm = y(1:N) .* hamm;  
4     Fw = T * fft(yHamm, N);  
5     Sw_fftHamm = Fw .* conj(Fw) / N / T;  
6     Sw_fftHamm = Sw_fftHamm(1:N/2+1);  
7     plot ( w, Sw_teor, w1, Sw_fft, w1, Sw_fftHamm );  
8     xlim([0 max(w)]);
```

Коментар:

- 1 – знаходимо масштабуючий коефіцієнт для вікна Хемінга
- 2 – будуємо вікно Хемінга з масштабуванням
- 3 – використовуємо вікно до перших N відліків сигналу
- 4, 5 – виконуємо ШПФ та розраховуємо оцінку спектру
- 6 – беремо першу половину спектру до частоти Найквіста
- 7 – будуємо теоретичний спектр та оцінки
- 8 – встановлюємо границі по осі абсцис

Завантажити скрипт. Скопіюйте отриманий у звіт. Зробіть висновки.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Використовуючи наведену вище інформацію та дані отримані в попередній лабораторній роботі №2 виконати наступне (*варіанти для розрахунків отримати у викладача*):

- обчислити СКВВ і дисперсію на виході лінійної системи, що збуджується одиничним білим шумом;
- змоделювати випадкові процеси, використовуючи як джерело сигналу білий шум (з обмеженою смугою);
- оцінити СКВВ і дисперсію випадкового процесу, отриманого при моделюванні;
- обчислити автокореляційну функцію випадкового процесу;
- обчислити спектральну щільність випадкового процесу по відомій кореляційній функції;
- використати швидке перетворення Фур'є (ШПФ) для оцінки спектральної щільності випадкового процесу;
- використати спектральні вікна для згладжування оцінки спектральної щільності випадкового процесу.

СКЛАД ЗВІТУ:

1. Назва і мета роботи.
2. Результати виконання завдання.

Звіт з практичної роботи повинен бути виконаний на аркушах формату А4 (297*210 мм).

ПРАКТИЧНА РОБОТА №4

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЮЧИХ ФІЛЬТРІВ

Мета роботи: ознайомитись з методами математичного опису та моделювання випадкових збурень на прикладі морського хвилювання, використовуючи програмне середовище MATLAB.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Морське хвилювання – це коливання поверхні води, викликані вітром (а також приливами, відливами і іншими причинами). Проста модель морського хвилювання – гармонійні коливання поверхні, коли *хвилева ордината* (вертикальна координата точок поверхні) змінюється за законом синуса. Таке хвилювання називають *регулярним* (штрихова лінія на рис. 4.1)

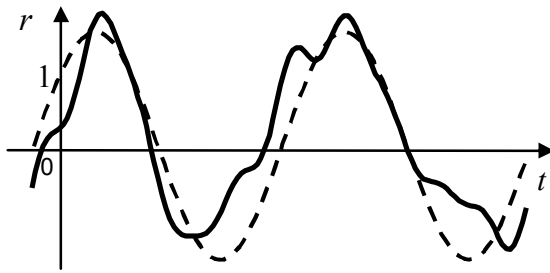


Рис. 4.1

Проте, насправді хвилева ордината міняється по складнішому закону, його можна (знову-таки приблизно) представити як суму великої кількості гармонік (синусоїд) з різними амплітудами і фазами (теоретично – це сума безконечного числа гармонік). Це так зване *нерегулярне* хвилювання, яке найчастіше описується як випадковий процес. Можна передбачити, випадкові хвилеві ординати розподілені по нормальному закону, і це дійсно підтверджується експериментами. При цьому щільність розподілу висот відповідає закону Релея.

Існують два типи моделей нерегулярного хвилювання, двовірна і тривимірна. У *двовірній* моделі передбачається, що гребені хвиль мають безконечну довжину і переміщуються паралельно один одному в одному напрямі (рис. 4.2а). Кожен, хто бачив реальне хвилювання, знає, що на практиці це не так. Точніша (але і складніша) *тривимірна* модель враховує складання безлічі двовірних хвиль, що йдуть у різних напрямках (рис. 4.2б).

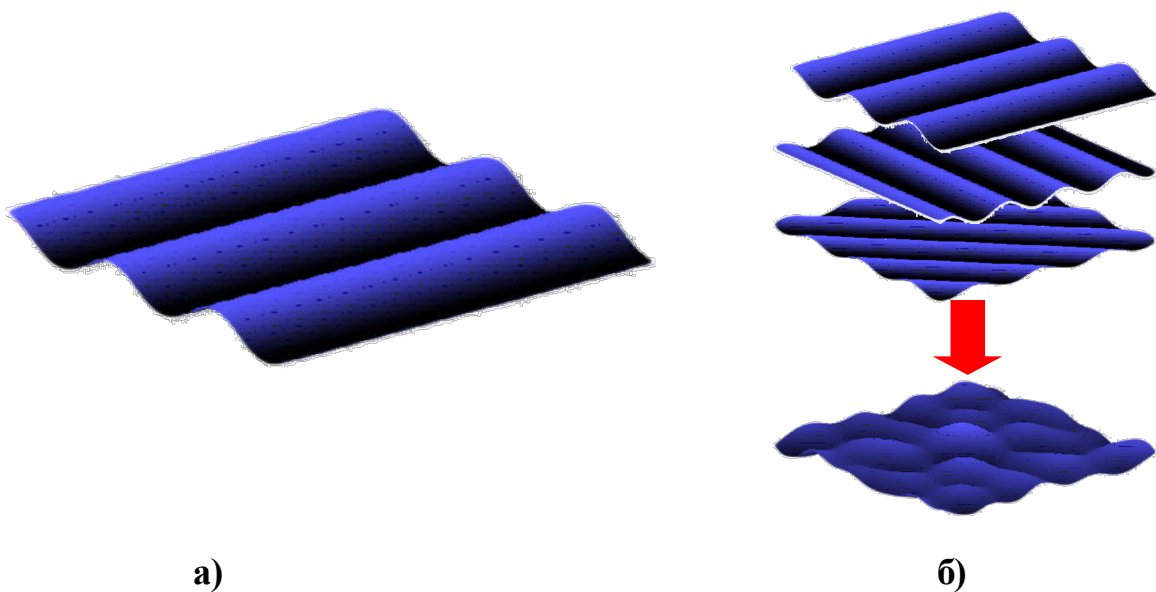


Рис. 4.2

Строго кажучи, хвилювання – це нестационарний процес. Воно починається з брижів, потім вітер за рахунок завихорень потоків повітря розганяє хвилі. Але якщо вітер з постійними властивостями діє досить тривалий час (декілька годин) на великій акваторії (десятки кілометрів), можна говорити про розвинене (сталому) хвилювання, яке вважають стаціонарним

ергодичним процесом. Такий підхід дозволяє використовувати методи аналізу випадкових процесів на основі кореляційних функцій і спектральних щільностей.

Під терміном «спектр морського хвилювання» зазвичай розуміють спектральну щільність хвилевої ординати. З експериментальними даними краще всього узгоджуються експоненціальні спектри вигляду:

$$S_r(\omega) = A\omega^{-k} \exp(-B\omega^{-n}), \quad (4.1)$$

де параметри A , B характеризують інтенсивність хвилювання, а k та n залежать від його особливостей

Уявні спектри.

До цього ми розглядали спектри хвилювання без врахування руху судна. Очевидно, що рухатися проти хвилювання важче, ніж «по хвилі», а рух судна «лагом» до хвилі (при бортовій хвилі) викликає сильну хитавицю. Це означає, що ефект дії хвилювання на судно залежить від швидкості і напрямку його руху по відношенню до основного напрямку поширення хвиль. Математично це виражається в зміні спектральній щільності збурення.

У фізиці добре відомий ефект Доплера, який полягає в тому, що при русі датчика виміряна ним частота хвилі змінюється залежно від його власної швидкості згідно із законом $\omega_k = \omega \cdot \left(1 + \frac{v}{u}\right)$, де ω – дійсна частота хвилі, ω_k – уявна (виміряна) частота, v – швидкість руху датчика у напрямі джерела хвиль, а u – швидкість поширення самих хвиль. При русі судна проти хвилювання ($v > 0$) уявна частота хвиль, буде більша, ніж достеменна, а при русі «по хвилюванню» ($v < 0$) – менше достеменною.

З гідродинаміки відомо, що швидкість поширення хвилі з частотою ω (на глибокій воді) дорівнює $u = \frac{g}{\omega}$. Крім того, якщо судно рухається з швидкістю V (м/с) під кутом ξ до напрямку поширення хвиль (вважається, що $\xi = 0$ відповідає руху проти хвилі), воно наближається до джерела з швидкістю $v = V \cos \xi$. Таким чином, формула перетворення дійсної частоти в уявну набуває вигляду:

$$\omega_k = \omega \cdot \left(1 + \frac{V \cos \xi}{g} \omega\right), \quad (4.2)$$

Якщо судно «втікає» від хвиль, то при збільшенні швидкості уявна частота, обчислена за цією формулою (4.2), виявляється від'ємною це означає, що судно обганяє хвилі. Тому для того, щоб працювати лише з додатними частотами, потрібно узяти модуль вираження в правій частині. Остаточоно отримуємо:

$$\omega_k = \left| \omega \cdot (1 + a\omega) \right|, \quad (4.3)$$

де $a = \frac{V \cos \xi}{g}$ – фактор відносного руху. Отже, складову хвилювання з частотою ω судно буде сприймати з уявною частотою ω_k .

Щоб побудувати уявний спектр потрібно навчитися вирішувати зворотню задачу – по заданій уявній частоті ω_k , визначити частоту (або частоти!) вихідного спектру, які судно сприймає як ω_k . Використовуючи (4.3), формально отримуємо два квадратні рівняння:

$$a\omega^2 + \omega + \omega_k = 0 \quad \text{та} \quad a\omega^2 + \omega - \omega_k = 0, \quad (4.4)$$

Нас цікавлять всі дійсні та додатні розв'язки цих рівнянь (фактично таких «відповідних» частот може бути від однієї до трьох).

Припустимо, що судно йде під гострим кутом до хвилі, так що $\cos \xi > 0$ і $a > 0$. В цьому випадку перше рівняння в (4.4) свідомо не має відповідних рішень (оскільки $a\omega^2 + \omega \geq 0$), а друге має лише одне додатне рішення. На рис. 4.3 зліва наведено графік функції, який ясно показує, що одній уявній частоті $\omega_{k1} > 0$, відповідає лише одна частота ω_1 вихідного спектру і навпаки.

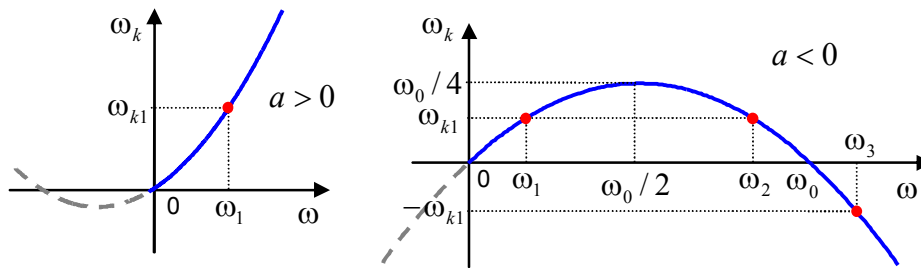


Рис. 4.3

Тепер

припустимо, що судно йде під тупим кутом до хвилі («втікає» від хвиль), так що $\cos \xi < 0$ і $a < 0$. На рис. 4.3 праворуч показаний графік функції $\omega_k = a\omega^2 + \omega$ для цього випадку. Використовуючи знання шкільної математики, легко побачити, що парабола пересікає вісь $\omega_k = 0$ при $\omega = \omega_0 = -\frac{1}{a}$, а її вершина знаходиться в точці $\left(\frac{\omega_0}{2}; \frac{\omega_0}{4}\right)$. Всі хвилі з частотами більше ω_0 судно випереджає, тому уявна частота стає від'ємною.

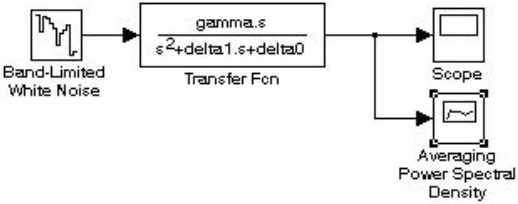
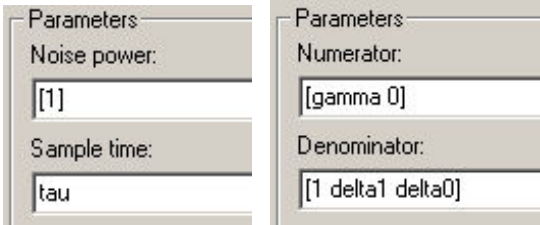
Якщо уявна частота менше максимальної (рівної $\omega_0/4$), то енергія хвиль на трьох частотах (ω_1 , ω_2 та ω_3) складається на частоті ω_{k1} уявного спектру. Якщо $\omega_{k1} > \omega_0/4$, залишається лише одне рішення – ω_3 .

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Основна частина команд вводиться в командному вікні середовища MATLAB. Команди, які необхідно використовувати в інших вікнах, позначені

іконками відповідних програм.

Етап виконання завдання	Команди та ілюстрації
1. Очистіть робочий простір МАТЛАВ (пам'ять) та вікно вводу-виводу.	<pre>clear all clc</pre>
2. Створіть новий m-файл (скрипт). Задайте в ньому висоту хвилі 3%-ої забезпеченості та діапазон частот (від 0 до 5 рад/с):	<pre>h3 = 2; % для волнення 4-5 баллов w = 0.01:0.01:5; % массив частот</pre>
3. Додайте в скрипт команди для розрахунку параметрів хвилювання	<pre>Dr = 0.0356*h3^2; % дисперсія хвилевої ординати, кв.м Ts = 3.1*sqrt(h3); % середній період хвилювання, с ws = 2*pi/Ts; % середня частота хвилювання, рад/с wm = 0.71*ws; % частота максимуму спектра, рад/с</pre>
4. Додайте в скрипт команди для розрахунку спектру для заданого діапазону частот та побудови графіка. Збережіть скрипт та завантажте його на виконання клавішею F5.	<pre>Smkob = []; for i=1:length(w) Smkob(i) = 7.06*pi*Dr/ws*(wm/w(i))^5*exp(-0.25*(wm/w(i))^4); end; plot(w, Smkob);</pre>
5. Додайте в скрипт команди для розрахунку приблизного спектру, який описується дробово-раціональною функцією $S_{app}(\omega) = \frac{4D_r\alpha\omega^2}{\omega^4 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2}$. Змініть команду plot так, щоб побачити два спектра на одному графіку. Завантажте скрипт на виконання.	<pre>beta = wm / 1.02; alpha = 0.21*beta; a2 = alpha^2; b2 = beta^2; ab2 = a2 + b2; Sapp = []; for i=1:length(w) Sapp(i) = 4*Dr*alpha*w(i)^2 / (w(i)^4 + 2*(a2 - b2)*w(i)^2 + ab2^2); end; plot(w, Smkob, w, Sapp);</pre> <p>Порівняйте два спектра та зробіть висновки про помилки апроксимації для низьких та високих частот.</p>

<p>6. Побудуйте формуючий фільтр $H(s) = \frac{\gamma s}{s^2 + \delta_1 s + \delta_0}$ для дробово-раціонального спектру S_{app}:</p> <pre> gamma = 2*sqrt(Dr*alpha); delta0 = a2 + b2; delta1 = 2*alpha; H = tf([gamma 0], [1 delta1 delta0]) </pre>	
<p>7. Перевірте, що функція $S_{app}(s)$ співпадає з спектральною щільністю $S_H(s) = H(s)H(-s)$, яка відповідає формуючому фільтру:</p> <pre> S = tf([-4*Dr*alpha 0 0], [1 0 2*(b2-a2) 0 (a2+b2)^2]) SH = H*H' </pre>	
<p>8. Створіть нову модель в <i>Simulink</i>, додайте в неї джерело білого шуму (<i>Band Limited White Noise</i>, група <i>Sources</i>), передаточну функцію (<i>Transfer Fcn</i>, група <i>Continuous</i>), осцилограф (<i>Scope</i>, група <i>Sinks</i>) та блок для побудови усередненої спектральної щільності (<i>Averaging Power Spectral Density</i>, група <i>Simulink Extras/Sinks</i>).</p>	
<p>9. В командному вікні MATLAB розрахуйте інтервал кореляції для джерела білого шуму, враховуючи, що спектр сигналу знаходиться в полісі частот від 0 до 5 рад/с.</p>	<pre>tau = 2*pi/100/5</pre>
<p>10. Введіть параметри джерела білого шуму та формуючого фільтру як показано на рисунку праворуч.</p>	
<p>11. Виконайте моделювання та подивіться на отриманий сигнал і його спектр (блоки <i>Scope</i> та <i>Averaging Power Spectral Density</i>).</p>	

12. Тепер подивіться як зміняться спектр збурень при різних кутах зустрічі судна з хвилею. Створіть новий m-файл з ім'ям mkob.m; ця функція розраховує спектр для заданого масиву частот:

```
function S = mkob ( h3, w )
Dr = 0.0356*h3^2; % дисперсія хвильової ординати, кв.м
Ts = 3.1*sqrt(h3); % середній період хвилювання, с
ws = 2*pi/Ts; % середня частота хвилювання, рад/с
wm = 0.71*ws; % частота максимуму спектра, рад/с
S = [];
for i=1:length(w)
    S(i) = 7.06*pi*Dr/ws*(wm/w(i))^5*exp(-1.25*(wm/w(i))^4);
end;
```

13. Створіть новий скрипт та визначте в ньому параметри руху та хвилювання:

```
v = 6; % скорость судна, м/с
ksi = 45*pi/180; % угол встречи с волной, радианы
h3 = 2; % высота волны 3%-ной обеспеченности
wk = 0.01:0.01:3; % массив частот
```

14. Д команди для розрахунку уявного спектру хвилювання:

```
a = v*cos(ksi)/9.81; % фактор відносного руху
Sk = [];
for i=1:length(wk)
    Sk(i) = 0;
    w = [roots([a 1 wk(i)]); roots([a 1 -wk(i)])];
    for r=1:4
        if imag(w(r))==0 && real(w(r))>0
            Sk(i) = Sk(i) + mkob(h3, w(r)) / abs(1 + 2*w(r)*a);
        end;
    end;
end;
```

15. Побудуйте на одному графіку істинний та уявний спектри і порівняйте їх:

```
plot(wk, mkob(h3,wk), wk, Sk);
```

16. Порівняйте дисперсію хвильової ординати для уявного спектра хвилювання з заданою дисперсією:

```
fprintf('Dr = %g\n', Dr)
fprintf('Dr(Sk): %g\n', trapz(wk,Sk)/pi )
```

17. Змініть значення кута зустрічі з хвилею на 135 градусів та завантажте скрипт ще раз. Поясніть отримані результати.

18. Тепер подивіться, як зміняться дробово-раціональні спектри, які було використано при розрахунках та моделюванні. Створіть новий скрипт та додайте в нього ті ж самі вихідні дані, що і в п. 13,

```
v = 6; % швидкість судна, м/с
ksi = 45*pi/180; % кут зустрічі з хвилею, радіани
h3 = 2; % висота хвилі 3%-ої забезпеченості
w = 0.01:0.01:3; % массив частот
```

а також команди для розрахунку характеристик хвилювання:

```
Dr = 0.0356*h3^2; % дисперсія хвилевої ординати, кв.м
Ts = 3.1*sqrt(h3); % середній період хвилювання, с
ws = 2*pi/Ts; % середня частота хвилювання, рад/с
wm = 0.71*ws; % частота максимуму спектра, рад/с
a = v*cos(ksi)/9.81; % фактор відносного руху
```

19. Додайте в скрипт команди для розрахунку вихідного спектра:

```
beta = wm / 1.02;
alpha = 0.21*beta;
a2 = alpha^2; b2 = beta^2; ab2 = a2 + b2;
S = [];
for i=1:length(w)
    S(i) = 4*Dr*alpha*w(i)^2 / (w(i)^4 + 2*(a2-b2)*w(i)^2 + ab2^2);
end;
```

уявної частоти максимуму спектра

```
wmk = wm*abs(1 + a*wm);
```

та уявного спектра

```
betak = wmk / 1.02;
alphak = 0.21*betak;
a2k = alphak^2; b2k = betak^2; ab2k = a2k + b2k;
Sk = [];
for i=1:length(w)
    Sk(i) = 4*Dr*alphak*w(i)^2 / (w(i)^4 + 2*(a2k-
b2k)*w(i)^2 + ab2k^2);
end;
```

20. Додайте в скрипт команди для побудови графіків обох спектрів на одному полі та перевірки значень дисперсій:

```
plot(w, S, w, Sk);
fprintf('Dr = %g\n', Dr)
fprintf('Dr(S): %g\n', trapz(w, S)/pi )
fprintf('Dr(Sk): %g\n', trapz(w, Sk)/pi )
```

Завантажте скрипт та поясніть отримані результати.

21. Повторіть розрахунки для кута зустрічі з хвилею 135 градусів та поясніть отримані результати.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Використовуючи наведену вище інформацію виконати наступне (*варіанти для розрахунків отримати у викладача*):

- побудувати і аналізувати спектри морського хвилювання;
- вивчити методи апроксимації спектрів хвилювання раціональними функціями;
- змодельовати випадкові процеси за допомогою формуючих фільтрів, що збуджуються білим шумом.

СКЛАД ЗВІТУ:

1. Назва і мета роботи.
2. Результати виконання завдання.

Звіт з практичної роботи повинен бути виконаний на аркушах формату А4 (297*210 мм).

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5

ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕННЯХ. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.

Мета роботи: ознайомитись з методами та особливостями синтезу оптимальних лінійних фільтрів Вінера. Навчитись моделювати фільтри в SIMULINK-MATLAB та оцінити результати фільтрації.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Оптимальна фільтрація.

Розглянемо просте завдання оптимізації лінійної системи при випадкових збуреннях – *задачу оптимальної фільтрації*. При вимірах корисний сигнал $x(t)$ спотворюється перешкодою $n(t)$, причому і корисний сигнал, і перешкода – стаціонарні центровані випадкові сигнали. Передбачається, що перешкода і корисний сигнал статистично незалежні, тобто, ніяк не зв'язані, породжуються різними джерелами. Спектральна щільність сигналу $S_x(\omega)$ і перешкоди $S_N(\omega)$ відома.

Завдання полягає в тому, щоб знайти передавальну функцію $C(s)$ фільтру (безперервної системи), який виділяє сигнал з його суміші з перешкодою щонайкраще (будує його найкращу оцінку $\hat{x}(t)$), рис. 5.1.

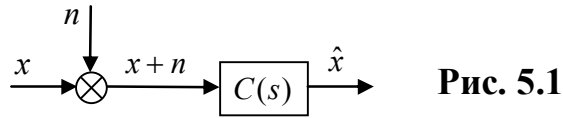


Рис. 5.1

При заданих спектральних щільностях $S_X(\omega)$ і $S_N(\omega)$ можна побудувати відповідні їм формуючі фільтри $F_X(s)$ і $F_N(s)$ (тут і далі ми перейдемо до змінної $s = j\omega$):

$$S_X(s) = F_X(s)F_X(-s), \quad S_N(s) = F_N(s)F_N(-s), \quad (5.1)$$

Тоді схему можна зобразити в наступному вигляді, рис. 5.2.

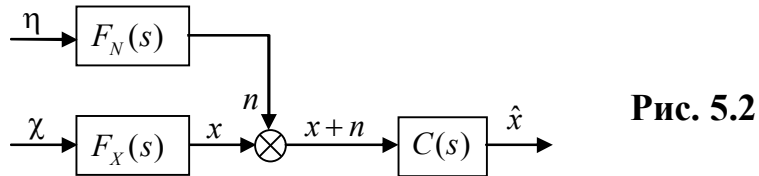


Рис. 5.2

Тут $\chi(t)$ і $\eta(t)$ – незалежні білі шуми одиничної інтенсивності. Для ясності додамо на блок-схему формування помилки $\hat{x} - x$:

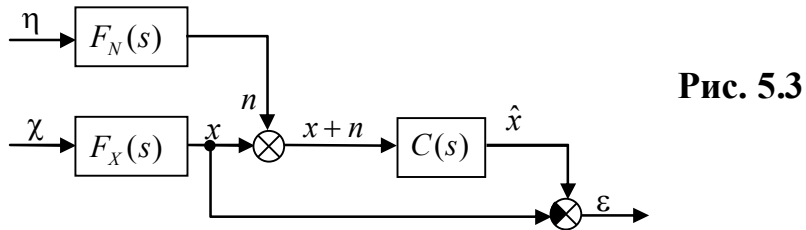


Рис. 5.3

Таким чином, потрібно знайти передавальну функцію фільтру $C(s)$, який забезпечує мінімальну дисперсію D_ϵ помилки ϵ . Пригадаємо, що знання спектральної щільності $S_\epsilon(\omega)$ помилки дозволяє знайти її середній квадрат, рівний дисперсії для центрованих процесів:

$$D_\epsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\epsilon(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_\epsilon(s) ds, \quad (5.2)$$

В останній рівності від кутової частоти ω ми перейшли до комплексної змінної $s = j\omega$. Якщо перешкоди немає, спектральна щільність помилки обчислюється по передавальній функції від входу χ до виходу ϵ :

$$S_{\epsilon X}(s) = W_X(s) W_X(-s), \quad \text{де } W_X(s) = [C(s) - 1]F_X(s), \quad (5.3)$$

Аналогічно, якщо є перешкода, але немає сигналу, спектральна щільність помилки обчислюється по передавальній функції від входу η до виходу ε :

$$S_{\varepsilon X}(s) = W_N(s) W_N(-s), \text{ де } W_N(s) = C(s)F_N(s), \quad (5.4)$$

Якщо ж діють обидва сигнали, але вони статистично незалежні, спектральна щільність помилки дорівнює сумі приведених вище «окремих» спектрів:

$$S_{\varepsilon}(s) = S_{\varepsilon X} + S_{\varepsilon N} = W_X W_X^* + W_N W_N^* = (C-1)(C^*-1)S_X + CC^*S_N, \quad (5.5)$$

Тут і далі для скорочення запису у функцій змінної s не враховано аргумент, а зірочка (верхній індекс) позначає заміну s на $-s$. Можна згрупувати доданки трохи по-іншому:

$$S_{\varepsilon}(s) = CC^*(S_X + S_N) - CS_X - C^*S_X + S_X, \quad (5.6)$$

Виділивши в цьому виразі невідому передавальну функцію $C(s)$ і «все інше», запишемо його в загальному вигляді:

$$X(s) = ACC^* - BC - B^*C^* + E, \quad (5.7)$$

де, $B(s)$ і $E(s)$ – деякі функції, причому $A(s) = A(-s)$ і $E(s) = E(-s)$ (в даному випадку $A(s) = S_X + S_N$, $B(s) = S_X$ і $E(s) = S_X$). Потрібно знайти стійку передавальну функцію $W(s)$, яка забезпечує мінімум функціонала:

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} X(s) ds, \quad (5.8)$$

Цю задачу вперше вирішив американський математик Норберт Вінер в 1940-х роках. Ми коротко розглянемо сучасний варіант рішення задачі Вінера, яке запропонували Х. Бодє і К. Шенон.

Функція $A(s)$ є деяким спектром, для якого можна побудувати формуючий фільтр $Y(s)$, такий що всі його нулі (корені чисельника) і полюси (корені знаменника) мають негативні дійсні частини:

$$A(s) = YY^*, \quad (5.9)$$

Така операція називається *спектральною факторизацією* (розкладанням на співмножники). Тоді вираження для спектру помилки можна представити у вигляді:

$$X(s) = YY^*CC^* - BC - B^*C^* + E = (CY - L)(C^*Y^* - L^*) + E_1, \quad (5.10)$$

де $L(s) = \frac{B^*}{Y^*}$ і $E_1(s) = E - \frac{BB}{A}$. Ми тільки що виконали виділення *повного квадрата* в $X(s)$. Ця назва пов'язана з тим, що вираз $Z(s)Z(-s)$ при підстановці $s = j\omega$ є квадратом модуля частотної характеристики $Z(j\omega)$. В даному випадку $Z(s) = CY - L$.

Щоб отримати стійкий фільтр, виконаємо *сепарацію* (виділимо стійку і нестійку частину виразу):

$$L(s) = \frac{B^*}{Y^*} = L_+(s) + L_-(s), \quad (5.11)$$

Якщо вираз $L(s)$ – не строго правильна функція (ступінь чисельника більше або дорівнює степені знаменника), існує безліч різних сепарацій. Серед них ми виберемо *правильну сепарацію*, при якій $L_-(s)$, – *строго правильна* функція (ступінь її чисельника менше степені знаменника). Тоді вираз ZZ^* можна представити у вигляді:

$$ZZ^* = (CY - L)(C^*Y^* - L^*) = (CY - L_+ - L_-)(C^*Y^* - L_+^* - L_-^*) = Q_1 - Q_2 - Q_2^* + Q_3$$

де, $Q_1 = (CY - L_+)(C^*Y^* - L_+^*)$, $Q_2 = (CY - L_+)L_-^*$ і $Q_3 = L_-L_-^*$. Використовуючи теорію функцій комплексних змінних, можна довести, що:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Q_2(s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} Q_2^*(s) ds = 0$$

Таким чином, алгоритм побудови оптимального фільтру включає дві операції: спектральну факторизацію і сепарацію.

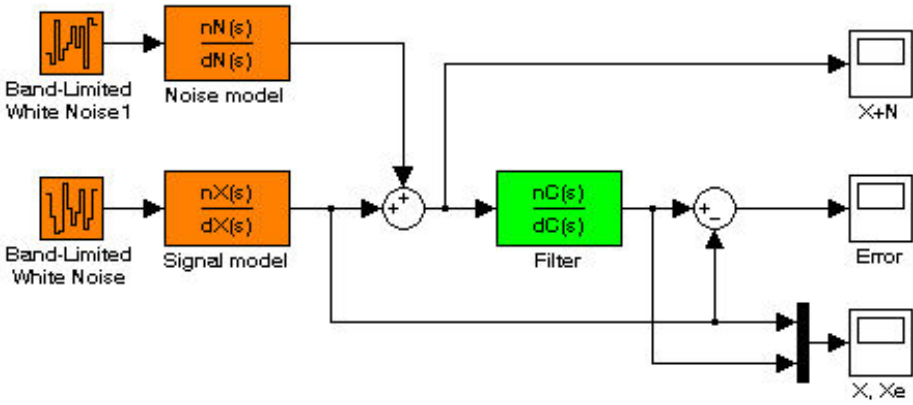
Для обчислення дисперсії помилки при використанні оптимального фільтру потрібно для отриманої функції $C(s)$ знайти спектральну щільність і обчислити інтеграл. У середовищі MATLAB існує і інший спосіб: факторизувати отриману спектральну щільність помилки:

$$S_\varepsilon(s) = F_\varepsilon(s) F_\varepsilon(-s)$$

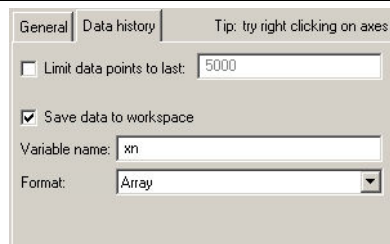
а потім обчислити (за допомогою функції **norm**) норму стійкої передавальної функції $F_\varepsilon(s)$. Ця норма є СКВВ виходу системи при дії на її вхід одиничного білого шуму, тобто $\sqrt{D_\varepsilon}$.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Основна частина команд вводиться в командному вікні середовища MATLAB. Команди, які необхідно використовувати в інших вікнах, позначені іконками відповідних програм.

Етап виконання завдання	Команди та ілюстрації
<p>1. Створіть новий m-файл (скрипт) з командами, які очищують робочу область та задають формуючі фільтри та спектральні щільності корисного сигналу $S_X(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$ та перешкоди $S_N(\omega) = 0,01$ (білий шум):</p> <pre>clear all; Fx = tf(1, [1 1]); Fn = tf(0.1); Sx = Fx*Fx'; Sn = Fn*Fn';</pre>	
<p>2. Скопіюйте в робочу папку файли <code>wiener.m</code> та <code>h2opt.m</code>, додайте в скрипт команду <code>[C,errOpt] = wiener(Sx, Sn)</code> та завантажте скрипт клавішею F5. Запишіть у звіт передаточну функцію оптимального фільтра та СКВВ помилки фільтрації (значення <code>errOpt</code>).</p>	
<p>3. Додайте в скрипт команди для підготовки даних до моделювання</p> <pre>[nX,dX] = tfdata(Fx, 'v'); [nN,dN] = tfdata(Fn, 'v'); [nC,dC] = tfdata(C, 'v'); b = bandwidth(Fx*C); % полоса пропускання Fx(s)*W(s) tau = 2*pi/100/b; % інтервал кореляції для джерела шуму</pre>	
<p>4. Побудуйте <i>Simulink</i>-модель задачі фільтрації:</p>  <p>Для того щоб вивести на нижній осцилограф два сигнали, використовуйте мультиплексор (блок <i>Mux</i> з групи <i>Signal Routing</i>). Збережіть модель з ім'ям <code>lab5sim.mdl</code>.</p>	
<p>5. В параметрах джерел білого шуму встановіть одиничну інтенсивність (<i>Noise Power</i>), інтервал кореляції <code>tau</code> (<i>Sample Time</i>) та <i>разное</i> початкове значення послідовності випадкових чисел (<i>Seed</i>).</p>	
<p>6. В параметрах блока <i>Noise model</i> (блок <i>Transfer Fcn</i> з групи <i>Continuous</i>) задайте чисельник <code>nN</code> та знаменник <code>dN</code> (з робочої області). Для моделі корисного сигналу (<i>Signal model</i>) задайте чисельник <code>nX</code> та знаменник <code>dX</code>, а для фільтра (<i>Filter</i>) – <code>nW</code> та <code>dW</code>.</p>	

7. В параметрах першого осцилографа (позначеного $X+N$) зніміть флажок, що обмежує кількість запам'ятовуваних даних (*Limit data points*), та задайте вивід результатів в масив `xn`. Аналогічно встановіть вивід другого осцилографа (*Error*) в масив `err`, а третього (X , Xe) – в масив `xxe`.



8. Встановіть час моделювання 50 с (меню *Simulation – Simulation parameters – Stop Time*). Додайте в скрипт команди для запуску моделювання та розрахунку СКВВ помилки за результатами моделювання:

```
sim('lab5sim')
errSim = std(err(:,2))
```

Порівняйте цей результат з отриманим раніше теоретичним значенням.

9. Додайте команди для побудови графіка суміші «сигнал+шум», а також вихідного та відновленого сигналів (на окремому полі).

```
figure(1)
plot ( xn(:,1), xn(:,2) );
title('Signal + noise');
figure(2)
title('Original and reconstructed signals');
plot(xxe(:,1), xxe(:,2), xxe(:,1), xxe(:,3));
legend('Original', 'Reconstructed');
```

Завантажте скрипт та скопіюйте графіки у звіт.

`print -dmeta`

10. Повторіть розрахунки для $F_N(s) = 0,01$ та $F_N(s) = 1$. Додайте у звіт графіки теоретичного СКВВ помилки та СКВВ, отриманого при моделюванні. Зробіть висновки про вплив інтенсивності шуму вимірювань.

11. В циклі побудуйте серію оптимальних регуляторів при зміні дисперсії перешкоди від 0,01 до 1 та побудуйте графік. Для цього в скрипт необхідно додати такий код:

```
varN = [0.01:0.02:0.1 0.2:0.1:1]; % масив дисперсій перешкоди
sigmaE = []; % пустий масив СКВВ помилки
for i=1:length(varN) % цикл по всім варіантам
    Sn = tf(varN(i)); % спектр шуму
    [C,errOpt] = wiener ( Sx, Sn ); % синтез регулятора
    C % показати регулятор
    sigmaE(i) = errOpt; % запам'ятати СКВВ помилки
end;
figure(3); % графік в новому вікні
plot (varN, sigmaE );
```

Зробіть висновки щодо графіка.

12. Додайте в масив `varN` великі (від 2 до 100) значення дисперсії перешкоди

```
varN = [0.01:0.02:0.1 0.2:0.1:1 2:10 20:10:100];
```

і повторіть розрахунки. Погляньте, до якого значення прагне СКВВ помилки в оптимальній системі при збільшенні дисперсії перешкоди. Який при цьому виходить регулятор? Чи вирішує система свою задачу? Спробуйте обґрунтувати ці результати теоретично.

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Використовуючи наведену вище інформацію побудувати фільтр Вінера та виконати фільтрацію (*варіанти для розрахунків отримати у викладача*).

СКЛАД ЗВІТУ:

1. Назва і мета роботи.
2. Результати виконання завдання.

Звіт з практичної роботи повинен бути виконаний на аркушах формату А4 (297*210 мм).

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6

ОБЧИСЛЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Мета роботи: ознайомитись з програмною реалізацією типових процедур проектування для обчислення показників якості систем управління, використовуючи програмне середовище MATLAB.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Застосування спектральних алгоритмів ідентифікації та синтезу потребує значного обсягу математичних операцій з поліномами та матрицями. Для виконання таких розрахунків на ЕОМ можна скористатись програмним забезпеченням, розробленим спеціально для розв'язання подібних задач, або застосувати універсальні програмні системи для математичних обчислень.

1. Обчислення показників якості систем

Показник якості являє собою кількісну оцінку якості системи. В системах управління та вимірювальних системах найважливішою стороною якості є точність, яка головним чином характеризує успішність виконання системою покладених на неї задач.

Обчислення інтегральної квадратичної помилки

Нагадаємо, що якість багатовимірної динамічної системи при детермінованих сигналах оцінюють інтегральною квадратичною помилкою. Обчислення інтегральної квадратичної помилки може бути зведено до обчислювання інтегралів від дробово-раціональних функцій комплексної змінної вигляду .

$$I_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{B(s)}{A(s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{b(s)b(-s)}{a(s)a(-s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{b(s)}{a(s)} \right|^2 ds, \quad (6.1)$$

де $b(s) = b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n$, $a(s) = a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + \dots + a_n$, причому $a(s)$ має нулі лише в лівій півплощині змінної $s = j\omega$.

Обчислити інтеграли такого вигляду (дисперсійні інтеграли) можна за допомогою спеціальних таблиць або програм для ЕОМ .

Програма-функція, що подана далі, написана мовою системи MATLAB і дозволяє обчислювати значення інтеграла (6.1) на основі спеціальних таблиць.

`ss = coloss(b, a) .`

Вхідні змінні: a - поліном знаменника дробово-раціональної функції (підінтегрального виразу); b - поліном чисельника цієї функції. Вихідна змінна: ss - обчислене значення інтеграла.

Текст функції `coloss(b, a)` такий:

```
function ss = coloss (b,a)
ss = 0.0;
na = length(a);    % Визначення степеня полінома знаменника
nb=length(b); b0=zeros(1,(na-nb-1)); b=[b0,b];
for k=1:1:na
if (a(k) <= 0.0)    % Перевірка умови стійкості системи
ss = NaN; disp('Система нестійка'); return; end;
alfa = a(k)/a(k+1); beta = b(k)/a(k+1);
ss = ss + beta*beta/alfa; k2 = k + 2; if (k2 > na) break;
end;
for i=k2:2:(na-1)
a(i) = a(i) - alfa*a(i+1); b(i) = b(i) - beta*a(i+1); end;
end
ss = ss/2.0;% Значення інтегралу
```

Приклад 1. Знайти інтегральну квадратичну помилку одновимірної системи, що працює при детермінованих сигналах, якщо зображення сигналу помилки цієї системи має вигляд:

$$\varepsilon(s) = \frac{3s^5 + s^4 + 12s^3 + 3s^2 + 9s + 1}{s^6 + 3s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 6s^2 + 9s + 1}$$

Значення інтегральної квадратичної помилки системи обчислюють за допомогою таких операторів:

```
b = [3 1 12 3 9 1];      a = [1 3 5 12 6 9 1];
disp(coloss(b,a));
1.6667                  % «Результат обчислень - значення інтегралу»
1.6668
```

Обчислення середньої квадратичної помилки

Як відомо, показником якості системи при випадкових впливах є середня квадратична помилка. З порівняння формули видно, що інтегральні показники якості систем при детермінованих і випадкових сигналах за своєю формою відрізняються лише коефіцієнтом перед символом інтеграла. В такому разі середню квадратичну помилку системи можна обчислити за допомогою функції `coloss(b, a)`, помножуючи результат на 2π .

Приклад 2. Обчислити середню квадратичну помилку одновимірної динамічної системи, що працює при випадкових сигналах, якщо спектральна щільність сигналу помилки має вигляд:

$$S(s) = \frac{-s^2 + 4}{s^4 - 10s^2 + 9}$$

Для використання функції `coloss(b, a)` останній вираз треба подати у вигляді добутку комплексно спряжених множників:

$$S(s) = \frac{(s+2)(-s+2)}{(s+1)(s+3)(-s+1)(-s+3)}$$

маємо:

$$b(s) = s + 2; \quad a(s) = (s + 1)(s + 3) = s^2 + 4s + 3.$$

В такому разі середню квадратичну помилку системи за допомогою функції `coloss(b, a)` можна обчислити так:

```
b = [1 2]; a=[1 4 3]; s = coloss(b,a); disp(s*2*pi);
1.8326    % Значення інтегралу.
```

2. Факторизація спектральної щільності

Факторизацією спектральної щільності (за Вінером) називають подання спектральної щільності як парної функції частоти у вигляді комплексно спряжених співмножників:

$$S_{xx} = S(s)S(-s), \quad (6.2)$$

Нулі і полюси співмножника $S(-s)$ лежать в правій півплощині (ППП) комплексної змінної, а нулі і полюси $S(s)$ - у лівій півплощині (ЛПП). В більшості розрахунків спектральну щільність стаціонарних випадкових процесів апроксимують дробово-раціональною функцією:

$$S_{xx}(s) = \frac{b_1 s^{2n} + b_2 s^{2n-2} + \dots + b_n}{a_1 s^{2m} + a_2 s^{2m-2} + \dots + a_m} = \frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)}$$

Операція факторизації цієї дробово-раціональної функції полягає у визначенні поліномів $B(s)$, $B(-s)$, $A(s)$, $A(-s)$ і включає знаходження її нулів і полюсів, сортування знайдених коренів, симетрично розміщених в лівій півплощині і правій півплощині комплексної змінної та відтворення відповідних поліномів чисельника та знаменника.

Такі операції в системі MATLAB можна виконати за допомогою функції FCWN, звернення до якої має вигляд:

```
function [Gpl,Got,tol]=FCWN(w)
%Вхід: SISO об'єкт w типа tf; вихід: два SISO об'єкта Gpl и Got типу zpk,
%пов'язаних з w співвідношенням:
%w(s)=Gpl(s)*Got(-s);
%Gpl - стійка частина w; Got - нестійка частина
%Пошук нулів z та полюсів p, коефіцієнта підсилення k для вихідного SISO об'єкта
[z,p,k]=zpkdata(w,'v');
%Перевірка додатної визначеності вихідного полінома чисельника
zz=abs(real(z));
if any(zz)<1e-06
    tol=1;
else
    tol=0;
end
```

```

% Перевірка додатної визначеності вихідного полінома знаменника
zz=abs (real (p) );
    if any (zz) < 1e-06
        tol=2;
    end
%сортування на стійкі sp та нестійкі np полюси
j=0; np1=0;
    for i=1:length (p)
        if real (p (i)) < 0
            j=j+1; sp (j)=p (i);
        else
            np1=np1+1; np (np1)=p (i);
        end
    end
% сортування на стійкі sz та нестійкі nz нулі
j=0; nz1=0;
    for i=1:length (z)
        if real (z (i)) < 0
            j=j+1; sz (j)=z (i);
        else
            nz1=nz1+1; nz (nz1)=z (i);
        end
    end
    k=sqrt (abs (k) );
%Формування результату факторизації
%Визначення знака коефіцієнта k нестійкої частини
if rem (nz1, 2) == 0
    if rem (np1, 2) == 0
        k1=k;
    else
        k1=-k;
    end
else
    if rem (np1, 2) == 0
        k1=-k;
    end
end

```

```

else
    k1=k;
end
end
Gpl=zpk(sz, sp, k); Got=zpk(nz, np, k1);

```

Приклад 3. Виконати факторизацію спектральної щільності, яка подана дробово-раціональною функцією такого вигляду:

$$S_{xx}(s) = \frac{-25s^2 + 400}{s^4 - 34s^2 + 225}$$

Після факторизації отримуємо дробово-раціональну функцію, у якої всі нулі та полюси розташовані в ЛПП:

$$S_{xx}(s) = \frac{5s + 20}{s^2 + 8s + 15}$$

3. Сепарація функції комплексної змінної

Сепарацією називають представлення функції комплексної змінної у вигляді цілої частини і двох складових: в першій складовій й особливості лежать тільки в ЛПП, а у другій - тільки в ППП:

$$N(s) = N0(s) + N+(s) + N-(s),$$

де $N(s)$ - функція комплексної змінної $s = j\omega$, яка підлягає сепарації; $N0(s)$ - ціла частина, яка є поліномом аргументу s ; $N+(s)$ - правильний дріб аргументу s з особливостями тільки в ЛПП; $N-(s)$ - правильний дріб аргументу s з особливостями тільки в ППП.

Вказані математичні операції в системі MATLAB можна виконати за допомогою функції

$$[r, p, k] = \text{residue}(b, a).$$

Ця функція обчислює залишки, полюси та поліном цілої частини ДРФ, яка подана як відношення двох поліномів $b(s)$ та $a(s)$ за спадаючим степенем s :

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} + k(s),$$

де $r_1 \dots r_n$ - вектор-стовпець лишків; p_1, \dots, p_n - вектор-стовпець полюсів; k - вектор-рядок коефіцієнтів цілої частини дробово-раціональної функції.

Для полюсів (коренів знаменника) кратності m розкладення на прості дроби включає додатково члени:

$$\frac{r_j}{s-p_j} + \frac{r_{j+1}}{(s-p_j)^2} + \dots + \frac{r_{j+m+1}}{(s-p_j)^m},$$

Функція $[b, a] = \text{residue}(r, p, k)$ з двома вхідними та трьома вихідними параметрами обчислює дробово-раціональну функцію у вигляді відношення двох поліномів b та a .

На базі функції `residue` написана функція `sep`. Звернення до неї має вигляд:

$$[bs, as, ks] = \text{sep}(b, a),$$

Вхідні змінні:

b - коефіцієнти полінома чисельника; a - коефіцієнти полінома знаменника.

Вихідні змінні: bs, as, ks - коефіцієнти полінома чисельника та знаменника сепарованої дробово-раціональної функції, що має особливості в ЛПП, та поліном її цілої частини. Текст цієї функції має вигляд:

```
function [bs,as,ks] = sep(b,a)
[r,p,k] = residue(b,a); m=length(p); j=0;
for i=1:m
if(real(p(i))<=0) j=j+1; rs(j)=r(i); ps(j)=p(i); end; end
[bs,as,ks]=residue(rs,ps,k);
```

Приклад 4. Виконати сепарацію дробово-раціональної функції:

$$N = \frac{2s^3 + 6s^2 + 5s - 5}{s^4 + 2s^3 - 2s - 1}$$

яка має три кратних полюси при $s = -1$. Для виконання сепарації треба ввести поліноми чисельника та знаменника і скористуватись функцією `sep(b, a)`:

```
b=[2 6 5 -5]; a=[1 2 0 -2 -1];
[bs,as,ks]=sep(b,a);
```

У результаті виконання операторів отримуємо поліноми чисельника bs та знаменника as передаточної функції, що має полюси тільки в ЛПП:

$$N = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

4. Обчислення логарифмічних частотних характеристик

Для обчислення логарифмічних частотних характеристик доцільно використати функцію `freqs`, яка виконує розрахунок частотної характеристики динамічної системи за відомою передаточною функцією, яка задана векторами коефіцієнтів чисельника b та знаменника a .

Функція `[H,w] = freqs(b,a,n)` автоматично вибирає n значень відліків на частотах w , для яких обчислюється комплексна частотна характеристика. Діапазон частот визначається автоматично. Якщо n не вказано, то за умовчанням $n = 200$.

Щоб сформувати дані для побудови графіків амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик необхідно обчислити модуль та фазу вектора H за виразами:

```
mag = abs(H);    phase = angle(H).
```

Для перетворення одиниць вимірювання в герци, градуси, децибели використовують співвідношення:

```
f=w/(2*pi);    phase = phase* 180/pi; mag = 20*log10(mag).
```

Функція `freqs(b,a,w)` без вихідних аргументів обчислює частотну характеристику системи та виводить в графічне вікно графіки амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик.

Приклад 5. Обчислити комплексну частотну характеристику системи з передавальною функцією

$$H(s) = \frac{5}{0.01s^2 + 0.05s + 1}$$

Побудувати графіки амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик. Для вирішення задачі можна застосувати таку програму:

```
b=[5]; a=[0.01 0.05 1]; [H,w]=freqs(b,a);  
f=w/(2*pi); mag=20*log10(abs(H)); phase=angle(H)*180/pi;  
subplot(2,1,1), semilogx(f,mag,'k'), grid;  
title('Амплітудно-частотна характеристика','FontSize', 12);  
ylabel(' Амплітуда, Дб','FontSize', 12);  
subplot(2,1,2), semilogx(f,phase,'k'),grid;  
title('Фазо-частотна характеристика','FontSize', 12);  
xlabel('Частота, Гц','FontSize',12);  
ylabel('Фаза, град','FontSize', 12);
```

Обчислювати логарифмічні частотні характеристики для lti-моделей динамічних систем в tf-, zpk- та ss-формах зручно за допомогою функцій і команд bode в декількох варіантах використання.

Команда `bode(sys)` будує на екрані графіки логарифмічних частотних характеристик для lti-моделі `sys`. Модель може бути безперервною або дискретною, одновимірною або багатовимірною. Для багатовимірної моделі ця команда будує множину логарифмічних частотних характеристик для кожного каналу системи від входу до виходу. Кількість точок графіка та діапазон частот визначаються автоматично.

Команда `bode(sys, w)` будує графіки логарифмічних частотних характеристик у заданому діапазоні частот (в рад/с), що заданий вектором $w = \{w_{min}, w_{max}\}$. Для побудови частотних характеристик на заданих частотах створюється вектор значень частот w . Щоб сформувати масив рівновіддалених у логарифмічному масштабі частот w слід застосувати команду `logspace`.

Команда `bode(sys1, sys2, ..., sysN, w)` дозволяє будувати частотні характеристики для декількох моделей на одному графіку. Вектор частот $w = \{w_{min}, w_{max}\}$ не є обов'язковим. Всі моделі повинні мати однакову кількість входів і виходів і можуть бути як безперервними, так і дискретними. Можна також задати колір, тип лінії і маркера для кожної системи, наприклад, так `bode(sys1, 'r', sys2, 'y - ', sys3, 'gx')`.

Для створення більш інформативних графіків доцільно використовувати функції: `[mag, phase, w] = bode(sys, ...)` та `[mag, phase] = bode(sys, w)`. Функції повертають вектор частоти w та масиви амплітудних **mag** та фазових **phase** частотних характеристик. Частота обчислюється в радіанах в секунду, фаза - в градусах. Графік при цьому не виводиться. Вихідні аргументи **mag, phase** є тривимірними масивами, остання розмірність яких - частота. Для подання амплітудної характеристики в децибелах відповідний масив можна перетворити таким чином: `magdb = 20*log10(mag)`.

Приклад 6. Визначити амплітудно-частотні та фазочастотні характеристики систем з передавальними функціями:

$$G(s) = \frac{4}{0.01s^2 + 0.02s + 1} \quad \text{та} \quad G1(s) = \frac{0.5}{0.04s^2 + 0.05s + 1}$$

Амплітудно-частотну характеристику подати у децибелах. Вивести на графіку заголовки, позначення осей та пояснення. Один з варіантів вирішення задачі такий:

```
b=[4];
a=[0.01 0.02 1];
G=tf(b,a);
```

```

bl=[0.5];al=[0.04 0.05 1];
G1=tf(bl,a1);
[mag,phase,w]=bode(G);
[mag1,phase1]=bode(G1,w);
mag=20*log10(squeeze(mag));ph=squeeze(phase);
mag1=20*log10(squeeze(mag1));
ph1 = squeeze(phase1);
subplot(2,1,1),hn=semilogx(w,mag,'-k',w,mag1,'-ko'), grid on;
set(hn,'markersize',4); legend('G(s)','G1(s)');
title('Амплітудно-частотна характеристика','fontsize', 12);
ylabel('Амплітуда, Дб','fontsize', 12);
subplot(2,1,2),hn=semilogx(w,ph,'-k',w,ph1,'-ko'), grid on;
set(hn,'markersize',4);
legend('G(s)','G1(s)');
title('Фазо-частотна характеристика','fontsize', 12);
ylabel('Фаза, град','fontsize', 12);
ylabel('Частота, рад/с','fontsize', 12);

```

5. Обчислення перехідної функції

Для lti-моделей динамічних систем в tf-, zpk- та ss-формах перехідну функцію можна обчислити за допомогою групи функцій і команд step.

Команда step(sys) буде на екрані графік перехідної функції для lti-моделі sys. Модель може бути безперервною або дискретною, одновимірною або багатовимірною. Для багатовимірної моделі ця команда буде множини перехідних функцій для кожного каналу системи. Тривалість процесу визначається автоматично і встановлюється такою, щоб визначити його основні особливості.

Команда step(sys, t) буде графіки перехідної функції в заданому діапазоні часу. Діапазон може бути заданий моментом закінчення $t = tf$ (в секундах) або у вигляді вектора $t = 0:ts:tf$. Діапазон часу слід вибрати таким, щоб відобразити перехідний процес з необхідною точністю.

Команди step(sys1, sys2, ... sysN), step(sysK, sys2, ... sysN, t) дозволяють будувати перехідні функції для декількох моделей на одному графіку. Всі моделі повинні мати однакову кількість входів і виходів і можуть бути як безперервними, так і дискретними.

Команди step(sys1,s1,...sysN,sN), step(sys1,s1,...sysN,sN,t) дозволяють будувати перехідні функції для декількох моделей на одному

графіку і позначити їх різними стилями. Рядкові змінні $s1, \dots, sN$ можуть мати до трьох символів, які позначають тип лінії, тип маркера та їх колір.

Функції $[y, t, x] = \text{step}(\text{sys})$ та $[y, t, x] = \text{step}(\text{sys}, t)$ обчислюють перехідні функції для векторів виходів y , векторів часу t , значення змінних стану x . Графіки на екран не виводяться.

6. Обчислення імпульсної перехідної функції

Для lti-моделей динамічних систем в tf-, zpk- та ss-формах імпульсну перехідну функцію можна обчислити за допомогою групи функцій і команд impulse. Властивості команд і функцій impulse подібні властивостям команд і функцій step.

Команда impulse(sys) будує на екрані графік імпульсної перехідної функції для lti-моделі sys. Модель може бути безперервною або дискретною, одномірною або багатовимірною. Для багатовимірної моделі ця команда будує множину імпульсних перехідних функцій для кожного каналу системи. Тривалість процесу визначається автоматично і встановлюється такою, щоб визначити основні особливості перехідних процесів.

Команда impulse(sys, t) будує графіки перехідної функції в заданому діапазоні часу. Діапазон може бути заданий моментом закінчення $t = tf$ (в секундах) або у вигляді вектора $t = 0:ts:tf$. Діапазон часу слід вибирати таким, щоб відобразити перехідний процес з необхідною точністю.

Команди impulse(sys1, sys2, ..., sysN) та impulse(sys1, sys2, ..., sysN, t) дозволяють будувати імпульсні перехідні функції для декількох моделей на одному графіку. Всі моделі повинні мати однакову кількість входів і виходів.

Команди impulse(sys1, s1, ..., sysN, sN) та impulse(sys1, s1, ..., sysN, sN, t) дозволяють будувати перехідні функції для декількох моделей на одному графіку і позначити їх різними стилями.

7. Функції перетворення передаточних функцій.

Функція $\text{tsys} = \text{ctranspose}(\text{sys})$ використовують для побудови спряженої моделі.

Функція $\text{isys} = \text{inv}(\text{sys})$ виконує інверсію моделі і дає можливість отримати обернену передавальну функцію або матрицю передавальних функцій системи.

Під час перетворення передавальних функцій систем за допомогою вказаних вище операцій результати, як правило, ускладнюються, тому що цими операціями не передбачається скорочень в передавальних функціях. Щоб позбавитись таких ускладнень, у виразах доцільно використовувати функцію $\text{sysr} = \text{minreal}(\text{sys}, \text{tol})$, яка виконує скорочення однакових нулів та полюсів передавальної функції. При скороченні функція виконує пошук однакових у межах допуску tol нулів та полюсів. Якщо допуск не вказано, то за умовчанням його значення $\text{tol} = \text{sqrt}(\text{eps})$, де eps - машинна точність.

8. Математичні операції з поліномами

Поліноми від комплексної змінної $s = j\omega$ використовують для опису моделей динамічних систем у формі передавальних функцій, а також динамічних характеристик випадкових та детермінованих сигналів в них.

В системі MATLAB поліноми задаються у вигляді вектора-рядка, елементами якого є коефіцієнти полінома.

Коефіцієнти вводяться в квадратних дужках і відділяються пропусками або комами. Вводити треба всі коефіцієнти, включно з нульовими. Для доступу до окремих коефіцієнтів поліномів використовують круглі дужки. В системі MATLAB передбачено виконання декількох операцій над поліномами, деякі з яких доцільно застосувати для реалізації описаних спектральних алгоритмів.

Множення поліномів здійснює функція $c = \text{conv}(a, b)$, яка повертає вектор-рядок c коефіцієнтів полінома, який є добутком заданих поліномів a та b .

Ділення поліномів виконує функція $[q, r] = \text{deconv}(b, a)$. Вона повертає коефіцієнти полінома q , що є часткою від ділення поліномів a і b , а також залишок у векторі r так, що $b = \text{conv}(a, q) + r$.

Корені полінома обчислює функція $r = \text{roots}(p)$. Вона для заданого полінома p повертає вектор-стовпчик r , елементами якого є корені полінома p .

Побудувати поліном за його коренями дозволяє функція $p = \text{poly}(r)$. Для заданого вектора-стовпця r коренів деякого полінома функція обчислює вектор-рядок p коефіцієнтів цього полінома.

Обчислити значення полінома за заданим значенням його аргументу можна за допомогою функції $y = \text{polyval}(p, x)$. Аргументами функції є заданий вектор коефіцієнтів полінома p та задане значення аргументу x .

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Розв'язати задачі, згідно прикладів 1-6, використовуючи наведену вище інформацію (*варіанти для розрахунків отримати у викладача*).

СКЛАД ЗВІТУ:

1. Назва і мета роботи.
2. Результати виконання завдання.

Звіт з практичної роботи повинен бути виконаний на аркушах формату А4 (297*210 мм).

ПРАКТИЧНА РОБОТА №7

ОПТИМАЛЬНИЙ СТОХАСТИЧНИЙ СПОСТЕРІГАЧ (ФІЛЬТР КАЛМАНА)

Мета роботи: навчитись відновлювати вектор стану системи при стохастичних збуреннях за допомогою стохастичного спостерігача (фільтр Калмана), використовуючи програмне середовище MATLAB.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1-й етап. Припустимо, що рівняння реальної системи має вигляд:

$$x = Ax + Bu + \omega_1, \quad (7.1)$$

$$y = Cx + \omega_2, \quad (7.2)$$

Через ω_1 , позначається шум, який збурює стан, а через ω_2 - шум спостережень чи вимірювань.

Таким чином, на першому етапі нам необхідно задати матриці $[A, B, C, D]$ системи в просторі станів, а також матриці коваріацій шумів стану та вимірювань.

Розглянемо випадок синтезу оптимального стохастичного спостерігача для літального апарата. Стан системи збурюється турбулентністю атмосфери, яка є кольоровим шумом. Стандартна задача синтезу оптимального стохастичного спостерігача припускає, що на систему діє білий шум. Для приведення поставленої задачі до стандартного виду необхідно використовувати формуючий фільтр (фільтр, на вхід якого поступає білий шум η , а на виході маємо кольоровий шум ω_1 , спектральні щільності якого описують турбулентність атмосфери) в структурі об'єкта, тобто розширити об'єкт. Тобто, для синтезу ми будемо використовувати об'єкт з розширеним простором стану, що описується матрицями $[A_{ex}, B_{ex}, C_{ex}, D_{ex}]$.

2-й етап. Допустимо, то спостерігач повного порядку виду:

$$\hat{x} = A_{ex}\hat{x} + B_{ex}u + K[y - C_{ex}\hat{x}]$$

відповідає системі, що описується рівняннями (7.1), (7.2).

Тоді помилка відновлення визначається виразом:

$$e = x - \hat{x}, \quad (7.3)$$

Задача оптимального вибору величини K називається *задачею оптимального спостереження* (задачею побудови оптимального спостерігача),

тобто нам необхідно вибрати такі коефіцієнти спостерігача, щоб мінімізувати вираз (7.3).

Матрицю K можна отримати, вирішивши алгебраїчне рівняння Ріккати для спостерігача:

$$0 = V_1 - QC_{ex}^T - V_2^{-1}C_{ex}Q + A_{ex}Q + QA_{ex}^T$$

де Q – рішення рівняння Ріккати; V_1, V_2 – інтенсивності білого шуму.

Тоді матриця коефіцієнтів підсилення оптимального спостерігача буде дорівнювати:

$$K = QC^T V_2^{-1}$$

Схема з'єднання об'єкта зі спостерігачем наведена на рис. 7.1.

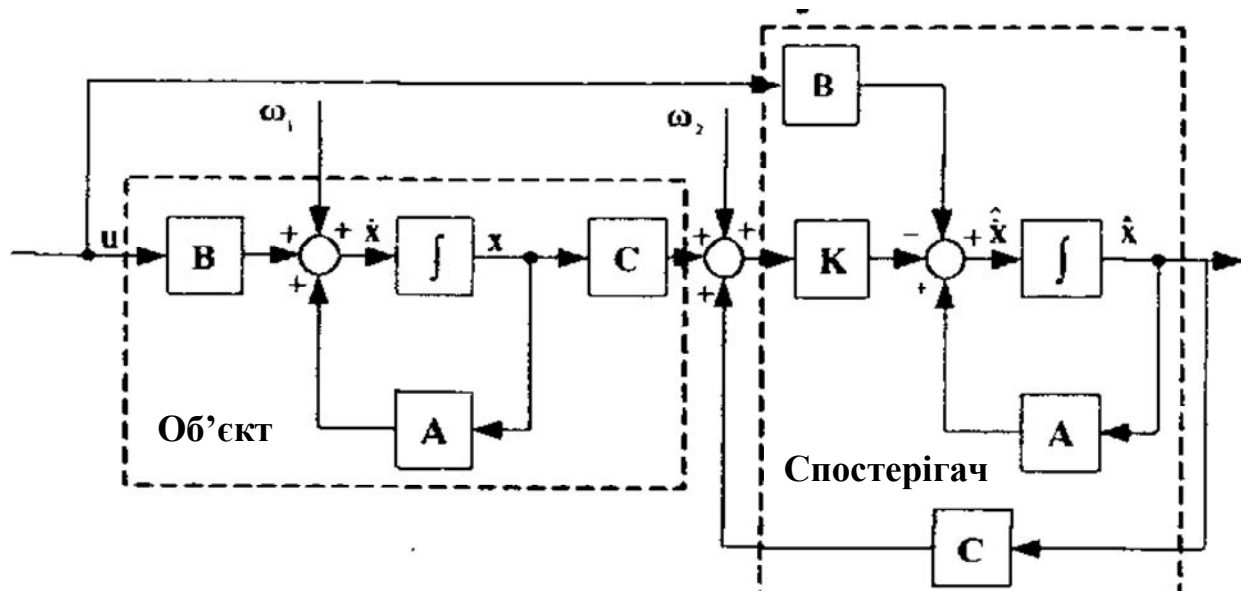


Рис. 7.1

Таким чином, на другому етапі ми здійснюємо синтез фільтра Калмана.

В результаті синтезу отримуємо спостерігач, що описується четвіркою матриць в просторі стану, на виході якого маємо відновлений вектор стану системи (рис. 7.1).

В пакеті MATLAB можна вирішити задачу побудови оптимального стохастичного спостерігача, виконавши наступну послідовність дій:

1. Задати четвірку матриць об'єкта:

$$A = [-0.0223 \ 0 \ -0.0836 \ -11.4652 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0; \ 0.0117 \ 0 \ -1.0718 \ 262.2255 \ 23.5098; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1; \ 0.0005 \ 0 \ 0.0498 \ -12.2545 \ -2.3717]$$

```

A =
-0.0223    0 -0.0836   -11.4652    0
    0    0  1.0000    0    0
  0.0117    0 -1.0718   262.2255   23.5098
    0    0  0    0    1.0000
  0.0005    0  0.0498   -12.2545   -2.3717
B=[4.6164 0.0216; 0.4589 0.2907; 0 0; 0.0012 -0.0365]
B =
  4.6164  0.0216
  0.4589  0.2907
    0    0
  0.0012 -0.0365
C=eye(5)
C =
  1  0  0  0  0
  0  1  0  0  0
  0  0  1  0  0
  0  0  0  1  0
  0  0  0  0  1
D=[
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0
  0  0].

```

2. В реальних системах виміряти стан точно не можна через шуми вимірювань, крім того на систему завжди діє збурення. Задамо матрицю збурень G і створимо модель збуреного об'єкта в просторі стану.

```

W=[1 0 0.1 0.9 0.9];
W=diag(W); G=[W*A(:,1)W*A(:,3)];
sys=ss(A,[B G],C,[D zeros(5,2)]);

```

3. Стан системи, на яку діють збурення можна відновити за допомогою оптимального стохастичного спостерігача (фільтра Калмана). Для цього

необхідно задати матрицю коваріацій шумів вимірювань Q_n та матрицю коваріацій шумів стану R_n . Задачу синтезу в MATLAB вирішуємо за допомогою оператора **kalman**.

```
Qn=0.1*eye(2); Rn=0.01*eye(5);  
[Kest, L, P]=kalman(sys,Qn,Rn).
```

4. Коли стан системи відновлено, можна застосувати закони синтезу оптимального детермінованого регулятора.

```
V =[1.5 1.5 2.298 0.8 0.5];  
Q=diag(V);  
V1 = [1 1.17];  
R =diag(V1);  
N=zeros(5,2);  
N(3,2)=-0.624;  
[K,S,E]=lqr(A-L*C,B,Q,R,N)
```

5. Для отримання характеристик системи записуємо матриці стану замкненої системи. За допомогою операторів **impulse** та **step** одержуємо імпульсну та перехідну характеристики замкненої системи

```
figure (1)  
impulse(A-L*C-B*K,B,C,D)  
figure(2)  
step(A-L*C-B*K,B,C,D)
```

6. Якість синтезованої системи оцінюємо за допомогою H_2 норми:

```
Ac=A-L*C-B*K;  
normh2(Ac,B,C,D).
```

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Необхідно за допомогою стохастичного оптимального спостерігача відновити стан системи та аналітично побудувати оптимальний детермінований регулятор.

Дано чотири матриці A , B , C , D . які описують динаміку літака.
Алгоритм синтезу викладений вище.

Варіанти завдань.

Варіант 1

$$A = \begin{bmatrix} -0.0273 & 5.9960 & -9.7764 & 0 & 0 \\ -0.0064 & -1.3927 & 0 & 0.9971 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0036 & -16.1243 & 0 & -1.7339 & 0 \\ 0 & -Vtp & Vtp & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.3581 \\ -0.1303 \\ 0 \\ -19.8857 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{eye}(5); D = \text{zeros}(5,1); Vtp = 55.$$

Варіант 2

$$A = \begin{bmatrix} -0.0486 & -0.0908 & 0.2633 & 0.4698 & 0 \\ 0.0001 & -0.3829 & -3.9684 & -0.0390 & 0 \\ 0.0005 & 0.0330 & -0.1059 & -0.1707 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.4822 & 0.5651 \\ 0.0004 & -2.7755 \\ 0.0018 & -0.2053 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{eye}(5); D = \text{zeros}(5,2).$$

Варіант 3

$$A = \begin{bmatrix} 0.0017 & 4.5 & 0 & -9.8007 & 0 & 0.0288 \\ -0.0011 & -0.8 & 1 & -0.0026 & 0 & 0 \\ -0.0004 & -3.2 & -1.33 & 0.0013 & 0 & 0.0011 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0349 & 1011 & 0 & -1011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6667 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ -0.034 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.32 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{eye}(6,6); D = \text{zeros}(6,2).$$

Варіант 4

$$A = \begin{bmatrix} -0.0345 & 5.9942 & -9.7764 & 0 & 0 \\ -0.0041 & -1.7565 & 0 & 0.9860 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0033 & -25.6817 & 0 & -2.1905 & 0 \\ 0 & -V_t & V_t & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.3576 \\ -0.1628 \\ 0 \\ -31.1037 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{eye}(5); D = \text{zeros}(5,1); V_t = 69.4444.$$

Варіант 5

$$A = \begin{bmatrix} -0.136 & 0.1403 & 0.0001 & -0.9986 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.003 & 0 & 0 & 0 \\ -56.21 & 0 & -11.25 & 3.332 & 0 & 0 \\ 1.19 & 0 & 0.21 & -0.24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 69.44 & 0 & 0 & 0 & 69.44 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = [0 \ 0 \ 160 \ 0 \ 0 \ 0]; C = \text{eye}(6); D = \text{zeros}(6,1).$$

Варіант 6

$$A = \begin{bmatrix} -0.0233 & 0 & -0.0836 & -11.4652 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0117 & 0 & -1.0718 & 262.2255 & 23.5098 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0005 & 0 & 0.0498 & -122545 & -2.3717 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4.6164 & 0.0216 \\ 0 & 0 \\ 0.4589 & 0.2907 \\ 0 & 0 \\ 0.0012 & -0.0365 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{eye}(5); D = \text{zeros}(5,2).$$

Варіант 7

$$A = \begin{bmatrix} -0.109 & 0.1754 & 0.0001 & -0.9988 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.653 * V_t & 0 & -9.1953 & 2.8 & 0 & 0 \\ 0.0155 * V_t & 0 & -0.173 & -0.185 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_t & 0 & 0 & 0 & V_t & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = [0 \ 0 \ 103.62 \ 0 \ 0 \ 0]; V_t = 69.4444; C = \text{eye}(6); D = \text{zeros}(6,1).$$

Варіант 8

$$A = \begin{bmatrix} 0.0027 & 6.16 & 0 & -9.8 & 0 & 0.0288 \\ -0.0011 & -0.96 & 1 & -0.0026 & 0 & 0 \\ -0.0004 & -5.69 & -1.9 & 0.0013 & 0 & 0.0011 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0349 & 134.1 & 0 & -134.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.666 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -0.2326 & 0 \\ -0.063 & 0 \\ -3.45 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.666 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{eye}(6,6); D = \text{zeros}(6,2).$$

Варіант 9

$$A = \begin{bmatrix} -0.0075 & 0 & -0.014 & -19.99 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0411 & 0 & -0.897 & 780 & 17.16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0004 & 0 & 0.0339 & -29.49 & -2.7 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2.64 & -0.752 \\ 0 & 0 \\ 0.187 & 0.9336 \\ 0 & 0 \\ 0.0002 & -0.1872 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{eye}(5); D = \text{zeros}(5,2).$$

Варіант 10

$$A = \begin{bmatrix} -0.1825 & 0.0348 & -1 & 0.037 & 0 \\ -23 & -3.266 & 1.09 & 0 & 0 \\ 8 & -0.065 & -0.65 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.037 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0.0006 \\ 0.049 & 0.0543 \\ 0.0003 & -0.4544 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{eye}(5); D = \text{zeros}(5,2).$$

СКЛАД ЗВІТУ

1. Назва і мета роботи.
2. Результати виконання завдання.

Звіт по лабораторній роботі повинен бути виконаний на аркушах формату А4 (297*210 мм).

ПРАКТИЧНА РОБОТА №8

СТРУКТУРНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА

Мета роботи: вивчити методи алгоритми структурної ідентифікації динаміки об'єкту. Розробити програмну реалізацію алгоритму структурної ідентифікації.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Структурна ідентифікація дозволяє визначити як порядки і кількість диференційних рівнянь, які описують динаміку об'єкта, що ідентифікується, так і коефіцієнти цих рівнянь, крім того новітні методи структурної ідентифікації в частотній області можуть бути використані для оцінювання динамічних властивостей збурень, дія яких проявляється в реальних умовах експлуатації.

Новітні алгоритми структурної ідентифікації динаміки об'єкту і діючого на нього узагальненого збурення володіють рядом переваг, серед яких слід відзначити точність; забезпечення побудови моделей динаміки в режимі нормальної експлуатації; зручність, простота та інформативність; наукова обґрунтованість; можливість використання достатньо простої апаратури нечутливої до зовнішніх впливів.

Застосування їх у практиці істотно скорочує строки та обсяги експериментів, що мають за мету одержання певних обсягів інформації.

Запропонований відомим українським вченим Блохіним Л.М. метод не тільки дає можливість отримати найкращі за мінімумом дисперсії похибки оцінки динамічних характеристик досліджуваного об'єкту за даними вимірювання вхідного та вихідного сигналів в реальних експлуатаційних умовах, а також визначити спектральну щільність неконтрольованого збурення.

У досліджуваному випадку об'єкт ідентифікації (рис. 1.1) описується звичайним диференціальним рівнянням вигляду:

$$P(s)x(s) = M(s)u + \psi(s), \quad (8.1)$$

де ψ – зовнішні стохастичні збурення, які діють на об'єкт управління; u – сигнал керування; x – вихідний сигнал; P і M – операторні поліноми від $s = j\omega$.

При використанні обраного методу вважається, що:

- вхідний сигнал u і вихідний сигнал x представляють собою стаціонарні випадкові процеси з відомими спектральними та взаємними спектральними щільностями $S_{uu}(s)$, $S_{xx}(s)$ та $S_{ux}(s)$, які були визначені за результатами вимірювань сигналів u і x ;

- збурення ψ не корельовано з вхідним сигналом u .

Задача структурної ідентифікації полягає в тому, щоб за статистичними

даними “вхід - вихід” отримати найкращі за точністю оцінки динамічних характеристик об’єкту управління та збурення на класі дробово-раціональних функцій.

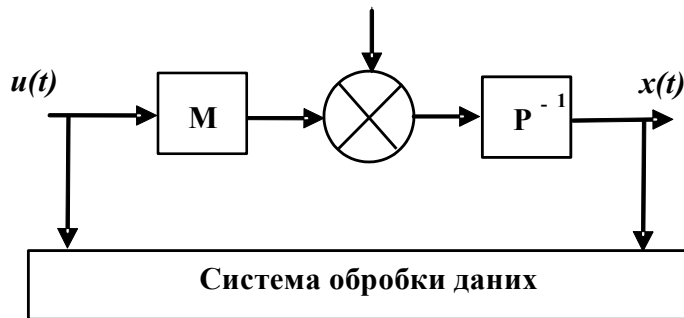


Рис. 8.1

Згідно обраного алгоритму шукана оптимальна матриця оцінок визначається з виразу:

$$\hat{O} = (\hat{O}_{11}, \hat{O}_{12}) = R_0^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}, \quad (8.2)$$

де Φ_{11} – передаточна функція об’єкту; Φ_{12} – передаточна функція фільтру, який формує динамічні характеристики збурення, приведеного до виходу системи із заданою спектральною щільністю; R_0 - ваговий коефіцієнт; D – результат факторизації блочної матриці S_{yy} :

$$DD^* = S'_{yy} = \begin{bmatrix} S'_{uu} & 0 \\ 0 & S'_{\Delta\Delta} \end{bmatrix}; \quad (8.3)$$

$T_0 + T_+$ – стійка частина результату сепарації блочної дробово-раціональної матриці:

$$T = T_0 + T_+ + T_- = R_0 S'_{xy} D_*^{-1}, \quad (8.4)$$

де “*” – знак Ермітового спряження матриць.

Матриця взаємних спектральних щільностей S_{yx}

$$S_{yx} = \begin{bmatrix} S'_{ux} \\ S'_{\Delta x} \end{bmatrix}, \quad (8.5)$$

де $S_{\Delta x}$ – результат факторизації виразу $S_{x\Delta} S_{\Delta x}$, який входить до рівняння зв’язку:

$$S'_{x\Delta} \begin{pmatrix} S^{-1} \\ \Delta\Delta \end{pmatrix} S'_{\Delta x} = S'_{xx} - S'_{xu} \begin{pmatrix} S^{-1} \\ uu \end{pmatrix} S'_{ux}. \quad (1.6)$$

Для аналізу якості отриманих моделей використовується функціонал, який представляє собою дисперсію похибки ідентифікації вигляду:

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\omega}^{j\omega} [S'_{\varepsilon\varepsilon} R_0] ds. \quad (8.7)$$

де $S'_{\varepsilon\varepsilon}$ – спектральна щільність помилки ідентифікації.

Значення $S'_{\varepsilon\varepsilon}$ може бути розраховане з використанням теореми Вінера-Хінчина:

$$S'_{\varepsilon\varepsilon} = \langle \varepsilon\varepsilon^* \rangle = S'_{xx} - S'_{yx}\Phi_* - \Phi S'_{xy} + \Phi S'_{yy}\Phi_*. \quad (8.8)$$

Тоді функціонал якості (1.7) з урахуванням (1.8) набуває вигляду:

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\omega}^{j\omega} \text{tr}[(S'_{xx} - S'_{xy}\Phi_* - \Phi S'_{yx} + \Phi S'_{yy}\Phi_*)R] ds, \quad (8.9)$$

де $j = \sqrt{-1}$; $\Phi = [\Phi_{11}, \Phi_{12}]$; $\Phi_* = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^* \\ \Phi_{12}^* \end{bmatrix}$.

Для реалізації даного методу необхідно виконати наступні етапи:

1. спектральні та взаємні спектральні щільності векторів вхідного та вихідного сигналів $S_{uu}(s)$, $S_{xx}(s)$ та $S_{ux}(s)$ обчислені за результатами ідентифікаційного експерименту, підставити до рівняння зв'язку і визначити $S'_{\Delta x}$;
2. скласти матриці S'_{yy} і S'_{yx} ;
3. отримати вирази для D і D^* після виконання факторизації матриці S'_{yy} ;
4. визначити матрицю $T = R_0 S'_{yx} D_*^{-1}$;
5. виконати сепарацію матриці T і знайти вираз для $T_0 + T_+$;
6. визначити блокову матрицю $\Phi = (\Phi_{11}, \Phi_{12}) = R_0^{-1} (T_0 + T_+) D^{-1}$;
7. після лівостороннього видалення полюсів Φ_{11} отримати шукані оцінки операторних поліномів M та P ;
8. визначити спектральну щільність узагальненого збурення $S'_{\psi\psi}$.

Для одновимірної системи обчислювальні операції виконуються з дробово-раціональними функціями від змінної $s=j\omega$.

На наступному етапі виконується аналіз якості ідентифікації відповідно до функціоналу 8.9 та за необхідності відбувається спрощення (редукування) отриманих моделей.

Приклад розв'язання задачі ідентифікації.
Спектральна щільність вхідного сигналу

$$S_{uu} = \frac{\sigma_u^2}{-\pi s^2}$$

Спектральна щільність вихідного сигналу

$$S_{xx} = \frac{\sigma_u^2}{\pi} \left| \frac{s\beta + m}{(s + \alpha)s} \right|^2$$

де $\beta = \sigma_v / \sigma_u$ – співвідношення шум/сигнал
Взаємна спектральна щільність сигналів

$$S_{ux} = \frac{\sigma_u^2 m}{-\pi s^2 (s + \alpha)}$$

Підставляючи вихідні дані в рівняння зв'язку маємо (етап 1):

$$S_{x\Delta} S_{\Delta x} = \frac{\sigma_u^2}{\pi} \left| \frac{s\beta + m}{(s + \alpha)s} \right|^2 - \frac{\sigma_u^2 m}{-\pi s^2 (-s + \alpha)} \frac{-\pi s^2}{\sigma_u^2} \frac{\sigma_u^2}{-\pi s^2} \frac{m}{(s + \alpha)} = \frac{\sigma_u^2}{\pi} \left| \frac{\beta}{(s + \alpha)} \right|^2$$

Розкладаючи $S_{x\Delta} S_{\Delta x}$ на комплексно спряжені множники отримуємо наступні спектральні щільності:

$$S_{x\Delta} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta}{(-s + \alpha)} \quad \text{та} \quad S_{\Delta x} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta}{(s + \alpha)}$$

Знайдемо матриці (етап 2):

$$S'_{yy} = \begin{bmatrix} S'_{uu} & 0 \\ 0 & S'_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u^2}{-\pi s^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad S'_{yx} = \begin{bmatrix} S'_{ux} \\ S'_{\Delta x} \end{bmatrix}$$

Знаходимо матриці D , D^* , а також D^{-1} , D^{*-1} (етап 3). Спочатку знаходимо:

$$DD^* = S'_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u^2}{-\pi s^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Отриману матрицю розкладаємо на дві ермітово-спряжені:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi(-s)}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відповідні обернені матриці:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi s} & 0 \\ \frac{\sigma_u}{0} & 1 \end{bmatrix}, D_*^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi(-s)} & 0 \\ \frac{\sigma_u}{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи знайдені значення обчислюємо матрицю T (етап 4)

$$T = \tilde{A}S'_{xy}D_*^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u^2}{-\pi s^2} \frac{m}{(s+\alpha)}, & \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta}{(s+\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\pi(-s)}}{\sigma_u} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s}} \frac{m}{(s+\alpha)}, & \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi}} \frac{\beta}{(s+\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до алгоритму необхідно виконати сепарацію отриманої матриці. Проте отримана матриця не містить полюсів(коренів знаменника) у ППП, тому сепарація матриці не потрібна. Отже:

$$T_+ = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s}} \frac{m}{(s+\alpha)}, & \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s}} \frac{\beta}{(s+\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Визначаємо блочну матрицю Φ (етап 6):

$$\hat{O} = T_+ D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s}} \frac{m}{(s+\alpha)}, & \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s}} \frac{\beta}{(s+\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\pi s}}{\sigma_u} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{s+\alpha} & \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s}} \frac{\beta}{(s+\alpha)} \end{bmatrix}$$

З отриманої блочної матриці визначається передавальна функція динамічного об'єкта :

$$\hat{O}_{11} = \frac{m}{s+\alpha}$$

передаточна функція фільтру, який формує динамічні характеристики збурення, приведеного до виходу системи:

$$\hat{O}_{12} = P^{-1} = \frac{1}{s+\alpha} = s+\alpha .$$

Визначаємо спектральну щільність збурення:

$$S_{\psi\psi} = P\hat{O}_{11}\hat{O}_{11}^*P^* = (s + \alpha) \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s} (s + \alpha)} \frac{\beta}{\sqrt{\pi s} (s + \alpha)} \cdot \frac{\sigma_u}{\sqrt{\pi s} (-s + \alpha)} \frac{\beta}{\sqrt{\pi s} (-s + \alpha)} (-s + \alpha) = \frac{\sigma_u^2}{\pi}.$$

ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Розробити програмну реалізацію (m-файл) алгоритму структурної ідентифікації для визначення передаточної функції динамічного об'єкта та діючого збурення, використовуючи наведений нижче приклад.

Приклад.

```
Suu=tf(10,[-1 0 0]);Sxx=tf([-10.1 0 90],[-1 0 5 0 -4 0 0]);%вихідні дані
Sux=tf([10 30],[1 3 2 0 0]);Sxu=ctranspose(Sux);Sdd=1;
Syy=[Suu 0;0 Sdd]%формула (1.3)
Suul=inv(Suu)
S1=Sxx-Sxu*Suul*Sux%рівняння зв'язку (1.6)
SSL=minreal(S1)%скорочення нулів та полюсів
%вилучення дуже малих коефіцієнтів
[num,den]=tfdata(SSL,'v');num1=smpoly(num);den1=smpoly(den)
[bf,af]=sfp(num1,den1);%факторизація лівої частини рівняння (1.6)
Sdx=tf(bf,af)
Sxd=ctranspose(Sdx)
nuu=[10];duu=[-1 0 0];
[bD,aD]=sfp(nuu,duu)
D=[tf(bD,aD) 0;0 Sdd]
Dl_inv=tf([1 0],[0 3.162]) 0;0 1]
Dc=ctranspose(D)
Dc_inv=tf([-1 0],[0 3.162]) 0;0 1]
Syx=[Sux,Sdx]% формула (1.5)
T=Syx*Dc_inv% формула (1.4)
T=minreal(T)
Top=[T(1,1),T(1,2)]%результат сепарації
F=Top*Dl_inv%обчислення блочної матриці(1.2)
F=[F(1),F(2)]
F11=minreal(F(1))
P=tf(F11.den{1},[1])
Pc=ctranspose(P)
FF12=minreal(F(2));F21=ctranspose(FF12)
Sff=minreal(P*FF12*F21*Pc)
```

СКЛАД ЗВІТУ

1. Назва і мета роботи.
2. Результати виконання завдання.

Звіт по лабораторній роботі повинен бути виконаний на аркушах формату А4 (297*210 мм).

ЛІТЕРАТУРА

1. Блохин Л. Н. Оптимальные системы стабилизации. – К.:Техніка, 1982. – 144 с.
2. Блохін Л. М., Буриченко М. Ю. Статистична динаміка систем управління: Підручник. – К.: НАУ, 2003. – 208 с.
3. Венгеров А. А., Щаренский В. А. Прикладные вопросы оптимальной линейной фильтрации. М., Энергоиздат, 1982. 190с.
4. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М., Машиностроение, 1976. 184с.
5. Солодовников В. В. Основы теории и элементов систем автоматического регулирования. М., Машиностроение, 1985. 510с.
6. Черных И. В. SIMULINK: среда создания инженерных приложений / под общ. ред. к
7. MATLAB в инженерных и научных расчетах / [Дашенко А. Ф., Кириллов В. Х., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф.]. – О.: Астропринт, 2003. – 210 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методичне видання

Основи статистичної динаміки систем управління

Методичні вказівки до виконання практичних робіт
для студентів навчання за напрямом
підготовки: 6.050201 «Системна інженерія»

Укладачі: *С. І. Осадчий*
 І. А. Березюк
 О. П. Голик

Тиражування *Ю. М. Рубан*

Здано до набору **19.06.2013**. Підписано до друку **21.10.2013**. Формат 60x84 1/16. Папір газетний. Ум. друк. арк. 4,5. Тираж **120** прим. Зам. № **1279/2002**.

РВЛ КНТУ, м. Кіровоград, пр. Університетський, 8.
Тел. 390-541, 390-551.