Філімоніхін Геннадій Борисович
доцент, канд. фіз.-мат. наук, Кіровоградський державний технічний університет, м. Кіровоград

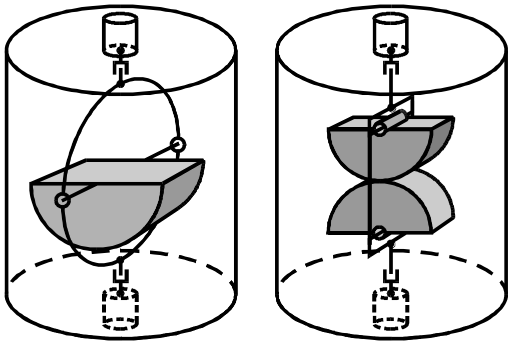
Невдаха Юрій Андрійович
інженер, Кіровоградський державний технічний університет, м. Кіровоград

УДК 62-755 : 620.1.05: 534.1

Стійкість усталених рухів ротора, що рухається плоскопаралельно і автобалансирів, у яких коригувальні вантажі обертаються навколо повздовжньої і поперечної осей ротора

Досліджена стійкість основних і побічних усталених рухів системи ротор – автобалансир. Ротор розташований вертикально і рухається плоскопаралельно. Автобалансир утворюється корегуючим вантажем (КВ), який може повертатися навколо повздовжньої і поперечної осей ротора, чи двома такими КВ, які зв'язані так, що можуть повертатися навколо поперечних осей на рівні кути у протилежні боки. У випадку, коли маса КВ набагато менше маси ротора (і силами ваги можна знехтувати) встановлено, що на дорезонансних швидкостях обертання ротора асимптотично стійкі тільки побічні рухи, у яких ротор розбалансований, а на зарезонансних швидкостях - два основні рухи, у яких ротор зрівноважений.

В [1] запропонований автобалансир, у якого корегуючий вантаж (КВ) може повертатися навколо повздовжньої і поперечної осей ротора (рис., а). В [2] побудована математична модель такого пристрою і показано, що у нього можуть бути не більше шості істотно відмінних усталених рухів: два основних, у яких ротор зрівноважений; чотири побічних, у яких ротор розбалансований. Для роботоспроможності пристрою необхідно, щоб на робочому інтервалі кутових швидкостей обертання ротора стійкими були основні рухи, а побічні були – нестійкими.



а б
Рис. Схеми автобалансирів

Недоліком вказаного пристрою є чутливість КВ до сил ваги. Тому в [3] запропоновано усувати таку чутливість шляхом накладання на рухи КВ в'язей. Так на рухи двох однакових КВ, які можуть повертатися навколо повздовжньої і поперечних осей ротора запропоновано накладати в'язі, які дозволяють КВ повертатися навколо поперечних осей на рівні кути у протилежні боки (рис., б). В [4,5] побудована математична модель ротора і автобалансира і досліджені усталені рухи. Виявилося, що динаміку двох автобалансирів описують подібні безрозмірні диференціальні рівняння, яки розрізняються наявністю чи відсутністю складової, зумовленої силами ваги.

Нижче досліджується стійкість усталених рухів ротора і автобалансирів, причому припускається, що у випадку одного КВ силами ваги можна знехтувати.

Математичну модель ротора, що здійснює плоскопаралельний рух і зрівноважується автобалансиром, описують наступні диференціальні рівняння руху системи у безрозмірному виді [2,4]:

$$\ddot\varphi + h_1\dot\varphi - [(\ddot\xi - 2R_\omega\dot\eta - R_\omega^2\xi)\sin\psi - (\ddot\eta + 2R_\omega\dot\xi - R_\omega^2\eta)\cos\psi]\cos\varphi = 0,$$

$$(\ddot\psi + h_2\dot\psi)R_\rho^2 - [(\ddot\xi - 2R_\omega\dot\eta - R_\omega^2\xi)\cos\psi + (\ddot\eta + 2R_\omega\dot\xi - R_\omega^2\eta)\sin\psi]\sin\varphi = 0,$$

$$\ddot\xi - 2R_\omega\dot\eta - R_\omega^2\xi + H(\dot\xi - R_\omega\eta) + \xi - R_m\{[\ddot\varphi\sin\psi + 2(R_\omega + \dot\psi)\dot\varphi\cos\psi]\cos\varphi + [\ddot\psi\cos\psi - (\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2R_\omega\dot\psi)\sin\psi]\sin\varphi + R_\omega^2(u_0 - \sin\varphi\sin\psi)\} = 0,$$

$$\ddot\eta + 2R_\omega\dot\xi - R_\omega^2\eta + H(\dot\eta + R_\omega\xi) + \eta - R_m\{[\ddot\psi\sin\psi + (\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2R_\omega\dot\psi)\cos\psi]\sin\varphi - [\ddot\varphi\cos\psi - 2(R_\omega + \dot\psi)\dot\varphi\sin\psi]\cos\varphi + R_\omega^2(v_0 + \sin\varphi\cos\psi)] = 0. \quad (1)$$

Тут: ξ, η - безрозмірні змінні, що визначають відхилення осі вала від осі обертання; φ, ψ - кути поперечного і повздовжнього поворотів КВ відносно ротора; $R_m, R_\omega, R_\rho, h_1, h_2, H, u_0, v_0$ - безрозмірні параметри. В рівностях (1) похидні беруться за безрозмірним часом і позначаються крапками над змінною.

Рівняння усталених рухів мають вид

$$(\tilde\xi\sin\tilde\psi - \tilde\eta\cos\tilde\psi)R_\omega^2\cos\tilde\varphi = 0,$$

$$(\tilde\xi\cos\tilde\psi + \tilde\eta\sin\tilde\psi)R_\omega^2\sin\tilde\varphi = 0,$$

$$(R_\omega^2-1)\tilde{\xi}+HR_\omega\tilde{\eta}+R_m R_\omega^2(u_0-\sin\tilde{\varphi}\sin\tilde{\psi}),$$
$$-HR_\omega\tilde{\xi}+(R_\omega^2-1)\tilde{\eta}+R_m R_\omega^2(v_0+\sin\tilde{\varphi}\cos\tilde{\psi}), \qquad (2)$$

де $\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\xi},\tilde{\eta}$ - сталі значення змінних, що визначають положення системи.

У [5] показано, що в припущенні, що балансувальної ємності КВ вистачає для зрівноваження дисбалансу

$$e_0<1,\ \varphi_0=\arcsin e_0,\ e_0=\sqrt{u_0^2+v_0^2} \qquad (3)$$

у системи (2) не більше шості істотно відмінних усталених рухів. Їх запропоновано розрізняти по положенням КВ відносно ротора:

$\tilde{\varphi}_1=\varphi_0$ - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас (верхнього) КВ нижче точки підвісу;

$\tilde{\varphi}_2=\pi-\varphi_0$ - основний рух, у якому ротор зрівноважений і центр мас (верхнього) КВ вище точки підвісу;

$\tilde{\varphi}_3=-\pi/2$ - побічний рух, у якому КВ відхилений(і) у важкий бік ротора;

$\tilde{\varphi}_4=\pi/2$ - побічний рух, у якому КВ відхилений(і) в легкий бік ротора;

$\tilde{\varphi}_5=0$ - побічний рух, у якому центр мас (верхнього) КВ під точкою підвісу;

$\tilde{\varphi}_6=\pi$ - побічний рух, у якому центр мас (верхнього) КВ над точкою підвісу.

Досліджуємо стійкість усталених рухів.

Для основних усталених рухів введемо збурений рух

$$\varphi=\tilde{\varphi}+\alpha,\ \psi=\tilde{\psi}+\beta,\ \xi=u,\ \eta=v, \qquad (4)$$

де α, β, u, v - відхилення від незбуреного руху. Тоді рівняння першого наближення матимуть вид:

$$l_1=\ddot{\alpha}+h_1\dot{\alpha}-[(\ddot{u}-2R_\omega\dot{v}-R_\omega^2u)\sin\tilde{\psi}-$$
$$-(\ddot{v}+2R_\omega\dot{u}-R_\omega^2v)\cos\tilde{\psi}]\cos\tilde{\varphi}=0,$$
$$l_2=(\ddot{\beta}+h_2\dot{\beta})R_\rho^2-[(\ddot{u}-2R_\omega\dot{v}-R_\omega^2u)\cos\tilde{\psi}+$$
$$+(\ddot{v}+2R_\omega\dot{u}-R_\omega^2v)\sin\tilde{\psi}]\sin\tilde{\varphi}=0,$$
$$l_3=\ddot{u}-2R_\omega\dot{v}-R_\omega^2u+H(\dot{u}-R_\omega v)+u-$$
$$-R_m\{[(\ddot{\alpha}-R_\omega^2\alpha)\cos\tilde{\varphi}-2R_\omega\dot{\beta}\sin\tilde{\varphi}]\sin\tilde{\psi}+$$
$$+[(\ddot{\beta}-R_\omega^2\beta)\sin\tilde{\varphi}+2R_\omega\dot{\alpha}\cos\tilde{\varphi}]\cos\tilde{\psi}\}=0,$$
$$l_4=\ddot{v}+2R_\omega\dot{u}-R_\omega^2v+H(\dot{v}+R_\omega u)+v+$$
$$+R_m\{[(\ddot{\alpha}-R_\omega^2\alpha)\cos\tilde{\varphi}-2R_\omega\dot{\beta}\sin\tilde{\varphi}]\cos\tilde{\psi}-$$
$$-[(\ddot{\beta}-R_\omega^2\beta)\sin\tilde{\varphi}+2R_\omega\dot{\alpha}\cos\tilde{\varphi}]\sin\tilde{\psi}\}=0. \qquad (5)$$

Вводимо нові комплексні змінні

$$X=(u-iv)e^{-i\tilde{\psi}},\quad Y=\overline{X},$$
$$\Phi=i(\alpha\cos\tilde{\varphi}+i\beta\sin\tilde{\varphi}),\ F=\overline{\Phi}. \qquad (6)$$

Перетворюємо ліві частини рівнянь (5) за алгоритмами

$$L_1=(l_3+il_4)e^{-i\tilde{\psi}},\ L_2=(l_3-il_4)e^{i\tilde{\psi}},$$
$$L_3=2i(p_1+ip_2)e^{i\tilde{\psi}},\ L_4=-2i(p_1-ip_2)e^{-i\tilde{\psi}},$$
$$p_1=l_1\frac{\cos\tilde{\psi}}{\cos\tilde{\varphi}}+l_2\frac{\sin\tilde{\psi}}{\sin\tilde{\varphi}},\ p_2=-l_1\frac{\sin\tilde{\psi}}{\cos\tilde{\varphi}}+l_2\frac{\cos\tilde{\psi}}{\sin\tilde{\varphi}}. \qquad (7)$$

Тоді рівняння першого наближення приймуть вид:

$$L_1=\ddot{X}+2iR_\omega\dot{X}-R_\omega^2X+H(\dot{X}+iR_\omega X)+X+$$
$$+R_m(\ddot{\Phi}+2iR_\omega\dot{\Phi}-R_\omega^2\Phi)=0,$$
$$L_2=\ddot{Y}-2iR_\omega\dot{Y}-R_\omega^2Y+H(\dot{Y}-iR_\omega Y)+Y+$$
$$+R_m(\ddot{F}-2iR_\omega\dot{F}-R_\omega^2F)=0,$$
$$L_3=2(\ddot{X}+2iR_\omega\dot{X}-R_\omega^2X)+$$
$$+(\ddot{\Phi}+h_1\dot{\Phi})\frac{1}{\cos^2\tilde{\varphi}}+(\ddot{\Phi}+h_2\dot{\Phi})\frac{R_\rho^2}{\sin^2\tilde{\varphi}}-$$
$$-(\ddot{F}+h_1\dot{F})\frac{1}{\cos^2\tilde{\varphi}}+(\ddot{F}+h_2\dot{F})\frac{R_\rho^2}{\sin^2\tilde{\varphi}}=0,$$
$$L_4=2(\ddot{Y}-2iR_\omega\dot{Y}-R_\omega^2Y)-$$
$$-(\ddot{\Phi}+h_1\dot{\Phi})\frac{1}{\cos^2\tilde{\varphi}}+(\ddot{\Phi}+h_2\dot{\Phi})\frac{R_\rho^2}{\sin^2\tilde{\varphi}}+$$
$$+(\ddot{F}+h_1\dot{F})\frac{1}{\cos^2\tilde{\varphi}}+(\ddot{F}+h_2\dot{F})\frac{R_\rho^2}{\sin^2\tilde{\varphi}}=0, \qquad (8)$$

Введемо коефіцієнти

$$a_{11}=(\lambda+iR_\omega)^2+H(\lambda+iR_\omega)+1,\quad a_{13}=(\lambda+iR_\omega)^2,$$
$$a_{33}=(\lambda^2+h_2\lambda)\frac{R_\rho^2}{\sin^2\tilde{\varphi}},\quad a_{44}=(\lambda^2+h_1\lambda)\frac{1}{\cos^2\tilde{\varphi}}. \qquad (9)$$

Тоді характеристичне рівняння прийме вид

$$4a_{11}\overline{a}_{11}a_{33}a_{44}-2R_m(a_{33}+a_{44})(a_{11}\overline{a}_{13}^2+\overline{a}_{11}a_{13}^2)+$$
$$+4R_m^2a_{13}^2\overline{a}_{13}^2=0. \qquad (10)$$

Тут і нижче знак спряження над a_{ij} до λ не відноситься.

Досліджуємо стійкість основних рухів у випадку, коли маса КВ набагато менше маси ротора:

$$R_m\ll 1. \qquad (11)$$

У нульовому наближенні характеристичне рівняння (10) приймає вид

$$4a_{11}\overline{a}_{11}a_{33}a_{44}=0.$$

Його корені

$$\lambda_0^{(1/2)}=-\frac{H}{2}\pm i\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}-iR_\omega,$$
$$\lambda_0^{(3/4)}=-\frac{H}{2}\mp i\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}+iR_\omega,$$
$$\lambda_0^{(5)}=-h_1,\quad \lambda_0^{(6)}=-h_2,\quad \lambda_0^{(7/8)}=0. \qquad (12)$$

Перші шість коренів мають від'ємну дійсну частину. Тому стійкість руху визначатимуть наступні наближення до двох останніх - нульових коренів. Шукаємо розкладання цих коренів у виді

$$\lambda=R_m\lambda_1+\cdots. \qquad (13)$$

Підставляючи (13) у (10), збираючи коефіцієнти при R_m^2 і перетворюючи, одержимо наступне рівняння для визначення $\lambda_1^{(7/8)}$:

$$[(R_\omega^2-1)^2+H^2R_\omega^2]R_\rho^2h_1h_2\lambda_1^2+$$
$$+(h_1\sin^2\tilde{\varphi}+h_2R_\rho^2\cos^2\tilde{\varphi})(R_\omega^2-1)R_\omega^4\lambda_1+$$
$$+R_\omega^8\sin^2\tilde{\varphi}\cos^2\tilde{\varphi}=0. \qquad (14)$$

Корені цього рівняння матимуть від'ємні дійсні частини, тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти будуть додатні. З цього одержуємо наступну умову асимптотичної стійкості основних рухів

$$|R_\omega| > 1. \tag{15}$$

З цього випливає, що у випадку, коли маса АТТ набагато менше маси ротора обидва основних усталених рухи асимптотично стійкі на зарезонансних швидкостях обертання ротора і нестійкі на дорезонансних швидкостях.

Для усталених рухів $\tilde{\varphi}_{3/4}$ введемо збурений рух:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \alpha, \quad \psi = \tilde{\psi} + \beta, \quad \xi = \tilde{\xi} + u, \quad \eta = \tilde{\eta} + v. \tag{16}$$

Зауважимо, що

$$\sin\tilde{\varphi} = \pm 1, \quad \cos\tilde{\varphi} = 0, \quad \sin\varphi \approx \pm 1, \quad \cos\varphi \approx \mp\alpha. \tag{17}$$

Тоді рівняння першого наближення приймуть вид

$$l_1 = \ddot{\alpha} + h_1\dot{\alpha} \mp R_\omega^2(\tilde{\xi}\sin\tilde{\psi} - \tilde{\eta}\cos\tilde{\psi})\alpha = 0,$$

$$l_2 = (\ddot{\beta} + h_2\dot{\beta})R_\rho^2 \mp R_\omega^2(\tilde{\xi}\sin\tilde{\psi} - \tilde{\eta}\cos\tilde{\psi})\beta \mp$$

$$\mp [(\ddot{u} - 2R_\omega\dot{v} - R_\omega^2 u)\cos\tilde{\psi} +$$

$$+ (\ddot{v} + 2R_\omega\dot{u} - R_\omega^2 v)\sin\tilde{\psi}]\sin\tilde{\varphi} = 0,$$

$$l_3 = \ddot{u} - 2R_\omega\dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u \mp$$

$$\mp R_m\left[(\ddot{\beta} - R_\omega^2\beta)\cos\tilde{\psi} - 2R_\omega\dot{\beta}\sin\tilde{\psi}\right] = 0,$$

$$l_4 = \ddot{v} + 2R_\omega\dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v \mp$$

$$\mp R_m\left[(\ddot{\beta} - R_\omega^2\beta)\sin\tilde{\psi} + 2R_\omega\dot{\beta}\cos\tilde{\psi}\right] = 0. \tag{18}$$

Помножимо третє рівняння в (2) на $\sin\tilde{\psi}$ і віднімемо четверте рівняння, помножене на $\cos\tilde{\psi}$. З огляду на перші два рівняння в (2), одержимо

$$\tilde{\xi}\sin\tilde{\psi} - \tilde{\eta}\cos\tilde{\psi} = \pm R_m b, \tag{19}$$

$$b = \frac{R_\omega^2}{R_\omega^2 - 1}\left[1 \mp (u_0\sin\tilde{\psi} - v_0\cos\tilde{\psi})\right]. \tag{20}$$

Вводимо нові комплексні змінні

$$X = (u + iv)e^{-i\tilde{\psi}}, \quad Y = \bar{X}. \tag{21}$$

Тоді система рівнянь (18) перетворюється до виду

$$l_1 = \ddot{\alpha} + h_1\dot{\alpha} - R_m R_\omega^2 b\alpha = 0,$$

$$l_2 = (\ddot{\beta} + h_2\dot{\beta})R_\rho^2 - R_m R_\omega^2 b\beta \mp$$

$$\mp \frac{1}{2}[\ddot{X} + 2iR_\omega\dot{X} - R_\omega^2 X + \ddot{Y} - 2iR_\omega\dot{Y} - R_\omega^2 Y] = 0,$$

$$(l_3 + il_4)e^{-i\psi} = \ddot{X} + 2iR_\omega\dot{X} - R_\omega^2 X + H(\dot{X} + iR_\omega X) + X \mp$$

$$\mp R_m(\ddot{\beta} + 2iR_\omega\dot{\beta} - R_\omega^2\beta) = 0,$$

$$(l_3 - il_4)e^{i\psi} = \ddot{Y} - 2iR_\omega\dot{Y} - R_\omega^2 Y + H(\dot{Y} - iR_\omega Y) + Y \mp$$

$$\mp R_m(\ddot{\beta} - 2iR_\omega\dot{\beta} - R_\omega^2\beta) = 0. \tag{22}$$

Система розпалася на дві незалежні підсистеми. Перше рівняння в (22) має характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + h_1\lambda - R_m R_\omega^2 b = 0. \tag{23}$$

Це рівняння матиме корені з від'ємними дійсними частинами якщо його коефіцієнти будуть додатними. З огляду на (20) і те, що

$$1 \mp (u_0\sin\tilde{\psi} - v_0\cos\tilde{\psi}) > 0,$$

знаходимо наступну необхідну умову асимптотичної стійкості другої групи усталених рухів

$$|R_\omega| < 1. \tag{24}$$

тобто ротор повинен обертатися з дорезонансними швидкостями.

Введемо коефіцієнти

$$a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1, \quad a_{13} = (\lambda + iR_\omega)^2,$$

$$a_{33} = (\lambda^2 + h_2\lambda)R_\rho^2, \quad a_{44} = bR_\omega^2. \tag{25}$$

Тоді характеристичне рівняння другої підсистеми прийме вид

$$a_{11}\bar{a}_{11}a_{33} - \frac{R_m}{2}\left(a_{11}\bar{a}_{13}^2 + \bar{a}_{11}a_{13}^2\right) - R_m a_{11}\bar{a}_{11}a_{44} = 0. \tag{26}$$

У випадку, коли маса АТТ набагато менше маси ротора характеристичне рівняння в нульовому наближенні має вид

$$a_{11}\bar{a}_{11}a_{33} = 0.$$

Його корені

$$\lambda_0^{(1/2)} = -\frac{H}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} - iR_\omega,$$

$$\lambda_0^{(3/4)} = -\frac{H}{2} \mp i\sqrt{1 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} + iR_\omega,$$

$$\lambda_0^{(5)} = -h_2, \quad \lambda_0^{(6)} = 0. \tag{27}$$

Перші п'ять коренів мають від'ємну дійсну частину. Тому стійкість руху визначатиме наступне наближення до останнього - нульового кореня. Шукаємо розкладання цього кореня у виді (13). Підставляючи розкладання в характеристичне рівняння (26), і збираючи коефіцієнти при R_m, одержимо наступне рівняння для визначення $\lambda_1^{(6)}$:

$$\left[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2R_\omega^2\right]R_\rho^2 h_2\lambda_1 - (R_\omega^2 - 1)R_\omega^4 +$$

$$+ \left[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2R_\omega^2\right]bR_\omega^2 = 0.$$

Звідси знаходимо

$$\lambda_1^{(6)} = \frac{(R_\omega^2 - 1)R_\omega^4}{\left[(R_\omega^2 - 1)^2 + H^2R_\omega^2\right]R_\rho^2 h_2} + \frac{bR_\omega^2}{R_\rho^2 h_2}. \tag{28}$$

З (28) і (20) видно, що корінь $\lambda^{(6)}$ має в першому наближенні від'ємну дійсну частину тільки на дорезонансних швидкостях.

Таким чином, побічні рухи $\tilde{\varphi}_{3/4}$ асимптотично стійкі на дорезонансних швидкостях обертання ротора, і нестійкі на зарезонансних швидкостях.

Для усталених рухів $\tilde{\varphi}_{5/6}$ вводимо збурений рух (16). Зауважимо, що

$$\sin\tilde{\varphi} = 0, \quad \cos\tilde{\varphi} = \pm 1, \quad \sin\varphi \approx \pm\alpha, \quad \cos\varphi \approx \pm 1. \tag{29}$$

Тоді рівняння першого наближення приймуть вид

$$l_1 = \ddot{\alpha} + h_1\dot{\alpha} \pm R_\omega^2(\tilde{\xi}\cos\tilde{\psi} + \tilde{\eta}\sin\tilde{\psi})\beta \mp$$

$$\mp [(\ddot{u} - 2R_\omega\dot{v} - R_\omega^2 u)\sin\tilde{\psi} - (\ddot{v} + 2R_\omega\dot{u} - R_\omega^2 v)\cos\tilde{\psi}] = 0,$$

$$l_2 = (\ddot{\beta} + h_2\dot{\beta})R_\rho^2 \pm R_\omega^2(\tilde{\xi}\cos\tilde{\psi} + \tilde{\eta}\sin\tilde{\psi})\alpha = 0,$$

$$l_3 = \ddot{u} - 2R_\omega\dot{v} - R_\omega^2 u + H(\dot{u} - R_\omega v) + u \mp$$

$$\mp R_m\left[(\ddot{\alpha} - R_\omega^2\alpha)\sin\tilde{\psi} + 2R_\omega\dot{\alpha}\cos\tilde{\psi}\right] = 0,$$

$$l_4 = \ddot{v} + 2R_\omega\dot{u} - R_\omega^2 v + H(\dot{v} + R_\omega u) + v \pm$$

$$\pm R_m\left[(\ddot{\alpha} - R_\omega^2\alpha)\cos\tilde{\psi} - 2R_\omega\dot{\alpha}\sin\tilde{\psi}\right] = 0. \tag{30}$$

З (2) випливає, що

$$\tilde{\xi}\cos\tilde{\psi}+\tilde{\eta}\sin\tilde{\psi}=(\pm)\tilde{r}=(\pm)\frac{R_m R_\omega^2 e_0}{\sqrt{(R_\omega^2-1)^2+H^2R_\omega^2}}, \quad (31)$$

де $(\pm)$ - означає невизначений знак, не зв'язаний із номером усталеного руху. Вводимо комплексні змінні

$$X=(u+iv)e^{i\tilde{\psi}}, \quad Y=\overline{X}. \quad (32)$$

Тоді система рівнянь (30) перетворюється до виду

$$l_1=\ddot{\alpha}+h_1\dot{\alpha}\pm(\pm)\tilde{r}R_\omega^2\beta\mp$$
$$\mp\frac{1}{2}[\ddot{X}+2iR_\omega\dot{X}-R_\omega^2X+\ddot{Y}-2iR_\omega\dot{Y}-R_\omega^2Y]=0,$$
$$l_2=(\ddot{\beta}+h_2\dot{\beta})R_\rho^2\pm(\pm)\tilde{r}R_\omega^2\alpha=0,$$
$$(l_3+il_4)e^{i\psi}=\ddot{X}+2iR_\omega\dot{X}-R_\omega^2X+H(\dot{X}+iR_\omega X)+X\mp$$
$$\mp R_m(\ddot{\alpha}+2iR_\omega\dot{\alpha}-R_\omega^2\alpha)=0,$$
$$(l_3-il_4)e^{-i\psi}=\ddot{Y}-2iR_\omega\dot{Y}-R_\omega^2Y+H(\dot{Y}-iR_\omega Y)+Y\mp$$
$$\mp R_m(\ddot{\alpha}-2iR_\omega\dot{\alpha}-R_\omega^2\alpha)=0. \quad (33)$$

Введемо коефіцієнти

$$a_{11}=(\lambda+iR_\omega)^2+H(\lambda+iR_\omega)+1,$$
$$a_{13}=(\lambda+iR_\omega)^2, \quad a_{33}=(\lambda^2+h_1\lambda),$$
$$a_{34}=\frac{R_\omega^4e_0}{\sqrt{(R_\omega^2-1)^2+H^2R_\omega^2}}, \quad a_{44}=(\lambda^2+h_2\lambda)R_\rho^2. \quad (34)$$

Тоді характеристичне рівняння прийме вид

$$a_{11}\overline{a}_{11}a_{33}a_{44}-\frac{R_m}{2}(a_{11}\overline{a}_{13}^2+\overline{a}_{11}a_{13}^2)a_{44}-$$
$$-R_m^2a_{11}\overline{a}_{11}a_{34}^2=0. \quad (35)$$

У нульовому наближенні характеристичне рівняння (35) приймає вид

$$a_{11}\overline{a}_{11}a_{33}a_{44}=0.$$

Його корені

$$\lambda_0^{(1/2)}=-\frac{H}{2}\pm i\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}-iR_\omega,$$
$$\lambda_0^{(3/4)}=-\frac{H}{2}\mp i\sqrt{1-\left(\frac{H}{2}\right)^2}+iR_\omega,$$
$$\lambda_0^{(5)}=-h_1, \quad \lambda_0^{(6)}=-h_2, \quad \lambda_0^{(7/8)}=0. \quad (36)$$

Таким чином, у нульовому наближенні перші шість коренів мають від'ємну дійсну частину і два корені - нульові. Тому стійкість або нестійкість побічних рухів визначатимуть наступні наближення до нульових коренів. Шукаємо розкладання цих коренів у виді (13). Підставляючи (13) у (35), збираючи коефіцієнти при R_m^2 і перетворюючи, одержимо наступне рівняння для визначення $\lambda_1^{(7/8)}$

$$[(R_\omega^2-1)^2+H^2R_\omega^2]R_\rho^2h_1h_2\lambda_1^2+$$
$$+(R_\omega^2-1)R_\omega^4R_\rho^2h_2\lambda_1-R_\omega^8e_0^2=0. \quad (37)$$

Оскільки не всі коефіцієнти поліному (37) додатні, то у нього не менше одного кореня з додатною дійсною частиною. Тому усталені рухи $\tilde{\varphi}_{5/6}$ завжди нестійкі.

Остаточно можна зробити наступні висновки про стійкість усталених рухів системи у випадку, коли маса КВ набагато менше маси ротора (силами ваги можна знехтувати) і ємності КВ вистачає для зрівноваження дисбалансу:

1) на дорезонансних швидкостях обертання ротора асимптотично стійкі тільки ті усталені рухи, у яких КВ максимально відхилений(і) в більш важкий або легкий бік ротора, а всі інші усталені рухи нестійки;

2) на зарезонансних швидкостях обертання ротора асимптотично стійкі тільки основні рухи, а побічні - нестійки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Филимонихин Г.Б. О динамике уравновешивания ротора связанными маятниками, насаженными на оси, перпендикулярные валу // Материалы международной конференции "Моделирование и исследование устойчивости систем". Киев, 19-23 мая 1997. С.135

2. Філімоніхін Г.Б. Модель ротора, що здійснює плоскопаралельний рух і зрівноважується корегуючим вантажем, який обертається навколо повздовжньої і поперечної осей ротора // Машинознавство. - 2001. - №6. - С. 18-21.

3. Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А. Зменшення чутливості автобалансирів до сил ваги шляхом накладання в'язей // Збірник наукових праць КДТУ, - 2000. Вип.№6, С.76-77.

4. Филимонихин Г.Б., Невдаха Ю.А. Модель ротора, совершающего плоскопараллельные движения, и двух связанных АТТ // Збірник наукових праць КДТУ, 2001. Вип.№8, С.194-201.

5. Филимонихин Г.Б., Невдаха Ю.А. Установившиеся движения ротора, уравновешиваемого связанными корректирующими грузами с неподвижными точками на оси вала ротора // Сборник "Вестник НТУУ "КПИ", серия "Машиностроение", 2000. Вип. №39, С.102-110.

6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984. - 535 с.

Abstract. *Is investigated a stability of main and spurious steady-state motions of a system rotor - autobalancer. The rotor is located vertically and makes plane-parallel motion. The autobalancer is created by corrective mass (CM), which can turn round longitudinal and cross-sectional axes of a rotor, or two such CM, which is connected so, that they can turn round cross-sectional axes on equal angles in opposite legs. In case, when the mass of CM is much less than a mass of a rotor (and gravity it is possible to neglect) is established, that below the resonance speed of the rotation of the rotor asymptotically stable is only the spurious motions, in which the rotor is unbalancing, and higher the resonance speed - two main motions, in which the rotor is balancing.*

Філімоніхін Геннадій Борисович (1964 р.н.)

Адреса: вул. Героїв Сталінграду, 26, корп. 1, кв. 84, м. Кіровоград, Україна, 25031

Тел.: (0522) 59-84-56 (д.), 59-75-47 (сл.)

Місце праці: Кіровоградський державний технічний університет, доцент кафедри деталей машин та прикладної механіки

Канд. фіз.-мат. наук, доцент

Невдаха Юрій Андрійович (1956 р.н.)

Адреса: вул. Шевченко, 75, кв. 13, с. Соколівське, Кіровоградська обл., Україна, 27641

Тел.: (0522) 21-36-13 (д.), 59-75-47 (сл.)

Місце праці: Кіровоградський державний технічний університет, завідувач лабораторією кафедри деталей машин та прикладної механіки