

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра: "Матеріалознавство та ливарне виробництво"

**ТЕОРІЯ
ФОРМУВАННЯ ВИЛИВКА**

Методичні рекомендації

до лабораторних робіт
для студентів спеціальності
131 – "Прикладна механіка"
(для всіх форм навчання)

Методичні рекомендації до лабораторних робіт з курсу “Теорія формування виливка” для студентів спеціальності 131 – "Прикладна механіка" (для всіх форм навчання) /Розроб. В.М. Ломакін – Кропивницький: ЦНТУ, 2020. – 76 с.

Рецензент: Якименко С.М. – к.ф-м.н., доцент

Автор: Ломакін В.М. – к.т.н., доц. каф. МЛВ

Відповідальний за випуск: В.М. Ломакін

Затверджено на засіданні
кафедри матеріалознавства
та ливарного виробництва
ЦНТУ
Протокол № 1 від
19.08.2020 р.

© Теорія формування виливка
© В.М. Ломакін

ЗМІСТ

	стор.
Вказівки до виконання лабораторних робіт.....	4
Рекомендації до оформлення звіту.....	4
Лабораторна робота № 1. Дослідження температурного поля відливка тонкого круглого однорідного стержня на ЕОМ	5
Лабораторна робота №2. Дослідження температурного поля відливка плити на ЕОМ	23
Лабораторна робота № 3. Дослідження температурного поля відливка кулі на ЕОМ	40
Лабораторна робота № 4. Дослідження температурних полів відливка, що твердне, і ливарної форми на ЕОМ.....	53
Лабораторна робота № 5. Дослідження температурних полів відливка і форми експериментальним методом	65
Література	75

Вказівки до виконання лабораторних робіт

1. Студенти мають бути підготовлені до лабораторної роботи. Теоретична підготовка перевіряється за допомогою тестів.
2. Перед початком виконання лабораторних робіт отримати інструктаж з правил техніки безпеки і неухильно його виконувати.
5. За пошкодження обладнання студенти несуть матеріальну відповідальність.
6. Після закінчення роботи студенти повинні прибрати своє робоче місце.

Рекомендації до оформлення звіту

1. Звіт з кожної роботи оформлюється в окремому зошиті, або на аркушах формату А4, у відповідності з установленою схемою для кожної лабораторної роботи: назва і мета роботи, табличні дані, графіки та висновки. Теоретичні відомості наводити коротко.
2. По закінченню заняття оформлений звіт подається викладачеві для перевірки і підпису в разі позитивного тестування і виконання належного об'єму робіт.

Лабораторна робота №1

Дослідження температурного поля відливка тонкого круглого однорідного стержня на ЕОМ

Мета роботи – дослідити методом математичного моделювання температурне поле відливка тонкого однорідного стержня в процесі охолодження, алгоритм розв'язання задачі і програму його реалізації на ЕОМ; дати аналіз розв'язку задачі в залежності від прийнятої схеми розрахунку.

1.1. Теоретичні відомості

Дослідження процесів теплопередачі у відливках можна вести двома методами: а) експериментальним; б) математичного моделювання з наступним розв'язанням крайової задачі на ЕОМ.

При другому способі за основу береться диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є в частинних похідних [1]. Воно описує процеси теплопередачі при затвердінні й охолодженні відливка, а також прогріву форми. Усе це необхідно для вивчення закономірностей зміни температурного поля відливка і форми, що істотно впливає на розробку технологічного процесу виготовлення відливка.

Нехай теплота передається в умовах зміни температури T тільки вздовж координати x . Це – одновимірна задача. Для тонкого однорідного стержня виберемо систему координат так, щоб її початок збігався з одним із кінців стержня. Вісь (ox) збігається з віссю стержня. Тоді рівняння теплопровідності буде мати вигляд [1, 2]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

де T – температура стержня, К;

t – поточний час, с;

a – коефіцієнт температуропровідності, $\text{м}^2/\text{с}$;

x – поточна координата, м;

L – довжина стержня, м.

Щоб отримати єдиний розв'язок задачі, рівняння (1.1) необхідно доповнити умовами однозначності [1, 3], що складаються з:

а) геометричної характеристики відливка;

б) початкових умов, що задають розподіл температури у відливку в початковий момент часу ($t=0$);

в) граничних умов, що визначають умови теплопередачі на кінцях стержня, тобто на границях при $x=0$, $x=L$;

г) характеристики теплофізичних властивостей матеріалу відливка (питома теплоємність, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, теплопровідність, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, густина, $\text{кг}/\text{м}^3$).

Геометрична характеристика відливка задається словесним формулюванням і координатами його початку і кінця ($x=0$, $x=L$).

Характеристики теплофізичних властивостей відливка приймаються постійними, тобто вони не змінюються в залежності від часу і температури.

Початкові і граничні умови можна задати в різних видах, зокрема, в таких:

а) початкова

$$T(x, 0) = f(x), \quad (1.2)$$

граничні

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

$$T(L, t) = \Psi(t), \quad (1.4)$$

б) початкова

$$T(x, 0) = f(x), \quad (1.5)$$

граничні

$$T(0, t) = \Psi_1(t), \quad (1.6)$$

$$T(L, t) = \Psi_2(t), \quad (1.7)$$

де $f(x)$, $\Psi(t)$, $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ – відомі функції, відповідно від x і t .

Гранична умова (1.3) визначає теплову ізоляцію стержня при $x=0$ (умова симетричного охолодження для відливків кулі і циліндра); граничні умови (1.4), (1.7) задають закон зміни температури на правому кінці стержня як функції часу, а умова (1.6) – зміну температури на кінці стержня при $x=0$.

Перейдемо до безрозмірних (узагальнених) змінних. У цьому випадку

$$X = \frac{x}{L}; \quad \tau = \frac{at}{L^2}; \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_n - T_c}, \quad (1.8)$$

де X, τ, θ – відповідно безрозмірні довжина, час, температура;

T, T_n, T_c – температури, відповідно, поточна, початкова і навколишнього середовища.

Нехай $f(x) = 1$, $\Psi(t) = 0$.

Тоді крайова задача (1.1) – (1.4) буде мати вигляд:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0, \quad (1.9)$$

$$\theta(X, 0) = 1, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad (1.11)$$

$$\theta(1, \tau) = 0. \quad (1.12)$$

Розв'язком крайової задачі (1.9) – (1.12) є функція $\theta = \theta(X, \tau)$, яка задовольняє рівнянню (1.9), початковій (1.10) і граничним умовам (1.11), (1.12).

1.2. Послідовність розв'язання задачі на ЕОМ

1. Опис процесу і постановка задачі. На цьому етапі потрібне глибоке розуміння сутності задачі.

2. Розробка математичної моделі процесу. Цей етап вимагає повного розуміння проблеми і знання відповідних розділів математики.

3. Арифметизація задачі. Сучасні ЕОМ можуть виконувати найпростіші арифметичні дії (додавання, віднімання, множення, ділення) і приймати найпростіші логічні рішення. Тому математична модель повинна бути перетворена так, щоб такі поняття, як диференціальні рівняння, інтеграли та інші були виражені через елементарні арифметичні дії, котрі може виконувати ЕОМ.

4. Програмування на ЕОМ. Математичний алгоритм розв'язання задачі треба виразити у вигляді однозначної послідовності операцій ЕОМ. Цей етап виконується у дві стадії: на першій – алгоритм виконується мовою блок-схеми, на другій – мовою ЕОМ.

5. Відпрацювання програми. На цьому етапі усуваються можливі помилки і перевіряється правильність програми.

6. Обчислення.

1.3. Алгоритм розв'язання крайової задачі теплопровідності точним методом

В математиці доводиться, що для крайової задачі (1.9) – (1.12) точний розв'язок має вигляд [1]:

$$\theta(X, \tau) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{\mu_m} \cos(\mu_m X) e^{-\mu_m^2 \tau}, \quad (1.13)$$

де $m = 1, 2, 3, \dots$ – число членів ряду;

$$\mu_m = \frac{\pi(2m-1)}{2}.$$

Схема і блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі (1.9) – (1.12) точним методом показані на рис. 1.1 і рис.1.2.

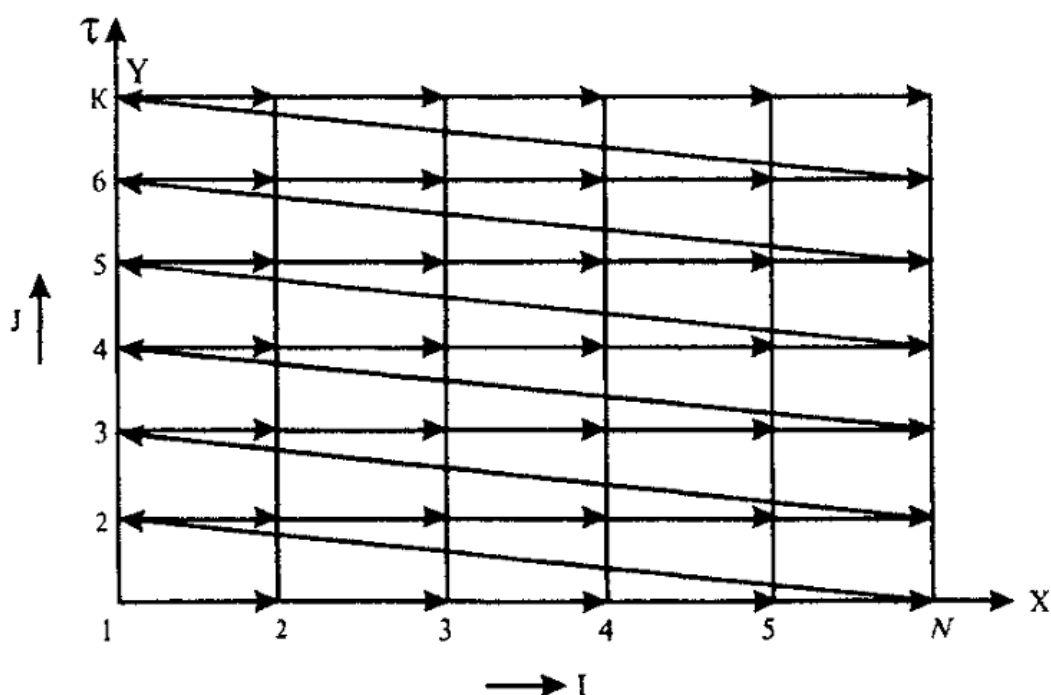


Рисунок 1.1 – Послідовність визначення температури в різних точках температурного поля

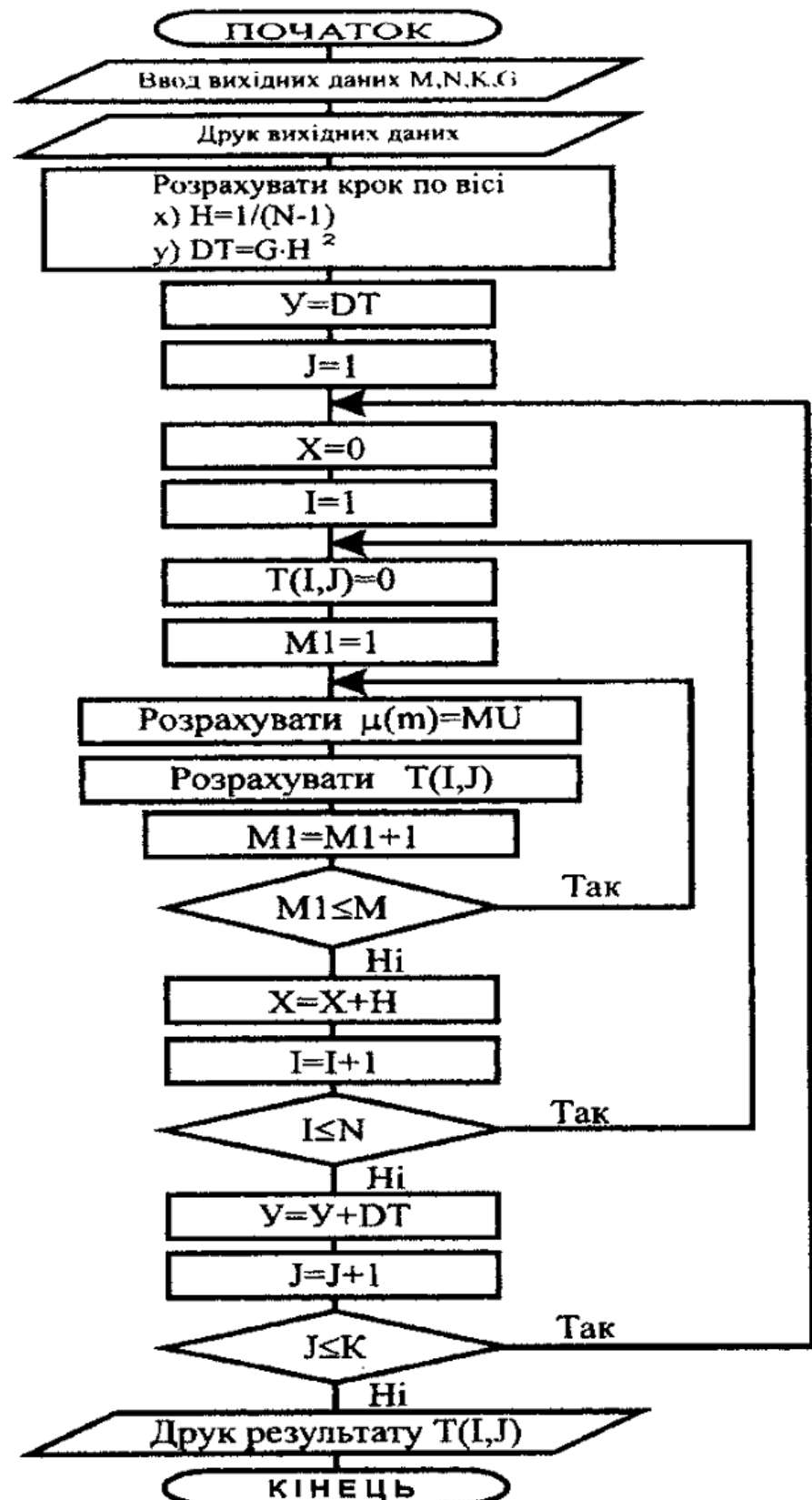


Рисунок 1.2 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі точним методом

Прийняті умовні позначення:

M – прийнята кількість членів ряду (1.13);

N – кількість вузлів по осі X ;

K – кількість часових шарів по осі τ ;

$\sigma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2}$ – параметр сітки;

I, J – лічильники, відповідно, по осях X і τ ;

M – лічильник кількості членів ряду;

$T(I,J)$ – поточне значення температури у відповідному вузлі;

H, DT – величина кроку, відповідно, по осях X і τ .

Спочатку потрібно визначити температуру у вузлі сітки з координатами $I=1, J=1$, а потім температуру в усіх інших вузлах першого часового шару ($I=2,3,4,5,\dots,N-1; J=1$). Потім – температуру у вузлі сітки з координатами $I=1, J=2$ і так далі, поки не буде визначена температура в кожному вузлі всіх часових шарів (рис. 1.1 і рис. 1.2).

1.4. Алгоритм розв'язання крайової задачі методом сіток

Сутність чисельного методу сіток полягає в тому, що тіло розбивається на елементарні об'єми, які обмінюються між собою теплотою. При цьому формується сітка із n -ої кількості вузлів (рис. 1.3), які є центрами елементарних об'ємів [3,4].

Використання дискретних значень температури у вузлах сітки дозволяє апроксимувати частинні похідні, що входять до рівняння Фур'є, і отримати рішення задачі (1.9) – (1.12).

Звичайно, на границях розрахункової області (сітки) необхідно задавати початкові і граничні умови.

Апроксимація частинних похідних виконується наступним чином.

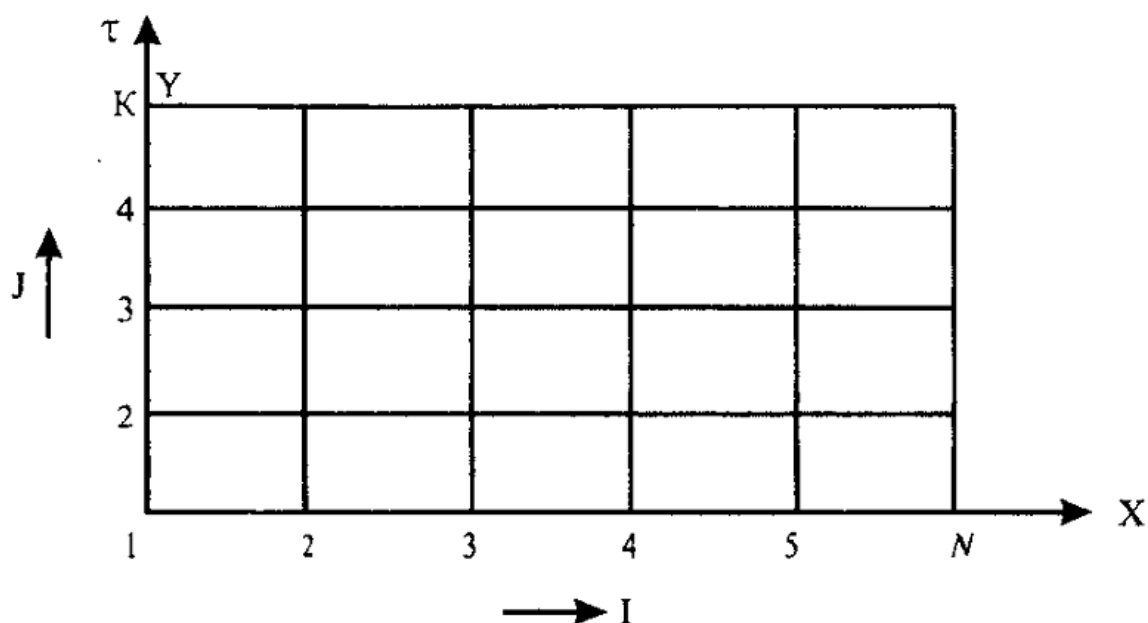


Рисунок 1.3 – Схема алгоритму розв'язання задачі методом сіток

Нехай $N-1$ – число кроків по осі X . Тоді величина кроку

$$\Delta X = \frac{1}{N-1}. \quad (1.14)$$

Якщо по осі τ величину кроку прийняти рівною $\Delta\tau$, то прямокутна сітка на рис. 1.3 характеризується такими параметрами:

$$x(I) = (I-1)\Delta X; \quad I = 1, 2, \dots, N; \quad (1.15)$$

$$\tau(J) = (J-1)\Delta\tau; \quad J = 1, 2, \dots, K. \quad (1.16)$$

Отже,

$$\theta(I, J) = \theta(X_i, \tau_j). \quad (1.16a)$$

З курсу вищої математики [2] відомо, що частинні похідні можна представляти скінченними різницями.

Перша частинна похідна буде мати вигляд:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\theta(I, J+1) - \theta(I, J)}{\Delta\tau}. \quad (1.17)$$

Друга частинна похідна, в залежності від прийнятої розрахункової схеми, може бути представлена у вигляді явної чи неявної різницевої схеми.

1.4.1. Розрахункова схема явної різницевої схеми (показана на рис. 1.4).

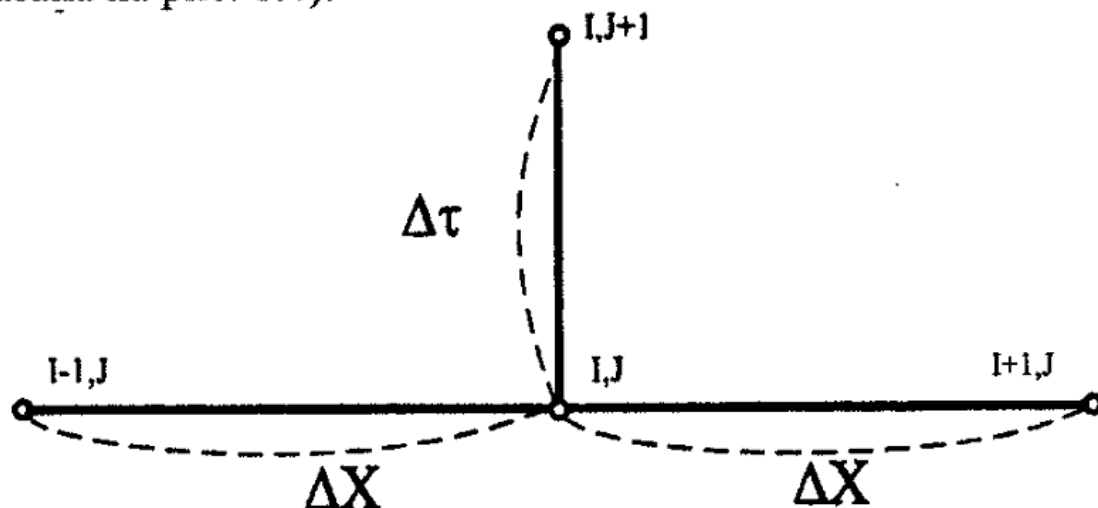


Рисунок 1.4 – Явна різницева схема

Друга частинна похідна в цьому випадку має вигляд:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\theta(I+1, J) - 2\theta(I, J) + \theta(I-1, J)}{\Delta X^2} \quad (1.18)$$

Замінімо рівняння (1.9) скінченно-різницеvim рівнянням. Використовуючи вирази (1.17) і (1.18), маємо

$$\frac{\theta(I, J+1) - \theta(I, J)}{\Delta \tau} = \frac{\theta(I+1, J) - 2\theta(I, J) + \theta(I-1, J)}{\Delta X^2} \quad (1.19)$$

Після перетворень і спрощень одержимо

$$\theta(I, J+1) = \sigma\theta(I-1, J) + (1 - 2\sigma)\theta(I, J) + \sigma\theta(I+1, J), \quad (1.20)$$

де $\sigma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2}$; $I = 2, 3, \dots, N-1$, $J = 2, \dots, K$.

З виразу (1.20) випливає, що значення функції $\theta(X, \tau)$ у вузлах $(J+1)$ -го часового шару можна визначити за допомогою значень температури у вузлах J -го часового шару.

Схема розв'язання крайової задачі показана на рис. 1.5.

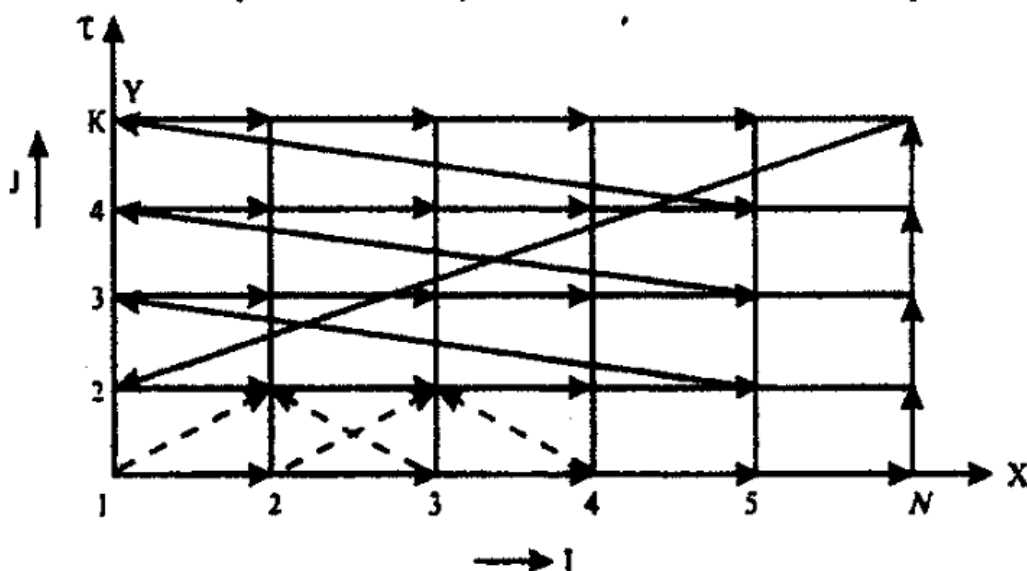


Рисунок 1.5 – Послідовність визначення температури у вузлах температурного поля по явній різницевій схемі

Блок схема алгоритму розв'язання крайової задачі (1.9) – (1.12) по явній різницевій схемі показана на рис. 1.6. Згідно з початковою умовою $\theta(X, 0) = 1$ (рис. 1.5) спочатку заповнюються вузли сітки першого часового шару ($I = 1, 2, \dots, N$; $J = 1$). Потім, відповідно до граничної умови $\theta(1, \tau) = 0$ заповнюються вузли сітки правого кінця стержня ($I = N$; $J = 2, 3, \dots, K$).

Після цього обчислюється значення температури у вузлі з координатами $I = 1$, $J = 2$, тобто при $X = 0$. Оскільки значення функції у вузлі $X = 0$ безпосередньо з виразу (1.20) визначити не можна, скористаємося умовою (1.11), яка визначає теплову ізоляцію лівого кінця стержня. Рівняння (1.20) набуває вигляду:

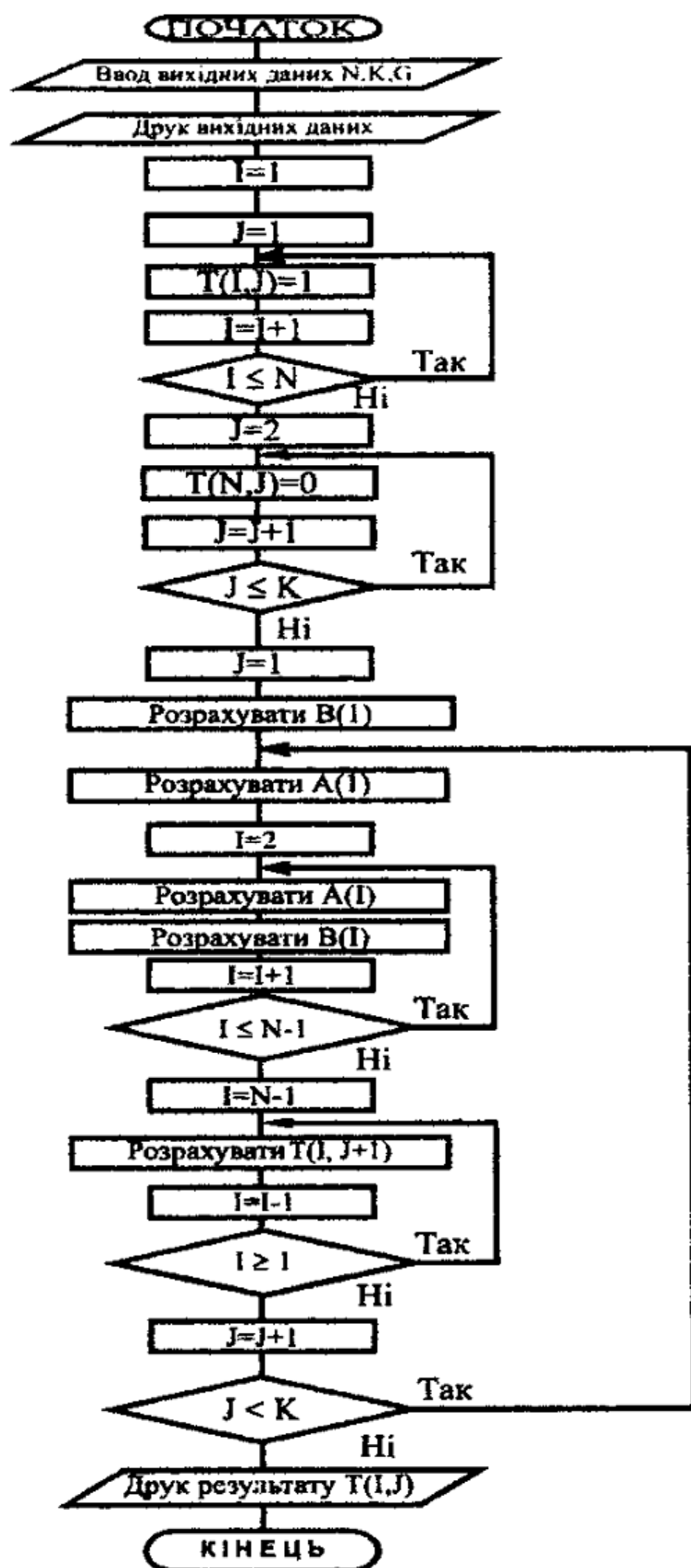


Рисунок 1.6 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі по явній різницевій схемі

$$\theta(1, J + 1) = 2\sigma\theta(2, J) + (1 - 2\sigma)\theta(1, J). \quad (1.21)$$

Отже, для визначення температури у вузлі $I=1, J=2$ необхідно знати її значення у вузлах $I=2, J=1; I=1, J=1$.

Визначивши температуру у вузлах $I=1, J=2$, переходять до вузла $I=2, J=2$ і потім послідовно до всіх вузлів, що лежать на другому часовому шарі ($I=2, 3, \dots, N-1; J=2$). При цьому для визначення температури, наприклад, у вузлі $I=2, J=2$ використовуються значення температури у вузлах $I=1, J=1; I=2, J=1; I=3, J=1$, які відомі з початкової умови.

Розрахунок за формулами (1.20) та (1.21) дозволяє явно розрахувати значення функції $\theta(X, \tau)$ на $(J+1)$ -му часовому шарі, тому ця схема називається явною різницевою схемою.

Очевидно, точність апроксимації частинних похідних у виразах (1.17) і (1.18) залежить від величин Δt і ΔX ; чим вони менші, тим точніше апроксимуються похідні і з тим більшою точністю розв'язується задача. Однак, для явної різницевої схеми величини Δt і ΔX не можна вибирати довільно. При певних співвідношеннях між ними $\sigma = \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2}$ явна різницева схема стає нестійкою. Це означає, що малі похибки, допущені в процесі розв'язання задачі, призводять до суттєвих відхилень від точного розв'язку. Тому нестійка скінченно-різницева схема рідко застосовується для обчислень.

Таким чином, скінченно-різницева схема має бути стійкою, тобто такою, коли малі похибки, допущені в процесі розв'язання задачі, затухали чи залишалися б малими при необмеженому збільшенні номера поточного часового шару.

Умовою стійкості скінченно-різницевої схеми є співвідношення [4, 6]:

$$0 < \sigma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (1.22)$$

при $\sigma=1/6$ точність розв'язання задачі при заданій величині ΔX найбільша.

1.4.2. Розрахункова схема неявної різницевої схеми (показана на рис. 1.7).

У даному випадку друга частинна похідна буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\theta(I+1, J+1) - 2\theta(I, J+1) + \theta(I-1, J+1)}{\Delta X^2}. \quad (1.23)$$

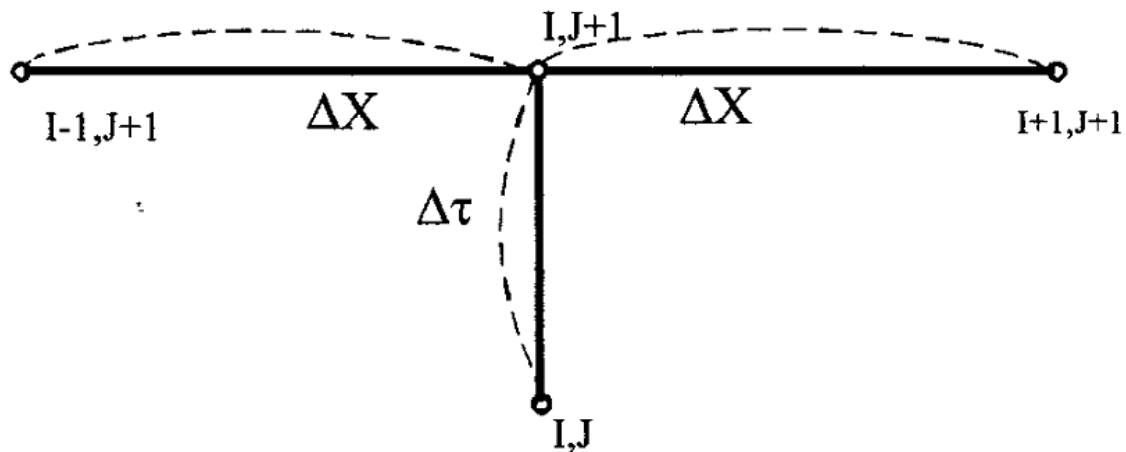


Рисунок 1.7 – Неявна різницева схема

Порівнявши між собою першу і другу частинні похідні, після спрощень одержимо

$$\theta(I, J+1) = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sigma}} \left[\theta(I-1, J+1) + \theta(I+1, J+1) + \frac{1}{\sigma} \theta(I, J) \right], \quad (1.24)$$

де $I=2, \dots, N-1$; $J=2, 3, \dots, K$.

Для вузла при $X=0$ маємо:

$$\theta(1, J+1) = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sigma}} \left[2\theta(2, J+1) + \frac{1}{\sigma} \theta(1, J) \right]. \quad (1.25)$$

З граничної умови (1.12) одержуємо

$$\theta(N, J+1) = 0. \quad (1.26)$$

Рівняння (1.24) і (1.25) вже не дозволяють у явному вигляді визначити значення функції $\theta(X, \tau)$ на $(J+1)$ -му часовому шарі. Для їхнього визначення розглянемо рис. 1.8.

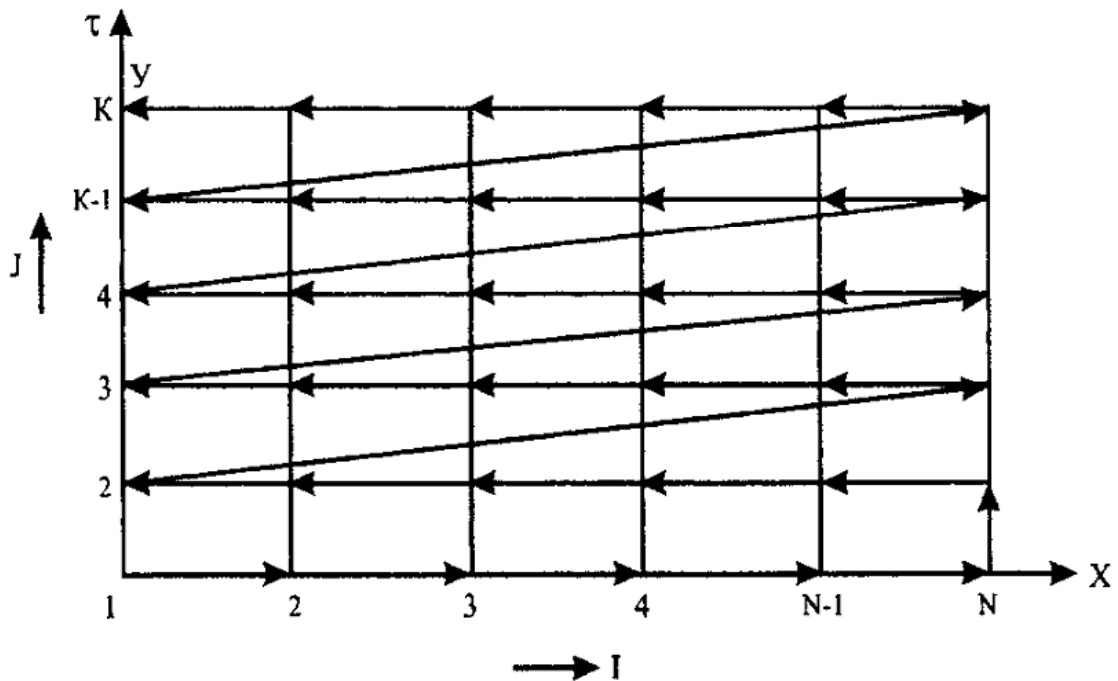


Рисунок 1.8 – Послідовність визначення температури в різних точках температурного поля за неявною різницевою схемою

Відповідно до початкової умови відома температура на першому часовому шарі ($I=1, 2, \dots, N; J=1$), а згідно з граничною умовою $\theta(1, \tau)=0$ відома температура на правому кінці стержня ($I=N; J=2, 3, \dots, K$). Отже, для кожного часового

шару ($J=2,3,\dots,K$) будемо мати N вузлів i , стільки ж, алгебраїчних рівнянь.

На відміну від явної різницевої схеми неявна різницева схема є стійкою при будь-якому значенні параметра $\sigma = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2}$, що дозволяє вибирати $\Delta\tau$ і ΔX незалежно один від одного.

Наприклад, для другого часового шару (рис. 1.8) система алгебраїчних рівнянь буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 \theta(9,2) &= 0; \\
 \theta(8,2) &= \left[\theta(7,2) + \frac{1}{\sigma} \theta(8,1) + \theta(9,2) \right] \cdot \frac{1}{2 + 1/\sigma}; \\
 \theta(7,2) &= \left[\theta(6,2) + \frac{1}{\sigma} \theta(7,1) + \theta(8,2) \right] \cdot \frac{1}{2 + 1/\sigma}; \\
 \theta(6,2) &= \left[\theta(5,2) + \frac{1}{\sigma} \theta(6,1) + \theta(7,2) \right] \cdot \frac{1}{2 + 1/\sigma}; \\
 \theta(5,2) &= \left[\theta(4,2) + \frac{1}{\sigma} \theta(5,1) + \theta(6,2) \right] \cdot \frac{1}{2 + 1/\sigma}; \\
 \theta(4,2) &= \left[\theta(3,2) + \frac{1}{\sigma} \theta(4,1) + \theta(5,2) \right] \cdot \frac{1}{2 + 1/\sigma}; \\
 \theta(3,2) &= \left[\theta(2,2) + \frac{1}{\sigma} \theta(3,1) + \theta(4,2) \right] \cdot \frac{1}{2 + 1/\sigma}; \\
 \theta(2,2) &= \left[\theta(1,2) + \frac{1}{\sigma} \theta(2,1) + \theta(3,2) \right] \cdot \frac{1}{2 + 1/\sigma}; \\
 \theta(1,2) &= \left[\frac{1}{\sigma} \theta(1,1) + 2 \cdot \theta(2,2) \right] \cdot \frac{1}{2 + 1/\sigma}.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.27), з огляду на їх специфічну форму, можна розв'язати спеціальним дуже економним методом прогонки.

Розглянемо цей метод. Нехай

$$\theta(I, J + 1) = A(I) + B(I) \cdot \theta(I + 1, J + 1), \quad (1.28)$$

де $A(I)$, $B(I)$ – деякі константи. Отже,

$$\theta(I - 1, J + 1) = A(I - 1) + B(I - 1) \cdot \theta(I, J + 1). \quad (1.29)$$

Підставивши (1.29) в (1.24), одержимо

$$\begin{aligned} \theta(I, J + 1) = & \frac{Z}{1 - Z \cdot B(I - 1)} [A(I - 1) + \theta(I + 1, J + 1) + \\ & + \frac{1}{\sigma} \cdot \theta(I, J)], \end{aligned} \quad (1.30)$$

де
$$Z = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sigma}}.$$

Порівнявши (1.30) з (1.28), отримаємо

$$A(I) = \frac{Z}{1 - Z \cdot B(I - 1)} \left(A(I - 1) + \frac{1}{\sigma} \cdot \theta(I, J) \right); \quad (1.31)$$

$$B(I) = \frac{Z}{1 - Z \cdot B(I - 1)}. \quad (1.32)$$

Користуючись формулами (1.31) і (1.32), за допомогою наскрізного розрахунку (пряма прогонка), можна визначити коефіцієнти $A(I)$ та $B(I)$ в усіх вузлах сітки J -го часового шару. Очевидно, для цього необхідно знати початкові значення коефіцієнтів прогонки $A(1)$ і $B(1)$.

Для визначення коефіцієнтів $A(1)$ і $B(1)$ запишемо рівняння (1.28) для першого вузла ($I=1$):

$$\theta(1, J+1) = A(1) + B(1) \cdot \theta(2, J+1). \quad (1.33)$$

Порівнявши рівняння (1.33) з (1.25), отримуємо:

$$A(1) = \frac{Z}{\sigma} \cdot \theta(1, J), \quad (1.34)$$

$$B(1) = 2Z. \quad (1.35)$$

Для визначення температури у вузлах сітки застосовується прогонка в зворотному напрямку по формулі (1.28).

Таким чином, вказано спосіб переходу від J -го часового шару до $(J+1)$ -го. Використавши значення температури на початковому часовому шарі і на правому кінці стержня (згідно з початковими умовами математичної моделі), можливо крок за кроком визначити значення температури у всіх точках сітки ($X_{i,j}$).

Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі (1.9) – (1.12) за неявною різницевою схемою зображена на рис. 1.9.

1.5. Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з постановкою задачі і метою роботи.
2. Вивчити послідовність розв'язання задачі на ЕОМ.
3. Засвоїти порядок розв'язання задачі точним методом і методом сіток (явну і неявну різницеві схеми).
4. Вивчити блок-схеми алгоритмів розв'язання задачі точним методом, явною і неявною різницевими схемами.

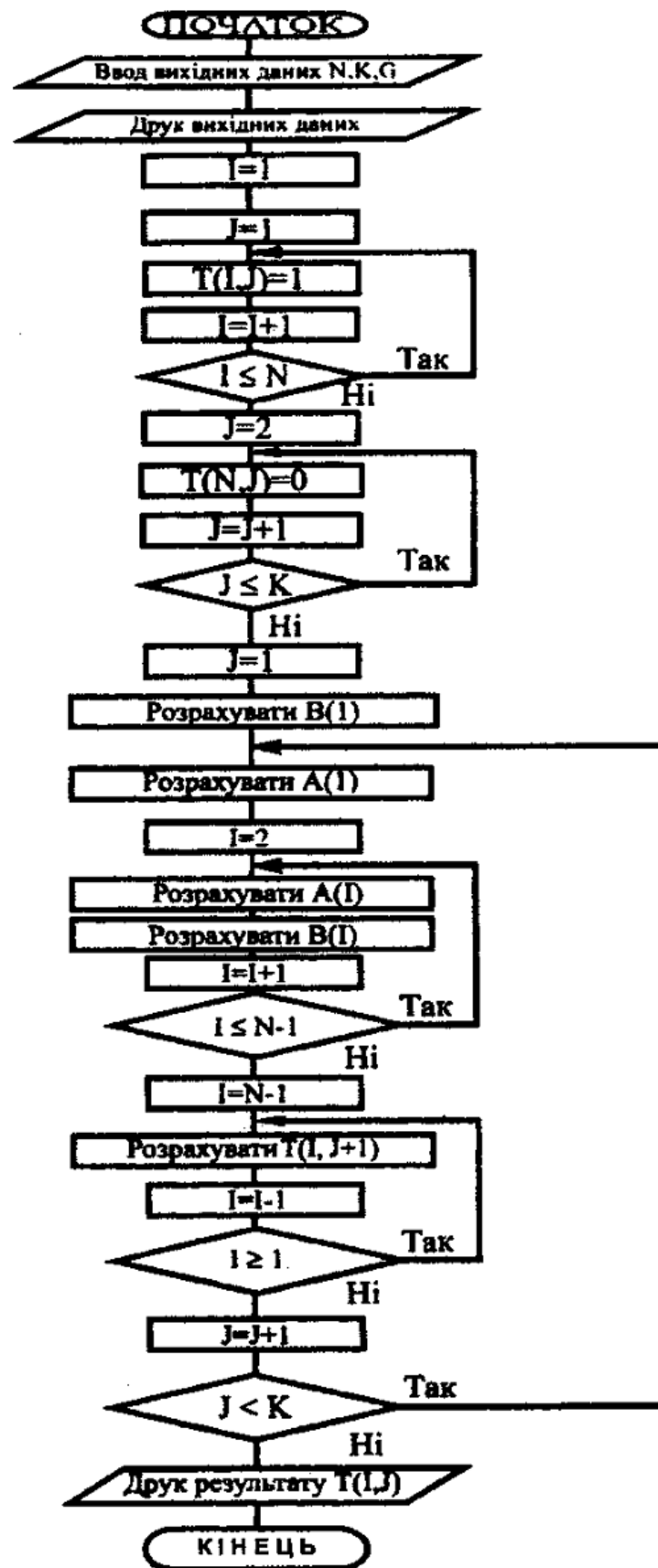


Рисунок 1.9 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі за неявною різницевою схемою

1.6. Зміст звіту

1. Короткий опис теоретичної частини роботи.
2. Сутність методу сіток.
3. Таблиці розрахунків на ЕОМ (роздруківка в системі EXCEL).
4. Графіки температурних кривих (рисунки в системі EXCEL).
5. Оцінка точності розв'язання задачі.
6. Обговорення результатів і висновки.

1.7. Контрольні питання

1. Рівняння теплопровідності в диференціальній формі.
2. Умови однозначності.
3. Узагальнені змінні.
4. Алгоритм розв'язання крайової задачі точним, явним і неявним різницевиими методами.
5. Блок-схеми алгоритмів розв'язання точним методом і методом сіток.

Лабораторна робота №2

Дослідження температурного поля відливка плити на ЕОМ

Мета роботи – дослідити методом математичного моделювання температурне поле відливка у вигляді необмеженої плити і напівнескінченного тіла в процесі теплообміну, алгоритми розв'язання задач і програми їх реалізації на ЕОМ.

2.1. Математичне формулювання задачі охолодження необмеженої плити і нагрівання напівнескінченного тіла при граничних умовах третього роду

Розглянемо відливки типу “плита” (рис. 2.1). Нехай $c \gg l$, $b \gg l$.

В цьому випадку тепловідводом через торцеві поверхні можна знехтувати. Теплота буде розповсюджуватись в одному напрямку x – перпендикулярно до поверхні, обмеженої сторонами b , c . Такий відливok називають необмеженою плитою.

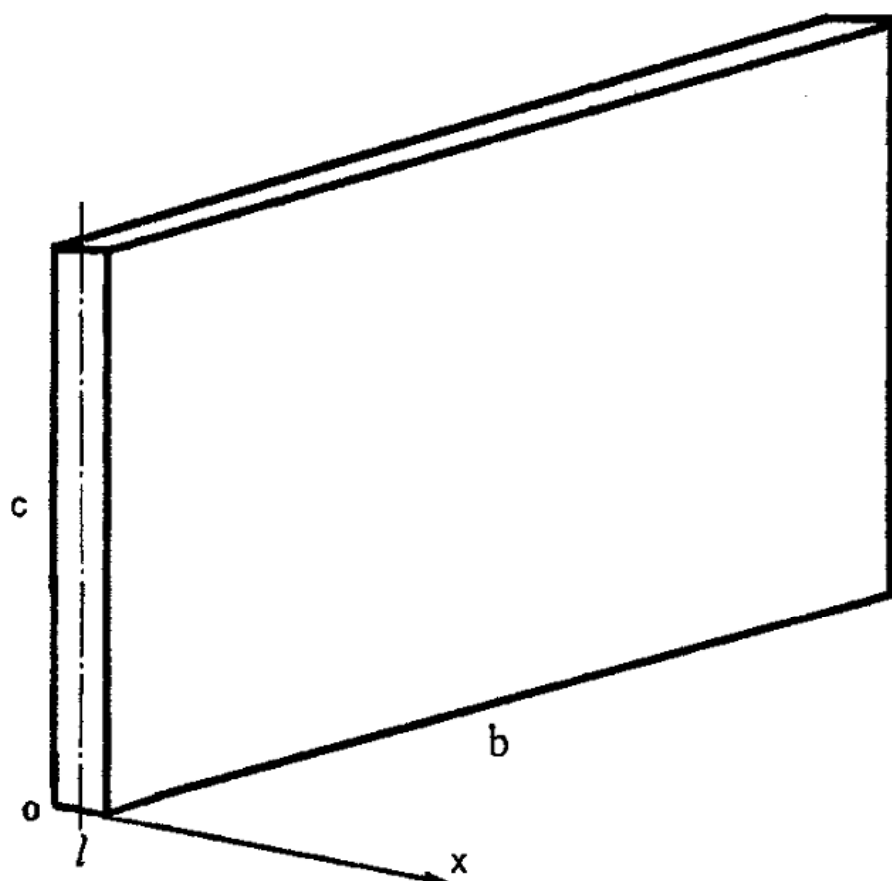


Рисунок 2.1 – Відливok „плита”

Якщо розміри плити необмежені по всім напрямкам, окрім від’ємних значень x , то у такої плити $0 < l < \infty$, $-\infty < c < \infty$, $-\infty < b < \infty$, і вона називається напівнескінченим (напівобмеженим) тілом. Це означає, що тіло має тільки одну граничну поверхню. Прикладом може бути ливарна форма, в якій охолоджується відливok при литті в кесонах.

Очевидно, що в обох випадках передачу теплоти можна розглядати як одномірну задачу вздовж осі x . Математичне формулювання задачі про теплообмін має наступний вигляд:

а) для необмеженої плити при охолодженні рівняння теплопровідності Фур'є має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (2.1)$$

початкова умова

$$T(x, 0) = T_n = \text{const}; \quad (2.2)$$

умова теплової ізоляції

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0; \quad (2.3)$$

гранична умова третього роду

$$-\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = \alpha(T_0 - T_c); \quad (2.4)$$

$$T_c = \text{const}; \quad (2.5)$$

б) для напівнескінченного тіла при нагріванні

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0; \quad (2.6)$$

$$T(x, 0) = 0; \quad (2.7)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha[T_c - T(0, t)]; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial T(\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad T(\infty, t) = T_n; \quad T_n < T_c, \quad (2.9)$$

де l - розмір відливка, вздовж якого передається теплота, м;
 T_n - температура відливка на початку процесу, К; T_0 , T_c - температура, відповідно, граничної поверхні і навколишнього середовища, К; λ - коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К);
 α - коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К).

Рівність (2.9) – додаткова гранична умова для напівнескінченного тіла, яку можна сформулювати так: на нескінченно великій відстані від граничної поверхні за час процесу теплообміну густина теплового потоку дорівнює нулю, а температура тіла не змінюється.

В узагальнених змінних математичні моделі (2.1) – (2.5) і (2.6) – (2.9) будуть мати вигляд:

а) для необмеженої плити:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad 0 < X < 1, \quad \tau > 0; \quad (2.10)$$

$$\theta(X, 0) = 1; \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0; \quad (2.12)$$

$$-\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} = Bi\theta(1, \tau); \quad \theta_c = 0, \quad (2.13)$$

де $X = \frac{x}{l}$ – відносна координата; (2.14)

$$\theta(X, \tau) = \theta = \frac{T(x, t) - T_c}{T_n - T_c} \text{ – відносна температура; } \quad (2.15)$$

$$\tau = \frac{a \cdot t}{l^2} \text{ – відносний час, або критерій Фур'є; } \quad (2.16)$$

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda} l \text{ – критерій Біо; } \quad (2.17)$$

б) для напівнескінченного тіла:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}; \quad 0 < X < \infty; \quad \tau > 0; \quad (2.18)$$

$$\theta(X, 0) = 0; \quad (2.19)$$

$$-\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 1 - \theta(0, \tau); \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \theta(\infty, \tau)}{\partial X} = 0; \quad (2.21)$$

$$\theta_c = 1; \quad (2.22)$$

де

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad (2.23)$$

$$\theta(X, \tau) = \theta = \frac{T(x, t) - T_n}{T_c - T_n}, \quad (2.24)$$

$$\tau = \frac{a \cdot t}{\delta^2}, \quad X = \frac{x}{\delta}. \quad (2.25)$$

2.2. Алгоритми розв'язання теплових задач

2.2.1. Необмежена плита

В курсі вищої математики доводиться, що розв'язком крайової задачі (2.10) – (2.13) є вираз:

$$\theta(X, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\mu_m) \cos(\mu_m X)}{\mu_m + \sin(\mu_m) \cos(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 \tau), \quad (2.26)$$

де μ_m – корені трансцедентного рівняння

$$\mu \operatorname{tg} \mu = Bi. \quad (2.27)$$

При аналізі теплових процесів формування відливків у ливарній формі досить часто застосовується метод А.І. Вейніка

Закон розподілу температури в твердій кірці відливка задається виразом:

$$T = T_o - (T_o - T_{нов}) \cdot \left(\frac{z}{y} \right)^n, \quad (2.28)$$

де y – відстань від граничної поверхні тіла до точки, в якій визначається температура T ; z – відстань від будь-якої точки температурного поля до границі розділу між рідкою і твердою частинами тіла (відливка); T_o – температура затвердіння відливка; $T_{нов}$ – температура поверхні відливка; n – показник параболи, значення котрого визначається експериментально або шляхом співставлення з точним розв'язком задачі.

Для задачі (2.10) – (2.13) методом А.І. Вейніка [3] знайдено наближений розв'язок:

$$\theta(X, \tau) = \left(1 - \frac{Bi X^n}{n + Bi} \right) \exp \left[- \frac{(n + 1)Bi(\tau - \tau_1)}{n + 1 + Bi} \right], \quad (2.29)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2n(n + 1)} + \frac{1}{(n + 1)Bi} - \frac{n}{(n + 1)Bi^2} \ln \left(1 + \frac{Bi}{n} \right); \quad (2.30)$$

де τ_1 – відносний час, на протязі котрого температура центра тіла залишається рівною його початковій температурі.

Послідовність розв'язання і блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі (2.10) – (2.13) точним методом наведені на рис. 2.2 і рис. 2.3.

Блок схема розв'язання крайової задачі наближеним методом А.І. Вейніка зображена на рис 2.4. Послідовність розв'язання задачі така ж, як і при точному методі.

Розв'яжемо крайову задачу (2.10) – (2.13) одним із наближених методів сіток – по явній різницевій схемі.

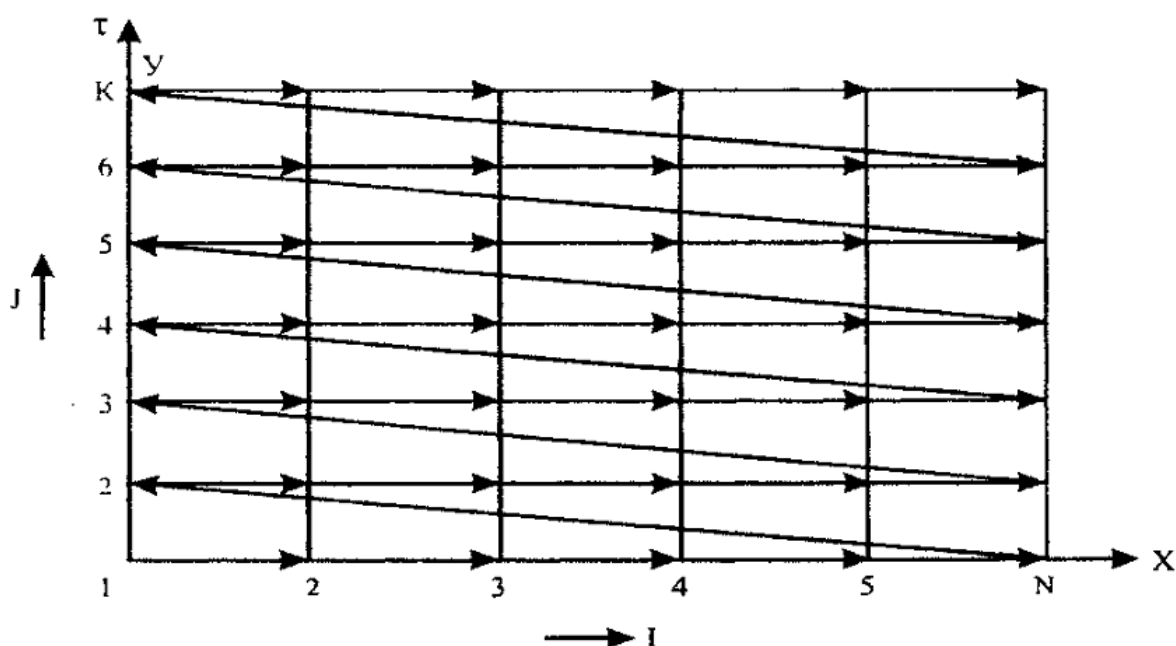


Рисунок 2.2 – Схема розв'язання крайової задачі точним методом

Система скінченно-різницевих рівнянь в цьому випадку буде мати наступний вигляд:

а) для початкового моменту часу

$$\theta(I, 0) = 1, \quad I = 1, 2, \dots, N; \quad (2.31)$$

б) для лівого кінця плити

$$\theta(I, J + 1) = 2\sigma\theta(I + 1, J) + (1 - 2\sigma)\theta(I, J); \quad (2.32)$$

$$I = 1, \quad J = 2, 3, \dots, K;$$

або

$$\theta(1, J + 1) = 2\sigma\theta(2, J) + (1 - 2\sigma)\theta(1, J);$$

в) для внутрішніх вузлів сітки

$$\theta(I, J + 1) = \sigma\theta(I - 1, J) + (1 - 2\sigma)\theta(I, J) + \sigma\theta(I + 1, J), \quad (2.33)$$

$$I = 2, 3, \dots, N - 1; \quad J = 2, 3, \dots, K.$$

Для правого кінця плити, із рівняння (2.33) при $I = N$ отримаємо:

$$\theta(N, J) = \sigma\theta(N - 1, J - 1) + (1 - 2\sigma)\theta(N, J - 1) + \sigma\theta(N + 1, J - 1), \quad (2.34)$$

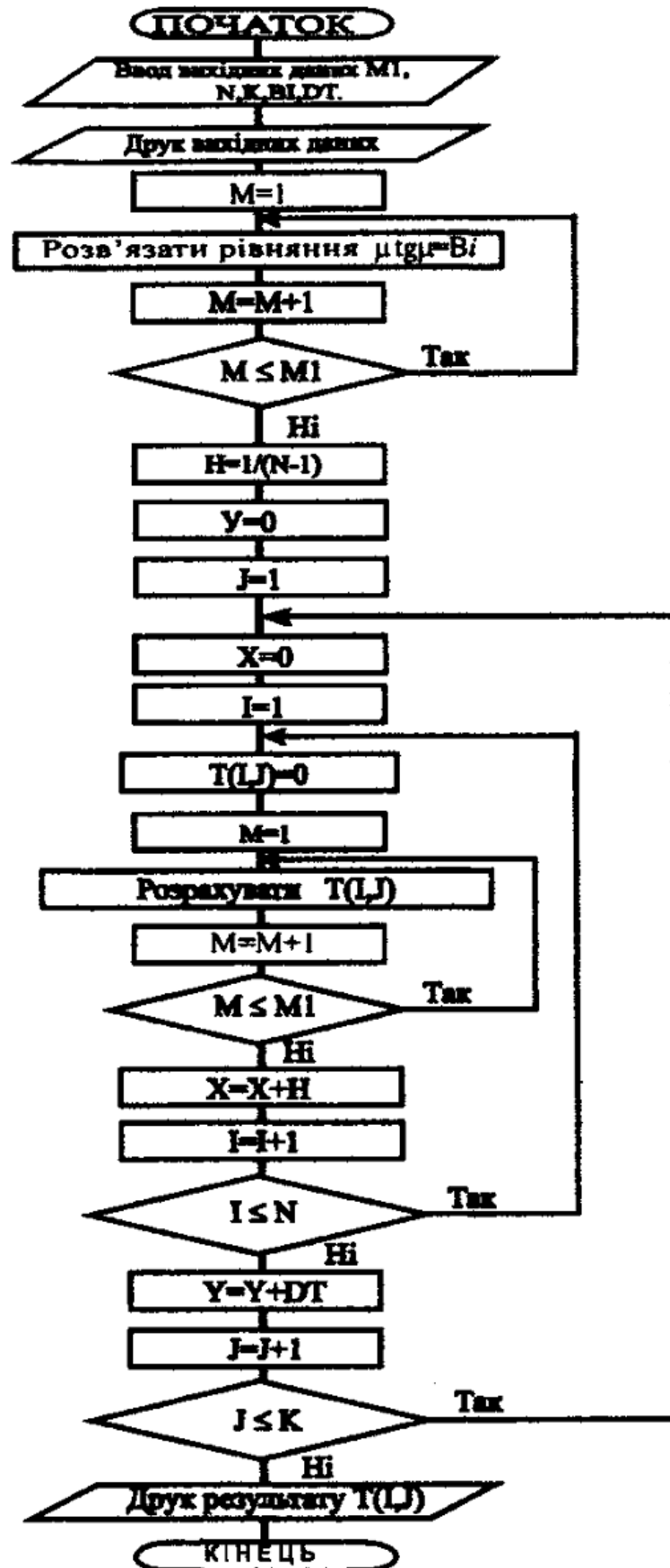


Рисунок 2.3 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі точним методом

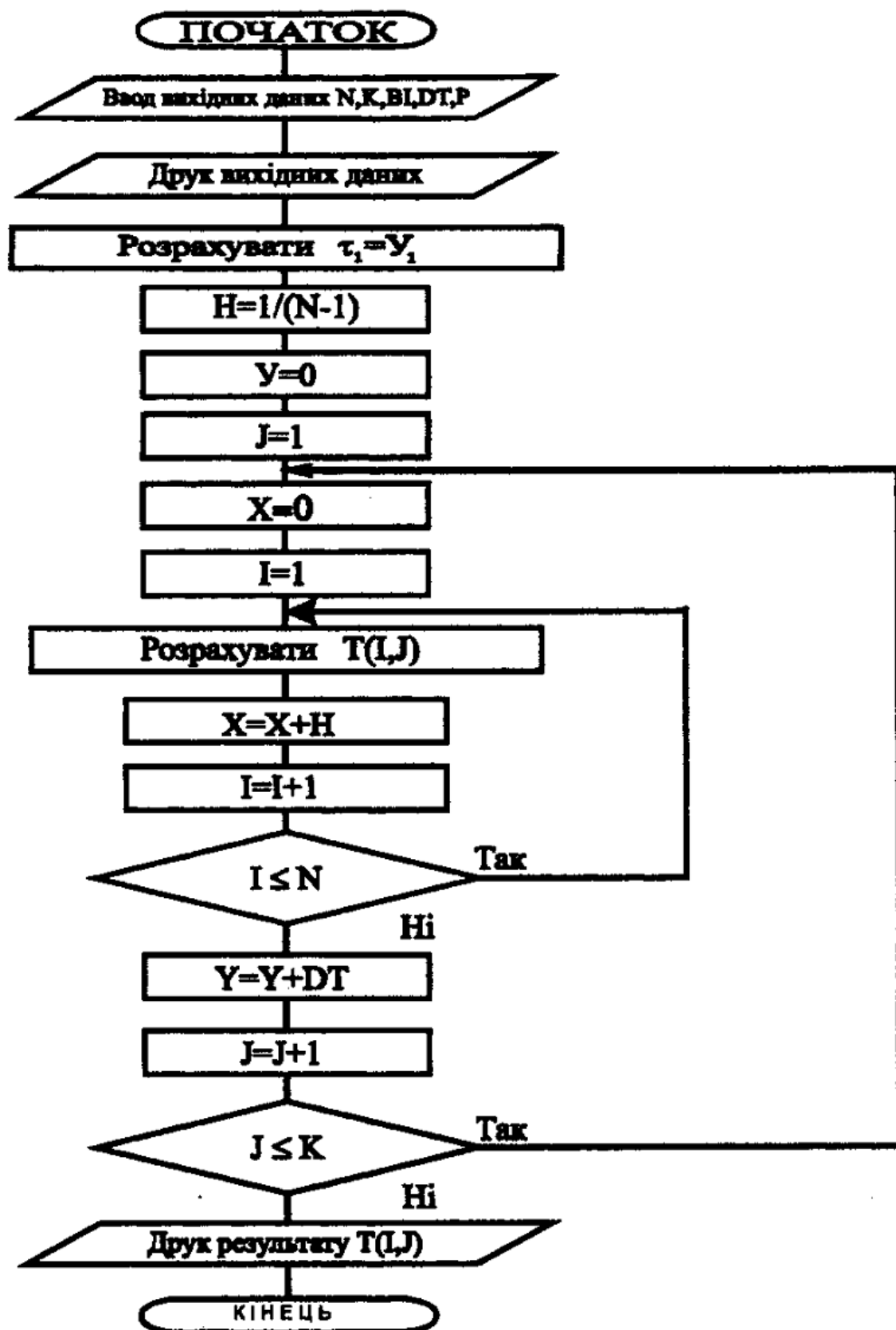


Рисунок 2.4 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі наближеним методом

або

$$\theta(N, J+1) = \sigma\theta(N-1, J) + (1-2\sigma)\theta(N, J) + \sigma\theta(N+1, J).$$

В рівнянні (2.34) невідомим є значення $\theta(N+1, J)$. Для його визначення скористаємося граничною умовою (2.13), з урахуванням якої запишемо

$$-\frac{\partial\theta(1, \tau)}{\partial X} = -\frac{\theta(N+1, J) - \theta(N, J)}{\Delta X} \approx Bi \cdot \theta(1, \tau) = Bi \cdot \theta(N, \tau). \quad (2.35)$$

Після перетворень отримаємо

$$\theta(N+1, J) = (1 - \Delta X Bi) \cdot \theta(N, J). \quad (2.36)$$

Підставивши (2.36) в (2.34), отримаємо

$$\theta(N, J+1) = \sigma[\theta(N-1, J) + (1 - \Delta X Bi) \cdot \theta(N, J)] + (1 - 2\sigma) \cdot \theta(N, J). \quad (2.37)$$

Блок-схема цього алгоритму зображена на рис. 2.5.

2.3. Напівнескінченне тіло

Для математичної моделі (2.18) – (2.22) відомо точний розв'язок, який визначається з використанням інтегрального перетворення Лапласа. Цей розв'язок має вигляд

$$\theta(X, \tau) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\tau}}\right) + \exp(X + \tau) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right], \quad (2.38)$$

де

$$\operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\tau}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{X}{2\sqrt{\tau}}} e^{-u^2} du, \quad (2.39)$$

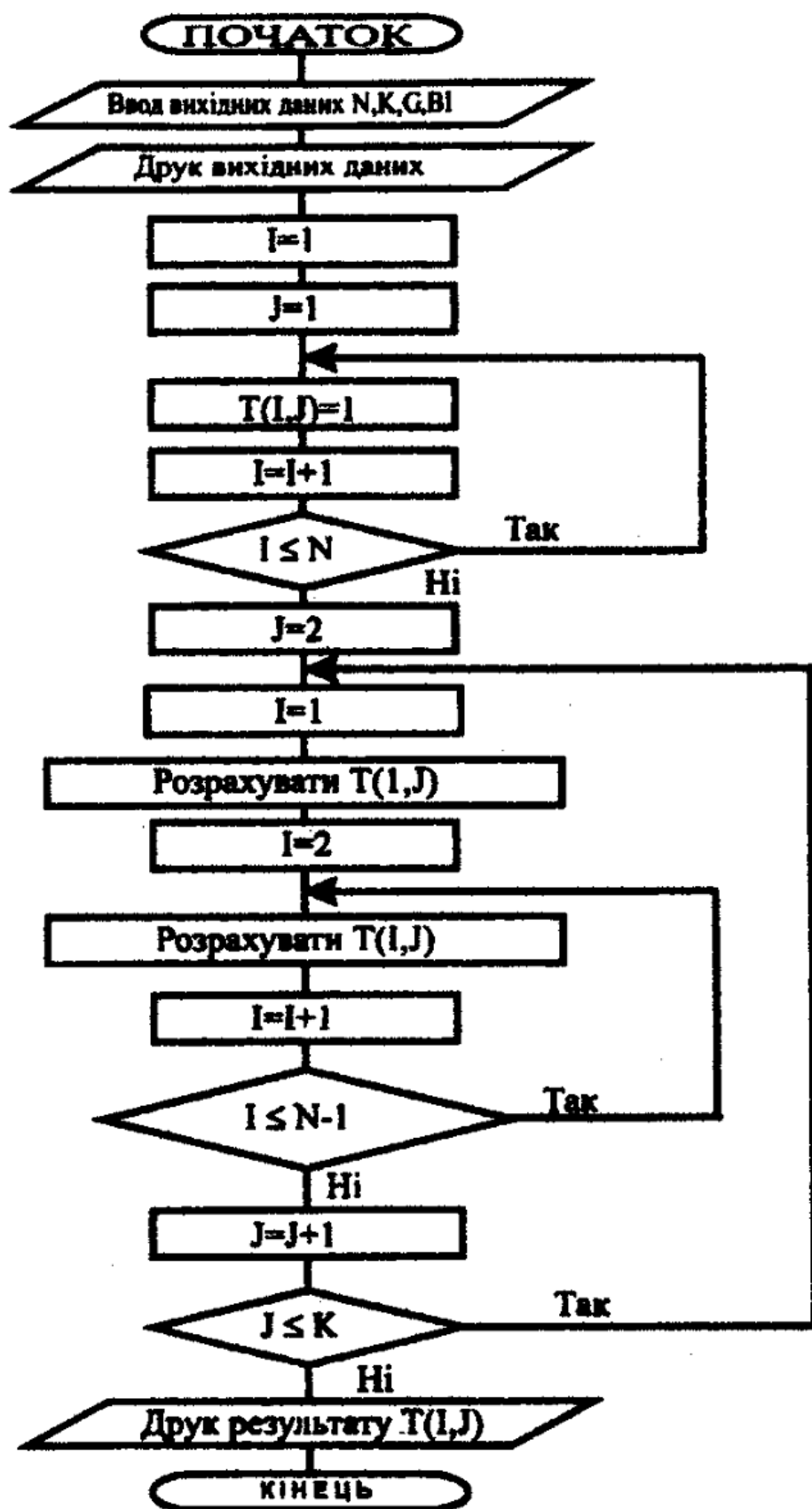


Рисунок 2.5 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі методом сіток за явною різницевою схемою

$$\operatorname{erf}\left(\frac{X}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u=\frac{X}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}} e^{-u^2} du, \quad (2.40)$$

є функціями помилок, або інтегралами Гауса.

Вираз (2.38) – точний аналітичний розв'язок задачі. Він представляє точну узагальнену математичну модель процесу нагріву напівнескінченного тіла при граничній умові третього роду.

Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі точним методом наведена на рис. 2.6.

Методом А.І. Вейніка знайдено наближений розв'язок крайової задачі (2.18) – (2.22), який має вигляд [3]:

$$\theta(X, \tau) = \frac{(X_i - X)^n}{X_i^{n-1}(X_i + n)}, \quad (2.41)$$

де X_i – відносна глибина прогріву тіла, що визначається із співвідношення

$$\tau = \frac{X_i^2}{2n(n+1)} + \frac{X_i}{n+1} - \frac{n}{n+1} \ln\left(1 + \frac{X_i}{n}\right). \quad (2.42)$$

Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі наближеним методом наведена на рис. 2.7.

Розглянемо чисельне розв'язання крайової задачі для напівнескінченного тіла методом сіток за явною різницевою схемою. Для цього узагальнену математичну модель (2.18) – (2.22) представимо системою скінченно-різницевих рівнянь:

а) для початкового моменту часу

$$\theta(I, J) = 0, \quad I = 1, 2, \dots, N, \quad J = 1; \quad (2.43)$$

б) для проміжних вузлів сітки

$$\begin{aligned} \theta(I, J) = & \sigma\theta(I-1, J-1) + (1-2\sigma) \cdot \theta(I, J-1) + \\ & + \sigma\theta(I+1, J-1). \end{aligned} \quad (2.44)$$

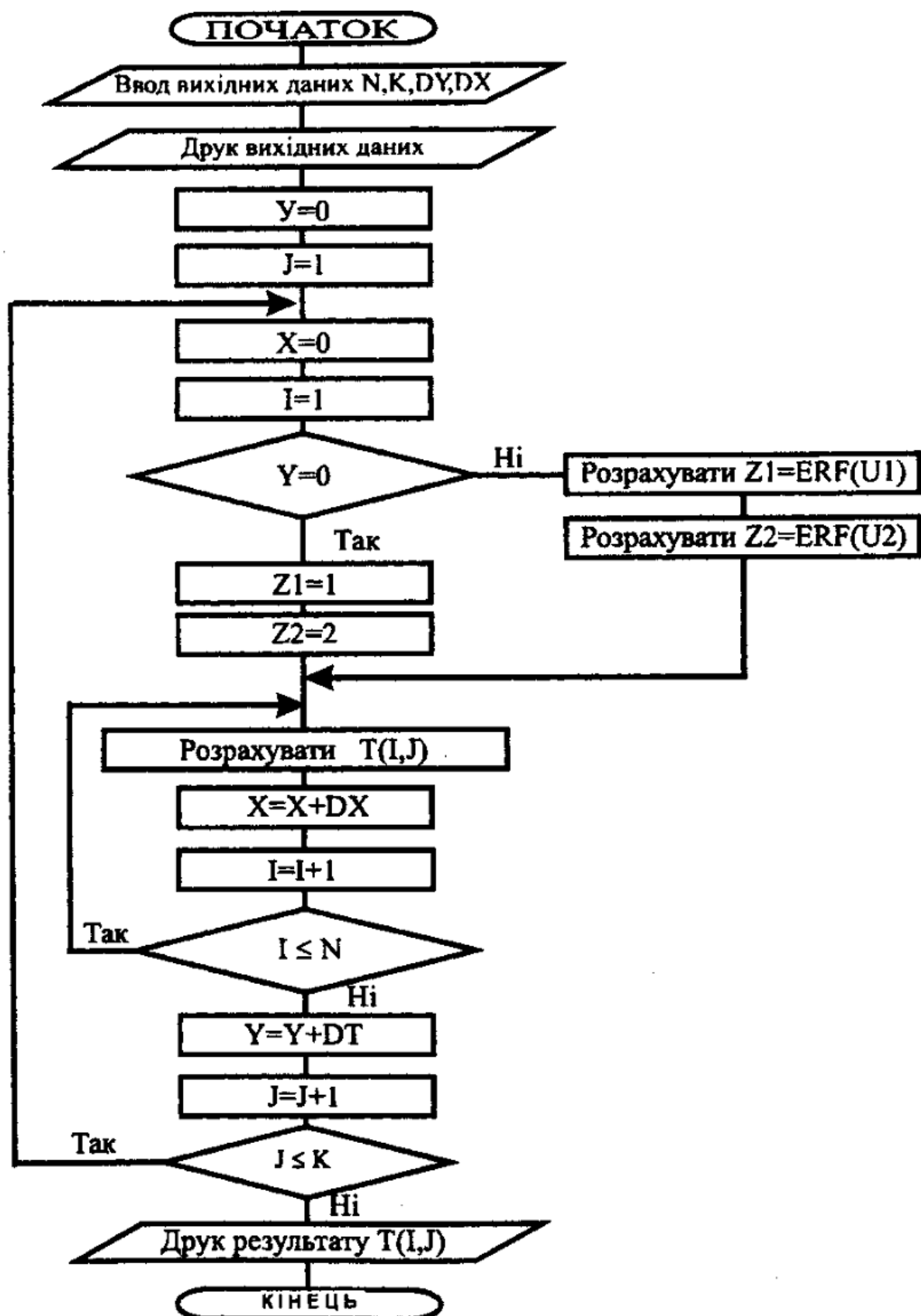


Рисунок 2.6 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі для напівнескінченного тіла точним методом

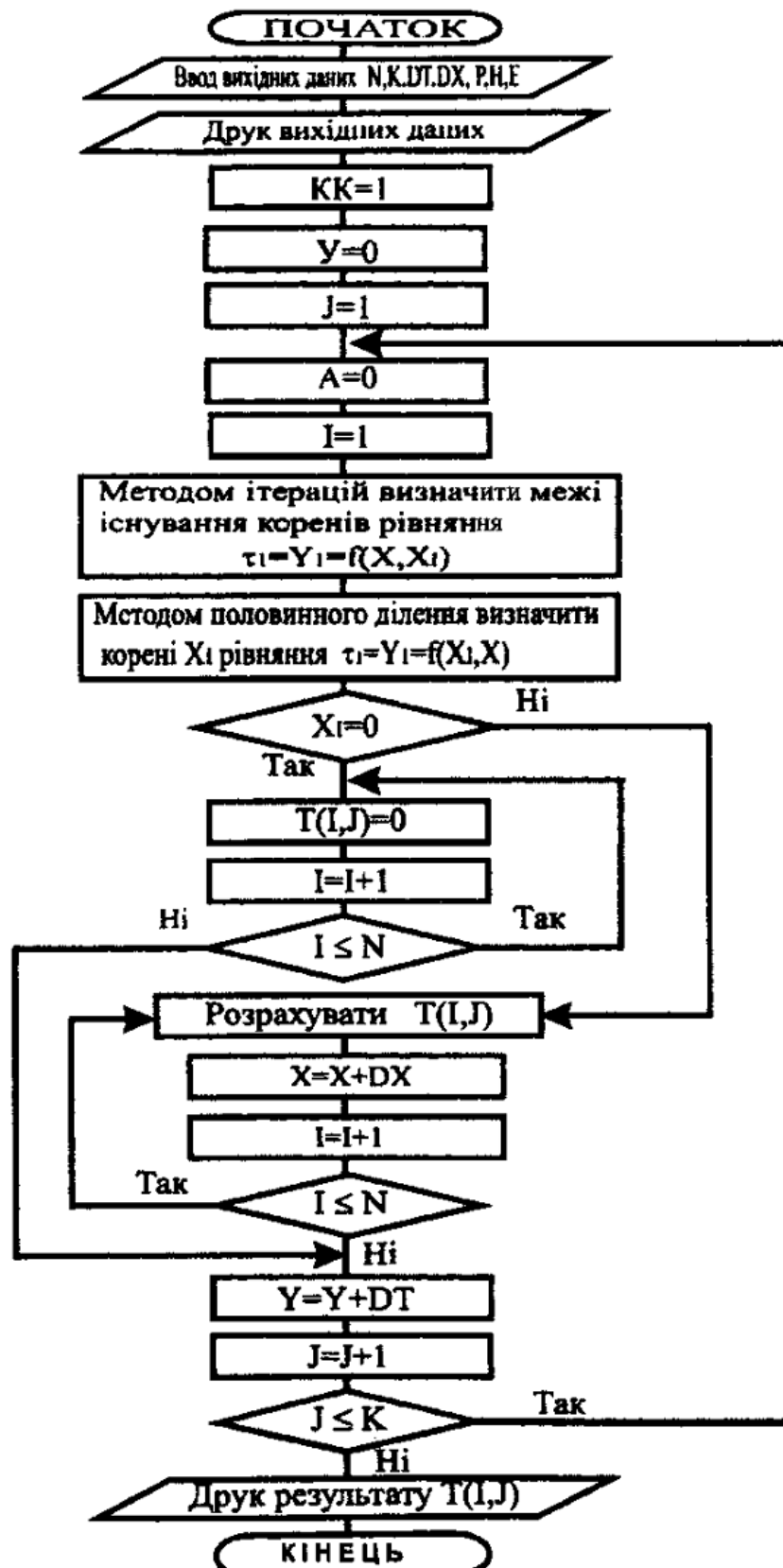


Рисунок 2.7 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі для напівнескінченного тіла наближеним методом А.І. Вейніка

Для правого кінця тіла граничну умову не задано, оскільки розмір тіла необмежений. Для лівого кінця тіла скінченно-різницеве рівняння визначимо, використовуючи граничну умову (2.20).

Із (2.44) при $I=1$ будемо мати

$$\theta(1, J) = \sigma\theta(0, J-1) + (1-2\sigma) \cdot \theta(1, J-1) + \sigma\theta(2, J-1). \quad (2.45)$$

Невідомим в (2.45) є значення $\theta(0, J-1)$. Із (2.20) маємо

$$-\frac{\theta(1, J-1) - \theta(0, J-1)}{\Delta X} = 1 - \theta(1, J-1). \quad (2.46)$$

Після перетворень отримаємо

$$\theta(0, J-1) = \theta(1, J-1) + \Delta X [1 + \theta(1, J-1)]. \quad (2.47)$$

Після підстановки (2.47) в (2.45) і перетворень остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} \theta(1, J) = & \sigma[\theta(1, J-1) + \Delta X [1 - \theta(1, J-1)]] + \\ & + (1-2\sigma) \cdot \theta(1, J-1) + \sigma\theta(2, J-1). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Температуру поверхні тіла можна розрахувати за формулою [4]:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} [3\theta(1, J) - \theta(2, J-1)]. \quad (2.49)$$

Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі (2.43) – (2.48) зображена на рис. 2.8.

2.4. Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з постановкою задачі і метою роботи.
2. Вивчити математичні моделі теплообміну для необмеженої плити і напівнескінченного тіла при граничних умовах третього роду.
3. Ознайомитись з наближеним методом розв'язання крайових задач теплопровідності методом А.І. Вейніка.
4. Вивчити блок-схеми алгоритмів розв'язання крайових задач точним методом, методом А.І. Вейніка, методом сіток за явною різницевою схемою.

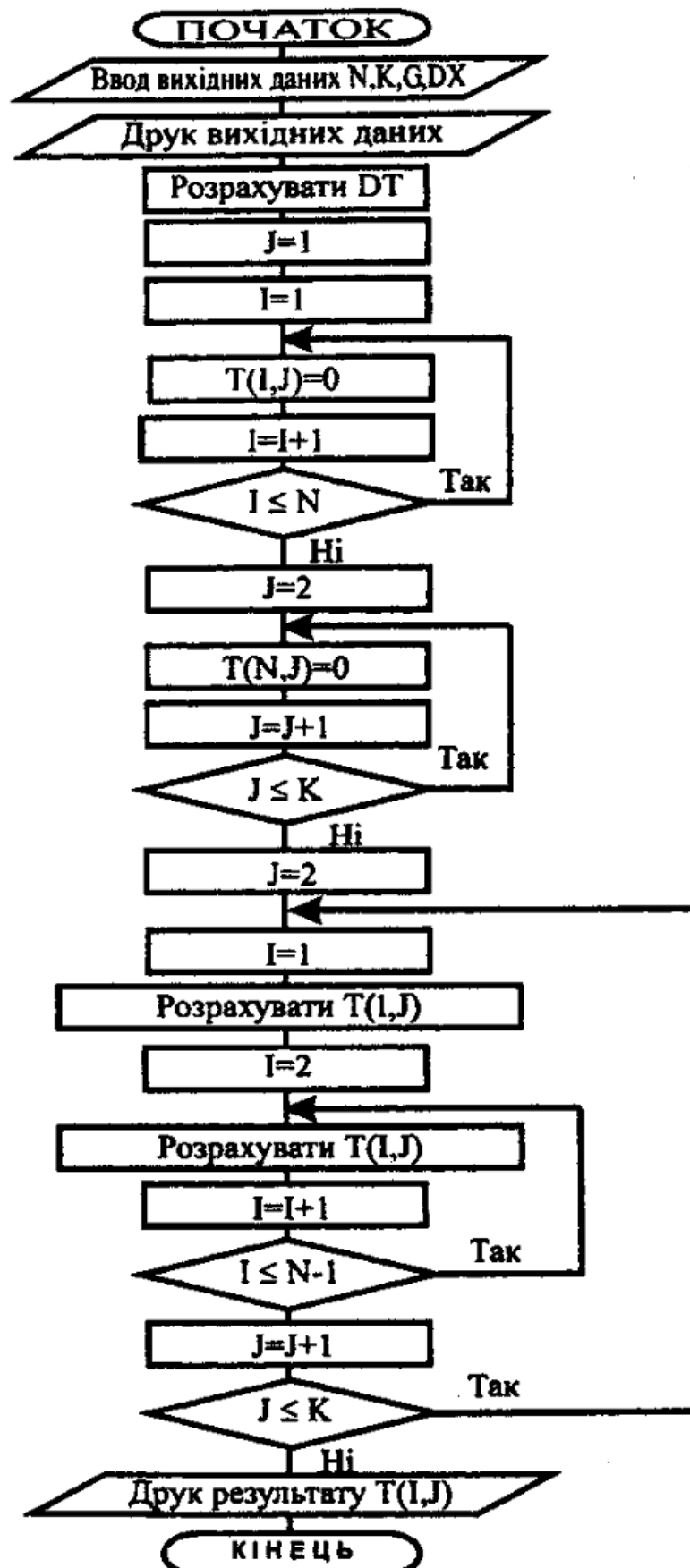


Рисунок 2.8 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі для напівнескінченної плити методом сіток

5. Виконати розрахунки на ЕОМ.
6. Побудувати криві температурних полів для необмеженої плити і напівнескінченного тіла, отримані різними способами, і порівняти їх між собою.

2.5. Зміст звіту

1. Короткий опис теоретичної частини роботи.
2. Математичні моделі теплообміну для нескінченної плити і напівнескінченного тіла.
3. Таблиці розрахунків на ЕОМ (роздруковка в системі EXCEL).
4. Графіки температурних кривих (рисунок в системі EXCEL).
5. Аналіз отриманих результатів і висновки.

2.6. Контрольні питання

1. Поняття про необмежену плиту і напівнескінченне тіло.
2. Математичні моделі охолодження необмеженої плити і напівнескінченного тіла при граничних умовах третього роду.
3. Початкові і граничні умови.
4. Сутність наближеного методу А.І. Вейніка.
5. Блок-схема алгоритмів розв'язання крайових задач різними методами.

Лабораторна робота №3

Дослідження температурного поля відливка кулі на ЕОМ

Мета роботи – дослідити температурне поле відливка кулі за допомогою математичних моделей на ЕОМ.

3.1. Математичне формулювання задачі

Диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є в сферичній системі координат можна записати у вигляді [4]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{K}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (3.1)$$

де r – радіус-вектор ізотермічної поверхні температурного поля;

K – дійсне додатне ціле число, яке визначається із співвідношення

$$F(r) = F(r_o) \cdot \left(\frac{r}{r_o} \right)^K, \quad (3.2)$$

де $F(r)$ – площа ізотермічної поверхні;

$F(r_o)$ – площа граничної поверхні;

r_o – радіус-вектор граничної поверхні.

Із теорії подібності слідує, що конфігурацію групи подібних тіл можна охарактеризувати параметричним критерієм подібності; зокрема для групи подібних кругових циліндрів цей критерій

$$D = \frac{d}{2h}, \quad (3.3)$$

де d і h – відповідно діаметр і висота циліндра.

Якщо $D \ll 1$, тобто $D < 0,1$ то площа поверхні торців F_T циліндрів становить менше 10% площі F_o їх бокових поверхонь, оскільки

$$D = \frac{2\frac{1}{4}\pi d^2}{\pi dh} = \frac{F_T}{F_o}.$$

Отже, тепловим потоком через торці можна знехтувати в порівнянні з тепловим потоком через бокову поверхню, оскільки в тепловому відношенні ці циліндри скінченної висоти можна розглядати як нескінченні.

При $D \gg 1$, тобто $D > 10$, циліндри перетворюються в диски, товщина яких в крайньому разі в 20 разів менша їх діаметра. В цьому випадку потоком через бокову поверхню дисків можна знехтувати і в тепловому відношенні їх можна розглядати як нескінченні плити.

Для групи подібних паралелепіпедів параметричні критерії подібності визначаються такими співвідношеннями:

$$A = \frac{a}{c}; \quad B = \frac{b}{c}, \quad (3.4)$$

де a, b, c – три виміри паралелепіпеда.

При $A \gg 1$ і $B \gg 1$ ці паралелепіпеди можна уявити в тепловому відношенні як нескінченні плити з товщиною c ; при $A \approx 1$ і $B \ll 1$ – як нескінченні плити з товщиною b ; при $A \ll 1$ і $B \approx 1$ – теж з товщиною a . Іншими словами, якщо два розміри паралелепіпедів приблизно однакові і на багато більші третього, то паралелепіпеди можна розглядати як нескінченні плити.

При $A \approx 1$, $B \approx 1$ тіла близькі до куба. В цьому випадку їх можна в тепловому відношенні наближено уявити як кулі. Коефіцієнт тепловіддачі еквівалентної кулі

$$\alpha_e = \alpha \frac{F_o}{F_e}, \quad (3.5)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі від реального тіла в навколишнє середовище;

F_o, F_e – площа граничної поверхні, відповідно реального і еквівалентного тіла. Із (3.5) маємо

$$\frac{\alpha_e}{\alpha} = \frac{F_o}{F_e}. \quad (3.6)$$

Якщо $1 < \alpha_e / \alpha \leq 1,5$, то відношення поверхонь

$$F = \frac{F_o}{F_e}, \quad (3.7)$$

можна розглядати як критерій наближеної теплової подібності суцільних тіл довільної конфігурації відповідним тілам класичної форми. Необхідна відповідність визначається значеннями критеріїв D, A, B , якщо під a, b, c, h, d розуміти розміри довільних суцільних тіл.

При $A=B=1$ всі тіла, в тому числі і циліндр з критерієм $D \approx 0,5$ приводяться до кулі з радіусом

$$l = \left(\frac{4V_o}{3\pi} \right)^{1/3}. \quad (3.8)$$

При $A \ll 1, B \ll 1$ (або $A \approx 1, B \gg 1$ або $A \gg 1, B \approx 1$) всі тіла приводяться до нескінченного циліндра з радіусом

$$l = \left(\frac{V_o}{\pi h} \right)^{1/2} = \left(\frac{f_o}{\pi} \right)^{1/2}, \quad (3.9)$$

де f_o – площа поперечного перерізу тіла.

При $A \gg 1, B \ll 1$ (або $A \approx 1, B \ll 1$ або $A \ll 1, B \approx 1$) всі тіла приводяться до необмеженої плити, половина товщини якої

$$l = \frac{V_o}{2F_{cp}}, \quad (3.10)$$

де F_{cp} – площа середньої площини тіла.

Отже, з урахуванням викладених припущень узагальнену математичну модель задачі для необмеженої плити (2.10) – (2.13) (див. лабораторну роботу №2) можна представити наближено, як модель одномірного теплового потоку в тілах довільної конфігурації. Використовуючи безрозмірні змінні і критерії подібності, стосовно диференціального рівняння (3.1), отримаємо для $0 < F \leq 1,5$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{K}{R} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial R}, \quad -1 < R < 1, \quad \tau > 0, \quad (3.11)$$

$$\mp \frac{\partial \theta(\pm 1, \tau)}{\partial R} = \pm F Bi \theta(\pm 1, \tau), \quad (3.12)$$

$$\theta(R, 0) = 1, \quad (3.13)$$

$$\theta_c = 0, \quad (3.14)$$

де

$$K = \begin{cases} 0, & \text{якщо } A \gg 1, B \gg 1; \\ 1, & \text{якщо } A \ll 1, B \ll 1; \\ 2, & \text{якщо } A = B \approx 1; \end{cases}$$

$$R = \begin{cases} X = \frac{x}{l}, & \text{якщо } K = 0; \\ \frac{r}{l}, & \text{якщо } K = 1 \text{ і } K = 2; \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} \frac{V_o}{2F_{\text{ср}}}, & \text{якщо } A \gg 1, B \gg 1; \\ \left(\frac{f_o}{\pi} \right)^{1/2}, & \text{якщо } A \ll 1, B \ll 1; \\ \left(\frac{4V_o}{3\pi} \right)^{1/3}, & \text{якщо } A = B \approx 1. \end{cases}$$

Нехай $F=1$. Тоді при $K=0$, $A \gg 1$, $B \gg 1$, $l=(1/2)c$ (половина товщини плити) математична модель (3.11) – (3.14) точно описує тепловий процес в нескінченній плиті.

При $F=1$, $K=2$, l - радіус r_0 кулі отримаємо математичну модель, яка описує тепловий процес для кулі:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial R}, \quad -1 < R < 1, \quad \tau > 0; \quad (3.15)$$

$$\mp \frac{\partial \theta(\pm 1, \tau)}{\partial R} = Bi \theta(\pm 1, \tau), \quad (3.16)$$

$$\theta(R, 0) = 1 \quad (3.17)$$

$$\theta_c = 0. \quad (3.18)$$

Складемо математичну модель, яка описує охолодження кулі при граничних умовах першого роду

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial R}, \quad 0 < R < 1, \quad \tau > 0, \quad (3.19)$$

$$\theta(R, 0) = 1 - \text{початкова умова}, \quad (3.20)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 - \text{гранична умова першого роду}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial R} = 0 - \text{умова симетричного охолодження}, \quad (3.22)$$

$$\theta_c = 0, \quad (3.23)$$

де

$$\theta(R, \tau) = \frac{T(r, t) - T_o}{T_n - T_o}. \quad (3.24)$$

Гранична умова першого роду (3.21) задає функцію розподілення температури на поверхні тіла. В даному випадку ця функція має вигляд:

$$T(r_o, t) = T_o = T_c = \text{const}, \quad (3.25)$$

де T_c – температура навколишнього середовища.

3.2. Алгоритм розв'язання теплової задачі

У вищій математиці доводиться, що розв'язком крайової задачі (3.19) – (3.23) є такий вираз [4]:

$$\theta(R, \tau) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{\mu_m} \cdot \frac{\sin(\mu_m R) \exp(-\mu_m^2 \tau)}{R}, \quad (3.26)$$

$$\mu_m = m\pi; \quad R = \frac{r}{l}; \quad \tau = \frac{at}{l^2}; \quad l = r_{\sigma} \left(\frac{4V_o}{3\pi} \right)^{1/3}. \quad (3.27)$$

Формула (3.26) є точним розв'язком рівняння (3.19), що задовольняє початковій (3.20) і граничним (3.21) – (3.23) умовам.

Блок-схема алгоритму точного розв'язку показана на рис. 3.1.

Розв'яжемо крайову задачу (3.19) – (3.23) методом сіток за явною різницевою схемою.

Система скінченно-різницевих рівнянь буде мати наступний вигляд:

а) для початкового часового шару

$$\theta(I, 1) = 1, \quad I = 1, 2, \dots, N; \quad (3.27)$$

б) для внутрішніх вузлів сітки

$$\frac{\theta(I, J+1) - \theta(I, J)}{\Delta\tau} = \frac{\theta(I+1, J) - 2\theta(I, J) + \theta(I-1, J)}{\Delta R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\theta(I+1, J) - \theta(I, J)}{\Delta R}. \quad (3.28)$$

Після перетворень і спрощень отримаємо

$$\begin{aligned} \theta(I, J+1) = & \sigma \theta(I-1, J) - \left(2\sigma + \frac{2\Delta\tau}{R\Delta R} - 1 \right) \theta(I, J) + \\ & + \left(\sigma + \frac{2\Delta\tau}{R\Delta R} \right) \theta(I+1, J), \end{aligned} \quad (3.29)$$

де $\sigma = \frac{\Delta\tau}{\Delta R^2}$ – критерій стійкості розв'язку;

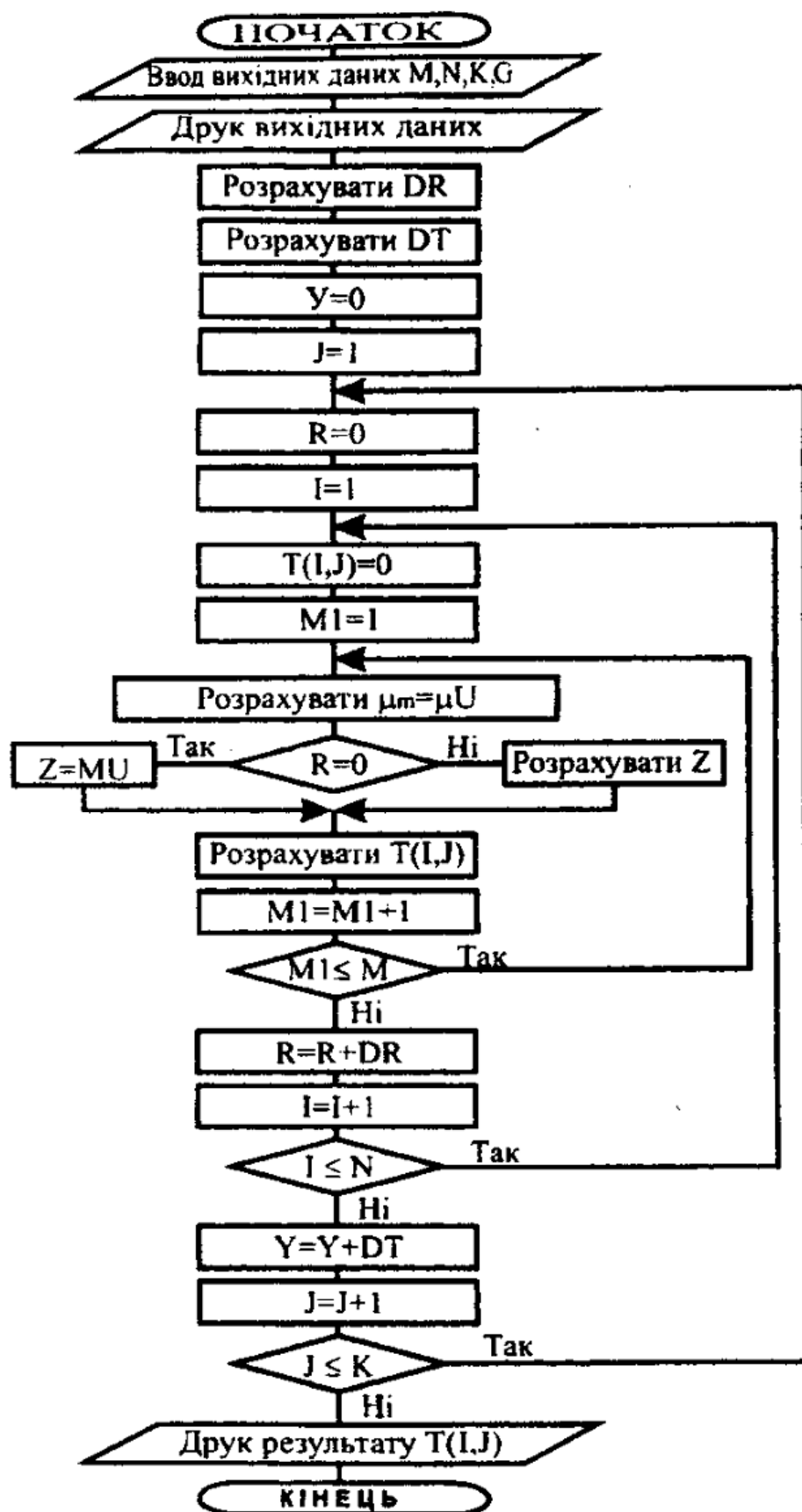


Рисунок 3.1 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі для відливка кулі точним методом

в) для граничної поверхні

$$\theta(N, J) = 0 \quad J = 2, 3, \dots, K; \quad (3.30)$$

г) для центра кулі, в силу умови симетричності охолодження справедливо (3.22). Отже,

$$\theta(0, \tau) = \text{const} = 1. \quad (3.31)$$

Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі методом сіток по явній різницевій схемі зображена на рис. 3.2.

Розглянемо розв'язок крайової задачі методом А.І. Вейніка. Нехай температурне поле у відливку кулі описується параболою n -го порядку

$$\theta(R, \tau) = \theta(0, \tau) - [\theta(0, \tau) - \theta(1, \tau)] R^n, \quad (3.32)$$

де $\theta(0, \tau) = \theta_{\text{ц}}$ – температура в центрі кулі, яка є функцією тільки τ ; $\theta(1, \tau)$ – температура на поверхні кулі.

Згідно з граничною умовою (3.21) $\theta(1, \tau) = 0$.

$$\text{Тоді } \theta(R, \tau) = \theta_{\text{ц}} (1 - R^n). \quad (3.33)$$

Помноживши (3.19) на dR , отримаємо

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR = \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} dR + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial R} dR. \quad (3.34)$$

Із (3.33) визначимо

$$\frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial \tau} = \frac{d\theta_{\text{ц}}}{d\tau} (1 - R^n). \quad (3.35)$$

Проінтегруємо праву і ліву частини (3.34) при зміні R від 0 до 1

$$\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR = \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} dR + 2 \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial R} \cdot \frac{dR}{R}. \quad (3.36)$$

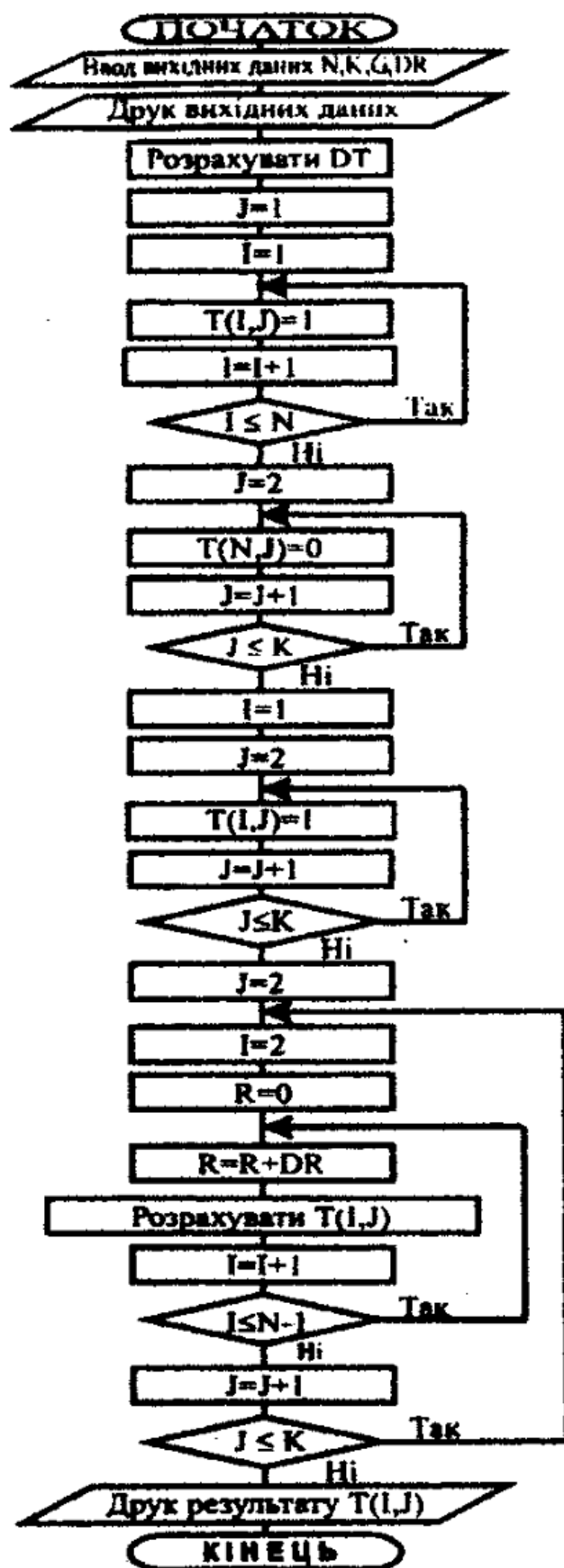


Рисунок 3.2 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі для відливання кулі методом сіток за явною різницевою схемою

З урахуванням (3.35) маємо

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dR &= \int_0^1 \frac{d\theta_u}{d\tau} (1-R^n) dR = \frac{d\theta_u}{d\tau} \int_0^1 (1-R^n) dR = \\ &= \frac{d\theta_u}{d\tau} \left(R \Big|_0^1 - \frac{R^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 \right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{d\theta_u}{d\tau}.\end{aligned}\quad (3.37)$$

З урахуванням властивостей похідної, диференціала і визначеного інтеграла будемо мати:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} dR &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right) dR = \int_0^1 \frac{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right)}{\partial R} dR = \int_0^1 d \left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial R} - \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial R}.\end{aligned}$$

Але, за умовою (3.22)

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial R} = 0.$$

Визначимо значення $\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial R}$.

Із (3.33) маємо

$$\frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial R} = -\theta(0, \tau) n R^{n-1} = -\theta_u n R^{n-1} \quad (3.38)$$

При $R=1$

$$\frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial R} = \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial R} = -\theta_u n.$$

Значення останнього інтеграла дорівнює

$$2 \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial R} \cdot \frac{dR}{R} = 2 \int_0^1 \frac{\partial \theta(R, \tau)}{\partial R} \cdot \frac{dR}{R} = -2n\theta_u \int_0^1 R^{n-1} \frac{dR}{R} = -\frac{2n}{n-1} \theta_u.$$

Отже, вираз (3.36) запишемо у вигляді

$$\frac{n}{n+1} \cdot \frac{d\theta_{\text{ц}}}{d\tau} = -n\theta_{\text{ц}} - \frac{2n}{n-1}\theta_{\text{ц}}.$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{d\theta_{\text{ц}}}{d\tau} = -\theta_{\text{ц}} \frac{n+1}{n-1}; \quad (3.39)$$

або

$$\frac{d\theta_{\text{ц}}}{\theta_{\text{ц}}} = -\frac{(n+1)^2}{n-1} d\tau. \quad (3.40)$$

Після інтегрування (3.40) отримаємо

$$\ln \theta_{\text{ц}} = -\frac{(n+1)^2}{n-1} \tau + C;$$

або

$$\theta_{\text{ц}} = e^{-\frac{(n+1)^2}{n-1} \cdot \tau + C}. \quad (3.41)$$

Підставивши (3.41) в (3.33), отримаємо

$$\theta(R, \tau) = e^{-\frac{(n+1)^2}{n-1} \cdot \tau + C} (1 - R^n). \quad (3.42)$$

Постійну інтегрування визначимо із умови (3.20)

$$\theta(R, 0) = e^C (1 - R^n) = 1. \quad (3.43)$$

$$\text{Звідки } C = \ln \frac{1}{1 - R^n}. \quad (3.44)$$

Підставивши (3.44) в (3.42), остаточно маємо

$$\theta(R, \tau) = e^{-\frac{(n+1)^2}{n-1} \cdot \tau + \ln \frac{1}{1 - R^n}} (1 - R^n). \quad (3.45)$$

Вираз (3.45) задовольняє початковим і граничним умовам (3.20) – (3.22). Блок-схема алгоритму розв'язання задачі зображена на рис. 3.3.

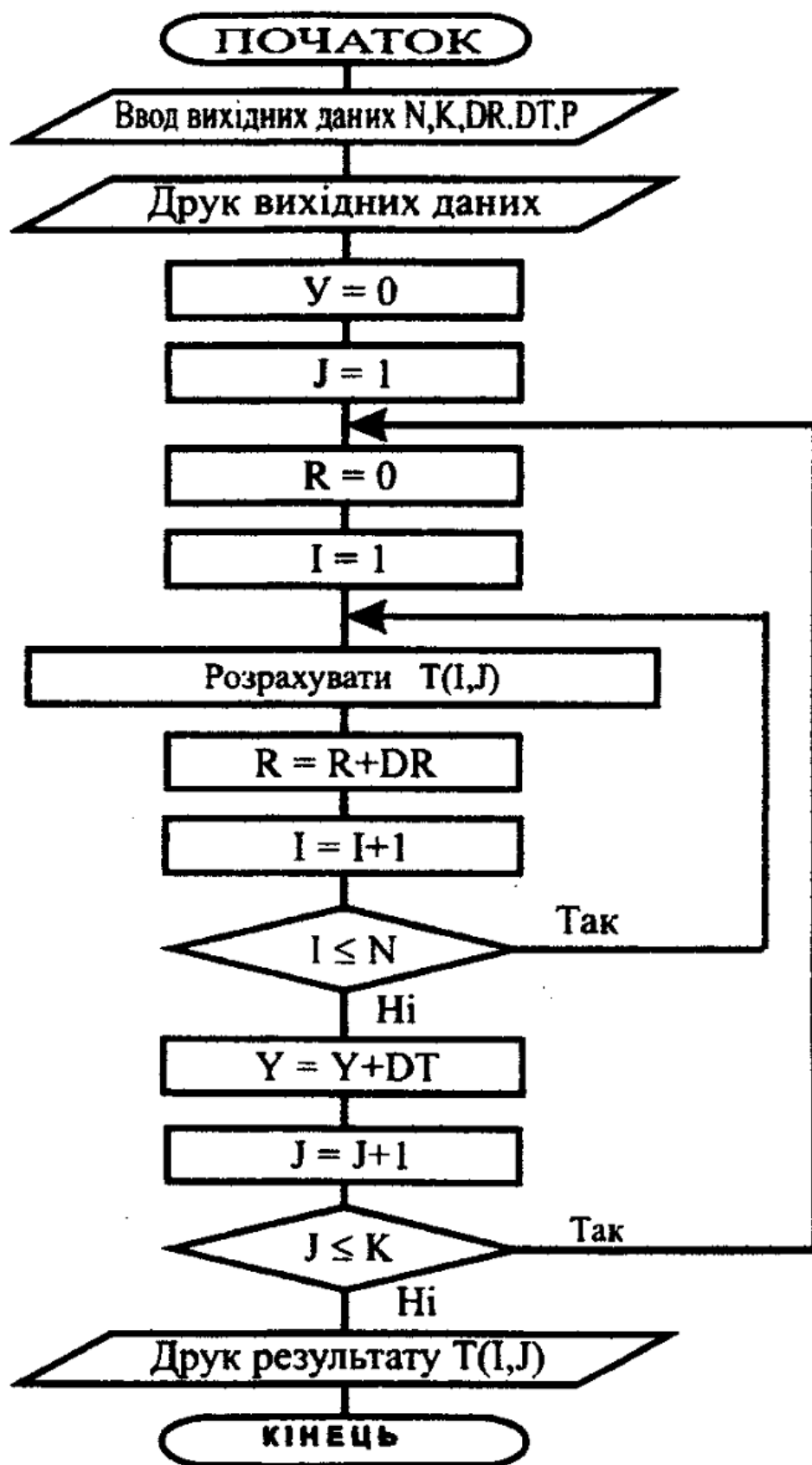


Рисунок 3.3 – Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі для відливу кулі методом А.І. Вейніка

3.3. Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з постановкою задачі і метою роботи.
2. Засвоїти математичну модель теплообміну для відливка кулі.
3. Вивчити на прикладі відливка кулі наближений метод розв'язання крайової задачі А.І. Вейніка.
4. Вивчити блок-схеми алгоритмів розв'язання крайової задачі теплообміну для відливка кулі точним методом, методом сіток за явною різницевою схемою і методом А.І. Вейніка
5. Виконати розрахунок на ЕОМ.
6. Побудувати криві температурного поля відливка кулі, отримані різними способами, і порівняти їх між собою.

3.4. Зміст звіту

1. Короткий зміст теоретичної частини роботи.
2. Математичні моделі теплообміну для відливка кулі.
3. Таблиці розрахунків на ЕОМ (роздруківка в системі EXCEL).
4. Графіки температурних кривих (рисунки в системі EXCEL).
5. Аналіз отриманих результатів і висновки.

3.4. Контрольні питання

1. Математична модель охолодження відливка кулі при граничних умовах:
 - а) першого роду;
 - б) третього роду.
2. Початкові і граничні умови першого і третього роду для відливка кулі.
3. Визначення показника параболи розподілу температури.
4. Блок-схеми алгоритмів розв'язання крайових задач теплообміну відливка кулі різними методами.

Лабораторна робота №4

Дослідження температурних полів відливка, що твердне, і ливарної форми на ЕОМ

Мета роботи – дослідити методом математичного моделювання температурні поля відливка типу напівнескінченної плити, що твердне, і напівобмеженої ливарної форми, алгоритм розв'язання задачі та програму реалізації розрахунків на ЕОМ.

4.1. Математичне формулювання задачі

Розглянемо процес затвердіння відливка у вигляді напівнескінченного тіла із чистого металу або евтектики при постійній температурі затвердіння (кристалізації $T_{кр}$). Теплота від розплаву, що твердне, відводиться в напівнескінченну стінку форми, яка має початкову температуру $T_{\phi} = \text{const}$.

Схема температурних полів в розплаві $T_1(x, t)$, твердій кірці $T_2(x, t)$ і ливарній формі $T_3(x, t)$ показана на рис. 4.1.

Всі три елементи системи – розплав, тверда кірка і форма в тепловому відношенні взаємодіють між собою. В кожному елементі відбувається взаємопов'язана просторово-часова зміна температури $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$, $T_3(x, t)$. Для опису цієї зміни в кожному елементі необхідні три диференціальні рівняння теплопровідності:

в рідкому розплаві

$$\frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < \infty, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

в твердій кірці

$$\frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), \quad t > 0, \quad (4.2)$$

в ливарній формі

$$\frac{\partial T_3(x,t)}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 T_3(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 > x > -\infty, \quad t > 0, \quad (4.3)$$

де $\xi(t)$ – товщина затверділої кірки.

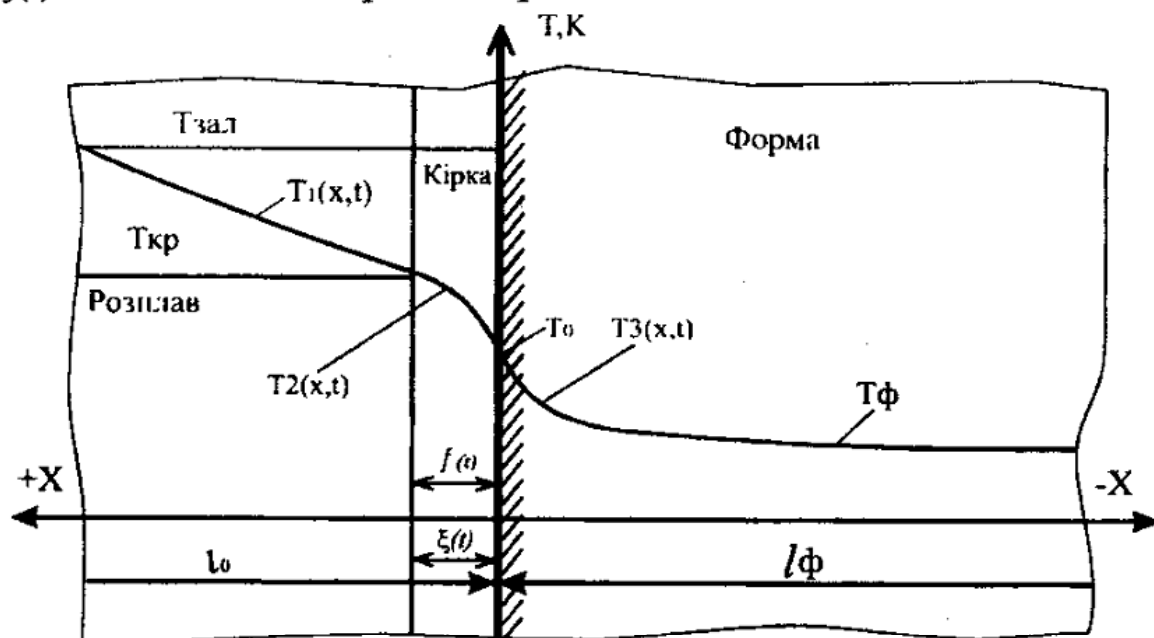


Рисунок 4.1. Схема температурних полів відливка, що твердне, і ливарної форми

Взаємозв'язок диференціальних рівнянь (4.1) – (4.3) визначений умовами протікання процесу теплообміну на поверхнях контакту розплаву і твердої кірки та твердої кірки з формою.

При затвердінні розплавів чистих металів і евтектик теплота кристалізації виділяється при сталій температурі $T_{кр}$. Із рис. 4.1 слідує, що ця теплота повинна виділитися на границі твердої кірки і розплаву при $x = \xi(t)$.

Очевидно, що товщина кірки $\xi(t)$ збільшується тільки в тому випадку, якщо від фронту затвердіння буде відводиться теплота кристалізації через кірку у форму. Це означає, що температурне поле $T_2(x,t)$ в кірці при $x = \xi(t)$ повинне задовольняти умові

$$L\rho_2 \frac{d\xi}{dt} \leq -\lambda_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x}, \quad (4.4)$$

де L – питома теплота кристалізації розплаву, Дж/кг;

ρ_2, λ_2 – відповідно густина, кг/м³, і коефіцієнт теплопровідності твердого сплаву, Вт/(м·К).

Фізичний зміст виразу (4.4) полягає в наступному: швидкість $\frac{L\rho_2 d\xi}{dt}$ виділення теплоти кристалізації у

результаті росту кірки зі швидкістю $\frac{d\xi}{dt}$ повинна бути менше або рівна густині теплового потоку від фронту затвердіння в кірку.

Рівність у виразі (4.4) буде мати місце, якщо розплав перед фронтом затвердіння не перегрітий. В загальному випадку розплав перед фронтом кристалізації перегрітий, тому, окрім теплоти кристалізації від фронту буде відводитися теплота перегріву:

$$q_1(x,t) + L\rho_2 \frac{d\xi}{dt} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x}, \quad (4.5)$$

де $q_1(x,t)$ – густина теплового потоку від перегрітого розплаву до твердої кірки.

З урахуванням закону теплопровідності Фур'є маємо:

$$q_1(x,t) = -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x}$$

Тоді вираз (4.5) буде мати вигляд

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1(\xi,t)}{\partial x} + L\rho_2 \frac{d\xi}{dt} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(\xi,t)}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Розглянемо початкову і граничні умови теплообміну в системі (див. рис. 4.1)

Температура розплаву в початковий момент часу $t = 0$

$$T_1(x,0) = T_{\text{зан}}. \quad (4.7)$$

Температура форми в початковий момент часу ($t=0$)

$$T_3(x,0) = T_{\phi} . \quad (4.8)$$

Температура твердої кірки і ливарної форми на поверхні контакту ($x=0$) в довільний момент часу рівні між собою, тобто

$$T_2(0,t) = T_3(0,t) = T_0 . \quad (4.9)$$

Тепловий потік на границі „тверда кірка – ливарна форма” описується виразом

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2(0,t)}{\partial x} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3(0,t)}{\partial x} . \quad (4.10)$$

Температури розплаву і форми на нескінченному віддаленні від поверхні розділу відливок-форма становлять:

$$T_1(\infty, t) = T_{зал} ; \quad (4.11)$$

$$T_3(-\infty, t) = T_{\phi} . \quad (4.12)$$

На поверхні контакту „тверда кірка-розплав” має місце рівність

$$T_1(\xi, t) = T_2(\xi, t) = T_{кр} . \quad (4.13)$$

Система диференціальних рівнянь (4.1) – (4.3) з урахуванням виразів (4.5), (4.6), початкових і граничних умов (4.7) – (4.13) розв’язується спеціальними методами[5]:

$$T_1 = T_{зал} - (T_{зал} - T_{кр}) \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 \cdot t}}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_1}}\right)} ; \quad (4.14)$$

$$T_2 = T_0 + (T_{кр} - T_0) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 \cdot t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{m}{2\sqrt{a_2}}\right)} ; \quad (4.15)$$

$$T_3 = T_\phi + (T_o - T_\phi) \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{a_3 \cdot t}} \right) \right]; \quad (4.16)$$

де

$$T_o = T_\phi + \frac{T_{кр} - T_\phi}{1 + \frac{b_3}{b_2} \operatorname{erf} \left(\frac{m}{2\sqrt{a_2}} \right)}, \quad (4.17)$$

де m – коефіцієнт пропорційності (константа затвердіння), що визначається із трансцендентного рівняння

$$L\rho_2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} m = \frac{b_3 (T_{кр} - T_\phi) \exp \left[-m^2 / (4a_3) \right]}{1 + \frac{b_3}{b_2} \operatorname{erf} \left(\frac{m}{2\sqrt{a_2}} \right)} - \frac{b_1 (T_{зал} - T_{кр}) \exp \left[-m^2 / (4a_1) \right]}{1 - \operatorname{erf} \left(\frac{m}{2\sqrt{a_1}} \right)}. \quad (4.18)$$

Коефіцієнт теплової акумуляції b_i , Вт·с^{1/2}/(м²·К):

$$b_i = \sqrt{\lambda_i c_i \rho_i}. \quad (4.19)$$

Із (4.18) слідує, що при певному перегріві ($T_{зал} - T_{кр}$) при $T_{кр} - T_\phi = \text{const}$ права частина виразу перетворюється в нуль. Це значить, що існує такий перегрів, при якому відливки взагалі не затвердіє. На практиці розплави тверднуть при будь-якому перегріві. З цього видно, що розглянутий розв'язок (Стефана – Шварца) не можна використовувати для розрахунку затвердіння відливок, оскільки вони є тілами зі скінченими розмірами, в той час як розглянута схема трактує відливки як напівнескінченне тіло.

В зв'язку з цим приведена система диференціальних рівнянь з початковими і граничними умовами може бути

розв'язана тільки чисельними методами, а саме комбінацією різницевих і ітераційних методів розв'язання крайових задач математичної фізики.

4.2. Розв'язання крайової задачі твердіння відливка і нагрівання форми

Розв'язати систему рівнянь (4.1) – (4.13) – це значить знайти такі функції $T_1(x,t)$, $T_2(x,t)$, $T_3(x,t)$, які в повній мірі задовольняють рівнянням (4.1) – (4.3), початковим і граничним умовам (4.5) – (4.13). Задача, що розглядується, містить нелінійну умову (4.6). Найбільш ефективним алгоритмом розв'язання таких задач є метод сіток [6,7].

Запишемо умови крайової задачі:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2}; & \xi(t) < x < \infty, & \quad t > 0; \\
 \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2}; & 0 < x < \xi(t), & \quad t > 0; \\
 \frac{\partial T_3(x,t)}{\partial t} &= a_3 \frac{\partial^2 T_3(x,t)}{\partial x^2}; & 0 > x > -\infty, & \quad t > 0; \\
 T_1(x,0) &= T_{\text{зал}}, \\
 T_3(x,0) &= T_{\phi}, \\
 T_2(0,t) &= T_3(0,t) = T_0 \\
 -\lambda_2 \frac{\partial T_2(0,t)}{\partial x} &= -\lambda_3 \frac{\partial T_3(0,t)}{\partial x}; \\
 T_1(\infty,t) &= T_{\text{зал}}, \\
 T_3(-\infty,t) &= T_{\phi}; \\
 -\lambda_1 \frac{\partial T_1(\xi,t)}{\partial x} + L\rho_2 \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\lambda_2 \frac{\partial T_2(\xi,t)}{\partial x}; \\
 T_1(\xi,t) &= T_2(\xi,t) = T_{\text{кр}}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Введемо сітку по товщині рідкої частини відливка $(I-1)h_1$, товщині кірки $(I-1)h_2$, і форми $(I-1)h_3$. При цьому будемо вважати, що затвердіння відбувається у вузлі сітки $X_{NI} = (NI-1) h_1$, тому в зоні твердого металу знаходяться вузли сітки з номерами від 2 до $NI-1$, в NI -м, у вузлі сітки відбувається затвердіння, а вузли сітки з номерами від $NI+1$ до N знаходяться в зоні рідкого металу. У вузлі сітки з номером 1 відливки контактує з формою. Вузли сітки з номерами від 1 до M належать формі.

Розрахункова схема сітки показана на рис. 4.2. З урахуванням вищезазначеного систему (4.20) можна представити наступними скінченно-різницевиими рівняннями за явною різницевою схемою:

$$\frac{T_1(I, J+1) - T_1(I, J)}{\Delta t} = \frac{a_1}{h_1^2} [T_1(I-1, J) - 2T_1(I, J) + T_1(I+1, J)]; \quad (4.21)$$

$$\frac{T_2(I, J+1) - T_2(I, J)}{\Delta t} = \frac{a_2}{h_2^2} [T_2(I-1, J) - 2T_2(I, J) + T_2(I+1, J)] \quad (4.22)$$

$$\frac{T_3(I, J+1) - T_3(I, J)}{\Delta t} = \frac{a_3}{h_3^2} [T_3(I-1, J) - 2T_3(I, J) + T_3(I+1, J)] \quad (4.23)$$

$$T_1(I, 1) = T_{\text{зал}}; \quad (4.24)$$

$$T_3(I, 1) = T_{\phi}; \quad (4.25)$$

$$T_3(1, J) = T_3(1, J) = T_0; \quad (4.26)$$

$$-\lambda_2 \frac{T_2(I+1, J) - T_2(I, J)}{h_2} = -\lambda_3 \frac{T_3(I, J) - T_3(I-1, J)}{h_3}; \quad (4.27)$$

$$T_1(N, J) = T_{\text{зал}}; \quad (4.28)$$

$$T_3(M, J) = T_{\phi}; \quad (4.29)$$

$$\lambda_1 \frac{[T_1(I+1, J) - T_1(I, J)]}{h_1} + L \rho_2 \frac{h_1}{\Delta t} = \lambda_2 \frac{[T_2(I, J) - T_2(I-1, J)]}{h_2} \quad (4.30)$$

$$T_1(NI, J) = T_2(NI, J) = T_{кр}. \quad (4.31)$$

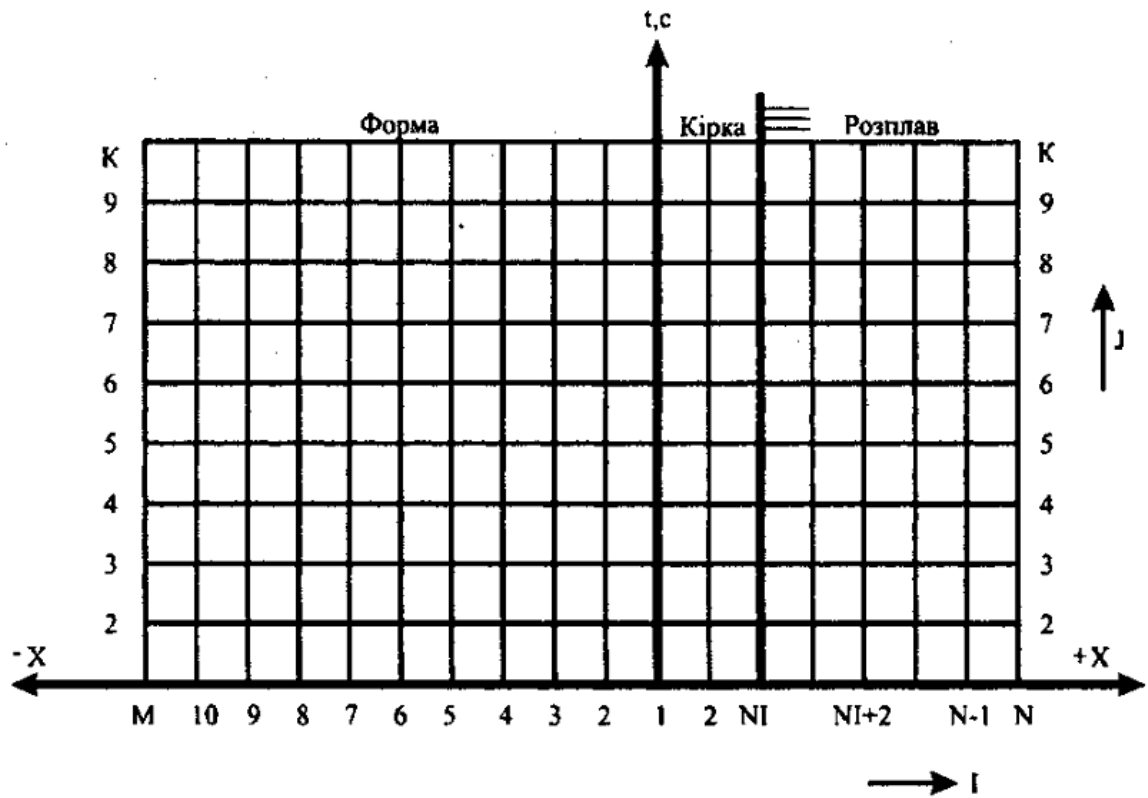


Рисунок 4.2 – Схема сітки

Після перетворень отримаємо

$$T_1(I, J+1) = \frac{a_1 \Delta t}{h_1^2} \cdot T_1(I-1, J) + \left(1 - 2 \frac{a_1 \Delta t}{h_1^2}\right) \cdot T_1(I, J) + T_1(I+1, J) \frac{a_1 \Delta t}{h_1^2}; \quad (4.32)$$

$$I = NI+1, NI+2, \dots, N-1;$$

$$I = 2, 3, \dots, K;$$

$$T_1(I, 1) = T_{зал}, \quad I = NI, NI+1, \dots, N; \quad (4.33)$$

Вираз (4.45) можна представити у вигляді

$$T_0 = \frac{T_2(I+1, J) + \frac{\lambda_3 h_2}{\lambda_2 h_3} \cdot T_3(I+1, J)}{1 + \frac{\lambda_3 h_2}{\lambda_2 h_3}}. \quad (4.46)$$

Отримана система рівнянь згідно умови (4.40) нелінійна відносно $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$, $T_3(x, t)$. Вона може бути вирішена методом ітерацій таким чином. Приймається початкове значення кроку за часом Δt_1 і розв'язується система (4.32) – (4.46) при цьому значенні кроку. Визначається температура у вузлах сітки, потім нове значення кроку за часом Δt_2 . Розрахунок повторюємо до тих пір, поки не буде досягнута задана точність визначення Δt , $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$, $T_3(x, t)$, тобто, поки не буде виконуватися одна з нерівностей

$$\begin{aligned} |\Delta t_{n+1} - \Delta t_n| &< \varepsilon_1; \quad \max |T_1^{n+1}(I, J) - T_1^n(I, J)| < \varepsilon_2; \\ \max |T_2^{n+1}(I, J) - T_2^n(I, J)| &< \varepsilon_3; \\ \max |T_3^{n+1}(I, J) - T_3^n(I, J)| &< \varepsilon_4, \end{aligned} \quad (4.47)$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, – задані точності визначення величин Δt , $T_1(x, t)$, $T_2(x, t)$, $T_3(x, t)$.

Ітераційний процес для розрахунку величини Δt ведеться таким чином.

По типу формули (4.40) запишемо

$$\frac{b}{\Delta t} = a_1 - a_2 + \Phi. \quad (4.48)$$

Для організації ітераційного процесу необхідно шукану величину Δt представити у вигляді функції $\Delta t = f(\Delta t)$. Тоді вираз (4.48) можна представити у вигляді

$$\Delta t = \frac{1}{\Phi} [b + \Delta t(a_2 - a_1)]. \quad (4.49)$$

Доведена збіжність ітераційного процесу, організованого за схемою

$$\Delta t_{n+1} = \frac{1}{\Phi + \beta} [b + \Delta t_n(a_2 - a_1 + \beta)], \quad (4.50)$$

де $\beta \geq 0$ – довільний параметр.

Порівнюючи (4.40) і (4.50), отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi = 0, \quad a_1 &= \lambda_1 \frac{T_1(I, J) - T_1(I-1, J)}{h_1}; \\ a_2 &= \lambda_2 \frac{T_2(I+1, J) - T_2(I, J)}{h_2}; \quad b = L\rho_2 h_1. \end{aligned} \quad (4.51)$$

У зв'язку з довільністю параметра β , нехай

$$\beta = \alpha + q(t), \quad (4.53)$$

де α – параметр ітераційного процесу; $q(t)$ – тепловий потік від відливка.

Тоді формула для ітераційного процесу визначення Δt_{n+1} буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \Delta t_{n+1} &= \frac{1}{\alpha + q(t_n)} \cdot \left\{ L\rho_2 h_1 + \Delta t_n \left[\lambda_2 \cdot \frac{T_2(I+1, J) - T_2(I, J)}{h_2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \lambda_1 \frac{T_1(I, J) - T_1(I-1, J)}{h_1} + \alpha + q(t_n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Початкове наближення Δt_1 доцільно визначати за формулою

$$\Delta t_1 = \frac{L\rho_2 h_1}{\alpha + q(t_0)}. \quad (4.54)$$

Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі показана на рис. 4.3.

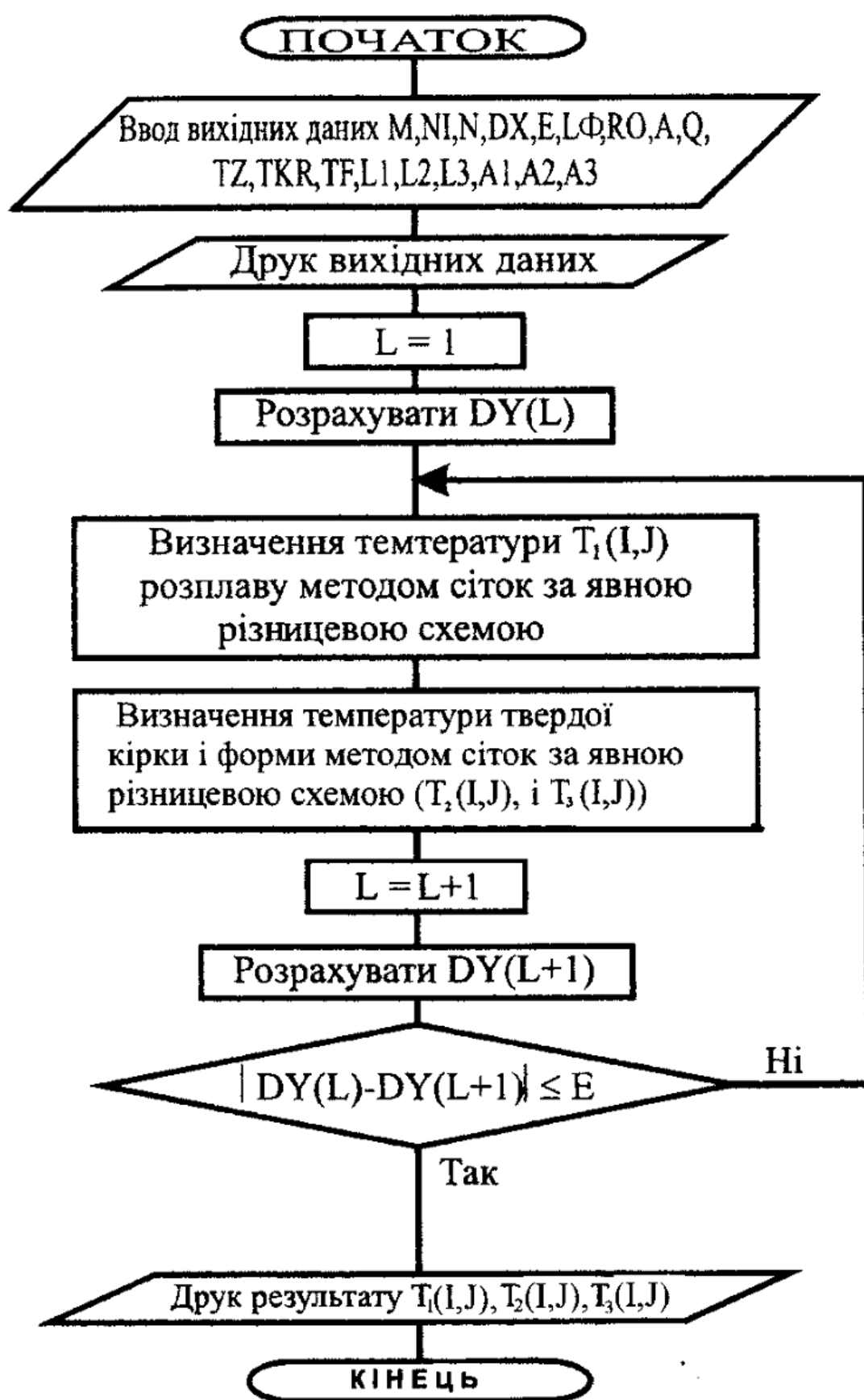


Рисунок 4.3 – Блок-схема алгоритму розв'язання задачі визначення температурного поля відливка і форми

4.3. Порядок виконання роботи

1. Ознайомитись з постановкою задачі і метою роботи.
2. Засвоїти математичну модель теплообміну для відливка і форми в процесі затвердіння відливка.
3. Вивчити точний розв'язок математичних моделей. Показати, чому цей розв'язок непридатний для аналізу температурного поля реальних відливків і форм.
4. Вивчити блок-схему алгоритму розв'язання крайової задачі методом сіток і ітерацій.
5. Виконати розрахунок на ЕОМ.
6. Побудувати температурні залежності для відливка і форми.

4.4 Зміст звіту

1. Короткий зміст теоретичної частини роботи.
2. Математичні моделі теплообміну відливка з формою.
3. Таблиці розрахунків на ЕОМ (роздруківка в системі EXCEL).
4. Графіки температурних кривих $T(x,t)$ (рисунок в системі EXCEL).
5. Аналіз отриманих результатів і висновки.

4.5. Контрольні питання

1. Математична модель охолодження і затвердіння відливка у формі.
2. Початкові і граничні умови для рідкого розплаву, затверділої кірки, форми.
3. Точний розв'язок задачі.
4. Блок-схема алгоритму розв'язання крайової задачі методом сіток за явною різницевою схемою.
5. Метод ітерацій, його сутність.

Лабораторна робота №5

Дослідження температурних полів відливка і форми експериментальним методом

Мета роботи – вивчити пірометричну техніку, яка використовується при дослідженні теплових процесів в ливарній формі; методику визначення температури відливка і форми в процесі заливки і охолодження сплаву; спосіб графічного зображення температурних полів відливка і форми за результатами вимірів температури.

Дослідження твердіння і охолодження відливків дозволяє оцінити швидкість і кінетику процесу, виявити кінець затвердіння і інші, характерні для сплаву фазові переходи, отримати дані для технологічних розрахунків, визначити оптимальний час вибивки відливків. Ці дослідження виконуються за допомогою спеціальної пірометричної техніки.

5.1. Загальні відомості про пірометричну техніку

Вимоги до точності вимірів повинні бути обумовлені аналізом технологічного процесу. Занадто високі вимоги до точності призводять до зайвих витрат праці і часу. Недооцінка температурних залежностей і використання занадто грубої апаратури можуть призвести до помилкових висновків.

Для забезпечення вірності і точності температурних вимірів перед їх проведенням необхідно перевірити готовність апаратури до роботи.

Температурні виміри ґрунтуються на міжнародній практичній температурній шкалі (МІТТШ), яка представляє собою систему постійних точок температур рівноваги твердої і рідкої фаз ряду чистих речовин, зокрема металів. Для пірометрії ливарних процесів найбільше значення мають наступні точки МІТТШ (табл. 5.1.)

Таблиця 5.1 – Точки МПТШ деяких чистих металів

Метал	Pb	Al	Cu	Ni	Pd	Pt
Температура твердіння, К	600,3	933,1	1360	1726	1825	2042

Щоб побудувати градуйовану криву термопар, необхідно вибрати із табл. 5.1. не менше трьох точок в залежності від інтервалу робочих температур і точно виміряти термоЕРС термопар при твердінні відповідного чистого металу. Для цього термопару, що захищена керамічною трубкою, занурюють в тигель з розплавленим металом так, щоб її робочий спай потрапив в центральну частину об'єму металу. Виміряні значення термоЕРС відкладаються на графіку в залежності від відповідних точок МПТШ і з'єднуються плавною кривою.

Даний метод градуювання термопар називається тигельним і використовується головним чином для градуювання зразкових термопар, яка служать тільки для передачі МПТШ робочим термопарам, що використовуються в повсякденній роботі для поточних вимірів температури. Передача МПТШ від зразкових термопар до робочих виконується звичайно методом злічення. Сутність цього методу полягає в наступному: спаї зразкової і робочої термопар розміщують в масивний металевий блок, який знаходиться в трубчатій печі, після чого при декількох фіксованих значеннях температури (наприклад, через кожні 100°) стабілізують температуру печі і визначають термоЕРС обох термопар, вважаючи, що їх спаї мають одну і ту ж температуру.

Система передачі МПТШ робочим термопарам називається перевіркою схемою. В цій схемі зразкова міра (або вимірювальний прилад) повинна бути в 3 рази точніше міри що нею перевіряється.

Для пірометрії ливарних процесів найбільше підходять такі термопари:

- а) платинородій-платинова (ПП);
- б) хромель-алюмелева (ХА);
- в) вольфрам-ренієва (ВР);
- г) вольфрам-молібденова з алюмінієм (ВМА).

Сплав термоелектродів і чуттєвість цих термопар вказані в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Характеристика термопар

Термо- пара	Термоелектроди		Чуттєвість, мкВ/град
	додатні	від'ємні	
ПП	Pt + 10% Rh	Pt	12
ХА	Хромель Ni + 10% Cr + 12% Fe	Алюмель Ni + 10% Si + 2% Al + % Mn	40
ВМА	W	Mo + 0,5% Al	10
ВР	W + 20% Re	W + 5% Re	15

Термопара ПП – сама стабільна і точна термопара, використовується до температур 1923...1943 К при короткочасних зануреннях в розплавлений метал в захисній трубці із кварцового скла. Відхилення термоЕРС кожної даної термопари від стандартного градуювання (що наведена в ДСТ 3044-61) допускається в межах $\pm 2,7 \cdot 10^{-3}$ Т град, де Т – температура робочого шару.

Термопара ХА служить для вимірювання температури кольорових сплавів і рідкого чавуну при короткочасних зануреннях до 1623 К. Допустима похибка градуювання $\pm 7 \cdot 10^{-3}$ Т град.

Термопары ВМА і ВР використовуються до 2073 К і вище у вакуумі і нейтральному середовищі. На повітрі при високих температурах вони легко окислюються, але в тонких захисних кварцових трубках їх можна занурювати в рідкий метал по декілька разів без відновлення спая. Вони успішно служать для запису кривих охолодження відливків. Ці термопары поки ще не мають стандартних градувальних таблиць і градувати їх потрібно самостійно.

При вимірюванні температур термопарами найбільш доцільним робочим вимірювальним приладом служить переносний потенціометр типа ПП, похибка показань якого не перевищує $\pm 0,10$ мВ, що в комплекті з термопарою дає похибку $\pm 8^\circ$. В якості контрольного приладу для перевірки ПП використовується потенціометр ПП-63, похибка якого становить 0,03 мВ, або $\pm 2,5^\circ$.

Похибки вимірів можуть бути систематичними і випадковими. При перевірці робочого вимірювального приладу визначають відхилення його показів Δ від показів зразкового приладу послідовно по всій шкалі і будують відповідні графіки. Перевірений прилад вважають придатним, якщо ці відхилення не виходять за межі встановленого допуску. Якщо прилад придатний, то похибка його вимірів оцінюється випадковою величиною $\pm \varepsilon$, що лежить в межах допуску. Якщо відома середньоквадратична похибка σ , то 2/3 вимірів від загального числа їх мають похибку менше σ , а 1/3 числа вимірів – більше, ніж σ , але не більше 3σ . Якщо термопара градуйована з похибкою $\pm \sigma_T$, а прилад, з яким комплектується термопара, має похибку $\pm \sigma_n$, то похибка комплекту

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_n^2}. \quad (5.1)$$

Основна величина, що визначається при пірометрії ливарних процесів, перегрів сплаву над температурою його ліквідуса. Звідси слідує і критерій точності для пірометрії рідких металів – максимальна похибка визначення перегріву. Якщо, наприклад, похибка

вимірювального приладу дорівнює 1% верхньої межі шкали, рівної 1873 К, то в порівнянні з цією абсолютною величиною температури похибка $\pm 19^\circ$ здається достатньо малою. Але, по відношенню до перегріву, рівного 100 К, вона практично становить $\pm 19\%$, тобто майже 1/5 частину самої вимірюваної величини. Тому в пірометрії ливарних процесів пред'являють особливо високі вимоги до точності вимірювальної апаратури.

5.2. Визначення теплової інерції термопар

При дослідженні ливарних процесів необхідно визначати критичні температури. Це потребує вміння оцінити термічну інерцію термопар разом із захисною трубкою.

Термопару, укомплектовану потенціометром ПП і захищену керамічною трубкою, занурюють в киплячу воду і після прогріву витягують на повітря і записують криву охолодження. Для цього через рівні інтервали часу Δt , які відраховуються секундоміром, визначають значення термоЕРС. Потім будують графіки в координатах температура-час і тіж данні перебудовують в координатах логарифм температура – час. Отримують пряму, за нахилом якої визначають теплову інерцію термопар:

$$I = \frac{\Delta t}{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}. \quad (5.2)$$

5.3. Градування термопар і визначення перегріву рідкого металу над ліквідусом

В індукційній печі розплавляють 20...25 кг вуглецевої сталі. Температуру рідкого металу вимірюють ПП і ВМА, армованими металевою оправою в комплекті з переносними потенціометрами. Робочі шари термопар захищають кварцовими трубками. Перед зануренням термопар з поверхні металу видаляють шлак і знижують потужність, щоб послабити рух металу. При відключеному потенціометрі занурюють захищений кварцовий накінецьник в метал

приблизно на 60 мм. Через 3...4 с вмикають потенціометр і роблять відрахунок. З моменту занурення до отримання надійного відрахунку проходить 7...8 с, що обумовлено тепловою інерцією кварцового накінецьника і самої термопари.

При досягненні металом заданої температури його виливають в ківш, де знову виконують виміри температури обома термопарами одночасно. Потім метал виливають у дві циліндричні форми із сирової пісчано-глинистої маси. В одну з них занурюють термопару ІПІ, в другу – термопару ВМА і сліdkують за охолодженням. Коли наступить температурна зупинка, ретельно фіксують відповідні термоЕРС, які показують температуру ліквідуса даного сплаву. Так контролюють роботу термопару ВМА по зразковій ІПІ у відливку, який твердне при температурі ліквідуса сплаву. Цей метод дозволяє на виробництві, або в лабораторії швидко перевіряти робочі термопари.

Одночасно визначають величину перегріву, яку має рідкий метал в печі при випуску або в ківш перед заливкою в форми. Для цього із відповідної температури рідкого металу віднімають виміряну тими ж термопарами температуру ліквідуса сплаву. Оскільки вимірювання зроблені одним і тим же вимірювальним комплектом, перегрів, як різниця двох показів, звільняється від властивих даному комплекту математичних похибок і тому може бути визначений точніше, ніж абсолютна температура.

5.4. Дослідження температурного поля відливка в процесі твердіння і охолодження

Температурне поле відливка, який охолоджується і твердне, визначається сукупністю теплофізичних, геометричних і фізико-хімічних факторів взаємодії відливка з формою і займає центральне місце у всіх теоретичних і експериментальних дослідженнях процесу затвердіння.

Швидкість зміни температурного поля безпосередньо залежать від теплофізичних властивостей металу і форми, критичних температур і теплових ефектів фазових переходів, інтенсивності тепловідводу, геометричної форми і розмірів відливка. Всі теоретичні розв'язки пов'язані перед усім з тим, які припущення приймаються стосовно температурного поля відливка. Прямі експериментальні дослідження температурного поля широко використовуються при аналізі процесу затвердіння і охолодження відливків.

Під температурним полем відливка розуміють розподіл температури в об'ємі відливка, котрий змінюється з часом так, що температура кожної точки розглядається як функція просторових координат і часу. Для одновимірної задачі, тобто для симетричних відливків найпростішої конфігурації – плити, циліндра, кулі – температура є функція лише одної координати x і часу t . При цьому часто користуються відносною (безрозмірною) координатою X , тобто відношенням відстані даної точки від центра або поверхні відливка x до відповідного повного його розміру x_0 :

$$X = \frac{x}{x_0}, \quad (5.3)$$

де x_0 - радіус кулі або циліндра; $x_0 = l/2$ – для плити товщиною l .

Якщо в деяких фіксованих точках об'єму відливка встановити термопари і з їх допомогою записати криві охолодження, то таким чином буде знайдений емпіричний зв'язок між температурою, відстанню і часом. Графічна обробка цих даних дає безперервну картину температурного поля, що охоплює весь об'ємі і змінюється у часі.

Практично найбільш зручно будувати температурне поле відливка у вигляді проєкцій перерізу цього поля в координатній площині $T-t$ (температура – час), $X-t$ (відстань – час), $T-X$ (температура – відстань).

Зазвичай вихідними даними є криві охолодження, які отримують як результат експерименту. По отриманим кривим охолодження будують ізотерми, які розглядаються як проекції температурно – часового поля на координатну площину $T - t$.

5.5. Необхідні прилади, обладнання, пристрої, матеріали

Плавильна установка, модельний комплект, опоки, формувальний інструмент, формувальна і стержнева суміші, розливочний ківш, термопары ПП, ХА, ВМА, переносний потенціометр ПП, багатоточечний потенціометр.

5.6. Порядок виконання роботи

Перед початком роботи необхідно вивчити методичні вказівки до даної лабораторної роботи, після чого:

1. Визначити теплову інерцію робочої термопары у відповідності з пунктом. 5.2.
2. Виконати градування робочої термопары і визначити перегрів розплаву у відповідності з пунктом. 5.3.
3. Виготовити експериментальну форму.
4. Встановити робочі термопары в форму (рис. 5.1.)
5. Розплавити і перегріти метал.
6. Наповнити розливний ківш рідким металом.
7. Залити рідкий метал в експериментальну форму.
8. Записати покази термопар. Побудувати криві охолодження за показами кожної термопары.
9. Побудувати ізотерми температурно – часового поля у відповідності з пунктом 5.4.
10. Проаналізувати отримані результати.

5.7. Правила техніки безпеки

1. Обслуговування плавильної установки і розливка рідкого металу виконується спеціально навченим персоналом.

2. Забороняється наближатися до працюючої плавильної печі і пульта керування ближче ніж на 5 м.

3. Всі студенти на період проведення лабораторної роботи повинні бути забезпечені захисними окулярами і спецодягом.

4. Забороняється бути присутніми студентам і викладачам в зоні розливки рідкого металу.

5. При фіксації кривих охолодження не торкатися незахищеними руками опоки та інших предметів, так як вони можуть бути нагрітими до високої температури.

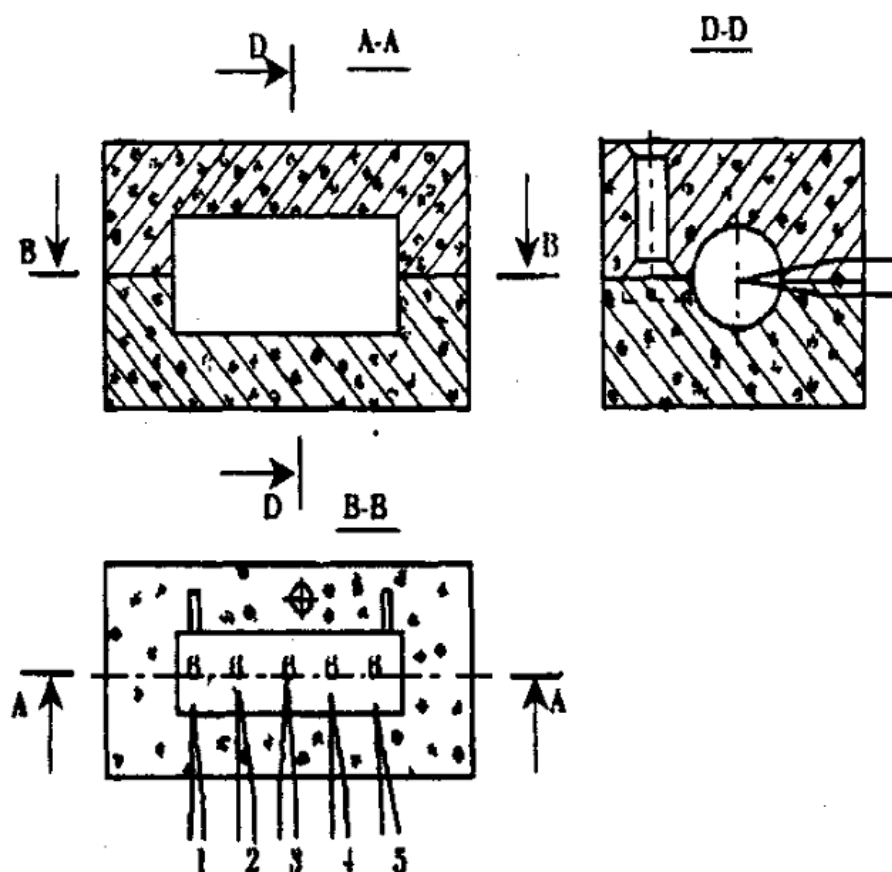


Рисунок 5.1 – Форма і способи установки термопар:

1–5 – термопари в кварцевих трубках; 6 – робочі спаї термопар

5.8. Зміст звіту

1. Короткий опис і характеристика використаної пірометричної техніки.
2. Графік теплової інерції робочої термопар.
3. Градування робочої термопар.
4. Величина перегріву рідкого металу.
5. Схема установки робочих термопар в формі.
6. Покази робочих термопар.
7. Криві охолодження відливка.
8. Побудова температурних кривих.
9. Аналіз результатів і висновки.

5.9. Контрольні питання

1. Пірометрична техніка, яка використовується при вивченні теплових процесів ливарного виробництва.
2. Міжнародна практична температурна шкала.
3. Методи перевірки робочих термопар.
4. Термопар, які використовуються в ливарному виробництві, їх характеристики, область застосування.
5. Похибка вимірів пірометричної техніки.
6. Методика визначення теплової інерції термопар.
7. Методика градування робочої термопар.
8. Методика визначення перегріву рідкого розплаву над ліквідусом.
9. Поняття про температурне поле.
10. Методика фіксації кривих охолодження.
11. Графічна побудова температурно – часового поля відливка.

Література

1. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине „Теория литейных процессов” для студентов специальности 0502 „Тепловые процессы в литейной форме” /В.С. Миронов. – Кировоград: КИСХМ, 1987.– 79 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. – М: Наука, 1972. – 456 с.; т. II, 1972. – 576 с.
3. Вейник А.И. Теория затвердевания отливки. – М.: Машгиз, 1960. – 436 с.
4. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования отливки. – М.: Машиностроение, ч. 1, 1976. – 328 с., ч. II, 1979. – 336 с.
5. Гуляев Б.Б. Теория литейных процессов. – Л.: Машиностроение, 1976. – 214 с.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
7. Теоритические основы литья. Лабораторные работы для студентов специальности. „Металловедение, литьё и термическая обработка сплавов” /В.Я. Билык, В.М. Голод, Т.П. Симановский. – Л.: ЛПИ, 1971. – 100 с.

Навчально-методичне видання

Теорія формування виливка

Методичні рекомендації
до лабораторних робіт
для студентів спеціальності
131 – "Прикладна механіка"
(для всіх форм навчання)

Укладач: В.М. Ломакін, к.т.н., доцент

Здано до тиражування _____. Підписано до друку _____.

Формат 60x84 1/16(A5). Папір газетний. Ум. друк. арк. 4,7. Тираж 50 прим.

Зам. № ____/2020 р.

ЦНТУ, м. Кропивницький, пр. Університетський, 8.

Тел.: 39-04-55