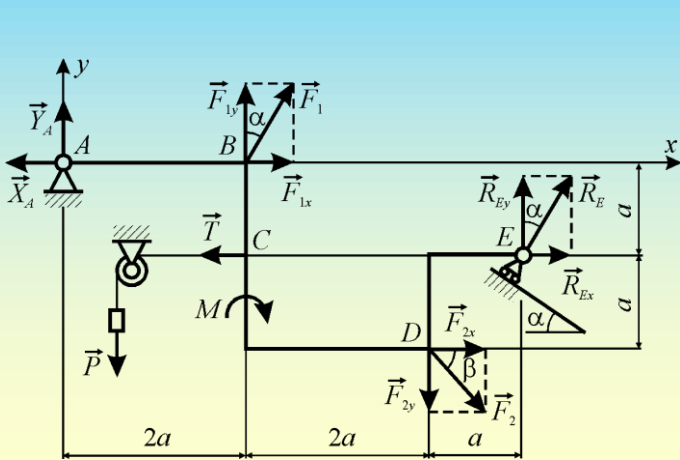


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



В. В. Пирогов, Ю. А. Невдаха,  
Л. С. Олійніченко

# ОПІР МАТЕРІАЛІВ. ПРОСТІ ВИДИ ДЕФОРМАЦІЇ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра деталей машин та прикладної механіки

В. В. Пирогов, Ю. А. Невдаха,  
Л. С. Олійніченко

# **ОПІР МАТЕРІАЛІВ. ПРОСТІ ВИДИ ДЕФОРМАЦІЙ**

Рекомендовано кафедрою деталей машин та прикладної механіки Центральноукраїнського національного технічного університету для студентів технічних та електротехнічних спеціальностей.

Протокол № 10 від 14.05.2024 р.

Пирогов В. В., Невдаха Ю.А., Олійніченко Л.С. Опір матеріалів. Прості види деформацій [електронний ресурс]. – Кропивницький: ЦНТУ, 2024. – 34 с.: іл.

Табл. 8. Іл. 6. Бібліогр.: 9 назв.

Укладачі к.ф.-м.н., доц. Пирогов Володимир Васильович;  
к.т.н., доц. Невдаха Юрій Андрійович;  
к.т.н., ст. викл. Олійніченко Любов Сергіївна.

Рецензенти **д.т.н., проф. Філімоніхін Г.Б.**, професор кафедри деталей машин та прикладної механіки Центральноукраїнського національного технічного університету.

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
<b>Задача ОМ1 – розрахунок на міцність проводів повітряних електричних мереж .....</b>	<b>5</b>
1.1. Умова задачі, розрахункові дані .....	5
1.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	6
1.3. Приклад розв’язання задачі ОМ1 .....	7
<b>Задача ОМ2 – кручення валу круглого поперечного перерізу .....</b>	<b>11</b>
2.1. Умова задачі, розрахункові дані.....	11
2.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	11
2.3. Приклад розв’язання задачі ОМ2 .....	13
<b>Задача ОМ3 – розрахунок балок на міцність при згинанні.....</b>	<b>17</b>
3.1. Умова задачі, розрахункові дані .....	17
3.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	18
3.3. Приклад розв’язання задачі ОМ3 .....	19
<b>Задача ОМ4 – визначення переміщень в балках змінного перерізу при згині.....</b>	<b>23</b>
4.1. Умова задачі, розрахункові дані .....	23
4.2. Методичні рекомендації до розв’язання задачі.....	23
4.3. Приклад розв’язання задачі ОМ4 .....	25
ДОДАТОК А .....	29
ДОДАТОК Б.....	31
ДОДАТОК В .....	32
ЛІТЕРАТУРА.....	34

## Передмова

Опір матеріалів – загальнонаукова дисципліна, яка займає важливе місце в вузівській програмі фундаментальної підготовки спеціалістів.

Необхідною умовою успішного оволодіння курсом є виконання індивідуальних домашніх завдань. Задачі треба розв'язувати на протязі семестру відразу після розгляду відповідної теми на лекціях, чи практичних заняттях.

Поточний контроль відбувається шляхом розв'язання типових задач курсу на контрольних і самостійних роботах, які проводяться після закінчення відповідних розділів. У посібнику сформульовані типові багатоваріантні задачі та приведені приклади їх розв'язання.

Посібник відповідає діючій робочій програмі з теоретичної механіки, призначений для студентів електротехнічних спеціальностей і може бути використаний як в навчальному процесі, так і в інженерній практиці.

Дані для розрахунків брати до кожної задачі згідно номеру варіанту, який видає викладач. Наприклад:

**4 1 5**

**г д е**

В даному випадку цифра визначатиме рядок, а літера – стовпець. Комірка, отримана в результаті перетину відповідного рядка та стовпця, дає необхідне значення величини. Наприклад, стовпцю “е” відповідає рядок під номером “5”, в результаті їх перетину отримуємо комірку з якої знаходимо значення необхідної величини.

### **Зауваження:**

- роботи, виконані не за варіантом, або несамотійно не зараховуються;
- допускається видача інших варіантів лектором, або викладачем, що проводить практичні заняття – на першій лекції, або на першому практичному занятті.

## Задача ОМ1 – розрахунок на міцність проводів повітряних електричних мереж

### 1.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Багатожильний алюмінієвий дріт ( $E=0,7 \cdot 10^5$  МПа,  $\alpha=20 \cdot 10^{-6}$  1/с) ліній електропередач площею поперечного перерізу  $A$ , діаметром  $d$  та вагою одиниці довжини  $q$ , підвішують при температурі  $T_0$  до опор, котрі знаходяться на одному рівні на відстані  $l$ . Вихідні дані приведені в таблиці ОМ1.

#### Знайти:

1. яку стрілу провисання  $f_0$  необхідно надати дроту, щоб напруження в найбільш небезпечному положенні дорівнювало допустимому;
2. висоту точок підвішування дроту, щоб відстань його найнижчої точки від землі була не менше  $H=6$  м.

Розрахунки дроту виконати для таких випадків:

а) температура ожеледі  $T_{ож}=-5$  °С; при цьому на дроті утворюється шар льоду завтовшки  $h$ , а також діє тиск вітру (горизонтальний)  $p$ .

б) мінімальна температура повітря (з врахуванням географічних умов)  $T_{min}$ .

в) максимальна температура повітря  $T_{max}$ .

Таблиця ОМ1

№ рядка	$A, \text{мм}^2$	$d, \text{мм}$	$q, \text{Н/м}$	$[\sigma], \text{МПа}$	$l, \text{м}$	$h, \text{мм}$	$T_0, \text{°C}$	$T_{max}, \text{°C}$	$T_{min}, \text{°C}$	$p, \text{Па}$
1	70	10,9	1,9	78	110	11	17	41	-25	150
2	93,1	12,5	2,57	68	120	12	16	42	-26	160
3	117	14	3,21	64	130	13	15	43	-27	170
4	167	16,8	4,58	60	140	14	14	44	-28	180
5	183	17,6	5,03	56	150	15	13	45	-29	190
6	195	18,2	5,35	52	160	16	12	46	-30	200
7	208	18,7	5,72	50	170	17	11	47	-31	210
8	221	19,4	6,07	54	180	18	10	48	-32	220
9	248	20,4	6,87	48	190	19	9	49	-33	230
0	239	20,1	6,56	45	200	20	8	50	-34	240
	г	д	е	г	д	е	г	д	е	г

## 1.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

В поперечних перерізах дротів повітряних електричних мереж діє лише осьова (поздовжня) сила розтягу. При розрахунку на міцність довгих гнучких дротів істотне значення має їх власна вага  $q_{вл}$ . Навантаження  $q$  може включати в себе також вагу льду  $q_l$  при обледенінні дротів та тиск вітру  $q_в$ :

$$q = \sqrt{(q_{вл} + q_l)^2 + q_в^2}. \quad (1.1)$$

Для спрощення розрахунків з достатньою точністю можна вважати, що навантаження, яке діє на підвішений дріт, рівномірно розподілене по всій довжині між точками його підвішування.

Величина  $f$ , відхилення дроту від лінії підвішування, виміряна посередині прольоту  $l$ , називається **стрілою провисання**.

Горизонтальна складова сили розтягу  $T_{гор}$  в будь-якому поперечному перерізі дроту постійна і називається **горизонтальним натягом**. Найбільша сила розтягу  $T_{max}$  діє у найвищій точці підвішування дроту:

$$T_{max} = \sqrt{T_{гор}^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2}. \quad (1.2)$$

З достатньою для практики точністю можна вважати, що сила розтягу з часом не змінюється, тобто

$$T_{max} \approx T_{гор}. \quad (1.3)$$

Посередині прольоту залежність між горизонтальним натягом  $T_{гор}$  і стрілою провисання  $f$  має вигляд:

$$f = \frac{ql^2}{8T_{гор}} \quad \text{або} \quad T_{гор} = \frac{ql^2}{8f}. \quad (1.4)$$

Умову міцності можна записати у вигляді:

$$\sigma = \frac{T_{max}}{A} \approx \frac{T_{гор}}{A} \leq [\sigma] \quad \text{або} \quad \sigma = \frac{ql^2}{8Af} \leq [\sigma]. \quad (1.5)$$

Введемо позначення  $q/A = \tilde{\gamma}$ , тоді формулу (1.5) можна записати у вигляді:

$$\sigma = \frac{\tilde{\gamma}l^2}{8f} \leq [\sigma]. \quad (1.6)$$

В процесі експлуатації дріт зазнає впливу різних навантажень  $q$  та температур  $T$ . При зміні цих факторів змінюється напруження  $\sigma$  та стріла провисання дроту  $f$ . Залежність між напруженнями та стрілами провисання для станів  $m$  і  $n$

$$\sigma_n - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} + \alpha E(T_m - T_n), \quad (1.7)$$

називають рівнянням стану дроту.

Напруження також можна виразити через стріли провисання:

$$\sigma_m = \frac{\tilde{\gamma}_m l^2}{8f_m}, \quad \sigma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n l^2}{8f_n}. \quad (1.8)$$

Враховуючи (1.8) рівняння стану дроту матиме вигляд:

$$f_n^3 - \left[ f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 (T_n - T_m) - \frac{3}{64} \frac{\tilde{\gamma}_m l^4}{E f_m} \right] f_n - \frac{3}{64} \frac{\tilde{\gamma}_n l^4}{E} = 0. \quad (1.9)$$

Зауважимо, що кубічне рівняння, як наприклад рівняння (1.9), можна розв'язати графічним способом. Рівняння, яке має вигляд

$$f_n^3 - a f_n - b = 0$$

при графічному розв'язанні можна подати так

$$f_n^3 = a f_n + b, \quad (1.10)$$

де  $a$  та  $b$  – відомі числа.

У прямокутних координатах  $y, f_n$  будемо графіки

$$y = f_n^3 \quad \text{та} \quad y = a f_n + b. \quad (1.11)$$

Точка перетину кубічної параболи з прямою лінією дає дійсний корінь рівняння, а отже, шукану величину  $f_n$ .

Проліт називають **критичним** ( $l_{кр}$ ), якщо напруження в дроті однакове в обох станах, тобто як при найбільшому навантаженні (стан  $n$ :  $T_n = T_{ож} = -5^\circ\text{C}$ ,  $\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_{\max}$ ,  $\sigma_n = [\sigma]$ ), так і при найнижчій температурі (стан  $m$ :  $T_m = T_{\min}$ ,  $\tilde{\gamma}_m = \tilde{\gamma}_1$  – тільки власна вага,  $\sigma_m = [\sigma]$ ).

$$l_{кр} = [\sigma] \sqrt{\frac{24\alpha(T_n - T_m)}{\tilde{\gamma}_{\max}^2 - \tilde{\gamma}_1^2}}. \quad (1.12)$$

Порівнюючи розрахунковий проліт з критичним, можна встановити, за яких умов у дроті діє найбільше напруження. Якщо  $l < l_{кр}$ , то найбільше напруження виникає при  $T = T_{\min}$ ,  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1$ ; якщо  $l > l_{кр}$ , то найбільше напруження виникає при найбільшому навантаженні.

### 1.3. Приклад розв'язання задачі ОМ1

**Умова задачі.** Багатожильний мідний дріт перерізом  $A=120 \text{ мм}^2$  підвішують при температурі  $T_0=15^\circ\text{C}$  до опор, які розташовані на одному рівні на відстані  $l=100 \text{ м}$ .

### Знайти:

- а) яку стрілу провисання  $f_0$  необхідно надати дроту, щоб напруження в найбільш небезпечному стані дорівнювало допустимому;
- б) висоту точок підвішування дроту, щоб відстань його найнижчої точки від землі була не менша 6 м.

### Розв'язок

Розрахунок дроту виконуємо для таких випадків:

1. температура  $T_{ож} = -5 \text{ } ^\circ\text{C}$ , при цьому дріт крім власної ваги навантажений шаром льоду завтовшки 1 см, а також горизонтальним тиском вітру  $p = 240 \text{ Па}$ ;
2. температура  $T_{\min} = -40 \text{ } ^\circ\text{C}$ , вважаємо, що діє тільки власна вага дроту;
3. температура  $T_{\max} = -40 \text{ } ^\circ\text{C}$ , вважаємо, що діє тільки власна вага дроту.

Перші два випадки можуть бути небезпечними з погляду міцності дроту. У третьому випадку може утворитися найбільша стріла провисання, за якою необхідно визначити мінімальну висоту точок підвішування дроту.

Згідно з сортаментом дротів, багатожильний мідний дріт перерізом  $A = 120 \text{ мм}^2$  має діаметр  $d = 1,42 \text{ мм}$  та вагу одиниці довжини  $q_{вл} = 10,9 \text{ Н/м}$ . Модуль пружності матеріалу дроту  $E = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ , коефіцієнт лінійного температурного розширення  $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ . Допустиме напруження дроту  $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ .

Знайдемо навантаження  $q_{\max}$  у першому випадку. Для визначення ваги льоду треба знайти внутрішній та зовнішній діаметри льодового покриву. Внутрішній діаметр дорівнює діаметру дроту, тобто  $d = 1,42 \text{ см}$ ; зовнішній діаметр  $D$  при товщині льодової оболонки 1 см  $D = 3,42 \text{ см}$ .

Площа поперечного перерізу льодового покриття дроту:

$$A_n = \pi(D^2 - d^2) / 4 = 3,14(3,42^2 - 1,42^2) / 4 = 7,6 \text{ см}^2.$$

При питомій вазі льоду  $\gamma_l = 9 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$  навантаження від льоду на 1 м довжини дроту:

$$q_l = \gamma_l A_n = 9 \cdot 10^3 \cdot 7,6 \cdot 10^{-4} = 6,84 \text{ Н/м}.$$

Тиск вітру на 1 м довжини дроту з льодовим покриттям:

$$q_в = pD = 240 \cdot 3,42 \cdot 10^{-2} = 8,21 \text{ Н/м}.$$

Повне навантаження на 1 м довжини обледенілого дроту:

$$q_{\max} = \sqrt{(q_{вл} + q_l)^2 + q_в^2} = \sqrt{(10,9 + 6,84)^2 + 8,21^2} = 19,56 \text{ Н/м}.$$

З'ясуємо, в якому із перших двох станів дроту напруження в ньому буде найбільшим:

$$\tilde{\gamma}_{\max} = \frac{q_{\max}}{A} = \frac{19,56}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 16,3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3,$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{q_n}{A} = \frac{10,9}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 9,08 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3.$$

За формулою (1.12) визначаємо довжину критичного прольоту:

$$l_{кр} = [\sigma] \sqrt{\frac{24\alpha(T_n - T_m)}{\tilde{\gamma}_{\max}^2 - \tilde{\gamma}_1^2}} = 80 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{24 \cdot 17 \cdot 10^{-6}[-5 - (-40)]}{(16,3^2 - 9,08^2) \cdot 10^8}} = 70,6 \text{ м}.$$

Оскільки дійсна довжина прольоту  $l=100 \text{ м}$  більша, ніж довжина критичного прольоту, то найбільше напруження в проводі  $\sigma_{\max}$  буде при максимальному навантаженні ( $q_{\max}=19,56 \text{ Н/м}$  і  $T_{ож}=-5^{\circ}\text{C}$ ), тобто в першому стані. Взявши  $\sigma_{\max}=[\sigma]$ , знайдемо стрілу провисання дроту в цьому стані:

$$f_1 = \frac{q_{\max} l^2}{8A[\sigma]} = \frac{19,56 \cdot 100^2}{8 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 10^6} = 2,54 \text{ м}.$$

Визначимо, яку стрілу провисання треба надати дроту при підвищенні. Для цього скористаємося залежністю (1.9), враховуючи, що  $q_m=q_{\max}=19,56 \text{ Н/м}$ ;  $q_{ел}=10,9 \text{ Н/м}$ ;  $f_m=f_1=2,54 \text{ м}$ ;  $T_m=T_{ож}=-5^{\circ}\text{C}$ ;  $T_n=T_0=15^{\circ}\text{C}$ ;  $f_n=f_0$ . Підставивши числові значення в рівняння (9), отримаємо:

$$f_0^3 - \left[ 2,54^2 + \frac{3}{8} 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 (15 + 5) - \frac{3 \cdot 10,9 \cdot 100^4}{64 \cdot 2,54 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^{11}} \right] f_0 - \frac{3 \cdot 19,56 \cdot 100^4}{64 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^{11}} = 0.$$

Виконавши розрахунки, маємо:  $f_0^3 - 5,41 f_0 - 3,28 = 0$ .

Розв'язавши рівняння, знайдемо  $f_0 = 2,58 \text{ м}$ .

Визначимо тепер стрілу провисання дроту при  $T_{\max}=40^{\circ}\text{C}$ . Для цього також скористаємося залежністю (1.9), враховуючи, що  $q_m=q_{\max}=19,56 \text{ Н/м}$ ;  $q_{ел}=10,9 \text{ Н/м}$ ;  $f_m=f_0=2,58 \text{ м}$ ;  $T_m=T_0=15^{\circ}\text{C}$ ;  $f_n=f_3$ .

Підставивши числові значення, матимемо:

$$f_3^3 - \left[ 2,58^2 + \frac{3}{8} 17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 (40 - 15) - \frac{3 \cdot 10,9 \cdot 100^4}{64 \cdot 2,58 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^{11}} \right] f_3 - \frac{3 \cdot 19,56 \cdot 100^4}{64 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^{11}} = 0.$$

Виконавши розрахунки, маємо

$$f_3^3 - 7f_3 - 3,28 = 0 .$$

звідки знаходимо, що  $f_3=2,85$  м.

Стріла провисання в третьому стані більша ніж у першому випадку. Очевидно, що вона більша за стрілу провисання, яку матиме дріт у другому випадку (при  $T_{\min}=-40^0C$ ).

Для того, щоб найнижча точка дроту була на відстані не меншій, ніж 6 м від землі, треба, щоб точки підвішування розташовувалися не нижче, ніж  $6+2,85=8,85$  м.

## Задача ОМ2 – кручення валу круглого поперечного перерізу

### 2.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** До сталюго валу прикладені три відомих моменти:  $M_1, M_2, M_3$  (рис. ОМ2.1). Вихідні дані приведені в таблиці ОМ2.

**Знайти:**

- 1) при якому значенні момента  $X$  кут повороту правого кінцевого перерізу валу дорівнює нулю;
- 2) для знайденого значення  $X$  побудувати епюру крутних моментів;
- 3) при заданому значенні  $[\tau]$  визначити діаметр валу з урахуванням міцності і округлити його значення до найближчого, рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 4) побудувати епюру кутів закручування;
- 5) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 м).

Таблиця ОМ2

№ рядка	Схема по рис. 2.1	Відстань, м			Моменти, Н·м			[ $\tau$ ], МПа
		$a$	$b$	$c$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	
1	I	1,1	1,1	1,1	1100	1100	1100	35
2	II	1,2	1,2	1,2	1200	1200	1200	40
3	III	1,3	1,3	1,3	1300	1300	1300	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	1400	1400	1400	50
5	V	1,5	1,5	1,5	1500	1500	1500	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	1600	1600	1600	60
7	VII	1,7	1,7	1,7	1700	1700	1700	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	1800	1800	1800	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	1900	1900	1900	75
0	X	2,0	2,0	2,0	2000	2000	2000	80
	е	г	д	е	г	д	е	г

### 2.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

При навантаженні прямого бруса (валу) зовнішніми моментами, площини дії яких перпендикулярні його поздовжній осі, в поперечних перерізах бруса виникає тільки один внутрішній силовий фактор – крутний момент  $T=M_{кр}$ . Такий вид деформації називається крученням. При крученні відбувається поворот одного поперечного перерізу бруса відносно іншого на деякий кут  $\varphi$  – кут закручування.



Рис. ОМ2.1.

Крутний момент в перерізі чисельно рівний алгебраїчній сумі зовнішніх (крутних) моментів, діючих на дану частину бруса (інша частина бруса відкинута). Крутний момент в перерізі вважається позитивним, якщо зовнішній момент обертає відсічену частину проти годинникової стрілки, якщо дивитися на переріз із сторони відкинutoї частини бруса, і негативним – в протилежному випадку. По знайдених значенням крутних моментів будують епюру крутних моментів.

Умови міцності при крученні бруса круглого поперечного перерізу при статичному навантаженні мають вигляд:

$$\tau_{\max} = T / W_{\rho} \leq [\tau]. \quad (2.1)$$

де  $\tau_{\max}$  – максимальне дотичне напруження в найбільш небезпечному перерізі бруса;  $T$  – крутний момент в небезпечному перерізі;  $W_{\rho}$  – полярний момент опору поперечного перерізу бруса;  $[\tau]$  – допустиме дотичне напруження.

Умова жорсткості валу при крученні має вигляд:

$$\theta = \frac{T}{GJ_{\rho}} \leq [\theta]. \quad (2.2)$$

де  $\theta$  – відносний кут закручування в радіанах на одиницю довжини валу;  $G$  – модуль пружності другого роду (модуль пружності при зсуві);  $J_{\rho}$  – полярний момент інерції;  $[\theta]$  – допустимий відносний кут закручування.

Кут закручування  $\varphi$  валу на ділянці завдовжки  $l$  визначаємо за формулою:

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_{\rho}}. \quad (2.3)$$

По значеннях кутів закручування валу на всіх ділянках будемо епюри кутів закручування.

### 2.3. Приклад розв'язання задачі ОМ2

**Умова задачі.** До сталевого валу прикладені три зовнішніх моменту, два з яких відомі:  $M_1=1,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $M_2=2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Відомі також відстані ділянок, до яких прикладені зовнішні моменти:  $a=1 \text{ м}$ ;  $b=1,5 \text{ м}$ ;  $c=2 \text{ м}$ . На рис. ОМ2.2, а показана схема навантаження валу. Для моментів прийняті умовні позначки у вигляді двох кіл. Коло з точкою позначає силу, напрямлену на спостерігача, а коло зі знаком плюс – від спостерігача.

**Знайти:**

1. встановити, при якому значенні невідомого зовнішнього моменту  $X$  кут повороту правого кінцевого перерізу валу дорівнює нулю;
2. побудувати епюру крутних моментів;
3. визначити діаметр валу з розрахунку на міцність при  $[\tau]=50 \text{ МПа}$  і округлити його величину до найближчої більшої: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
4. побудувати епюру кутів закручування при  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ;
5. знайти найбільший відносний кут закручування і перевірити виконання умови жорсткості при  $[\theta]=2 \text{ град/м}$ .

## Розв'язок

1. Визначаємо значення невідомого зовнішнього моменту, при якому кут повороту правого кінцевого перерізу  $D$ , дорівнює нулю по відношенню до нерухомого перерізу  $A$  ( $\varphi_{DA}=0$ ):

$$\varphi_{DA} = -\frac{1}{GJ_p} [M_1 a + M_2 (a+b) - X(a+b+c)] = 0,$$

звідки знаходимо

$$X = \frac{M_1 a + M_2 (a+b)}{a+b+c} = \frac{1,3 \cdot 1 + 2 \cdot (1+1,5)}{1+1,5+2} = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Додатне значення  $X$  означає, що напрямок невідомого зовнішнього моменту співпадає з обраним.

2. Крутні моменти на ділянках валу визначимо методом перерізів.

Ділянка III:  $T^{III}=X=1,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

Ділянка II:  $T^{II}=X-M_2=1,4-2=-0,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

Ділянка I:  $T^I=X-M_2-M_1=1,4-2-1,3=-1,9 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Будуємо епюру крутних моментів (рис. ОМ2.2, б), яка показує зміну крутного моменту по довжині валу.

3. З умови міцності (2.1) визначаємо полярний момент опору, а потім і діаметр валу, враховуючи, що для вала круглого поперечного перерізу  $W_p=\pi \cdot d^3/16$ . Діаметр валу визначається за формулою:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,9 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 0,0578 \text{ м}.$$

Приймаємо діаметр валу 60 мм.

4. Для визначення кутів закручування вала на кожній ділянці знаходимо спочатку полярний момент інерції поперечного перерізу

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{32} = 127 \text{ см}^4 = 127 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

а потім жорсткість поперечного перерізу вала при крученні

$$GJ_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 127 \cdot 10^{-8} = 101,8 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Визначаємо кут закручування.

На I ділянці кут закручування вала складає:

$$\varphi_{BA} = \frac{T^I a}{GJ_p} = -\frac{1,9 \cdot 1}{101,8} = -0,0187 \text{ рад}.$$

На II ділянці кут закручування вала складає:

$$\varphi_{CB} = \frac{T^{II} b}{GJ_p} = -\frac{0,6 \cdot 1,5}{101,8} = -0,0088 \text{ рад}.$$

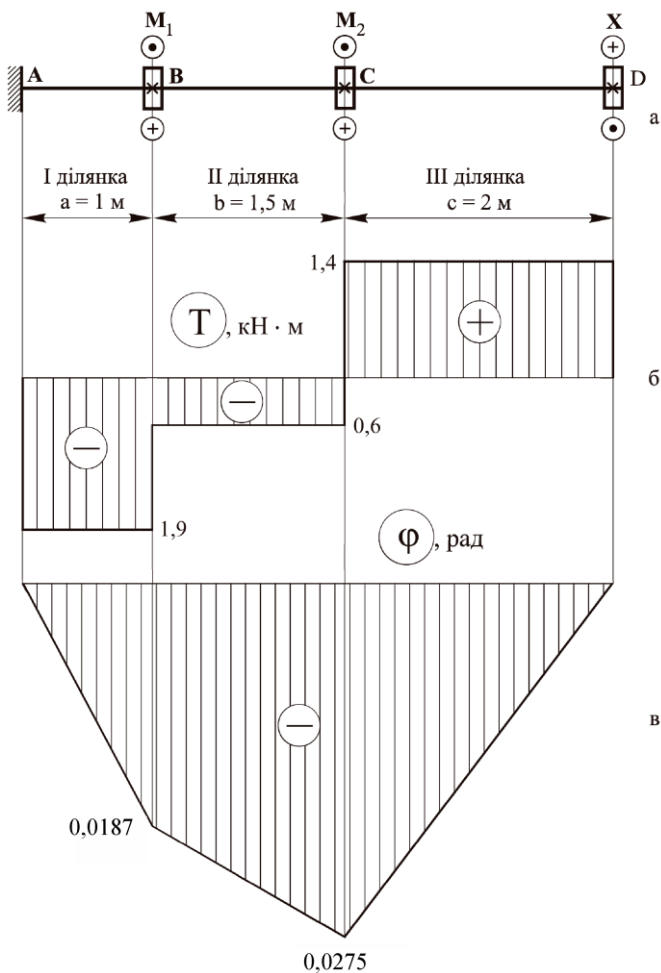


Рис. ОМ2.2

На III ділянці кут закручування вала складає:

$$\varphi_{DC} = \frac{T^{III} c}{GJ_p} = \frac{1,4 \cdot 2}{101,8} = 0,0275 \text{ рад.}$$

Кут повороту перерізу D відносно перерізу A складає:

$$\varphi_{DA} = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} + \varphi_{DC} = -0,0187 - 0,0088 + 0,0275 = 0 \text{ рад.}$$

Рівність нулю кута повороту правого кінцевого перерізу валу вказує на правильність розв'язку задачі. За отриманими даними будемо епюру кутів закручування валу (рис. ОМ2.2, в).

5. Найбільший відносний кут закручування валу має місце на I ділянці (тут діє максимальний крутний момент  $T_{\max}=|-1,9|=1,9 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ).

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GJ_{\rho}} = \frac{1,9}{101,8} = 0,0187 \text{ рад/м} = 1,87 \text{ град/м}.$$

Оскільки  $\theta_{\max}=1,87 < 2=[\theta]$ , то умова жорсткості виконується.

## Задача ОМЗ – розрахунок балок на міцність при згинанні

### 3.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Виконати розрахунок балки (рис. ОМЗ.1) на міцність при згинанні. Вихідні дані приведені в табл. ОМЗ.1.

**Знайти:** вирази, що описують зміну  $Q$  та  $M$  для кожної ділянки у загальному вигляді, побудувати епюри  $Q$  і  $M$ , знайти  $M_{\max}$  і підібрати сталю балку двотаврового поперечного перерізу при  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ .

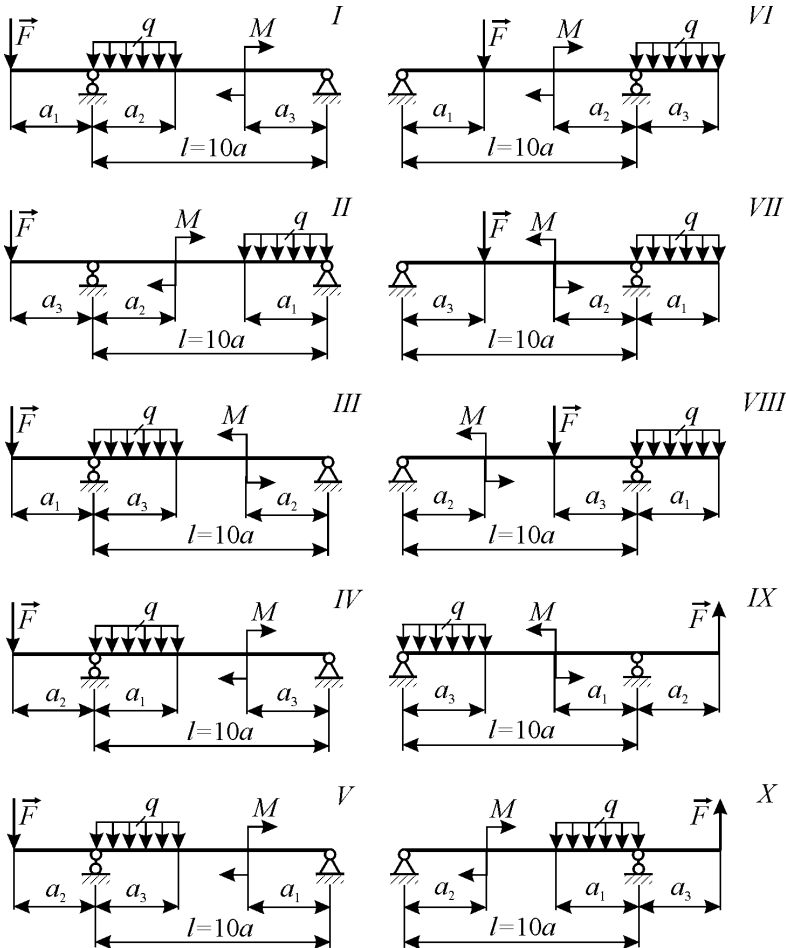


Рис. ОМЗ.1

Таблиця ОМ3.1

№ рядка	Схема по рис. 2.3	$l=10a, м$	Відстань в частках			$M, кН\cdot м$	$F, кН$	$q, кН/м$
			$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$			
1	I	3	4	5	3	5	6	7
2	II	4	5	6	4	6	7	8
3	III	5	6	7	5	7	8	9
4	IV	6	7	8	6	8	9	10
5	V	7	8	3	7	9	10	12
6	VI	8	4	4	8	10	6	14
7	VII	9	5	5	3	6	7	15
8	VIII	10	6	6	4	8	8	16
9	IX	3	7	7	5	9	9	18
0	X	4	8	8	6	10	10	20
	е	е	г	д	е	г	д	е

### 3.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

**Згинання** – це такий вид деформації, коли під дією зовнішніх сил відбувається викривлення подовжньої осі стержня (балки). Згинання називається чистим, якщо в поперечному перерізі балки виникає тільки один внутрішній силовий фактор – **згинаючий момент**.

Якщо від дії зовнішнього навантаження в поперечних перерізах балки виникають згинаючий момент і поперечна сила, то такий випадок зветься **плоским поперечним згинанням**.

В даній задачі розглядається пряме (пласке) згинання, коли площина дії зовнішніх сил (силова площина) проходить через одну з головних осей поперечного перерізу балки.

Розв'язок задачі розпочинаємо з визначення опорних реакцій методами теоретичної механіки. Для балки на двох опорах, яка навантажена плоскою системою сил, використовують три рівняння рівноваги, два з яких є рівняннями моментів всіх зовнішніх сил відносно заданих опор.

Для перевірки правильності визначення реакцій опор складають четверте (додаткове) рівняння рівноваги (рівняння моментів або рівняння сил).

Для визначення поперечної сили і згинаючого моменту у всіх поперечних перерізах балки використовують метод перерізів, на підставі якого:

1. поперечна сила  $Q$  в поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на площину перерізів всіх зовнішніх сил, які діють по один бік від перерізу;

2. згинаючий момент в поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів (обчислених щодо центру ваги перерізу) зовнішніх сил, які діють по один бік від даного перерізу.

Поперечна сила в перерізі балки вважається додатньою, якщо рівнодіюча зовнішніх сил зліва від перерізу напрямлена від низу до верху, а справа – зверху вниз. Згинаючий момент в перерізі балки вважається додатнім, якщо він згинає балку опуклістю вниз, від’ємним – якщо опуклістю вгору.

Поверхня в балці, волокна якої не зазнають повздовжньої деформації, називається **нейтральним шаром**. Лінія перетину нейтрального шару з поперечним перерізом називається **нейтральною лінією**.

Для забезпечення міцності балки при згинанні необхідно, щоб найбільші нормальні (розтягуючі і стискуючі) напруження в небезпечному перерізі (в перерізі, де згинаючий момент має найбільше значення по абсолютній величині) не перевищували відповідних допустимих напружень.

Для балок з пластичних матеріалів з поперечним перерізом, що симетричний відносно нейтральної лінії, умова міцності для нормальних напружень має вигляд:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_z \leq [\sigma]. \quad (3.1)$$

де  $W_z$  – осьовий момент опору поперечного перерізу балки, для прокатних профілів, який наводиться в таблицях сортаменту (див. додаток А);  $[\sigma]$  – допустиме напруження на розтяг та стиск.

### 3.3. Приклад розв’язання задачі ОМЗ

**Умова задачі.** Виконати розрахунок балки на міцність при згинанні.

**Дано:**  $l=10a=2 \text{ м}$ ;  $a_1/a=7$ ;  $a_2/a=8$ ;  $M=6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $F=12 \text{ кН}$ ;  $q=10 \text{ кН/м}$ .

**Знайти:** вирази, що описують зміну  $Q$  та  $M$  для кожної ділянки у загальному вигляді, побудувати епюри  $Q$  і  $M$ , знайти  $M_{\max}$  і підібрати сталю балку двотаврового поперечного перерізу при  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ .

#### Розв’язок

1. Складемо розрахункову схему балки в масштабі по довжині (рис. ОМЗ.2, а).

2. Визначимо опорні реакції з рівнянь рівноваги. Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum M_A = 0: Y_B l - F(l - a_2) - qa_2(l - 0,5a_2) + M = 0,$$

$$\sum M_B = 0: -Y_A l + Fa_2 + 0,5qa_2^2 + M = 0.$$

З рівнянь рівноваги знаходимо:

$$\begin{aligned} Y_B &= [F(l - a_2) + qa_2(l - 0,5a_2) - M] / l = \\ &= [12(2 - 1,6) + 10 \cdot 1,6(2 - 0,5 \cdot 1,6) - 6] / 2 = 9 \text{ кН}, \end{aligned}$$

$$Y_A = (Fa_2 + 0,5qa_2^2 + M) / l = (12 \cdot 1,6 + 0,5 \cdot 10 \cdot 1,6^2 + 6) / 2 = 19 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0: Y_A + Y_B - F - qa_2 = 19 + 9 - 12 - 10 \cdot 1,6 = 0.$$

Перевірка виконується, тому розрахунки виконано вірно.

3. У відповідності з характером зовнішнього навантаження встановлюємо, що балка має три ділянки, для яких повинні бути складені аналітичні вирази зміни  $Q_y$  і  $M_Z$ .

**Для першої ділянки:**  $0 \leq x_1 \leq l - a_2 = 2 - 1,6 = 0,4$  м, тоді

$$Q_y^I = Y_A = 19 \text{ кН}, \quad M_Z^I = Y_A x_1:$$

при  $x_1 = 0$ ,  $M_Z^I = 0$ ;

при  $x_1 = 0,4$  м,  $M_Z^I = 19 \cdot 0,4 = 7,6$  кН·м.

**Для другої ділянки:**  $0 \leq x_2 \leq a_1 - (l - a_2) = 1,4 - 0,4 = 1$  м, тоді

$$Q_y^{II} = Y_A - F - qx_2, \quad M_Z^{II} = Y_A(l - a_2 + x_2) - Fx_2 - qx_2^2 / 2:$$

при  $x_2 = 0$ ,  $Q_y^{II} = Y_A - F = 19 - 12 = 7$  кН,

$$M_Z^{II} = Y_A(l - a_2) = 19(2 - 1,6) = 7,6 \text{ кН·м};$$

при  $x_2 = 1$  м,  $Q_y^{II} = Y_A - F - qx_2 = 19 - 12 - 10 \cdot 1 = -3$  кН,

$$M_Z^{II} = Y_A(l - a_2 + x_2) - Fx_2 - qx_2^2 / 2 = 19(0,4 + 1) - 12 \cdot 1 - 10 \cdot 1^2 / 2 = 9,6 \text{ кН·м}.$$

На ділянці II при  $Q_y^{II} = 0$  знаходимо  $M_Z^{II}{}_{\max}$ :

при  $x_2 = x_2^*$ ,  $Y_A - F - qx_2^* = 0$ , звідки  $x_2^* = (Y_A - F) / q = (19 - 12) / 10 = 0,7$  м;

$$M_Z^{II} = 19(0,4 + 0,7) - 12 \cdot 0,7 - 10 \cdot 0,7^2 / 2 = 10,05 \text{ кН·м}.$$

**Для третьої ділянки:**  $0 \leq x_3 \leq l - a_1 = 2 - 1,4 = 0,6$  м, тоді

$$Q_y^{III} = -Y_B + qx_3, \quad M_Z^{III} = Y_B x_3 - qx_3^2 / 2:$$

при  $x_3 = 0$ ,  $Q_y^{III} = -9$  кН,  $M_Z^{III} = 0$  кН·м;

при  $x_3 = 0,6$  м,  $Q_y^{III} = -Y_B + qx_3 = -9 + 10 \cdot 0,6 = -3$  кН,

$$M_Z^{III} = Y_B x_3 - q x_3^2 / 2 = 9 \cdot 0,6 - 10 \cdot 0,6^2 / 2 = 3,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

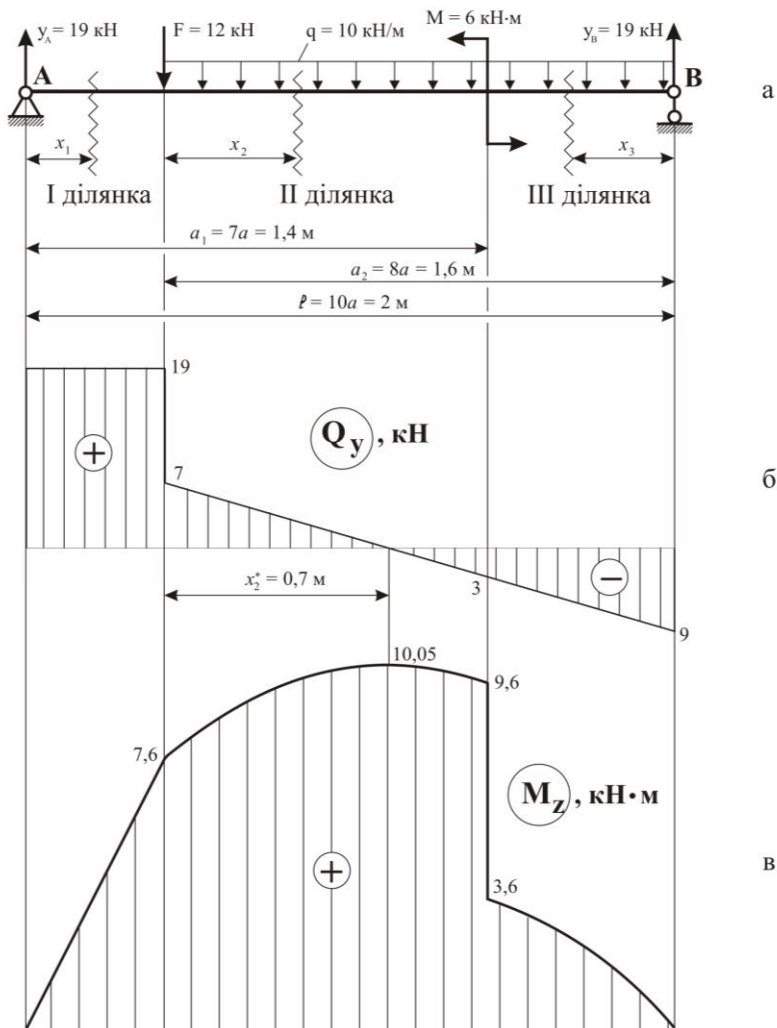


Рис. ОМЗ.2

Використовуючи знайдені значення і аналітичні залежності будуємо епюри поперечних сил  $Q_y$  та згинаючих моментів  $M_Z$  (рис. 2.4, б, в).

З епюри  $M_Z$  видно, що максимальне значення згинаючого моменту дорівнює  $M_{z \max} = 10,05 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

4. З умови міцності при згинанні знаходимо необхідний осьовий момент опору балки:

$$W_z \leq \frac{M_Z}{[\sigma]} = \frac{10,05 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 62,8 \text{ м}^3 = 62,8 \text{ см}^3.$$

З сортаменту прокатної сталі, обираємо двутавр №14, у якого  $W_x = W_z = 81,7 \text{ см}^3$  (Додаток А).

## **Задача ОМ4 – визначення переміщень в балках змінного перерізу при згині**

### 4.1. Умова задачі, розрахункові дані

**Умова задачі.** Визначити переміщення балки змінного перерізу (рис. ОМ4.1) при згинанні. Вихідні дані приведені в табл. ОМ4.1.

**Знайти:** прогин вільного кінця балки змінного перерізу.

Таблиця ОМ4.1

№ рядка	Схема по рис. ОМ4.1	$\beta$	$k$
1	I	0.1	1.5
2	II	0.2	2
3	III	0.3	3
4	IV	0.4	4
5	V	0.5	5
6	VI	0.6	6
7	VII	0.7	7
8	VIII	0.8	8
9	IX	0.9	9
0	X	1.0	10
	е	г	д

### 4.2. Методичні рекомендації до розв'язання задачі

Для визначення переміщень в стержньових системах широко використовують метод Мора, за допомогою якого розглядають два стани пружної системи. В першому стані (дійсному або вантажному) пружна система навантажена заданим зовнішнім навантаженням, під впливом якого визначаються внутрішні силові фактори у всіх перерізах. В другому стані (допоміжному або одиничному) пружна система навантажена тільки одиничною безрозмірною зосередженою силою в тому перерізі, в якому необхідно визначити лінійне переміщення. Одиничну силу спрямовують вертикально, якщо необхідно знайти вертикальне переміщення заданого перерізу. Для другого стану також визначаються внутрішні силові фактори у всіх перерізах пружної системи. Формула Мору (інтеграл Мору) має вигляд:

$$\Delta_{iF} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ}, \quad (4.1)$$

де  $\Delta_{iF}$  – переміщення  $i$ -го перерізу, що виникає від дії сил вантажного стану;  $\bar{M}_i$  – згинальний момент  $i$ -го перерізу одиничного стану;  $M_F$  –

згинальний момент  $i$ -го перерізу вантажного стану;  $E$  – модуль пружності першого роду;  $J$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу  $i$ -ої ділянки.

Інтегрування проводиться по кожній ділянці, а потім результати інтегрування підсумовуються.

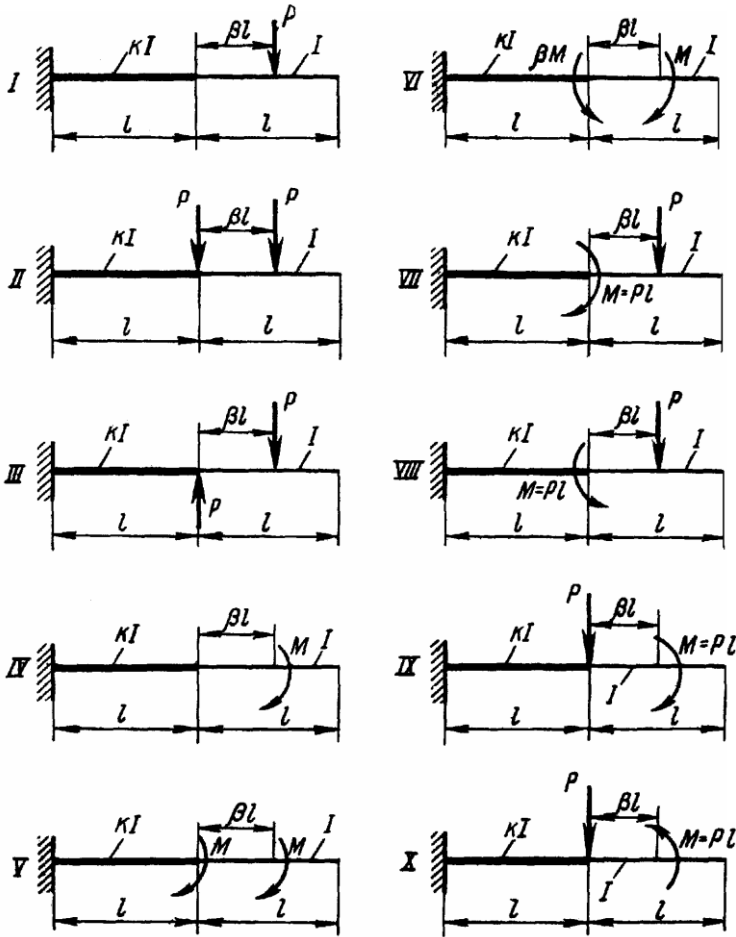


Рис. ОМ4.1

Для визначення кута повороту перерізу пружної системи в другому стані прикладається одиничний безрозмірний зосереджений момент.

Замість безпосереднього обчислення інтеграла Мору користуються графоаналітичним методом (метод перемножування епюр) або правилом Верещагіна. Це правило використовується для ділянок пружної системи з постійною жорсткістю поперечного перерізу, а також з обмеженням прямою лінією хоча б однієї з епюр згинаючих моментів, побудованих для двох станів пружної системи. Тоді формула Мору запишеться у вигляді формули

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{\omega_i y_{Ci}}{EJ}, \quad (4.2)$$

яка і є аналітичним записом правила Верещагіна. В (4.1)  $\omega_i$  - площа  $i$ -ої вантажної епюри,  $y_{Ci}$  - розташована під центром ваги  $i$ -ої вантажної епюри ордината прямолінійної одиничної епюри.

На кожній ділянці інтеграл, що шукається, дорівнює добутку площі  $\omega_i$  вантажної епюри на розташовану під її центром ваги ординату  $y_{Ci}$  прямолінійної одиничної епюри. Якщо обидві епюри розташовуються по один бік від базової лінії системи, то переміщення співпадає з напрямком одиничної сили (результат обчислень береться зі знаком "+"). Якщо епюри розташовані по різні боки від базової лінії, то переміщення напрямлене у бік, протилежний напрямку одиничної сили (моменту).

Для полегшення обчислень можна використовувати готові таблиці множення епюр (додаток Б і В).

**Приклад.** Визначити переміщення при наступних даних: (рис. 2.6, а).

### 4.3. Приклад розв'язання задачі ОМ4

**Умова задачі.** Визначити переміщення вільного кінця балки (т. А) змінного перерізу (рис. ОМ4.2, а) при згинанні.

**Дано:**  $F = qa$ ,  $k=12$ ,  $\beta=0,5$ .

**Знайти:** прогин вільного кінця балки змінного перерізу.

#### Розв'язок

1. Будуємо епюру згинаючих моментів для вантажного стану від заданого зовнішнього навантаження.

Ділянка АВ:

$$0 \leq x_1 \leq 0,5a, \quad M_z = -qx_1^2 / 2;$$

$$\text{при } x_1=0,5a: \quad M_z = -\frac{qx_1^2}{2} = -\frac{q(0,5a)^2}{2} = -0,125qa^2.$$

Ділянка BC:

$$0 \leq x_2 \leq a, M_z = -q\beta a \left( \frac{\beta a}{2} + x_2 \right) + Fx_2;$$

$$\text{при } x_2=0: M_z = -0,125qa^2;$$

$$\text{при } x_2=a, M_z = -0,5qa \left( \frac{a}{4} + a \right) + qa^2 = 0,375qa^2.$$

Використовуючи отримані дані будуємо епюру згинаючого моменту для вантажного стану  $M_z$  (рис. ОМ4.2, б).

2. Будуємо епюру згинаючих моментів для одиничного стану.

Для побудови схеми одиничного стану балки пружну систему (балку) навантажують в перерізі  $A$  одиничною зосередженою силою (рис. ОМ4.2, в), направленою по вертикалі вниз (якщо результат отримаємо позитивний, то точка  $A$  дійсно рухається вниз). Епюра згинаючого моменту для одиничного стану представлена на рис. ОМ4.2, г).

3. Визначаємо переміщення перерізу  $A$  використовуючи формулу (4.2) у вигляді:

$$\Delta_A = \frac{\omega_1 y_{C1}}{EJ} + \frac{\omega_2 y_{C2}}{EkJ},$$

де  $\omega_1, \omega_2$  – площі відповідних епор;  $y_{C1}, y_{C2}$  – ординати відповідних одиничних епор.

На ділянці  $AB$  при множенні епор використаємо формули для елементарних фігур, отримаємо:

$$\omega_1 = \frac{1}{3} 0,5a \cdot 0,125qa^2, \quad y_{C1} = 0,75 \cdot 0,5a;$$

$$\omega_1 y_{C1} = \frac{1}{3} 0,5a \cdot 0,125qa^2 \cdot 0,75 \cdot 0,5a = 0,0078qa^4.$$

На ділянці  $BC$  використаємо формулу для множення епор у вигляді трапецій. Тоді

$$\text{для (рис. 4.2, д): } \omega_{y_C} = \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + cb);$$

$$\text{для (рис. 4.2, е): } \omega_{y_C} = \frac{l}{6} (2a_1c_1 - 2b_1d_1 + a_1d_1 - c_1b_1).$$

Враховуючи, що

$$l = a, \quad a_1 = 0,125qa^2, \quad b_1 = 0,375qa^2, \quad c_1 = 0,5a, \quad d_1 = 1,5a,$$

отримаємо

$$\omega_2 y_{C2} = \frac{a}{6} (2 \cdot 0,125qa^2 \cdot 0,5a - 2 \cdot 0,375qa^2 \cdot 1,5a +$$

$$+0,125qa^2 \cdot 1,5a - 0,375qa^2 \cdot 0,5a) = -0,1667qa^4.$$

Балка із заданим навантаженням

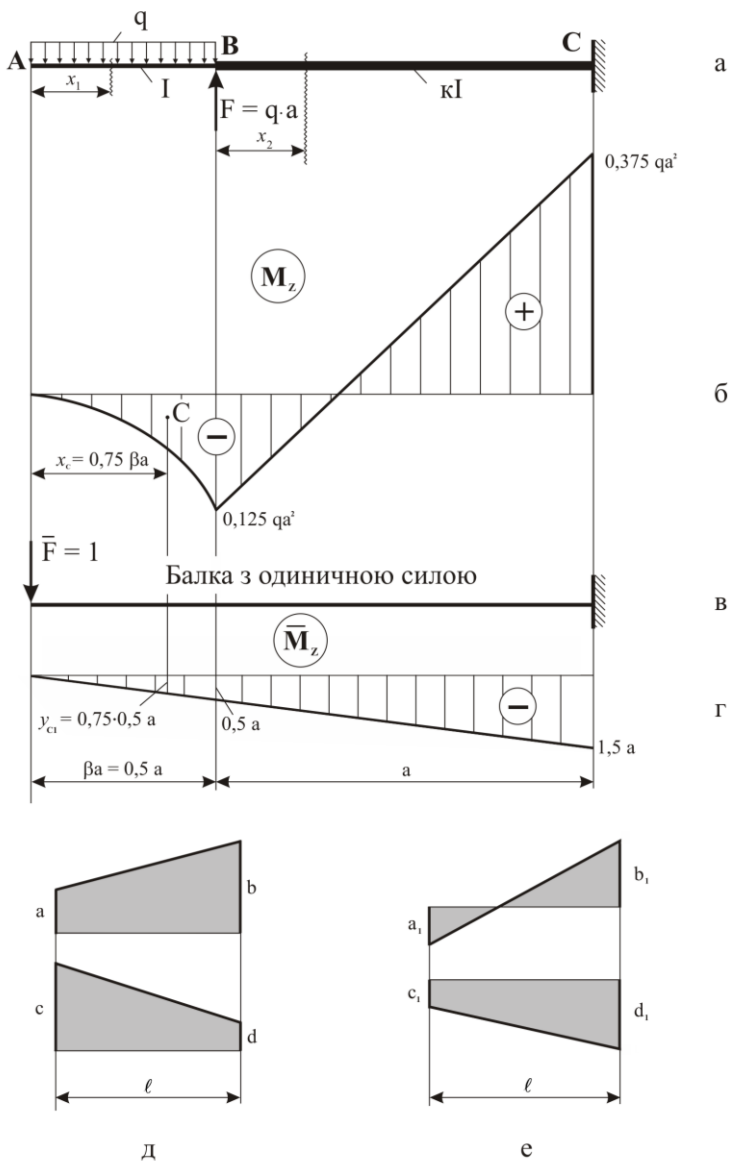


Рис. ОМ4.2

Остаточно

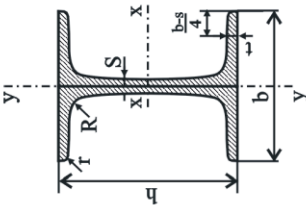
$$\Delta_A = 0,0078 \frac{qa^4}{EJ} - 0,1667 \frac{qa^4}{12EJ} = -0,0061 \frac{qa^4}{EJ}$$

Отриманий знак «-» вказує на те, що точка  $A$  (вільний кінець балки) рухається в напрямку протилежному напрямку одиничної сили, тобто вгору.

# Додаток А

## Балки двотаврові. Сортамент (ГОСТ 8239-72)

- $h$  – висота;  
 $b$  – ширина полиці;  
 $t$  – середня товщина полиці;  
 $s$  – товщина стінки;  
 $R$  – радіус внутрішнього закруглення;  
 $r$  – радіус закруглення полиці;  
 $J$  – момент інерції;  
 $i$  – радіус інерції;  
 $W$  – момент опору;  
 $S$  – статичний момент півперерізу;



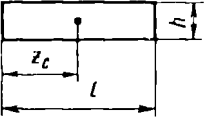
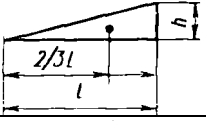
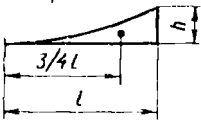
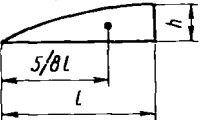
Таблиця А

Номер профіля	мм					Маса 1 м, г	Довідкові величини для осей						
	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$		$r$	$x-x$			$y-y$		
								$J_{x^3}$ см <sup>4</sup>	$W_{x^3}$ см <sup>3</sup>	$i_{x^3}$ см	$S_{x^3}$ см <sup>3</sup>	$J_{y^3}$ см <sup>4</sup>	$W_{y^3}$ см <sup>3</sup>
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07

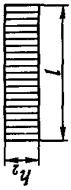
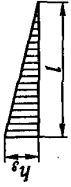

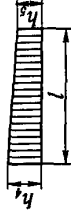
Продовження таблиці А															
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	6,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,96	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

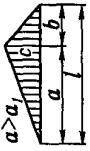
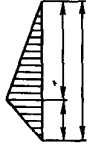

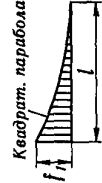
## Додаток Б

Таблиця Б

Вид епюри	Площа епюри	Відстань від центра ваги, $z_C$
	$hl$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{2}{3}l$
<p><i>Квадрат. парабола</i></p> 	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{3}{4}l$
<p><i>Квадрат. парабола</i></p> 	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$

## Додаток В

$M_k$ $M_f$		$hb_2l$	$hb_2l$	$hb_2l$	$hb_2l$	$hb_2l$	$hb_2l$
	$\frac{hb_3l}{2}$	$\frac{hb_3l}{3}$	$\frac{hb_3l}{6}$	$\frac{hb_3l}{6}$	$\frac{hb_3l}{6}$	$\frac{hb_3l}{6}$	$\frac{hb_3l}{6}$
	$\frac{c_1 h}{2}$	$\frac{h(l+b)}{6}$	$\frac{h(a_1+b)c_1}{6}$	$\frac{h(a_1+b)c_1}{6}$	$\frac{c_1 h}{6} [h(l+b) + h_1(l+a_1)]$	$\frac{c_1 h}{6} [h(l+b) + h_1(l+a_1)]$	$\frac{c_1 h}{6} [h(l+b) + h_1(l+a_1)]$
	$\frac{h(h_4+h_5)l}{2}$	$\frac{hl}{6} (2h_4+h_5)$	$\frac{hl}{6} (h_4+2h_5)$	$\frac{hl}{6} (h_4+2h_5)$	$\frac{hl}{6} [h(2h_4+h_5) + h_1(2h_5+h_4)]$	$\frac{hl}{6} [h(2h_4+h_5) + h_1(2h_5+h_4)]$	$\frac{hl}{6} [h(2h_4+h_5) + h_1(2h_5+h_4)]$

 <p><math>a &gt; a_1</math></p>	$\frac{ch_2l}{2}$	$\frac{ch_3(l+b)}{6}$	$\frac{cc_1l}{6} \left[ 2 - \frac{(b_1-b)^2}{b_1a} \right]$	$\frac{c}{6} [h_4(l+b) + h_5(l+a)]$
	$\frac{ch_2l}{2}$	$\frac{ch_3(l+b)}{6}$	$\frac{cc_1l}{6} \left[ 2 - \frac{(a_1-a)^2}{a_1b} \right]$	$\frac{c}{6} [h_4(l+b) + h_5(l+a)]$
 <p>Квадрат. парабола</p>	$\frac{2flh_2}{3}$	$\frac{flh_3}{3}$	$\frac{1}{3} c_1 f_1 (l^2 + a_1 b)$	$\frac{fl}{3} (h_4 + h_5)$
 <p>Квадрат. парабола</p>	$\frac{f_1 l h_2}{3}$	$\frac{f_1 l h_3}{4}$	$\frac{c_1 f_1}{12} \left[ l + b + \frac{b^2}{l} \right]$	$\frac{f_1 l}{12} [3h_4 + h_5]$

## Література

1. *Писаренко Г.С. Опір матеріалів: підручник для вузів.* – К.: Вища школа, 2004. – 656 с.
2. *Зозуля В.В., Мартиненко А.В., Лукін А.Н. Механіка матеріалів.* – Харків: НУВД, 2001. – 404 с.
3. *Шваб`юк В.І. Опір матеріалів: Підручник.* – К.: Знання, 2016. – 400 с.
4. *Корнілов О.А. Опір матеріалів.* – К.: Лотос, 2000. – 551с.
5. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності: Навч. посібник.* – Львів: Світ, 1999. – 945 с.
6. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів.* – К: Вища школа, 2004. – 655 с.
7. *Горик О.В. Основи розрахунку інженерних конструкцій: навч. посібник.* – Полтава: ПДТУ, 2000. – 286 с.
8. *Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофєєв О.А. Опір матеріалів. Розрахункові роботи: навч. посібник.* – Львів: Афіша, 2002. – 280 с.
9. *Ольховий І.М., Стасюк Б.М., Станкевич В.З. Короткий курс опору матеріалів: навч. посібник.* – Серія «Дистанційне навчання». – Львів: Вид-во «Національний університет «Львівська політехніка», 2004. – 196 с.

# **Опір матеріалів. Прості види деформацій**

к.ф.-м.н., доц. Володимир Васильович Пирогов;  
к.т.н., доц. Невдаха Юрій Андрійович;  
к.т.н., ст. викл. Олійніченко Любов Сергіївна.

Комп'ютерний набір  
кафедра ДМ та ПМ  
т. (0522) 390-547

Підп. до друку \_\_\_\_2024 Формат 60x84 1/16 (A5). Папір друк №3. Друк офсетний.  
Умов. друк. арк. Ум.фарбо-відб. Облік.-вид.арк. . Тираж 100 прим.  
Зам.№

---

Центральноукраїнський національний технічний університет  
25006, м. Кіровоград. пр. Університетський, 8