

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН  
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

**ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ  
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Частина I

Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Методичні вказівки для студентів технічних спеціальностей

КІРОВОГРАД

2016

Приклади розв'язання завдань для самостійної роботи з вищої математики.  
Частина I. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Методичні  
вказівки для студентів технічних спеціальностей/ Укл.: Гончарова С.Я. –  
Кіровоград: КНТУ, 2016.– 27 с.

Методичні вказівки містять приклади розв'язання завдань для самостійної  
роботи за темами «Лінійна алгебра» та «Аналітична геометрія».

Затверджено на засіданні  
кафедри вищої математики та  
фізики.  
Протокол № 2  
від 23.09.2016 р.

**Завдання 1. Знайти:**

$$3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T + 2 \cdot E,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язок.* Обчислення розіб'ємо на окремі дії:

$$\begin{aligned} 1) B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \\ 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 6 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 14 & 1 & 15 \\ 26 & 3 & 27 \\ 24 & -5 & 12 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$2) 3 \cdot (A \cdot B) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 14 & 1 & 15 \\ 26 & 3 & 27 \\ 24 & -5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 3 & 45 \\ 78 & 9 & 81 \\ 72 & -15 & 36 \end{pmatrix};$$

$$3) A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix};$$

$$4) (A + B)^T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$5) 2 \cdot E = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$6) 3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T = \begin{pmatrix} 42 & 3 & 45 \\ 78 & 9 & 81 \\ 72 & -15 & 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -3 & 42 \\ 74 & 5 & 73 \\ 71 & -20 & 31 \end{pmatrix};$$

$$7) 3 \cdot B \cdot A - (A + B)^T + 2 \cdot E =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & -3 & 42 \\ 74 & 5 & 73 \\ 71 & -20 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -3 & 42 \\ 74 & 7 & 73 \\ 71 & -20 & 33 \end{pmatrix} \blacktriangleleft.$$

**Завдання 2.** Обчислити визначник матриці  $A$ , використовуючи:

- а) метод трикутників;
- б) розклад визначника за елементами деякого рядка або стовпчика;
- в) властивості визначників,

де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язок.* а)

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 6 \cdot 7 + (-2) \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 5 \cdot 6 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot 7 =$$

$$= 126 + 20 + 18 + 56 = 2 \blacktriangleleft.$$

б) Для розкладу визначника зазвичай вибирають той рядок або стовпчик, де є нульові елементи, так як відповідні їм доданки в розкладі будуть рівні нулю, тому розкладемо визначник за елементами 1-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (42 + 6) + 2 \cdot (28 + 10) = 3 \cdot 48 + 2 \cdot 38 = 144 + 76 = 220 \blacktriangleleft.$$

в) Приведемо визначник до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times(-1) \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \times(-1) \end{smallmatrix}} - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times(-3) & \times(-5) \\ \leftarrow & \leftarrow \end{smallmatrix}} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -26 & 6 \\ 0 & -37 & 17 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \times(-1) \end{smallmatrix}} = - \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & -37 & 17 \end{vmatrix} = -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -37 & 17 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times 37 \\ \leftarrow \end{smallmatrix}} =$$

$$= -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -11 \cdot (-20) = 220. \blacktriangleleft$$

**Завдання 3.** Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

а) матричним способом;

б) за формулами Крамера;

в) методом Гауса.

*Розв'язок.* а) Матриця системи має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - (-(-3) \cdot 2 \cdot 3) = 6 + 8 - 3 + 8 + 1 + 18 = 38 \neq 0.$$

Отже, система невироджена.

Обернена матриця до матриці  $A$  системи має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$  елементів матриці  $A$ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 3) = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 8) = 9; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-9 - 4) = 13;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7.$$

Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 9 & -7 & -5 \\ 5 & 13 & -7 \end{pmatrix}.$$

Так як

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B,$$

де  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  – стовпчик вільних членів, отримаємо

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 9 & -7 & -5 \\ 5 & 13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 \\ 9 \cdot 2 - 7 \cdot (-1) - 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 2 + 13 \cdot (-1) - 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 0 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1 = 2, \\ 1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -1, \\ 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - (-1) = 5. \end{cases}$$

Відповідь:  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . ◀

б) За формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де визначники  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  отримуються з визначника  $\Delta$  шляхом заміни першого, другого, третього стовпчиків, відповідно, стовпчиком вільних членів.

Знайдемо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 38 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 - 5 \cdot (-2) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$- (-3) \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 10 + 3 + 10 - 1 + 12 = 38;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 3 + 16 + 5 + 4 + 2 - 30 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \cdot 2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 5 -$$

$$- (-3) \cdot (-1) \cdot 3 = -30 - 4 - 6 + 16 - 5 - 9 = -38.$$

Таким чином,  $x_1 = \frac{38}{38} = 1$ ;  $x_2 = \frac{0}{38} = 0$ ;  $x_3 = \frac{-38}{38} = -1$ .

Відповідь:  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . ◀

в) *Прямий хід*. За допомогою елементарних перетворень зведемо розширену матрицю системи до трапецієвидного вигляду:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times(-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \times(-4) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -9 & 9 \end{array} \right) \times \left( -\frac{5}{7} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{38}{7} & \frac{38}{7} \end{array} \right) \times \left( -\frac{7}{38} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$



Цій матриці відповідає система:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 7x_2 - 5x_3 = 5, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Обернений хід. Знаходимо

$$\begin{cases} x_3 = -1, \\ 7x_2 - 5 \cdot (-1) = 5, \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot (-1) = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -1, \\ 7x_2 = 0, \\ x_1 - 2 \cdot 0 - 2 = -1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_3 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Відповідь:  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . ◀

**Завдання 4.** 1) Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку сумісності розв'язати її.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-2) \\ \times (-3) \\ \leftarrow \end{array} \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-1) \\ \leftarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Отримали  $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$ . Так як  $r_A \neq r_{\tilde{A}}$ , то система не сумісна. ◀

2) Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку сумісності розв'язати її:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow[\begin{array}{c} \times (-2) \\ \times (-4) \end{array}]{\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\leftarrow]{\times (-1)} \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Отримали  $r_A = r_{\tilde{A}} = r = 2$ . Отже, система сумісна.

Кількість невідомих –  $n = 3$ .

Так як  $r < n$ , то система має безліч розв'язків.

В якості базисного мінора можна взяти, наприклад, мінор

$$M_{\delta} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Тоді базисними будуть невідомі  $x_1, x_2$ , а  $x_3$  – вільна.

Дана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - 3x_3, \\ 5x_2 = 8x_3. \end{cases}$$

За методом Гауса знаходимо

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8x_3}{5}, \\ x_1 = \frac{8x_3}{5} - 3x_3 + 1 = \frac{5 - 7x_3}{5}. \end{cases}$$

Покладемо  $x_3 = c$ ,  $c \in R$ , тоді множина розв'язків системи має вигляд

$$\left( \frac{5 - 7c}{5}; \frac{8c}{5}; c \right).$$

Перевірка:

$$\begin{cases} \frac{5-7c}{5} - \frac{8c}{5} + 3c = \frac{5-7c-8c+15c}{5} = 1, \\ 2 \cdot \frac{5-7c}{5} + 3 \frac{8c}{5} - 2c = \frac{10-14c+24c-10c}{5} = 2, \\ 4 \cdot \frac{5-7c}{c} + \frac{8c}{5} + 4c = \frac{20-28c+8c+20c}{5} = 4. \end{cases}$$

Відповідь:  $X = \begin{pmatrix} \frac{5-7c}{5} \\ \frac{8c}{5} \\ c \end{pmatrix}, c \in R. \blacktriangleleft$

3) Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку сумісності розв'язати її:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) & \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-2) \\ \times (-3) \\ \times (-1) \end{array} \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-7) \\ \times (-7) \end{array} \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-1/3) \\ \times (-1/5) \end{array} \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-1) \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Отримали  $r_A = r_{\tilde{A}} = r = 3$ . Отже, система сумісна.

Кількість невідомих –  $n = 3$ .

Так як  $r = n = 3$ , то система має єдиний розв'язок.

Дана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

За методом Гауса знаходимо

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_1 = 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1. \end{cases}.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 = 4, \\ 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1, \\ 3 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 1 = 7, \\ 1 - 1 + 2 \cdot 1 = 2. \end{cases}$$

Відповідь:  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . ◀

**Завдання 5.** Довести, що вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  утворюють базис, і знайти координати вектора  $\vec{d}$  в цьому базисі, де  $\vec{a}(1,1,0)$ ,  $\vec{b}(2,-1,1)$ ,  $\vec{c}(0,1,-1)$ ,  $\vec{d}(1,8,-5)$ .

*Розв'язок.* Якщо три вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  утворюють базис, то жоден з них не є лінійною комбінацією двох інших. Тоді визначник, складений з координат цих векторів, відмінний від нуля, так як лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх координатами. Обчислимо цей визначник:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$
$$1 + 2 - 1 = 2 \neq 0.$$

Отже, вектори  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  утворюють базис.

В новому базисі  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  вектор  $\vec{d}$  можна представити у вигляді лінійної

комбінації

$$\bar{d} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c},$$

де коефіцієнти  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – невідомі і є координатами вектора  $\bar{d}$  в базисі  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

Знайдемо ці координати. Для цього розпишемо розклад вектора  $\bar{d}$  в координатній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

що рівносильно системі трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3, \\ 8 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ -5 &= 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3. \end{aligned} \right\}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Очевидно, що визначник  $\Delta = \det$  як визначник транспонованої матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Обчислимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-5) + 8 \cdot 1 \cdot 0 - (-5) \cdot (-1) \cdot 0 - 8 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 1 - 10 + 16 - 1 = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) \cdot 0 - 0 \cdot 8 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - (-5) \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= -8 + 1 + 5 = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-5) + 2 \cdot 8 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 8 \cdot 1 =$$

$$= 5 + 1 + 10 - 8 = 8.$$

$$\text{Отримаємо } \alpha_1 = \frac{6}{2} = 3; \quad \alpha_2 = \frac{-2}{2} = -1; \quad \alpha_3 = \frac{8}{2} = 4.$$

Відповідь:  $\vec{d}(3, -1, 4)$ . ◀

**Завдання 6.** 1) Перевірити, чи колінеарні вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , задані в базисі  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :

а)  $\vec{a}(2, -3, 1)$ ,  $\vec{b}(-4, 6, -2)$ ; б)  $\vec{a}(4, 0, 5)$ ,  $\vec{b}(-4, 0, -5)$ .

*Розв'язок.* Так як вектори, що мають пропорційні координати, колінеарні, маємо

а)  $\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{-2}{1} = -2$ , а отже  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ . ◀

б)  $\frac{4}{-4} = \frac{0}{0} = \frac{5}{-5}$ .

Так як друга координата в обох векторів рівна нулю, то їх можна розглядати як вектори, задані на площині в базисі  $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ , а отже

$$\frac{4}{-4} = \frac{5}{-5} = -1 \text{ і } \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad \blacktriangleleft$$

2) Знайти скалярний добуток векторів  $2\vec{a}$  і  $5\vec{b}$ , де  $\vec{a}(2, -3, 0)$ ,  $\vec{b}(-5, 1, 4)$ .

*Розв'язок. І спосіб.* Так як при множенні вектора на число координати вектора множаться на це число, то

$$2\vec{a} = (4, -6, 0), \quad 5\vec{b} = (-25, 5, 20).$$

Так як скалярний добуток двох векторів рівний сумі добутків їх однойменних координат, то

$$2\vec{a} \cdot 5\vec{b} = 4 \cdot (-25) + (-6) \cdot 5 + 0 \cdot 20 = -100 - 30 = -130. \quad \blacktriangleleft$$

2 спосіб. За властивостями скалярного добутку  $2\vec{a} \cdot 5\vec{b} = 10 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$ , тоді

$$2\vec{a} \cdot 5\vec{b} = 10 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot (2 \cdot (-5) + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 4) = 10 \cdot (-13) = -130. \quad \blacktriangleleft$$

3) Перевірити, чи ортогональні вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , де  $\vec{a}(6,9,-3)$ ,  $\vec{b}(6,-4,0)$ .

*Розв'язок.* Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 6 + 9 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = 36 - 36 = 0.$$

Якщо скалярний добуток двох ненульових векторів рівний нулю, то ці вектори ортогональні. Отже, вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  ортогональні. ◀

4) Знайти модуль векторного добутку  $[\vec{a}, \vec{b}]$ , де  $\vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .

*Розв'язок.* Знайдемо векторний добуток  $[\vec{a}, \vec{b}]$ :

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 13\vec{i} - 11\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Довжина отриманого вектора рівна

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{13^2 + (-11)^2 + (-8)^2} = \sqrt{169 + 121 + 64} = \sqrt{354}. \blacktriangleleft$$

5) Знайти мішаний добуток трьох векторів  $2\vec{a}$ ,  $3\vec{b}$  і  $(-4)\vec{c}$ . де  $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 9\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ .

*Розв'язок.* За властивостями мішаного добутку

$$(2\vec{a}, 3\vec{b}, -4\vec{c}) = 2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -24(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Знайдемо

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 40 + 9 - 108 + 25 + 4 = 0,$$

отже,

$$-24(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -24 \cdot 0 = 0.$$

*Зауваження.* Так як мішаний добуток рівний нулю, то вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  – компланарні. ◀

**Завдання 7.** Дано піраміду  $ABCD$  з вершинами в точках піраміди  $A(1, 0, 4)$ ,  $B(2, 7, 3)$ ,  $C(4, 0, -1)$ ,  $D(2, 8, -1)$ . Знайти:

а) довжину ребра  $AC$  ;

- б) площу перерізу, що проходить через середину ребра  $BC$  і вершини  $A, D$ ;  
 в) об'єм піраміди  $ABCD$ .

Розв'язок. а) Щоб знайти довжину ребра  $AC$ , скористаємось формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

відстані між двома точками:

$$|AC| = \sqrt{(4-1)^2 + (0-0)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}. \blacktriangleleft$$

- б) Знайдемо координати точки  $M$  – середини відрізка  $BC$ .

Скористаємось формулами

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, y_M = \frac{y_B + y_C}{2}, z_M = \frac{z_B + z_C}{2},$$

отримаємо

$$x_M = \frac{2+4}{2} = 3, y_M = \frac{7+0}{2} = 3.5, z_M = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Знайдемо вектори  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}$ :

$$\overrightarrow{MA} = (1-3; 0-3.5; 4-1) = (-2; -3.5; 3), \overrightarrow{MD} = (2-3; 8-3.5; -1-1) = (-1; 4.5; -2).$$

Знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3.5 & 3 \\ -1 & 4.5 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -3.5 & 3 \\ 4.5 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -3.5 \\ -1 & 4.5 \end{vmatrix} = \\ &= -6.5\vec{i} - 7\vec{j} - 5.5\vec{k}. \end{aligned}$$

Довжина отриманого вектора рівна

$$|[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}]| = \sqrt{(-6.5)^2 + (-7)^2 + (-5.5)^2} = \sqrt{42.25 + 49 + 30.25} = \sqrt{121.5}.$$

Так як модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах, то площа трикутника  $MAD$  рівна

$$S_{\Delta MAD} = \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}]| = \frac{\sqrt{121.5}}{2} \text{ (од. кв.) } \blacktriangleleft$$

- в) Знайдемо вектори  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ :

$$\overrightarrow{AB} = (2-1; 7-0; 3-4) = (1; 7; -1), \overrightarrow{AC} = (4-1; 0-0; -1-4) = (3; 0; -5),$$



$$\overline{AD} = (2 - 1,8 - 0, -1 - 4) = (1,8, -5).$$

Відомо, що  $V_{ABCD} = \frac{1}{6}V$ , де  $V$  – об’єм паралелепіпеда, ребрами якого є вектори  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ . Отже

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |0 - 24 - 35 + 0 + 105 + 40| =$$

$$= \frac{96}{6} = 16 \text{ (куб. од.)} \blacktriangleleft$$

**Завдання 8.** Дано вершини трикутника  $A(1, -1)$ ;  $B(3, 5)$ ;  $C(-7, 11)$ . Знайти:

- а) рівняння сторони  $AB$ ;
- б) рівняння та довжину висоти  $CH$ ;
- в) рівняння та довжину медіани  $AM$ ;
- г) точку  $N$  перетину висоти  $CH$  і медіани  $AM$ ;
- д) рівняння прямої  $l$ , що проходить через точку  $N$  паралельно стороні  $AB$ .

*Розв’язок.* а) Рівняння сторони  $AB$  складемо, використовуючи рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y + 1}{5 + 1}$$

що рівносильно

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{6} \text{ або } \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{3}$$

– канонічне рівняння прямої ( $AB \parallel \vec{s}_1(1,3)$ ).

Запишемо рівняння прямої  $AB$  в загальному вигляді:  $3x - y - 4 = 0$ ,  
( $AB \perp \vec{n}_1(3, -1)$ ).

Запишемо рівняння прямої  $AB$  у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:  
 $y = 3x - 4$ ,  $k_{AB} = 3$ .  $\blacktriangleleft$

- б) Щоб записати рівняння висоти  $CH$ , використаємо умову

перпендикулярності прямих  $AB$  і  $CH$ :  $k_{AB}k_{CH} = -1$ . Отримаємо:  $k_{CH} = -\frac{1}{3}$ .

Запишемо рівняння прямої  $CH$ , що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_C = k_{CH}(x - x_C), \text{ тобто } y - 11 = -\frac{1}{3} \cdot (x + 7) \text{ або } y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}.$$

Довжину висоти  $CH$  знайдемо як відстань від точки  $C$  до прямої  $AB$ :

$$CH = d = \frac{|3 \cdot (-7) - 11 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{36}{\sqrt{10}} \blacktriangleleft$$

в) Щоб записати рівняння медіани  $AM$ , знайдемо координати точки  $M$  як середини відрізка.

Так як

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2},$$

то

$$x_M = \frac{3 - 7}{2} = -2, \quad y_M = \frac{5 + 11}{2} = 8,$$

тобто  $M(-2, 8)$ . Тоді рівняння медіани  $AM$  матиме вигляд:

$$\frac{x - 1}{-2 - 1} = \frac{y + 1}{8 + 1},$$

що рівносильно

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y + 1}{9} \text{ або } \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{3}.$$

Знайдемо довжину медіани  $AM$  як відстань між двома точками:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (8 + 1)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}. \blacktriangleleft$$

г) Знайдемо точку  $N$  перетину висоти  $CH$  і медіани  $AM$ . Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}, \\ \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{3} \end{cases}.$$

Отримаємо  $x_N = -2,5$ ;  $y_N = 9,5$ , тобто  $N(-2,5; 9,5)$ . ◀

д) Щоб записати рівняння прямої  $l$ , що проходить через точку  $N$  паралельно стороні  $AB$ , використаємо умову їх паралельності –  $k_l = k_{AB}$  і рівняння  $y - y_N = k_3(x - x_N)$ . Отримаємо:  $y - 9,5 = 3 \cdot (x + 2,5)$  або  $y = 3x + 17$ . ◀

**Завдання 9.** Дано чотири точки  $A_1(2, 1, 4)$ ,  $A_2(5, 3, 0)$ ,  $A_3(0, -1, -2)$ ,  $A_4(-2, -3, 1)$ .

Знайти:

- а) рівняння прямої  $A_1A_2$ ;
- б) рівняння прямої  $A_4M$  паралельної до прямої  $A_1A_2$ ;
- в) рівняння площини, що проходить через точку  $A_4$  перпендикулярно до прямої  $A_1A_2$ ;
- г) рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ;
- д) рівняння прямої  $A_4N$  перпендикулярної до площини  $A_1A_2A_3$  та координати точки  $N$  їх перетину;
- е) відстань  $A_4N$  від точки  $A_4$  до площини  $A_1A_2A_3$ ;
- є) кут між прямою  $A_1A_4$  і площиною  $A_1A_2A_3$ ; ж) кут між координатною площиною  $Oxy$  і площиною  $A_1A_2A_3$ .

*Розв'язок.* а) Рівняння прямої  $A_1A_2$  складемо, використовуючи рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{z - 4}{0 - 4} \quad \text{або} \quad \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 4}{-4}$$

– канонічне рівняння прямої,  $A_1A_2 \parallel \vec{s}_1(3, 2, -4)$ . ◀

б) Щоб записати рівняння прямої  $A_4M$  паралельної до прямої  $A_1A_2$ , використаємо канонічні рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

прямої в просторі, що проходить через точку  $A_4$  паралельно до вектора

$\bar{s}_1(3, 2, -4)$ , так як  $A_1A_2 \parallel A_4M$ , а  $A_1A_2 \parallel \bar{s}_1$ , то і  $A_4M \parallel \bar{s}_1$ . Отримаємо:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-4}. \blacktriangleleft$$

в) Щоб записати рівняння площини, що проходить через точку  $A_4$  перпендикулярно до прямої  $A_1A_2$ , використаємо рівняння  $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$  площини, що проходить через задану точку  $A_4$  перпендикулярно до заданого вектора  $\bar{n}_1$ . Так як  $A_1A_2 \parallel \bar{s}_1$  і пряма  $A_1A_2$  перпендикулярна до шуканої площини, то і вектор  $\bar{s}_1$  перпендикулярний до цієї площини, тому в якості нормального вектора  $\bar{n}_1$  візьмемо вектор  $\bar{n}_1 = \bar{s}_1$ . Отримаємо:

$$3 \cdot (x+2) + 2 \cdot (y+3) - 4(z-1) = 0 \quad \text{або} \quad 3x + 2y - 4z + 16 = 0. \blacktriangleleft$$

г) Щоб записати рівняння площини  $A_1A_2A_3$ , використаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

площини, що проходить через три точки:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 5-2 & 3-1 & 0-4 \\ 0-2 & -1-1 & -2-4 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \\ = (x-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + (z-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = \\ = -20 \cdot (x-2) + 26 \cdot (y-1) - 2 \cdot (z-4) = 0 \quad \text{або} \quad 10x - 13y + z - 11 = 0 &- \text{ загальне} \\ \text{рівняння площини, } A_1A_2A_3 \perp \bar{n}_2(10, -13, 1). &\blacktriangleleft \end{aligned}$$

д) Щоб записати рівняння прямої  $A_4N$ , перпендикулярної до площини  $A_1A_2A_3$ , скористаємось рівняннями

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Напрямний вектор  $\bar{s}_2$  прямої  $A_4N$  перпендикулярний до площини  $A_1A_2A_3$ , а отже  $\bar{s}_2 \parallel \bar{n}_2$ , тому візьмемо  $\bar{s}_2 = \bar{n}_2$ . Отримаємо:

$$\frac{x+2}{10} = \frac{y+3}{-13} = \frac{z-1}{1}.$$

Знайдемо координати точки  $N$  перетину прямої  $A_4N$  і площини  $A_1A_2A_3$ . Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь, записавши рівняння прямої  $A_4N$  в параметричній формі:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{10} = \frac{y+3}{-13} = \frac{z-1}{1} = t, \\ 10x - 13y + z - 11 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 10t, \\ y = -3 - 13t, \\ z = 1 + t, \\ 10x - 13y + z - 11 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 10t, \\ y = -3 - 13t, \\ z = 1 + t, \\ 10 \cdot (-2 + 10t) - 13 \cdot (-3 - 13t) + 1 \cdot (1 + t) - 11 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{30}, \\ x = -2 + 10 \cdot \frac{-1}{30}, \\ y = -3 - 13 \cdot \frac{-1}{30}, \\ z = 1 + \frac{-1}{30}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{3}, \\ y = -\frac{77}{30}, \\ z = \frac{29}{30}. \end{cases}$$

Таким чином,  $N\left(-\frac{7}{3}, -\frac{77}{30}, \frac{29}{30}\right)$ . ◀

е) За формулою

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

знайдемо відстань  $A_4N$  від точки  $A_4$  до площини  $A_1A_2A_3$ :

$$A_4N = d = \frac{|10 \cdot (-2) - 13 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 - 11|}{\sqrt{10^2 + (-13)^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{270}} = \frac{9}{3\sqrt{30}} = \frac{3}{\sqrt{30}}. \blacktriangleleft$$

є) Знайдемо кут між прямою  $A_1A_4$  і площиною  $A_1A_2A_3$ .

Запишемо рівняння прямої  $A_1A_4$  як рівняння прямої, що проходить через дві

ТОЧКИ:

$$\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z-4}{1-4} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{3}$$

– канонічне рівняння прямої,  $A_1A_4 \parallel \bar{s}_3(4, 4, 3)$ .

За формулою

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

знайдемо

$$\sin \varphi = \frac{|10 \cdot 4 - 13 \cdot 4 + 1 \cdot 3|}{\sqrt{10^2 + (-13)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{270} \cdot \sqrt{41}} = \frac{3}{\sqrt{1230}},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{3}{\sqrt{1230}}. \blacktriangleleft$$

ж) Знайдемо кут між координатною площиною  $Oxy$  і площиною  $A_1A_2A_3$ .

Рівняння площини  $Oxy - z = 0$ ,  $Oxy \perp \bar{k}(0, 0, 1)$ .

За формулою

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

знайдемо

$$\cos \psi = \frac{|10 \cdot 0 - 13 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{10^2 + (-13)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{270} \cdot 1} = \frac{1}{3\sqrt{30}},$$

$$\psi = \arccos \frac{1}{3\sqrt{30}}. \blacktriangleleft$$

### Завдання 10.

а1) Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі  $Ox$ , якщо відстань між фокусами рівна 24, а велика піввісь рівна 16.

*Розв'язок.* Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти  $a$  і  $b$ . За умовою  $a = 16$  і  $2c = 24$  або  $c = 12$ . Із співвідношення  $b^2 = a^2 - c^2$ , отримаємо  $b^2 = 16^2 - 12^2 = 256 - 144 = 112$ . Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1. \blacktriangleleft$$

а2) Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі  $Ox$ , якщо відстань між фокусами рівна 8, а ексцентриситет рівний  $\varepsilon = \frac{4}{5}$ .

*Розв'язок.* Так як за умовою  $2c = 8$  і  $\varepsilon = \frac{4}{5}$ , то  $c = 4$  і  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = \frac{4}{5}$ , звідки  $a = 5$ . Із співвідношення  $b^2 = a^2 - c^2$ , отримаємо  $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ . Отже, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \blacktriangleleft$$

а3) Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі  $Ox$ , якщо відстань між фокусами рівна 24, а сума півосей рівна 18.

*Розв'язок.* За умовою  $2c = 24$  або  $c = 12$  і  $a + b = 18$ . Щоб знайти  $a$  і  $b$ , використавши співвідношення  $c^2 = a^2 - b^2$ , складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b = 18, \\ a^2 - b^2 = 144. \end{cases}$$

З останньої маємо

$$\begin{cases} a + b = 18, \\ (a - b) \cdot (a + b) = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 18, \\ a - b = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 26, \\ a - b = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13, \\ b = 5. \end{cases}.$$

Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1. \blacktriangleleft$$

а4) Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки

$$M_1\left(-2, \frac{4\sqrt{21}}{5}\right), M_2\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}, 3\right).$$

*Розв'язок.* Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти  $a$  і  $b$ . Так як точки  $M_1, M_2$  лежать на еліпсі, то їх координати задовольняють його рівнянню. Отримаємо:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{4\sqrt{21}}{5}\right)^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} &= 1. \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{4}{a^2} + \frac{\frac{336}{25}}{b^2} &= 1, \\ \frac{\frac{175}{16}}{a^2} + \frac{9}{b^2} &= 1 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 4b^2 + \frac{336a^2}{25} &= a^2b^2, \\ \frac{175}{16}b^2 + 9a^2 &= 4b^2 + \frac{336}{25}a^2. \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 4b^2 + \frac{336a^2}{25} &= a^2b^2, \\ a^2 &= \frac{25}{16}b^2. \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 4b^2 + \frac{336}{25} \cdot \frac{25}{16}b^2 &= \frac{25}{16}b^2 \cdot b^2, \\ a^2 &= \frac{25}{16}b^2. \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} b^2 &= 16, \\ a^2 &= 25 \end{aligned} \right\}.$$

Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \blacktriangleleft$$

б1) Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі  $Ox$ , якщо відстань між фокусами рівна 30, а дійсна вісь рівна 16.

*Розв'язок.* Щоб скласти рівняння гіперболи, треба знайти  $a$  і  $b$ . За умовою  $2c = 30$  або  $c = 15$  і  $2a = 16$  або  $a = 8$ . Із співвідношення  $b^2 = c^2 - a^2$ , отримаємо  $b^2 = 15^2 - 8^2 = 225 - 64 = 161$ . Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{161} = 1. \blacktriangleleft$$

б2) Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі  $Oy$ , якщо уявна вісь рівна 10, а ексцентриситет рівний  $\varepsilon = \frac{13}{12}$ . Знайти її асимптоти.

*Розв'язок.* Так як за умовою  $2a = 10$  і  $\varepsilon = \frac{13}{12}$ , то  $a = 5$  і  $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} = \frac{13}{12}$ .

Отримаємо:

$$\frac{\sqrt{25 + b^2}}{b} = \frac{13}{12} \Rightarrow \frac{25 + b^2}{b^2} = \frac{169}{144} \Rightarrow 144 \cdot (25 + b^2) = 169b^2.$$

Звідки  $b^2 = 144$  або  $b = 12$ .

Отже, шукане рівняння гіперболи матиме вигляд



$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1,$$

а рівняння асимптот –

$$y = \pm \frac{12}{5}x. \blacktriangleleft$$

в) Скласти канонічне рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі  $Ox$  і проходить через точку  $M(-8, 4)$ .

*Розв'язок.* Так як парабола симетрична відносно осі  $Ox$ , то її рівняння має вигляд  $y^2 = -2px$  ( $p > 0$ ). Підставимо координати точки  $M$  в це рівняння, отримаємо:  $4^2 = -2p \cdot (-8)$  або  $16 = 16p$ , звідки  $p = 1$ . Отже,  $y^2 = -2x$  – шукане рівняння.  $\blacktriangleleft$

### Завдання 11.

1) Привести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку

$$5x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 1 = 0.$$

*Розв'язок.* Згрупуємо доданки даного рівняння:

$$(5x^2 - 4x) + (2y^2 + 2y) - 1 = 0 \text{ або } 5\left(x^2 - \frac{4}{5}x\right) + 2(y^2 + y) = 1.$$

Виділимо в дужках повні квадрати:

$$5\left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{5}x + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) + 2\left(y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 1$$

або

$$5\left(x^2 - 2 \cdot \frac{2}{5}x + \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) - 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1,$$

що рівносильно

$$5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \text{ або } 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{23}{10}.$$

Поділимо обидві частини рівняння на праву частину:

$$\frac{5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2}{\frac{23}{10}} + \frac{2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{23}{10}} = 1 \text{ або } \frac{\left(x - \frac{2}{5}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{50}}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{20}}\right)^2} = 1.$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням еліпса з центром в точці  $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}\right)$

з осями, паралельними осям координат. ◀

2) Привести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку

$$x^2 - 7y^2 + 2x - 14y - 9 = 0.$$

*Розв'язок.* Згрупуємо доданки даного рівняння:

$$(x^2 + 2x) - 7(y^2 + 2y) - 9 = 0.$$

Виділимо в дужках повні квадрати:

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 7(y^2 + 2y + 1 - 1) - 9 = 0$$

або

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 - 7(y^2 + 2y + 1) + 7 - 9 = 0,$$

що рівносильно

$$(x + 1)^2 - 7(y + 1)^2 = 3.$$

Поділимо обидві частини рівняння на праву частину:

$$\frac{(x + 1)^2}{3} - \frac{7(y + 1)^2}{3} = 1 \text{ або } \frac{(x + 1)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2} - \frac{(y + 1)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2} = 1.$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням гіперболи з центром в точці

$(-1, -1)$  з осями, паралельними осям координат. ◀

3) Привести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку

$$3x^2 + 2x - 8y - 12 = 0.$$

*Розв'язок.* Згрупуємо доданки даного рівняння:

$$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) - 8y - 12 = 0.$$

Виділимо в дужках повний квадрат:

$$3\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - 8y - 12 = 0 \text{ або}$$

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8y - 12 = 0, \text{ що рівносильно } 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 8y + \frac{37}{3} \text{ або}$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}\left(y + \frac{37}{24}\right)$$

Отримане рівняння є канонічним рівнянням параболи з вершиною в точці

$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{37}{24}\right)$  з віссю симетрії, паралельною осі  $Oy$ . ◀