

Дослідження стійкості основного руху одного типу ізолюваної матеріальної системи

Розглянута задача про стійкість основного руху ізолюваної матеріальної системи, яка здійснює просторовий рух і складається з абсолютно твердого обертового тіла-носія, нерухомої матеріальної точки, що створює його статичну незрівноваженість та однієї пари маятників (куль), які можуть обертатися навколо повздовжньої осі тіла-носія. Встановлено, що при певних параметрах системи її основний рух, в якому вона обертається навколо повздовжньої осі тіла-носія, може бути стійким.

основний рух, ізолювана система, маятник, куля

Вступ. Як відомо, для зрівноваження на ходу швидкісних роторів, а саме кругів шліфувальних машин, CD/DVD-дисків, центрифуг пральних машин і т. п., використовують пасивні автобалансири (АБ) – маятникові, кільцеві, кульові тощо [1,2]. Корегувальні вантажі (КВ) АБ за певних умов з часом самі приходять в те положення, в якому зрівноважують ротор і далі обертаються з ним, як одне ціле, поки не з'являться збурення різного походження.

Дослідження стійкості усталених рухів систем зв'язаних абсолютно твердих тіл, якими є ротор-АБ [1, 2], штучні супутники Землі або космічні апарати, положення яких в просторі стабілізується обертанням [3-15], є актуальною задачею. В [11-13], в рамках моделей, в яких статично або динамічно незрівноважене обертове тіло-носії (надалі просто тіло) здійснює просторовий рух і зрівноважується двома парами маятників (куль) у двох різних площинах зрівноваження, з допомогою енергетичного підходу були виділені всі усталені рухи системи – основні і побічні, оцінена їх стійкість та встановлено, що основні рухи нестійкі. Необхідно зауважити, що побічні рухи – це усталені рухи, в яких система не обертається навколо повздовжньої осі тіла.

В [14, 15] з допомогою емпіричного та енергетичного підходів було встановлено, що основні рухи стійкі у випадку сплюснутого статично незрівноваженого тіла, коли площина зрівноваження знаходиться поблизу центра мас системи. В даній роботі вивчається вплив різних параметрів системи на стійкість її основного руху. Використовується перший метод Ляпунова, який знайшов широке застосування при дослідженні подібних систем [1, 5-8].

Рівняння руху системи. Досліджуємо випадок статичного зрівноваження двома маятниками (кулями) тіла, головні осьові моменти інерції якого рівні $A = B$, C . Тоді, не обмежуючи загальності, положення нерухомої матеріальної точки масою μ_d , яка створює статичну незрівноваженість тіла і знаходиться всередині нього, задається ексцентриситетом e_d та кутом $\gamma_d = 0$. Маятники (кулі) можуть обертатися навколо повздовжньої осі тіла, в площині перпендикулярній до цієї осі. Використаємо рівняння руху, отримані в [16]. Тоді враховуючи, що

$$H_j = H, \quad m_j = m, \quad l_j = l, \quad h_j = d_j = h, \quad / j=1,2 /, \quad (1)$$

рівняння руху системи матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} & H\ddot{\varphi}_j + ml[\ddot{\varphi}_j l + \ddot{y} \cos \varphi_j - \ddot{x} \sin \varphi_j + \dot{\Omega}_z(l + x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j) - (z + h) \times \\ & \times (\dot{\Omega}_y \sin \varphi_j + \dot{\Omega}_x \cos \varphi_j) + 2\Omega_z(\dot{x} \cos \varphi_j + \dot{y} \sin \varphi_j) - \Omega_x^2(y + l \sin \varphi_j) \cos \varphi_j + \end{aligned}$$

$$+ \Omega_y^2 (x + l \cos \varphi_j) \sin \varphi_j - \Omega_z^2 (y \cos \varphi_j - x \sin \varphi_j) - \Omega_x \Omega_y (y \sin \varphi_j - x \cos \varphi_j - l \cos 2\varphi_j) - \\ - \Omega_z (z + h)(\Omega_x \sin \varphi_j - \Omega_y \cos \varphi_j) = 0, \quad / j=1,2 /; \quad (2)$$

$$M_\Sigma x + \mu_d e_d + ml \sum_{j=1}^2 \cos \varphi_j = 0, \quad M_\Sigma y + ml \sum_{j=1}^2 \sin \varphi_j = 0, \quad M_\Sigma z + h(\mu_d + 2m) = 0; \quad (3)$$

$$[J_x - M_\Sigma (y^2 + z^2)] \Omega_x - (J_{xy} - M_\Sigma xy) \Omega_y - \\ - (J_{xz} - M_\Sigma xz) \Omega_z - ml(z + h) \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j = -K \cos \alpha \sin \beta; \\ - (J_{xy} - M_\Sigma xy) \Omega_x + [J_y - M_\Sigma (x^2 + z^2)] \Omega_y - \\ - (J_{yz} - M_\Sigma xz) \Omega_z - ml(z + h) \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j = K \sin \alpha; \\ - (J_{xz} - M_\Sigma xz) \Omega_x - (J_{xy} - M_\Sigma xy) \Omega_y + [J_z - M_\Sigma (x^2 + y^2)] \Omega_z + ml^2 \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j + \\ + ml \left(x \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j + y \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j \right) = K \cos \alpha \cos \beta, \quad (4)$$

$$\text{тут в (2-4)} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta - \omega \cos \alpha \sin \beta \\ \dot{\beta} + \omega \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \omega \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}; \quad M_\Sigma = M + \mu + 2m;$$

$$J_x = A + \mu_d h^2 + m \left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^2 \sin^2 \varphi_j \right); \quad J_{xy} = \frac{1}{2} ml^2 \sum_{j=1}^2 \sin 2\varphi_j; \\ J_{xz} = h \left(\mu_d e_d + ml \sum_{j=1}^2 \cos \varphi_j \right); \quad J_y = A + \mu_d (h^2 + e_d^2) + m \left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^2 \cos^2 \varphi_j \right); \\ J_{yz} = hml \sum_{j=1}^2 \sin \varphi_j; \quad J_z = C + \mu_d e_d^2 + 2ml^2. \quad (5)$$

Рівняння першого наближення, характеристичне рівняння. На основному (незбуреному) русі:

$$\tilde{x} = 0, \quad \tilde{y} = 0, \quad \tilde{z} = z \quad \tilde{\alpha} = 0, \quad \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\omega} = \omega_0, \quad \tilde{\varphi}_2 = -\tilde{\varphi}_1, \quad (6)$$

де $0,0,z,0,0,\omega_0,\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2$ - незбурений рух; $\tilde{\varphi}_1$ - незалежний кут повороту маятника.

Вводимо у розглядання збурений рух:

$$x = u, \quad y = v, \quad \alpha = \alpha, \quad \beta = \beta, \quad \omega = \omega_0 + p, \quad \varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + \alpha_1, \quad \varphi_2 = -\tilde{\varphi}_1 + \alpha_2, \quad (7)$$

де $u, v, \alpha, \beta, p, \alpha_1, \alpha_2$ - відхилення від незбуреного руху ($|u|, |v|, |\alpha|, |\beta|, |p|, |\alpha_1|, |\alpha_2| \ll 1$). Тоді, з врахуванням (7), лінеаризовані рівняння руху системи матимуть вигляд:

$$l_1 = ml \{ l(\ddot{\alpha}_1 + \dot{p}) + H\dot{\alpha}_1 - (h + z) \times [(\ddot{\alpha} \cos \tilde{\varphi}_1 + 2\dot{\alpha} \omega_0 \sin \tilde{\varphi}_1 - \alpha \omega_0^2 \cos \tilde{\varphi}_1) + \\ + (\ddot{\beta} \sin \tilde{\varphi}_1 - 2\dot{\beta} \omega_0 \cos \tilde{\varphi}_1 - \beta \omega_0^2 \sin \tilde{\varphi}_1)] - [(\ddot{u} - 2\omega_0 \dot{v} - \omega_0^2 u) \sin \tilde{\varphi}_1 - (\ddot{v} + 2\omega_0 \dot{u} - \omega_0^2 v) \cos \tilde{\varphi}_1] \} = 0; \\ l_2 = ml \{ l(\ddot{\alpha}_2 + \dot{p}) + H\dot{\alpha}_2 - (h + z) \times [(\ddot{\alpha} \cos \tilde{\varphi}_1 - 2\dot{\alpha} \omega_0 \sin \tilde{\varphi}_1 - \alpha \omega_0^2 \cos \tilde{\varphi}_1) - (\ddot{\beta} \sin \tilde{\varphi}_1 + \\ + 2\dot{\beta} \omega_0 \cos \tilde{\varphi}_1 - \beta \omega_0^2 \sin \tilde{\varphi}_1)] + ml[(\ddot{u} - 2\omega_0 \dot{v} - \omega_0^2 u) \sin \tilde{\varphi}_1 + (\ddot{v} + 2\omega_0 \dot{u} - \omega_0^2 v) \cos \tilde{\varphi}_1] \} = 0; \quad (8)$$

$$u = \frac{ml}{M_\Sigma} (\alpha_1 - \alpha_2) \sin \tilde{\varphi}_1; \quad \dot{u} = \frac{ml}{M_\Sigma} (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) \sin \tilde{\varphi}_1; \quad \ddot{u} = \frac{ml}{M_\Sigma} (\ddot{\alpha}_1 - \ddot{\alpha}_2) \sin \tilde{\varphi}_1; \quad (9)$$

$$v = -\frac{ml}{M_\Sigma}(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \tilde{\varphi}_1; \quad \dot{v} = -\frac{ml}{M_\Sigma}(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \cos \tilde{\varphi}_1; \quad \ddot{v} = -\frac{ml}{M_\Sigma}(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2) \cos \tilde{\varphi}_1; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (J_x^{(0)} - M_\Sigma z^2)(\dot{\alpha} - \omega_0 \beta) - (J_{xz}^{(1)} - M_\Sigma uz)\omega_0 - mlh_z(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \cos \tilde{\varphi}_1 &= -K\beta; \\ (J_y^{(0)} - M_\Sigma z^2)(\dot{\beta} + \omega_0 \alpha) - (J_{yz}^{(1)} - M_\Sigma vz)\omega_0 - mlh_z(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) \sin \tilde{\varphi}_1 &= K\alpha; \\ J_z^{(0)}p + ml^2(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{тут в (11)} \quad J_x^{(0)} = A + \mu_d h^2 + 2m(h^2 + l^2 \sin^2 \tilde{\varphi}_1);$$

$$\begin{aligned} J_y^{(0)} &= B + \mu_d(h^2 + e_d^2) + 2m(h^2 + l^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_1); \quad J_z^{(0)} = C + \mu_d e_d^2 + 2ml^2; \\ J_{xz}^{(1)} &= -mlh(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \tilde{\varphi}_1; \quad J_{yz}^{(1)} = mlh(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \tilde{\varphi}_1; \quad K = J_z^{(0)}\omega_0, \end{aligned} \quad (12)$$

де $J_x^{(0)}$, $J_y^{(0)}$, $J_z^{(0)}$ - осьові моменти інерції в нульовому наближенні; $J_{xz}^{(1)}$, $J_{yz}^{(1)}$ - відцентрові моменти інерції в першому наближенні. Виконаємо заміну змінних:

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \quad \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/2. \quad (13)$$

Тоді виключаючи параметри u , v та p і перетворюючи вирази (8) за алгоритмом

$$L_1 = (l_1 + l_2)/2, \quad L_2 = (l_1 - l_2)/2, \quad (14)$$

матимемо наступні рівняння руху системи у безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_A} \dot{\alpha} - \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_C} \right) \beta - 2h' \cos \tilde{\varphi}_1 \dot{\gamma}_1 + 2h' \sin \tilde{\varphi}_1 \dot{\gamma}_2 &= 0; \\ \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_C} \right) \alpha + \frac{1}{R_B} \dot{\beta} - 2h' \cos \tilde{\varphi}_1 \dot{\gamma}_1 - 2h' \sin \tilde{\varphi}_1 \dot{\gamma}_2 &= 0; \\ -h' \cos \tilde{\varphi}_1 \ddot{\alpha} + h' \cos \tilde{\varphi}_1 \ddot{\alpha} + 2h' \cos \tilde{\varphi}_1 \dot{\beta} + (1 - 2R_C - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_1) \ddot{\gamma}_1 + H' \dot{\gamma}_1 + \\ + 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_1 \dot{\gamma}_1 + 2R_m \sin 2\tilde{\varphi}_1 \dot{\gamma}_2 &= 0; \\ -2h' \sin \tilde{\varphi}_1 \ddot{\alpha} - h' \sin \tilde{\varphi}_1 \ddot{\beta} + h' \sin \tilde{\varphi}_1 \ddot{\beta} - 2R_m \sin 2\tilde{\varphi}_1 \dot{\gamma}_1 + (1 - 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi}_1) \ddot{\gamma}_2 + \\ + H' \dot{\gamma}_2 + 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi}_1 \dot{\gamma}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{тут в (15)} \quad R_A = \frac{ml^2}{J_x^{(0)} - M_\Sigma z^2} = \frac{ml^2}{A_G}; \quad R_B = \frac{ml^2}{J_y^{(0)} - M_\Sigma z^2} = \frac{ml^2}{B_G}; \quad R_C = \frac{ml^2}{J_z^{(0)}} = \frac{ml^2}{C_G};$$

$$h' = \frac{h_z}{l} = \frac{z + h}{l}; \quad R_m = \frac{m}{M_\Sigma}; \quad H' = \frac{H}{ml^2 \omega_0}. \quad (16)$$

Знайдемо характеристичне рівняння. Позначимо:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\lambda}{R_A}; \quad a_{12} = -\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_C} \right); \quad a_{13} = -2h' \cos \tilde{\varphi}_1 \lambda; \quad a_{14} = 2h' \sin \tilde{\varphi}_1; \quad a_{21} = \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_C} \right); \\ a_{22} &= \frac{\lambda}{R_B}; \quad a_{23} = -2h' \cos \tilde{\varphi}_1; \quad a_{24} = -2h' \sin \tilde{\varphi}_1 \lambda = a_{41}; \quad a_{31} = -h' \cos \tilde{\varphi}_1 (\lambda^2 - 1); \quad a_{32} = -a_{13}; \\ a_{33} &= (1 - 2R_C - 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_1) \lambda^2 + H' \lambda + 2R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_1; \quad a_{34} = 2R_m \sin 2\tilde{\varphi}_1 \lambda; \\ a_{42} &= -h' \sin \tilde{\varphi}_1 (\lambda^2 - 1); \quad a_{43} = -a_{34}; \quad a_{44} = (1 - 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi}_1) \lambda^2 + H' \lambda + 2R_m \sin^2 \tilde{\varphi}_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Тоді характеристичне рівняння системи (15) задає визначник:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Подамо характеристичне рівняння у вигляді поліному:

$$\Delta(\lambda) = a_6 \lambda^6 + a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (19)$$

$$\text{де } a_6 = \frac{1}{R_A R_B} [1 - 2(R_m + h^2 R_B) \sin^2 \tilde{\varphi}_1] \times \{1 - 2[R_C + (R_m + h^2 R_A) \cos^2 \tilde{\varphi}_1]\};$$

$$a_5 = \frac{2H}{R_A R_B} [1 - R_m - R_C - h^2 (R_A \cos^2 \tilde{\varphi}_1 + R_B \sin^2 \tilde{\varphi}_1)];$$

$$a_4 = \frac{1}{R_A R_B R_C^2} \langle (R_C - R_A)(R_C - R_B) + R_C^2 \{H^2 + 2[R_A + R_B - R_C + h^2 (R_A - R_B) \times \\ \times (1 + 2 \cos^2 \tilde{\varphi}_1)]\} - 2R_C R_A R_B (1 - 3h^2) + 2R_m [R_C (R_A + R_B) - R_A R_B] + \\ - 4R_C \sin^2 \tilde{\varphi}_1 \{R_C h^2 [R_C (R_A - R_B) + 3R_A R_B] + R_m [R_C (R_A + R_B) - 3R_A R_B]\} + \\ + \sin^2 2\tilde{\varphi}_1 \{3h^4 R_A R_B R_C^2 + h^2 R_m R_C \times [3R_C (R_A + R_B) - 2R_A R_B] + \\ + R_m^2 [R_C (3R_C - R_A - R_B) + R_A R_B]\} \rangle;$$

$$a_3 = \frac{2H}{R_A R_B R_C^2} \{ (R_C - R_A)(R_C - R_B) + R_m [R_C (R_A + R_B) - R_A R_B] - \\ - R_C^2 [2R_C - R_A - R_B + h^2 \cos 2\tilde{\varphi}_1 (R_A - R_B)] - R_A R_B R_C (1 - 3h^2) \};$$

$$a_2 = \frac{1}{R_A R_B R_C^2} \langle (H^2 + 2R_m)(R_C - R_A)(R_C - R_B) + \\ + 2h^2 R_C [R_C (R_A \sin^2 \tilde{\varphi}_1 + R_B \cos^2 \tilde{\varphi}_1) - R_A R_B] - \\ - 4R_C \sin^2 \tilde{\varphi}_1 (R_C - R_B) [R_m (R_C - R_A) + R_A R_C] + \sin^2 2\tilde{\varphi}_1 \{3h^4 R_A R_B R_C^2 + h^2 R_m R_C \times \\ \times [3R_C (R_A + R_B) - 2R_A R_B] + R_m^2 [R_C (3R_C - 2R_A - 2R_B) + 2R_A R_B]\} \rangle;$$

$$a_1 = \frac{2H}{R_A R_B R_C^2} \{ R_m (R_C - R_A)(R_C - R_B) + h^2 [R_C^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_1 (R_B - R_A) + R_A R_C (R_C - R_B)] \};$$

$$a_0 = \frac{\sin^2 2\tilde{\varphi}_1}{R_A R_B R_C^2} [R_m (R_C - R_A) + h^2 R_A R_C] \times [R_m (R_C - R_B) + h^2 R_B R_C]. \quad (20)$$

Критерій Рауса-Гурвіца дає наступні умови асимптотичної стійкості [17]:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (21)$$

Аналіз коренів характеристичного рівняння. В зв'язку з тим, що корені поліному шостого ступеня (19) аналітично знайти неможливо, а умови отримані з допомогою критерію Рауса-Гурвіца неможливо проаналізувати, то будемо шукати приблизний розв'язок методом розкладання коренів алгебраїчних рівнянь за степенями малого параметру. Дослідимо стійкість основних рухів у випадку, коли маса маятників (куль) набагато менше маси тіла, тоді:

$$R_A \sim R_B \sim R_C \sim R_m \sim \varepsilon, \quad / \varepsilon \ll 1/. \quad (22)$$

Нехай для сплюсненого тіла будемо враховувати, що

$$R_B = R_A > R_C, \quad (23)$$

для витягнутого тіла

$$R_B = R_A < R_C. \quad (24)$$

Тоді, в нульовому наближенні, збираючи всі коефіцієнти порядку $1/\varepsilon^2$, отримаємо наступне рівняння:

$$R_C^2(\lambda + H^*)^2(\lambda^2 + f_\Delta^2)\lambda^2 = 0, \quad (25)$$

$$\text{тут в (25)} \quad f_\Delta = \frac{R_\Delta}{R_C} = \left(1 - \frac{R_A}{R_C}\right). \quad (26)$$

Розв'язком рівняння (25) є корені:

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = -H^*, \quad \lambda_{3,4}^{(0)} = \pm if_\Delta, \quad \lambda_{5,6}^{(0)} = 0. \quad (27)$$

Для пошуку уявних коренів в першому наближенні подамо їх у такому вигляді:

$$\lambda_{3,4}^{(1)} = \pm if_\Delta + \lambda_1 \varepsilon. \quad (28)$$

Підставляючи (28) в (19) та збираючи всі коефіцієнти порядку $1/\varepsilon$ отримаємо наступне рівняння

$$(k_1 + ik_2)\lambda_1 + k_3 + ik_4 = 0, \quad (29)$$

розв'язком якого є корені:

$$\lambda_{3,4}^{(1)} = -\frac{k_1 k_3 + k_2 k_4 \pm i(k_1 k_4 - k_2 k_3)}{k_1^2 + k_2^2}, \quad (30)$$

$$\text{тут в (29) та (30)} \quad k_1 = \frac{4H^* f_\Delta^4}{R_A^2}; \quad k_2 = \frac{2f_\Delta^3}{R_A^2}(f_\Delta^2 - H^{*2});$$

$$k_3 = \frac{2f_\Delta^3}{R_A^2}[f_\Delta(b + f_\Delta^2 c) - a]; \quad k_4 = -\frac{H^* k_3}{R_C^2 f_\Delta}. \quad (31)$$

В свою чергу в (31)

$$\begin{aligned} a &= R_m f_\Delta + h^{*2} R_A; \quad c = R_C^2(R_C + R_m + h^{*2} R_A); \\ b &= R_m R_A(2R_C - R_A) - R_C(R_C^2 f_\Delta^2 - 3h^{*2} R_A^2). \end{aligned} \quad (32)$$

Аналізуючи корені (30) видно, що стійкість основного руху буде визначати їх дійсна частина, яку подамо так:

$$-\frac{k_1 k_3 + k_2 k_4}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{H^* h^{*2} R_A^4 (f_\Delta^2 - H^{*2})}{f_\Delta R_C^3 [4H^{*2} f_\Delta^2 + (f_\Delta^2 - H^{*2})^2]}. \quad (33)$$

Для сплюсненого тіла, враховуючи умову (23) та те, що $f_\Delta < 0$, умова стійкості матиме вигляд:

$$f_\Delta^2 - H^{*2} > 0, \quad (34)$$

або з врахуванням (16)

$$\left(\frac{A_G - C_G}{A_G}\right)^2 > \left(\frac{H}{ml^2 \omega_0}\right)^2. \quad (35)$$

Для витягнутого тіла, враховуючи умову (24) та те, що $f_\Delta > 0$, умова стійкості матиме вигляд:

$$f_\Delta^2 - H^{*2} < 0, \quad (36)$$

або з врахуванням (16)

$$\left(\frac{A_G - C_G}{A_G}\right)^2 < \left(\frac{H}{ml^2 \omega_0}\right)^2. \quad (37)$$

Для пошуку нульових коренів в першому наближенні подамо їх у такому вигляді:

$$\lambda = \lambda_1 \varepsilon. \quad (38)$$

Підставляючи (38) в (19) та збираючи всі коефіцієнти порядку одиниці отримаємо наступне рівняння:

$$a_1 \lambda_1^2 + b_1 \lambda_1 + c_1 = 0, \quad (39)$$

корені якого мають вигляд

$$\lambda_{5,6}^{(1)} = \left(-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1} \right) / 2a_1, \quad (40)$$

або

$$\lambda_{5,6}^{(1)} = -b_1 \left(1 \mp \sqrt{1 - \sin^2 2\tilde{\varphi}_1} \right) / 2a_1, \quad (41)$$

$$\text{тут в (37) та (38) } a_1 = H^2 R_C^2 f_\Delta^2; \quad b_1 = 2H^2 R_C^2 f_\Delta (R_m f_\Delta + h^2 R_A);$$

$$c_1 = R_C^2 \sin^2 2\tilde{\varphi}_1 (R_m f_\Delta + h^2 R_A)^2. \quad (42)$$

Так як

$$a_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad \pi/2 > \tilde{\varphi}_1 > \pi/4. \quad (43)$$

то стійкість руху буде визначати параметр b_1 . Для сплюсненого тіла, враховуючи умову (23), умова стійкості матиме вигляд:

$$R_m f_\Delta + h^2 R_A < 0, \quad (44)$$

або з врахуванням (16)

$$A_G + M_\Sigma h_z^2 < C_G. \quad (45)$$

Для витягнутого тіла, враховуючи умову (24), умова стійкості матиме вигляд:

$$R_m f_\Delta + h^2 R_A > 0, \quad (46)$$

або з врахуванням (16)

$$A_G + M_\Sigma h_z^2 > C_G. \quad (47)$$

Таким чином, із точністю до величин першого порядку малості включно, корені характеристичного рівняння (19) подаються такими розкладами:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -H^2; \quad \lambda_{3,4} = \frac{H^2 h^2 R_A^4 (f_\Delta^2 - H^2)}{f_\Delta R_C^3 [4H^2 f_\Delta^2 + (f_\Delta^2 - H^2)^2]} \pm \\ &\pm i \left\{ f_\Delta + \frac{[2H^2 + R_C^2 (f_\Delta^2 - H^2)] [R_C^2 a - f_\Delta (b + c R_C^2 f_\Delta^2)]}{R_C^2 [4H^2 f_\Delta^2 + (f_\Delta^2 - H^2)^2]} \right\}, \\ \lambda_{5,6} &= -\frac{R_m f_\Delta + h^2 R_A}{H^2 f_\Delta} (1 \mp \sqrt{1 - \sin^2 2\tilde{\varphi}_1}). \end{aligned} \quad (48)$$

Результати чисельних розрахунків. В зв'язку з тим, що по кореням (48) характеристичного рівняння можна отримати точну оцінку стійкості основного руху лише у випадку, коли маса маятників (куль) набагато менше маси тіла, то для більш загального випадку, корені характеристичного рівняння (19), необхідно досліджувати чисельно. В чисельних розрахунках використані параметри штучного супутника IMAGE [18], запущеного 2000 року, в США. Супутник використовувався при дослідженні взаємного впливу магнітосфер Землі та Сонця. Для утримання довгий час певного положення супутника в просторі, він був закручений навколо своєї повздовжньої осі, відносно якої осьовий момент інерції максимальний. Кількість обертів відносно повздовжньої осі становила $n=3-5$ об/хв. Для зменшення кута нутації, на супутник був встановлений рідинний демпфер, виконаний у вигляді трубки частково заповненої ртуттю, маса якої складала 0,0024 частки від маси супутника або становила $m=1,2$ кг.

Необхідно зазначити, що незважаючи на наявність демпфера на супутнику, кут нутації, як було встановлено, не зменшувався, а збільшувався. Така аномальна поведінка супутника, на думку авторів, пояснювалась неефективною роботою демпфера, в

результаті відсутності дисипації енергії нутаційних коливань, що, в свою чергу, викликано відсутністю руху ртуті в трубці внаслідок її високого поверхневого натягу.

Розглянемо більш детально параметри супутника. Корпус супутника виконано за формою прямого колового циліндра. Маса та радіус бічної поверхні циліндричного корпусу супутника відповідно становлять $M = 490$ кг, $R = 1,1$ м. Кутова швидкість обертання та осеві моменти інерції супутника відповідно обчислювались по формулам $\omega_0 = \pi n / 30$, $A = B = 0,25M[(H_T^2 / 3) + R^2]$, $C = MR^2 / 2$, де H_T - висота його циліндричного корпусу. Інші параметри мають такі значення: $\mu = 1,2$ кг; $e = 0,9$ м. Нижче в табл. 1 наведені межі зміни параметрів, крок їх зміни і оптимальне значення в моделі.

Таблиця 1 - Межі зміни, крок зміни і оптимальне значення параметрів в моделі

Параметр		Значення по замовчуванню	Межі зміни параметра	Крок зміни параметра	Оптимальне значення
n_i , об/хв	$i=1$	10^*	1 – 301	10	50^{**}
	$i=2$	50^*			60^{**}
	$i=3$	100^*			50^{**}
h , м		0,2	0 – 0,75	0,05	$0,2^{**}$
h_{on} , $кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}$		1	0 – 5	0,25	1^{**}
					1^{**}
					$0,25^{**}$
H_T , м		1,5	0,5 – 4	0,25	$1,5^{**}$
m_i , кг	$i=1$	1,2	0,6 – 9,6	0,6	-- ^{***}
	$i=2$	4,8			$8,5^{**}$
	$i=3$	9,6			4^{**}
l , м		0,9	0,45 – 1,1	0,05	$0,8^{**}$
					$0,95^{**}$
					$0,85^{**}$
* - значення використані при побудові залежності наведеної на рис. 1, д. При побудові інших залежностей використано значення n_2. ** - значення знайдені при m_1, m_2, m_3. *** - не знайдено оптимального значення					

На рис. 1, а-е, приведені залежності мінімальних значень дійсних частин коренів характеристичного рівняння (19), від: кількості обертів за хвилину тіла – n ; відстані площини зрівноваження від центра мас тіла – h ; коефіцієнта сил в'язкого опору – h_{on} ; висоти циліндричного корпусу тіла – H_T ; довжини – l та маси маятника – m . Необхідно зазначити, що параметр H_T впливає на співвідношення осевих моментів інерції тіла.

Аналізуючи отримані залежності, видно, що основний рух стійкий майже при всіх досліджуваних параметрах, причому для всіх них існує оптимальне значення при якому швидкість приходу системи до основного руху буде найменша. Важливими параметрами, які впливають на стійкість (нестійкість) основного руху є параметри h та H_T . Проведемо більш детальний їх аналіз. Як видно з рис. 1, б, при перевищенні певного значення параметра $h > 0,31$ м, основний рух стає нестійким і тим швидше, чим більша маса маятника (для маси маятника $m_1 = 1,2$ кг - $h > 0,34$ м). Даний результат добре пояснює аномальну поведінку супутника IMAGE, в якому площина розташування рідинного демпфера

перевищувала допустиме значення параметра h , який складав $h=0,625$ м. При перевищенні певного значення параметра $H_T > 1,75$ м або при перевищенні співвідношення $A/C > 0,92$, як видно з рис. 1, г, основний рух стає нестійким, що підтверджує результати отримані в роботах [14, 15].

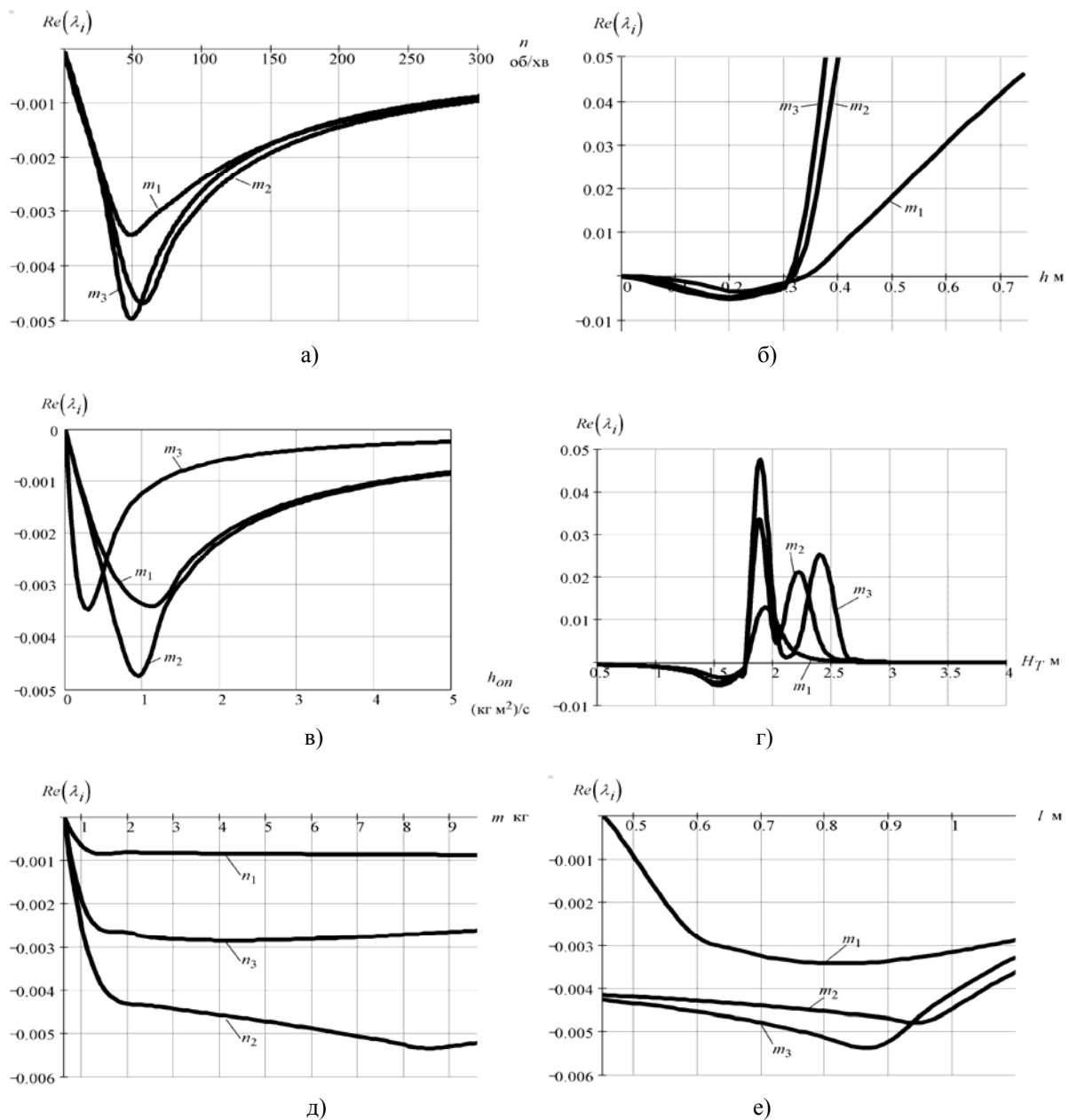


Рисунок 1 - Залежності мінімальних значень дійсних частин коренів характеристичного рівняння від параметрів системи

Висновки. Встановлено, що при певних параметрах системи, яка складається з статично незрівноваженого сплюсненого тіла та однієї пари маятників (куль), основний рух може бути стійким. Знайдені аналітичні умови стійкості основного руху у випадку, коли маса маятників (куль) набагато менша за масу системи.

Список літератури

1. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.

2. Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. – М.: Наука, 1997. – 151 с.
3. Alper J.R. Analysis of pendulum damper for satellite wobble damping // AIAA Aerospace Sciences Meeting, New York, Jan. 20-22, 1964.
4. Ильин А.А., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Обеспечение ориентации малого спутника, стабилизируемого собственным вращением // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 83, - М.: ИПМ, 2004. – 28 с.
5. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – т.35., №6. – С. 651-658.
6. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Некоторые вопросы динамики вращательного движения спутников. 1. Нутационные демпферы спутников, стабилизируемых вращением. //Препринт ИПМ АН СССР; №45, - М.: ИПМ, 1974. – 56 с.
7. Васильев В.Г., Ковтуненко В.М. Об устойчивости вращения космического аппарата с шарнирно присоединенными стержнями // Космические исследования - 1969. – т. 7, вып. 5. - С. 627-636.
8. Васильев В.Г., Семенов М.В. Динамика равновесных конфигураций вращающегося космического аппарата с длинными стержнями // Техническая механика - 2001. – № 1. - С. 110-118.
9. Гробов В.А. К теории вращательных движений свободного твердого тела, несущего маятники // Укр. матем. журнал, 1969. - 21, № 6, - С. 818—823.
10. Chinnery A.E., Hall C.D. The Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass-Damper // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 18, No. 6, 1995, pp. 1404-1409.
11. Пирогов В.В. Стабилизация оси вращения тела в пространстве пассивными автобалансирующими устройствами // Труды XXX Академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2006 г.
12. Филимонихин Г.Б., Пирогов В.В., Филимонихина И.И. Стабилизация маятниковыми демпферами пространственного положения оси вращения несущего тела // Прикладная механика. – 2007. – т. 43, №10. – С. 122 – 128.
13. Пирогов В.В. Стабілізація положення осі обертання тіла-носія маятниками (кулями) // X Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і Космос», Дніпропетровськ, квітень, 2008.
14. Филимонихина И.И., Филимонихин Г.Б. Условия уравнивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе // Прикладная механика, т.43, №11, 2007. –С.113-120.
15. Філімоніхіна І.І., Філімоніхін Г.Б. Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2007. - №3. – С. 103-109.
16. Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Рівняння руху ізольованої системи, яка здійснює просторовий рух // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2007. - №4. – С. 94-100.
17. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
18. Hubert C., Swanson D. Surface Tension Lockup in the IMAGE Nutation Damper — Anomaly and Recovery // NASA GSFC Flight Mechanics Symposium, 2001.

Рассмотрена задача об устойчивости основного движения изолированной материальной системы, которая осуществляет пространственное движение и состоит из абсолютно твердого вращающегося тела-носителя, неподвижной материальной точки, которая создает его статическую неуравновешенность, и одной пары маятников (шаров), которые могут вращаться вокруг продольной оси тела-носителя. Установлено, что при определенных параметрах системы ее основное движение, в котором она вращается вокруг продольной оси тела-носителя, может быть устойчивым.

Is considered task about firmness the main motion of the isolated material system which makes space motion and consists of rotated absolutely rigid body, immobile material points that create its misbalance and one pair pendulums (balls) which can revolve around of the longitudinal axis of body. Is established, that at the certain parameters is stable the main motions of a system – the motion in which the system rotates around the longitudinal axis of body.