

Министерство образования и науки Украины
Кировоградский национальный технический университет
Факультет учета и финансов
Кафедра экономической теории, маркетинга и экономической
кибернетики

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

методические указания для студентов всех форм обучения
(часть I. Оптимизационные методы и модели)

Составители:

*доктор физ.-мат. наук, проф. Гамалий В. Ф.
к.э.н., старший преподаватель Дмитришин Б. В.*

Утверждено на заседании кафедры
экономической теории, маркетинга и
экономической кибернетики
протокол № 10 от 26 июня 2014 г.

Кировоград-2014

Экономико-математические методы и модели. Методические указания и индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов всех форм обучения факультета учета и финансов. Ч.1 – Оптимизационные методы и модели / Сост.: В.Ф. Гамалий, Б.В. Дмитришин – Кировоград: КНТУ, 2014. – 56 с.

Составители:

Гамалий Владимир Федорович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической теории, маркетинга и экономической кибернетики;

Дмитришин Богдан Васильевич – кандидат экономических наук, старший преподаватель кафедры экономической теории, маркетинга и экономической кибернетики.

Содержание

Введение	4
Глава 1. Концептуальные основы математического моделирования экономики	6
1.1. Что такое модель?	6
1.2. Моделирование и его виды	8
1.3. Понятие, структура и классификация экономико-математических моделей ...	9
1.4. Этапы экономико-математического моделирования	12
Глава 2. Основные понятия об линейных оптимизационных моделях	15
2.1. Оптимизационные модели как важный класс экономико-математических моделей	15
2.2. Общая экономико-математическая модель линейного программирования	16
2.3. Примеры линейных оптимизационных задач	18
2.4. Основные теоремы линейного программирования	20
Глава 3. Графический метод решения задач линейной оптимизации	22
3.1. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования	22
3.2. Пример использования графического метода	23
3.3. Частные случаи использования графического метода	26
3.4. Общий алгоритм графического метода	27
Глава 4. Симплексный метод решения задач линейной оптимизации	29
4.1. Каноническая форма задачи линейного программирования	29
4.2. Пример использования симплекс-метода в общем случае	31
4.3. Частные случаи использования симплекс-метода	37
Глава 5. Транспортная задача	41
5.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи	41
5.2. Методы построения начального опорного плана	43
5.3. Решение транспортной задачи методом потенциалов	47
Рекомендованная литература	54

ВВЕДЕНИЕ

Экономические системы, которые изучаются современной наукой, с большим трудом поддаются исследованию обычными теоретическими методами. Прямой эксперимент над ними невозможен. Цена ошибок и просчетов большая, поэтому экономико-математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса. Методы экономико-математического моделирования, возможности использования которых существенно расширились благодаря новейшему программному обеспечению, представляют собой один из наиболее динамичных разделов прикладной экономической науки. Современный экономист должен быть хорошо осведомлен в экономико-математических методах и уметь их использовать на практике для оценки реальных экономических ситуаций. Это способствует лучшему усвоению теоретических вопросов современной экономики, а также повышает уровень общей профессиональной культуры специалиста. Следует сказать, что методология и инструментарий экономико-математического моделирования не подменяет собой экономические или математические дисциплины и не конкурирует с ними. Напротив, математическое моделирование экономики синтезирует все эти знания. Оно дает новые дополнительные импульсы и стимулы для развития экономической науки и ее практического использования. Таким образом изучение дисциплины «Экономико-математические методы и модели» предоставляет дополнительные возможности для использования компьютерной вычислительной техники, способствует развитию аналитических навыков и составляет основу для проведения прикладных экономических исследований.

Цель дисциплины: сформировать у будущего специалиста систему знаний по методологии и инструментарию построения и использования различных типов экономико-математических моделей.

Задача дисциплины: изучение основных принципов и инструментария постановки экономических задач, построения экономико-математических моделей, методов их решения и анализа с целью практического использования.

Предметом учебной дисциплины является методология и инструментарий построения и решения детерминированных оптимизационных задач, *объектом*

— социально-экономические системы, экономика и ее подразделения, отдельные хозяйственные единицы, процессы, которые в них происходят.

В результате изучения дисциплины студент должен знать:

- содержание основных категорий дисциплины, ее предмет, метод и задачи изучения;
- концептуальные основы математического моделирования экономики;
- методы линейного оптимизационного моделирования;
- принципы построения и решения наиболее распространенных линейных и нелинейных экономико-математических моделей.

уметь:

- применять изученные методы в своей практической деятельности;
- создавать экономико-математические модели реальных экономических процессов и явлений;
- осуществлять анализ и оценку построенных экономико-математических моделей;
- пользоваться вычислительной техникой и прикладным программным обеспечением для построения и анализа экономико-математических моделей.

ГЛАВА 1. КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ

1.1. Что такое модель?

1.2 Моделирование и его виды

1.3. Понятие, структура и классификация экономико-математических моделей

1.4. Этапы экономико-математического моделирования

1.1. Что такое модель?

Человечество в своей деятельности (научной, образовательной, технологической, художественной) постоянно создает и использует модели окружающего мира. Строгие правила построения моделей сформулировать невозможно, однако человечество накопило богатый опыт моделирования различных объектов и процессов.

Модели позволяют представить в наглядной форме объекты и процессы, недоступные для непосредственного восприятия (очень большие или очень маленькие объекты, очень быстрые или очень медленные процессы и др.). Наглядные модели часто используются в процессе обучения. В курсе географии первые представления о нашей планете Земля мы получаем, изучая ее модель – глобус, в курсе физики изучаем работу двигателя внутреннего сгорания по его модели, в химии при изучении строения вещества используем модели молекул и кристаллических решеток, в биологии изучаем строение человека по анатомическим муляжам и др.

Модели играют чрезвычайно важную роль в проектировании и создании различных технических устройств, машин и механизмов, зданий, электрических цепей и т. д. Без предварительного создания чертежа невозможно изготовить даже простую деталь, не говоря уже о сложном механизме.

Особенно важным является использование моделей в экономике. Можно отметить две особенности экономики как объекта моделирования.

1. В экономике невозможны модели подобию, которые применяются в технике.

2. В экономике крайне ограничены возможности локальных экономических экспериментов, поскольку все ее части жестко взаимосвязаны друг с другом и, следовательно, «чистый» эксперимент невозможен.

Прямые эксперименты с экономикой имеют как положительную, так и отрицательную сторону. Положительная сторона состоит в том, что сразу видны краткосрочные результаты проводимой экономической политики. Отрицательный момент заключается в том, что очень трудно предсказать долгосрочные последствия принимаемых экономических решений. Предвидеть такие последствия можно лишь на основе концептуальных моделей развития экономики, опирающихся на прошлый опыт. Концептуальные модели и составляют фундамент математических моделей.

Развитие науки невозможно без создания теоретических моделей (теорий, законов, гипотез и пр.), отражающих строение, свойства и поведение реальных объектов. Создание новых теоретических моделей иногда коренным образом меняет представление человечества об окружающем мире (гелиоцентрическая система мира Коперника, модель атома Резерфорда-Бора, модель расширяющейся Вселенной, модель генома человека и пр.). Адекватность теоретических моделей законам реального мира проверяется с помощью опытов и экспериментов.

Что же такое модель?

Существует много различных определений этого понятия. Выделим некоторые, наиболее важные.

Модель – это некий новый объект, который отражает существенные особенности изучаемого объекта, явления или процесса.

Модель – это система, который может заменить объект-оригинал таким образом, что её изучение дает исследователю какую-то важную информацию об этом объекте.

Модель – это образ (предмет, явление, мысль), обладающий частью существенных признаков другого предмета, явления, мысли (прототипа).

Другими словами, модель – это объект или система, которые в достаточной степени повторяют свойства моделируемого объекта или явления (оригинала, прототипа), существенные для целей конкретного моделирования, и опускающие несущественные свойства.

Один и тот же объект может иметь множество моделей, а разные объекты могут описываться одной моделью. В то же время никакая модель не может заменить сам объект. Но при решении конкретной задачи, когда нас интересуют определенные

свойства изучаемого объекта, модель оказывается полезным, а подчас и единственным инструментом исследования.

1.2. Моделирование и его виды

Моделирование – это процесс построения, реализации и исследования модели.

Классифицировать модели можно по разным критериям.

Существует несколько приемов моделирования, которые можно условно разделить на две большие группы: материальное и идеальное моделирование (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Виды моделирования

К **материальным** относятся такие способы моделирования, при которых исследование ведется по модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта. Из разновидностей материального моделирования выделим физическое и аналоговое моделирование.

Физическим принято называть моделирование, при котором реальному объекту противопоставляется его уменьшенная (реже увеличенная) копия, допускающая лабораторное исследование и позволяющая переносить установленные свойства на реальный объект с помощью теории подобия. Типичный пример физического моделирования – исследование уменьшенной копии летательного аппарата в аэродинамической трубе, в архитектуре – макеты зданий и т. п.

Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемую формально (одними и теми же математическими уравнениями, логическими схемами и т.п.). Типичный

пример – изучение механических колебаний с помощью электрической схемы. Другой пример – макет системы кровообращения, на котором стрелочками изображены направления движения крови.

От предметного или материального моделирования принципиально отличается **идеальное моделирование**, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой. Идеальное моделирование носит теоретический характер.

З н а к о в ы м называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов.

Важнейшим видом знакового моделирования является **м а т е м а т и ч е с к о е моделирование**, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики. Классическим примером математического моделирования является описание и исследование законов механики Ньютона средствами математики.

Для построения моделей используют два принципа: *дедуктивный* (от общего к частному) и *индуктивный* (от частного к общему). При первом подходе рассматривается частный случай общеизвестной фундаментальной модели, которая приспособляется к условиям моделируемого объекта с учетом конкретных обстоятельств. Второй способ предполагает выдвижение гипотез, декомпозицию сложного объекта, анализ, а затем синтез. Здесь широко используется подобие, поиск аналогий, умозаключение с целью формирования каких-либо закономерностей в виде предположений о поведении системы.

1.3. Понятие, структура и классификация экономико-математических моделей

Наиболее простым для понимания является следующее определение:

Экономико-математическая модель – это математическое описание экономического объекта, процесса либо явления с целью его исследования, управления или прогнозирования.

Рассмотрим вопрос структуры, т.е. с чего должна состоять любая экономико-математическая модель.

Экономическую систему любого уровня сложности (предприятие, производственный комплекс, отрасль, национальная экономика) схематически можно представить как систему, на вход которой поступают ресурсы, а на выходе получается готовая продукция (услуги). Главное назначение каждой экономической системы – как можно полнее удовлетворить безграничные человеческие потребности в товарах и услугах. При этом продукции необходимой населению нужно произвести как можно больше, а ресурсов (количество которых всегда ограничено) потратить как можно меньше. Представим произвольную экономическую систему в таком упрощенном виде (рис. 1.2).

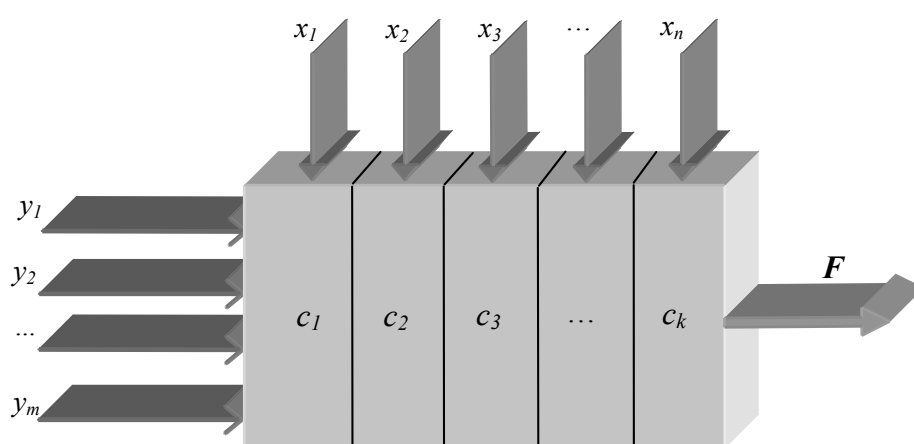


Рис. 1.2. Схема экономической системы

Количественными характеристиками экономической системы являются параметры c_k ($k = 1, 2, \dots, l$). Состав и характеристики этих параметров определяются конкретной экономической системой. Следует отметить, что возможны случаи, когда часть параметров являются постоянными величинами, а часть – переменными. В свою очередь, переменные величины делятся на зависимые (y) и независимые (x), управляемые и неуправляемые, дискретные и непрерывные, детерминированные и случайные и т.д.

Система параметров – это первая составляющая часть экономико-математических моделей.

Вторая важная составляющая часть – это целевая функция или математически описана цель функционирования данной экономической системы (как правило, обозначается через F). Значение функции F должно полностью определяться значениями переменных и параметров системы:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \quad (1.1)$$

Возможности выбора x_j всегда ограничены внешними по системе условиями и параметрами производственно-экономической системы. Эти ограничения можно описать системой математических равенств и неравенств вида:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \{ \leq, =, \geq \} b_i \quad (1.2)$$

Здесь набор символов $\{ \leq, =, \geq \}$ означает, что для разных значений текущего индекса i может использоваться любой из этих символов.

Систему (1.2) принято называть системой ограничений, или системой условий. Она описывает внутренние технологические и экономические процессы функционирования и развития производственно-экономической системы, а также процессы внешней среды, которые влияют на результат деятельности системы.

Таким образом, в общем случае *экономико-математическая модель состоит* из:

- 1) Системы параметров;
- 2) Целевой функции;
- 3) Системы ограничений.

Классифицировать экономико-математические модели можно за следующими признаками:

- Назначением;
- Характером решаемых проблем;
- Степенью вероятности;
- Способом учета времени;
- Формой математических зависимостей между переменными и другими признаками.

За назначением экономико-математические модели целесообразно разбить на имитационные, балансовые, эконометрические, имитационные, сетевые, оптимизационные.

По характеру решаемых проблем модели могут быть разделены на функциональные и структурные. В первом случае все величины, характеризующие явление или объект, выражаются количественно. При этом одни из них рассматриваются как независимые переменные, а другие – как функции от этих величин. Во втором случае модель характеризует структуру сложного объекта,

состоящего из отдельных частей, между которыми существуют определенные связи. которые, как правило, не поддаются количественному измерению.

За степенью вероятности модели делят на два типа: вероятностные (стохастические), в которых некоторые параметры или переменные носят случайный характер, и детерминированные, в которых игнорируется случайный характер изменения переменных.

За способом учета времени экономико-математические модели, как правило, делят на статические (не изменяются со временем) и динамические (учитывают изменение параметров модели во времени).

За формой математических зависимостей выделяют модели линейные (все переменные имеют зависимость первой степени) и нелинейные (модели, в которых либо целевая функция, либо какое-нибудь из ограничений (либо все ограничения) нелинейные, т.е. имеют зависимость не у первой степени).

Построение и расчет линейных моделей являются наиболее развитым разделом математического моделирования, поэтому часто к ним стараются свести и другие задачи либо на этапе постановки, либо в процессе решения.

Надо, однако, учитывать, что многие экономические процессы в действительности носят нелинейный и стохастический характер и их аппроксимация (замена) линейными зависимостями (линеаризация), упрощая расчеты, существенно огрубляет и искажает их. Поэтому линейные модели страдают известной ограниченностью в том, что касается отображения с их помощью реальных экономических процессов. Но во многих случаях созданный на этой основе математический аппарат в сочетании с компьютерной техникой, производящей сложные и трудоемкие расчеты, позволяет с успехом использовать такие модели в хозяйственной практике и в экономической науке.

1.4. Этапы экономико-математического моделирования

Работа, выполняемая в процессе моделирования, состоит из следующих этапов:

- 1) Идентификации проблемы;
- 2) Построения модели;
- 3) Решения поставленной задачи с помощью модели;
- 4) Проверки адекватности модели;

5) Реализации результатов исследования.

Хотя эта последовательность не обязательна, ее считают общепринятой.

За исключением этапа, связанного с получением решения на основе разработанной модели, когда используются формализованные методы (линейное программирование, управление запасами, теория массового обслуживания, календарное планирование и т.д.), все остальные этапы исследования выполняются без строгой ориентации на какие-либо регламентирующие правила.

На *первом этапе* задача исследования заключается в идентификации проблемы.

Здесь можно выделить следующие основные стадии:

- ❖ формулировка задачи или цели исследования,
- ❖ выявление возможных альтернатив решения применительно к исследуемой ситуации,
- ❖ определение присущих исследуемой системе требований, условий и ограничений.

Второй этап связан с построением модели. На этом этапе выбирается модель, наиболее подходящая для адекватного описания исследуемой системы. При построении такой модели должны быть установлены количественные соотношения для выражения целевой функции и ограничений в виде функций от управляемых переменных. Если разработанная модель соответствует некоторому общему классу математических моделей экономических процессов, то для получения решения нужно воспользоваться известными математическими методами. Если же математические соотношения слишком сложны и не позволяют получить аналитического решения задачи, более подходящей для исследования может оказаться имитационная модель.

На *третьем этапе* осуществляется решение сформулированной задачи. При использовании математической модели решение получают с помощью апробированных оптимизационных методов; при этом модель приводит к оптимальному решению задачи. В случае применения имитационных моделей понятие оптимальности становится менее определенным и получаемое решение соответствует лишь приближенным оценкам критериев оптимальности функционирования экономической системы.

На данном этапе кроме нахождения решения всякий раз, когда это возможно, должно быть обеспечено также получение дополнительной информации о возможных изменениях решения при изменении параметров системы. Эту часть исследования называют анализом модели на чувствительность. Он необходим, например, в тех случаях, когда некоторые характеристики исследуемой системы не поддаются точной оценке. В такой ситуации весьма важно исследовать возможные изменения оптимального решения в зависимости от соответствующих параметров системы в некоторых интервалах их количественных значений.

Четвертый этап заключается в проверке адекватности модели. Модель можно считать адекватной, если, несмотря на некоторые неточности отображения системы-оригинала, она способна обеспечить достаточно надежное предсказание поведения системы. Общий метод проверки адекватности модели состоит в сопоставлении получаемых результатов с характеристиками системы. Если при аналогичных входных параметрах модель достаточно точно воспроизводит поведение системы-оригинала, то она считается адекватной. Однако в любом случае такое сопоставление не дает полной уверенности в том, что поведение системы в предстоящем периоде будет таким же, как в прошлом.

Заключительный *пятый этап* связан с реализацией полученных результатов. На данном этапе необходимо оформить конечные результаты исследования в виде детальных инструкций, которые должны быть составлены таким образом, чтобы они легко воспринимались лицами, ответственными за управление экономической системой (службой) и обеспечение ее функционирования.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ЛИНЕЙНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ

- 2.1. Оптимизационные модели как важный класс экономико-математических моделей
- 2.2. Общая экономико-математическая модель линейного программирования
- 2.3. Примеры линейных оптимизационных задач
- 2.4. Основные теоремы линейного программирования

2.1. Оптимизационные модели как важный класс экономико-математических моделей

Обширный класс экономико-математических моделей образуют *оптимизационные модели*, позволяющие выбирать из всех решений самый лучший оптимальный вариант. В математическом смысле оптимальность понимается как достижение экстремума (максимума или минимума) критерия оптимальности, именуемого также целевой функцией. Оптимизационные задачи решаются посредством выполнения соответствующих моделей с помощью методов математического программирования.

Математическое программирование – это одно из направлений прикладной математики, предметом которого является постановка и решение оптимизационных задач на нахождение экстремума целевой функции при заданных ограничениях (условиях). В отличие от классической математики, математическое программирование занимается математическими методами решения задач нахождения наилучших вариантов из всех возможных.

Вместе с тем математическое программирование является одновременно и неотъемлемой составной частью курса экономико-математических методов и моделей, поскольку основное внимание здесь уделяется нахождению решений экономических задач прежде всего в практике планирования и организации производства. При этом решение любой экстремальной экономической задачи состоит из подготовки информации, построения экономико-математической модели, отыскания оптимального плана, экономического анализа полученных результатов и определения возможностей их практического применения.

Объектом математического программирования является экономическая деятельность человека, которая требует выбора оптимального варианта действий по всей возможной их совокупности.

На первый взгляд, название «математическое программирование» очень ассоциируется с программированием как процессом создания компьютерных программ при помощи специальных языков программирования. Однако на самом деле это лишь не очень удачный перевод английского термина *mathematical programming*, что означает разработку на основе математических расчетов программы действий для достижения выбранной цели.

Это так называемые задачи *математического программирования*, возникающие в самых разнообразных областях человеческой деятельности и прежде всего в областях экономических исследованиях, в практике планирования и организации производства.

Оптимизационные модели широко используются в самых разнообразных областях человеческой деятельности, прежде всего в областях экономических исследованиях, в практике планирования и организации производства, при анализе поведения отдельных экономических агентов (потребителей, производителей и т.д.) для нахождения оптимальных величин.

Классической оптимизационной задачей является задача отыскания лучшего способа использования экономических ресурсов, позволяющего достичь максимальный целевой эффект. Кстати математическое программирование возникло на основе решения задачи об оптимальном раскрое листов фанеры, обеспечивающем наиболее полное использование материала. Поставивший эту задачу известный российский математик и экономист академик Л.В. Канторович был впоследствии удостоен Нобелевской премии по экономике.

2.2. Общая экономико-математическая модель линейного программирования

Как правило, в общем виде оптимизационная модель формируется следующим образом: надо отыскать значения управляемых параметров (показателей) $x_1, x_2, \dots, x_n$, характеризующих управляемый экономический объект или процесс, придающие максимальное или минимальное значение целевой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при

соблюдении ограничений, накладываемых на область изменения показателей $x_1, x_2, \dots, x_n$, и связей между ними в виде системы из m неравенств и/или уравнений. Если целевая функция и все ограничения между искомыми показателями выражены в виде линейных зависимостей, то оптимизационная модель сводится к задаче *линейного математического программирования* и саму модель также называют линейной.

В математической форме задачу линейного программирования можно записать в следующем виде: среди решений $\overline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы из m линейных уравнений (неравенств) с n неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

найти такой, при котором целевая функция линейной формы

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (2.2)$$

достигает экстремального (максимального или минимального) значения.

Кoeffициенты $a_{ij}, b_i, c_j (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$ – заданные константы (известные числовые значения).

В общей задачи линейного программирования используются следующие понятия.

Вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты (значения) которого удовлетворяют ограничения системы (2.1), называется *планом* или допустимым решением.

Совокупность всех допустимых решений (планов) задачи линейного программирования образует *область допустимых решений*.

Оптимальным планом или оптимальным решением задачи линейного программирования называется допустимый план, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения.

2.3. Примеры линейных оптимизационных задач

Приведем несколько формализованных типичных постановок экономических задач, решаемых методами линейного программирования.

1. Задача оптимизации производства (планирования производства или об использовании ресурсов)

Некоторое предприятие выпускает n видов продукции. Руководству необходимо решить, какое именно количество каждого продукта необходимо производить, т.е. нужно составить план производства – вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_j – количество единиц j -го вида продукции ($j = \overline{1, n}$). При этом считается, что предприятие располагает ограниченными ресурсами, объем которых известен (значения b_i ($i = \overline{1, m}$)). Технологические возможности производства определяются значениями коэффициентов a_{ij} , показывающих какое количество i -го ресурса необходимо потратить для выпуска одной единицы j -го продукта. В случае линейной задачи математического программирования технология производства считается линейной, т.е. предполагается, что все затраты ресурсов растут прямо пропорционально объемам выпуска.

Устанавливаемый руководителем план должен обладать экстремальными свойствами, т.е. должен обеспечить максимальную прибыль предприятию, если известно, что от продажи одной единицы j -го продукта предприятие получает прибыль в размере c_j .

Математическая модель данной задачи такова:

найти максимум функции $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ при условиях:

[illegible]

2. Задача составления рациона («на диету»)

Некоторый рацион состоит из нескольких видов продуктов питания x_j . Известны: стоимость единицы каждого компонента рациона c_j , минимальная

потребность организма в питательных веществах b_i (жиры, белки, углеводы, витамины и др.), содержание a_{ij} каждого питательного вещества в единице каждого продукта x_j . Необходимо составить рацион, обеспечивающий организм количеством питательных веществ не менее минимальной потребности и с наименьшими затратами денежных средств продукты питания.

Математическая модель задачи: найти минимум функции $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ при условиях:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \geq b_3; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, ..., n). \end{array} \right.$$

3. Задача оптимального распределения производственных мощностей предприятий.

Есть несколько предприятий, производящих определенное количество видов продукции. Известны: фонд рабочего времени каждого предприятия; потребности в продукции каждого вида; матрица мощностей производства всех видов продукции, изготавливаемых на каждом предприятии; себестоимости производства единицы продукции каждого предприятия. Необходимо распределить производство продукции между предприятиями таким образом, чтобы удовлетворить потребности в изготовлении продукции и максимально использовать производственные мощности предприятий.

Критерий оптимальности – минимальные суммарные затраты на изготовление продукции либо максимальное использование производственных мощностей.

4. Транспортная задача

В данной задаче рассматривается определенное количество пунктов производства и потребления некоторой однородной продукции (количество пунктов производства и потребления может совпадать и не совпадать). Известны объемы произведенной продукции в каждом пункте производства и потребности каждого пункта потребления. Задана стоимость транспортировки единицы продукции от

каждого пункта производства к каждому пункту потребления. Необходимо определить оптимальные объемы перевозок продукции, т.е. такие, которые бы минимизировали суммарную стоимость транспортировки продукции и при которых были бы учтены условия вывоза продукции от производителей и обеспечения требований потребителей в продукции нужного им количества.

2.4. Основные теоремы линейного программирования

Приведем без доказательства некоторые теоремы линейного программирования, которые будут полезны для нас в дальнейшем при построении линейных оптимизационных моделей.

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

Определение. Множество точек (область) является выпуклым, если оно, вместе с любыми двумя своими точками, содержит в себе отрезок, соединяющий эти точки.

На рис. 2.1 а) и рис. 2.1 б) показаны примеры выпуклых множеств, а на рис. 2.1 в) – пример множества точек, которое не является выпуклым.

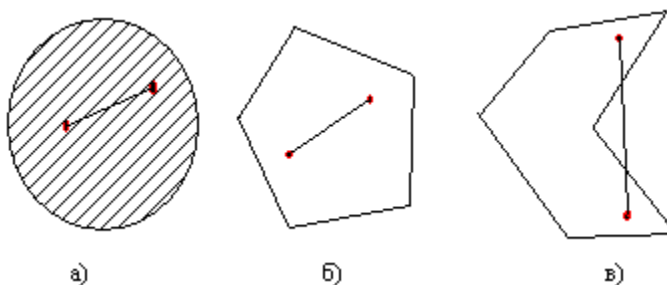


Рис. 2.1. Примеры выпуклых множеств точек (а и б) и невыпуклого множества точек (в)

Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальный план (решение), то он обязательно находится в одной из вершин ее области допустимых решений. Если же целевая функция принимает экстремального значения более чем в одной вершине многогранника области допустимых решений, то она достигает его и в любой точке, являющейся линейной комбинацией таких вершин (такие вершины будут на многограннике соседними).

Определение. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений – вершиной.

Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника области допустимых решений.

Теорема 4. Каждой угловой точке множества допустимых решений соответствует допустимое базисное решение.

Теорема 5. Любая система из k векторов n -мерного векторного пространства при $k < n$ является линейно зависимой.

ГЛАВА 3. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

- 3.1. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования
- 3.2. Пример использования графического метода
- 3.3. Частные случаи использования графического метода
- 3.4. Общий алгоритм графического метода

3.1. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Для представления задачи линейного программирования в геометрической форме для каждого i -го ограничения в n -мерном пространстве задается полуплоскость (или гиперплоскость) решений. В результате пересечения всех полуплоскостей, определяемых ограничениями, образуется выпуклый многогранник допустимых решений.

Целевую функцию в n -мерном пространстве геометрически можно интерпретировать как семейство параллельных полуплоскостей, положение каждой из которых определяется значением параметра F .

Задача состоит в том, чтобы найти такую точку многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное или минимальное значение.

На рис. 3.1 показано геометрическое представление некоторой задачи линейного программирования в двумерном пространстве с четырьмя ограничениями и целевой функцией вида $F = x_1 + x_2$. Выпуклым многогранником допустимых решений является многогранник ABCDE. Координаты любой его точки удовлетворяют как систему ограничений, так и условие неотрицательности переменных, поскольку он находится в первой координатной полуплоскости.

В том случае, если в системе ограничений будет не две, а три переменных, то каждое ограничение геометрически будет определяться гиперполуплоскостью трехмерного пространства. Если же в системе ограничений количество переменных больше, чем три ($x_1, x_2, \dots, x_n$), то каждое ограничение определяет гиперполуплоскость n -мерного пространства.

Заметим что, если область допустимых решений неограниченна, то минимум или максимум линейной функции может и не достигаться.

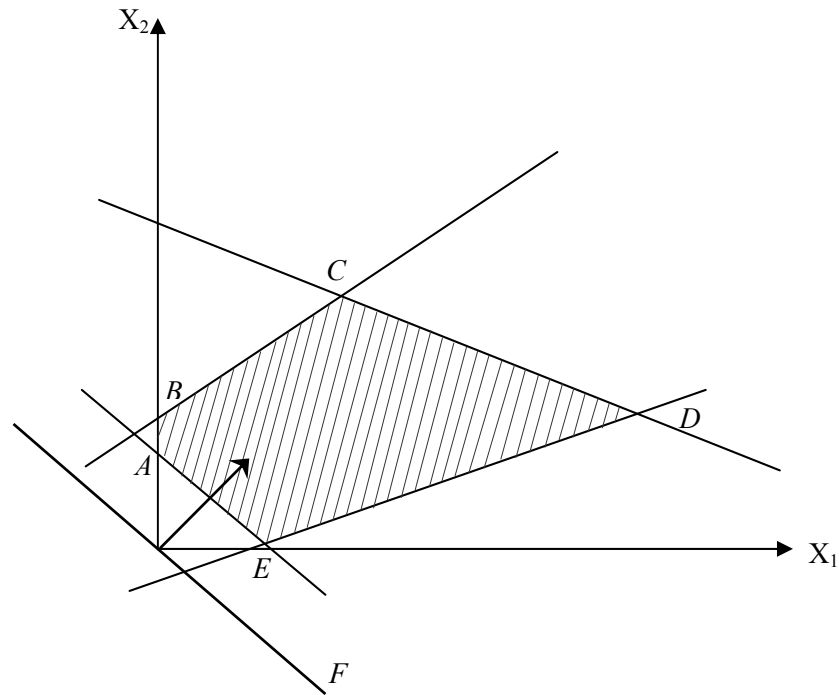


Рис. 3.1. Геометрическая форма представления задачи линейного программирования

3.2. Пример использования графического метода

Графический метод решения задач линейного программирования базируется на ее геометрической интерпретации и применяется, как правило, при количестве переменных $n = 2$ и в отдельных случаях при $n = 3$ (трехмерное пространство). Ограниченное использование графического метода обусловлено сложностью построения многогранника решений в трехмерном пространстве (для задач с тремя переменными), а графическое изображение задачи с количеством переменных больше трех вообще невозможно. Однако графический метод позволяет выработать у студентов наглядные представления о линейном программировании и подтвердить справедливость некоторых его теорем. В дальнейшем мы будем рассматривать и решать задачи линейного программирования графическим методом только в двумерном пространстве.

Согласно геометрической интерпретацией задачи линейного программирования каждое i -е ограничение-неравенство определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Если графически изобразить общую часть, или пересечение всех указанных полуплоскостей, то мы получим множество точек,

координаты которых удовлетворяют одновременно все ограничения задачи, это множество точек называют *многогранником допустимых решений*. Условие неотрицательности переменных означает, что область допустимых решений задачи принадлежит первому квадранту системы координат двумерного пространства. Целевая функция геометрически интерпретируется как семья параллельных прямых.

Проиллюстрируем решение задачи линейного программирования графическим методом на примере системы ограничений с двумя переменными.

Пример. Решить графически следующую задачу линейного программирования: найти максимум и минимум целевой функции $F = -x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \leq 23 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение

Сначала нам необходимо получить область допустимых решений. Неравенство $-5x_1 + 4x_2 \leq 23$ определяет полуплоскость с граничной прямой $-5x_1 + 4x_2 = 23$. Строим эту прямую (рис. 3.2, прямая (1)) и определяем полуплоскость допустимых решений. С этой целью в неравенство подставляем координаты какой-то характерной точки, например $x_1 = x_2 = 0$. Убеждаемся, что эта точка принадлежит выбранной полуплоскости и иллюстрируем этот факт соответствующими направленными стрелками. Аналогичным образом строим полуплоскости для остальных неравенств из системы ограничений задачи. В результате пересечения этих полуплоскостей получаем область допустимых решений – многогранник OABCD.

Вектор нормали (иногда его называют также как радиус-вектор) $\bar{n}(-1; 3)$ задает направление роста значений целевой функции F . Целевая функция определяет семейство параллельных прямых $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, которые называются *линиями уровня* и каждая из которых соответствует определенному значению целевой функции F . Первая линия уровня проходит через начало координат, при этом $F = 0$. При увеличении F линии уровня смещаются в направлении вектора, а при уменьшении – в направлении, противоположном вектору $\bar{n}$. На рис. 3.1 построена прямая $F = 0$, которая располагается перпендикулярно вектору нормали.

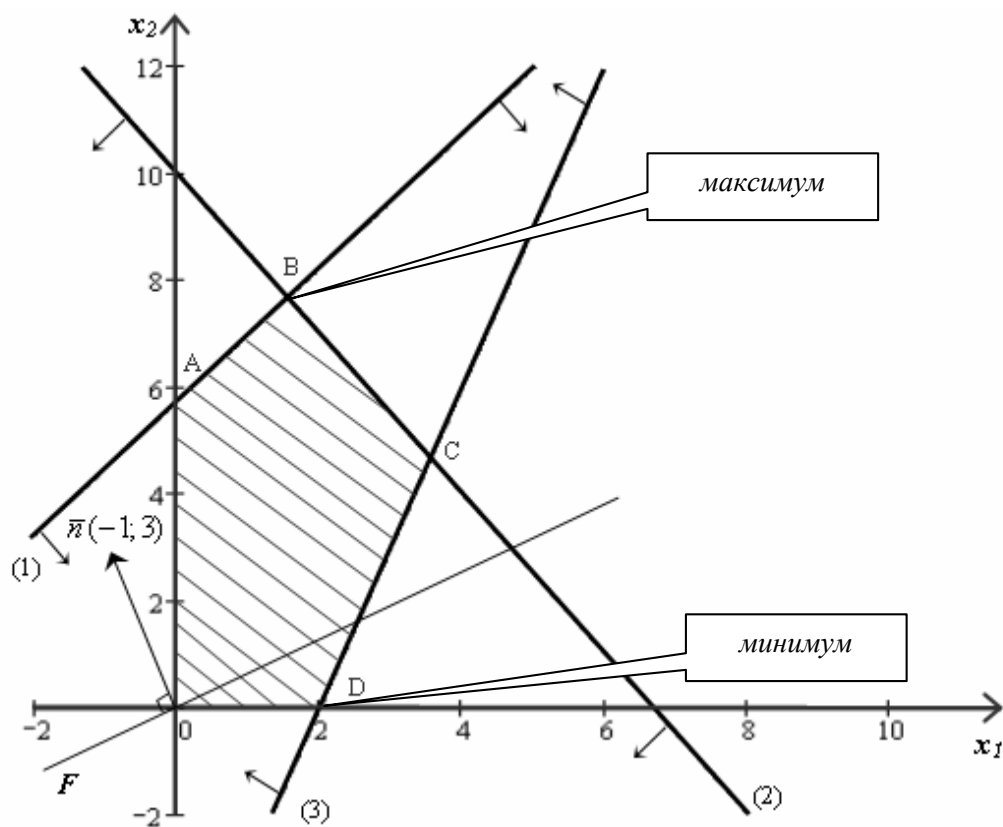


Рис. 3.2. Графическое представление задачи

Согласно теорем 3 и 4 (см. § 2.4) допустимыми базисными решениями данной задачи являются угловые точки многогранника OABCD, а по теореме 2 одна (в отдельных случаях – две) из этих точек придает максимального значения целевой функции. В нашем примере *максимального значения целевая функция достигнет* в точке B, т.е. в вершине многогранника области допустимых решений, которая является наиболее отдаленной от начала координат, если двигаться в направлении вектора $\vec{n}(-1; 3)$.

Координаты точки B находим, решив систему из уравнений прямых № 1 и № 2, на пересечении которых эта точка находится:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 = 23 \\ 3x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$$

Имеем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которую можно решить методами Крамера, Гаусса и некоторыми другими.

По методу Крамера решениями этой системы будут значения:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{\det \begin{vmatrix} 23 & 4 \\ 20 & 2 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{46 - 80}{-10 - 12} = \frac{-34}{-22} \approx 1,54;$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{\det \begin{vmatrix} -5 & 23 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-100 - 69}{-22} = \frac{-169}{-22} \approx 7,68.$$

Таким образом оптимальным планом задачи линейного программирования, который обеспечивает *максимум* целевой функции $F = -x_1 + 3x_2$ является точка В (1,54 ; 7,68).

Значение целевой функции в этой точке: $F_{\max} = -1,54 + 3 \cdot 7,68 = 21,5$.

Минимального значения целевая функция достигает в точке D. Если мы движемся в направлении противоположном вектору нормали $\bar{n}$, то данная точка является последней вершиной многогранника OABCD через которую проходит линия уровня F . Прямая (3) пересекает ось Ox_1 при $x_1 = 2$, следовательно координаты точки D (2, 0).

Оптимальным планом задачи линейного программирования, который обеспечивает *минимум* целевой функции $F = -x_1 + 3x_2$ является точка D (2, 0).

Значение целевой функции в этой точке: $F_{\min} = -2$.

3.3. Частные случаи использования графического метода

В рассмотренном в предыдущем вопросе примере множество решений задачи линейного программирования являлось замкнутым многогранником, система ограничений была совместимая и линейно независима, а оптимальное решение единственное. Однако на практике имеют место случаи, при которых эти условия не выполняются.

При применении графического метода решения задач линейного программирования возможны следующие частные случаи:

1. Целевая функция достигает максимального (минимального) значения не в одной точке, а на некотором отрезке (например АВ), который является границей многогранника области допустимых решений и расположен параллельно к линиям уровня целевой функции (рис. 3.3а).

2. Задача не имеет оптимальных планов (рис. 3.2б – значение целевой функции равно бесконечности; рис. 3.2г – система ограничений задачи несовместима).

3. Задача имеет оптимальный план при неограниченной (незамкнутой) области допустимых решений (рис. 3.2в).

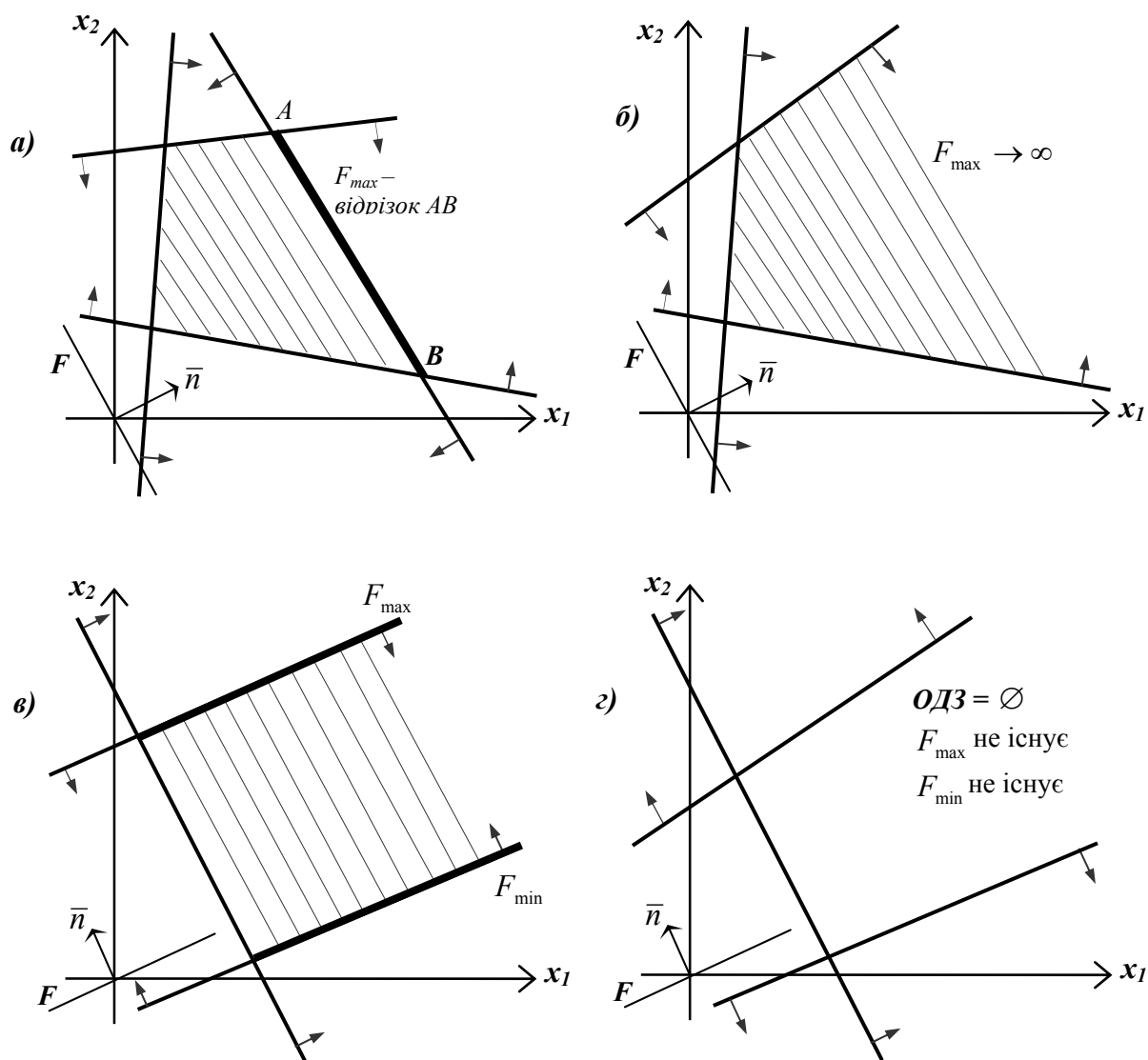


Рис. 3.3. Графическое представление некоторых частных случаев в задачах линейной оптимизации

3.4. Общий алгоритм графического метода

Составим алгоритм графического метода решения задач линейных оптимизационных задач:

Этап 1. Строим прямые линии, уравнения которых получаем заменой в ограничениях-неравенствах знаков неравенств на знаки равенств.

Этап 2. Определяем полуплоскости, соответствующие заданным ограничениям.

Этап 3. Находим многогранник области допустимых решений как область, где пересекаются все полу плоскости.

Примечание. Если такая область не существует, значит данная система ограничений несовместима и задача не имеет решений.

Этап 4. Строим вектор нормали $\bar{n} = (c_1; c_2)$, задающий направление роста значений целевой функции.

Этап 5. Строим линию уровня – прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ (т.е. $F = 0$), перпендикулярной (под прямым углом) к вектору $\bar{n} = (c_1; c_2)$ и проходящей через начало координат.

Этап 6. Перемещаем линию уровня в направлении вектора $\bar{n} = (c_1; c_2)$ для задачи максимизации целевой функции или в противоположном направлении для задачи минимизации. Последняя вершина многогранник области допустимых решений через которую пройдет линия уровня и будет точкой, в которой целевая функция достигает экстремального значения.

Примечание 1. В случае поиска максимума, если область допустимых решений не является замкнутым пространством точек в направлении вектора $\bar{n} = (c_1; c_2)$ значение целевой функции будет равно бесконечности.

Примечание 2. В случае поиска минимума, если область допустимых решений не является замкнутым пространством точек в направлении противоположному вектору $\bar{n} = (c_1; c_2)$ значение целевой функции будет равно минус бесконечности.

Этап 7. Определяем координаты вершины многогранника области допустимых решений, определенной на предыдущем этапе, путем решения системы уравнений, на пересечении которых она находится.

Этап 8. Вычисляем экстремальное значение целевой функции в оптимальной точке.

ГЛАВА 4. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

- 4.1. Каноническая форма задачи линейного программирования
- 4.2. Пример использования симплекс-метода в общем случае
- 4.3. Частные случаи использования симплекс-метода

4.1. Каноническая форма задачи линейного программирования

Запись целевой функции и системы ограничений в различных задачах линейного программирования неодинаков: в одних задачах требуется найти минимум целевой функции, а в других – максимум; в одних случаях искомые переменные зависят от одного индекса, а в других – от двух; в одних задачах ограничения заданы в виде системы линейных неравенств, а в других – в виде системы линейных уравнений. На практике возможны также задачи, в которых часть ограничений имеет вид линейных неравенств, а часть – линейных уравнений. Также не во всех задачах может требоваться неотрицательность переменных x_j .

Учет такого разнообразия задач линейного программирования требует разработки специальных методов для решения отдельных их классов. Мы же сосредоточим свое внимание на изучении общих свойств и методов линейного программирования, записанных в так называемой канонической форме.

Если в задаче линейного программирования система исходных ограничений приобретает вид уравнений типа

[illegible]

$$\text{или } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}; \ m < n; \ b_i \geq 0)$$

и нужно найти максимум линейной целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max,$$

то считается, что задача линейного программирования записана в канонической форме.

Любую задачу линейного программирования можно легко свести к канонической форме. В общем случае для этого достаточно уметь, во-первых, свести задачу минимизации целевой функции к задаче ее максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам, и в-третьих, менять те переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

В том случае, когда нужно найти минимум функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$, поскольку справедливо утверждение: $\min F = -\max(-F)$.

Ограничение-неравенство исходной задачи, которое имеет вид « $\leq$ », можно превратить в ограничение-уравнение путем добавления к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида « $\geq$ » – путем вычитания из его левой части дополнительной неотрицательной переменной.

Заметим, что количество введенных дополнительных неотрицательных переменных всегда равно количеству неравенств в исходной системе ограничений.

Введены дополнительные переменные имеют вполне конкретный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражаются расходы и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной показывает объем соответствующего неиспользованного ресурса.

Отметим также, что если некоторая переменная x_r не подчиняется условию неотрицательности, то ее нужно заменить двумя неотрицательными переменными u_r и v_r , приняв $x_r = u_r - v_r$.

Пример. Записать в канонической форме следующую задачу линейной оптимизации: найти минимум функции $F = -2x_1 + x_2 - 3x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \leq 23 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение

В данной задаче нужно найти минимум целевой функции, а система ограничений включает четыре неравенства. Для того, чтобы записать ее в

канонической форме, нужно перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-уравнениям, а также превратить целевую функцию.

Так как количество неравенств, входящих в систему ограничений задачи, равно четырем, то этот переход должен быть осуществлен с введением четырех дополнительных неотрицательных переменных. При этом во втором и четвертом неравенствах стоит знак « $\leq$ », поэтому к их левой части дополнительные переменные добавляем. В первом и третьем неравенствах – знак « $\geq$ », значит от их левой части дополнительные переменные вычитаем.

Также превращаем целевую функцию, поменяв все знаки на противоположные, и находим ее максимум.

Таким образом, данная задача линейного программирования будет записана в следующем каноническом виде:

$$\begin{array}{l} \text{найти максимум функции } F_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{при ограничениях } \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 + x_2 - x_4 = 8; \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 1; \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_6 = 10; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_7 = 6 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 7}) \end{array} \right. \end{array}$$

4.2. Пример использования симплекс-метода в общем случае

Графический метод для определения оптимального плана целесообразно использовать только для задач с двумя переменными. При большем количестве переменных прибегают к обобщенного метода решения задач линейного программирования – так называемого симплексного метода. Название метода происходит от слова «симплекс», что означает «простой многогранник».

Из свойств решений задач линейного программирования известно, что оптимальное решение задачи должно находиться в одной из угловых точек многогранника допустимых решений. Поэтому самый простой способ отыскания оптимального плана требует перебора всех угловых точек (допустимых планов задачи, которые еще называют опорными). Сравнение вершин многогранника можно осуществлять только после отыскания какой-то одной из них, то есть найдя начальный опорный план. Каждый опорный план определяется системой m линейно

независимых векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$, содержащихся в системе ограничений задачи с n векторов. Следовательно, общее количество опорных планов определяется количеством комбинаций $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

С помощью симплексного метода можно найти угловую точку и исследовать ее на оптимальность. Если ответ отрицательный, то симплексный метод позволяет найти следующую угловую точку, в которой линейная целевая функция принимает значение близкого к оптимальному или такого, что равно значению целевой функции в предыдущей угловой точке. Это свойство называют монотонностью симплексного метода. Через конечное число шагов достигается максимум (минимум) целевой функции.

Если задача не имеет оптимального плана или если ее целевая функция неограничена, то симплексный метод позволяет установить это также за конечное число шагов.

Таким образом процесс решения задачи линейного программирования симплексным методом носит итерационный характер: вычислительные процедуры (итерации) одного и того же типа повторяются до тех пор, пока не будет получен оптимальный план задачи или выяснено, что его не существует.

Задача.

Для производства трех видов деталей машиностроительное предприятие в качестве сырья использует сталь и цветные металлы, которые имеются в ограниченном количестве. На производстве данной продукции заняты токарные станки, время использования которых также ограничено. Используя данные таблицы, определить оптимальный ассортимент, который обеспечивает предприятию максимальный годовой доход (считать, что за год предприятие работает на протяжении 500 смен).

Ресурсы	Объем ресурсов на 1 смену	Издержки на единицу продукции		
		Деталь А	Деталь Б	Деталь В
Сталь (кг)	200	5	4	7
Цветные металлы (кг)	100	3	6	3
Использование станков (ч.)	30	1	2	4
Прибыль (грн./шт.)		40	70	50

Решение

Обозначим x_1 – количество деталей А, что изготавливаются на предприятии; x_2 , x_3 – соответственно количество деталей Б и В.

В таком случае математическая модель задачи будет иметь следующий вид: найти максимальное значение целевой функции $F = 40x_1 + 70x_2 + 50x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 200 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 100 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Представим систему ограничений (4.1) в канонической форме. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_5 = 100 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 30 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}) \end{cases} \quad (4.2)$$

Переходим к решению данной задачи симплекс-методом.

Этап 1. Нахождение допустимого опорного базисного решения (плана)

Сначала мы запишем произвольное базисное решение, а затем (при необходимости) перейдем к допустимому.

Система (4.2) состоит из трех линейно независимых уравнений ($m = 3$) с тремя неизвестными ($n = 3$). Ранг матрицы такой системы равен трем. Количество базисных переменных (далее мы будем называть их *основными*) принимается равным рангу матрицы системы ограничений, то есть 3. Количество свободных (*неосновных*) переменных принимается равным количеству тех переменных, что остались, то есть опять 3.

В качестве основных на первом шаге нужно брать дополнительные переменные, т.е. те, которые были введены нами в каждое ограничение-неравенство при составлении канонической формы системы ограничений.

Шаг 1.1. Основные переменные x_4, x_5, x_6

Неосновные переменные x_1, x_2, x_3

Выразим основные переменные через неосновные:

$$\begin{cases} x_4 = 200 - 5x_1 - 4x_2 - 7x_3 \\ x_5 = 100 - 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 \\ x_6 = 30 - x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}) \end{cases} \quad (4.3)$$

Принимаем неосновные переменные равными нулю: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Тогда $x_4 = 200$, $x_5 = 100$, $x_6 = 30$.

Полученный на первом шаге $X_1 = \{0, 0, 0, 200, 100, 30\}$ является допустимым, поскольку не содержит отрицательных значений. Таким образом, допустимое базисное решение найдено, им является план X_1 .

Значение целевой функции на этом шаге будет равно нулю: $F_1 = 40 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$.

Этап 2. Нахождение оптимального решения (плана)

Наша задача заключается в том, чтобы от начального допустимого базисного решения перейти к другому, при котором значение линейной формы увеличится. Определим, какую переменную выгодно перевести из неосновных в основные. Оцениваем линейную форму: смотрим на знаки коэффициентов при x_j . Поскольку все коэффициенты положительные, то соответствующие переменные не выгодно относить к неосновным (чем больше значение таких переменных, тем больше будет целевая функция). Если же коэффициенты отрицательные, то соответствующие переменные нужно оставить в неосновных.

При всех переменных целевой функции $F = 40x_1 + 70x_2 + 50x_3$ стоят положительные коэффициенты, поэтому любую из переменных x_1, x_2, x_3 можно переводить в основные. Но не следует забывать, что на каждом шагу симплексного метода с неосновных в основные можно переводить только *одну переменную*. Еще раз смотрим на коэффициенты перед переменными. Выбираем ту из них, при которой стоит больший коэффициент (целевая функция при этом растет быстрее), то есть переменную x_2 .

Замечание. В задачах поиска минимального значения целевой функции критерий оптимальности противоположен, т.е. в основные переменные нужно переводить те переменные, при которых стоят не положительнее коэффициенты, а отрицательные.

Итак, в основные мы решили перевести переменную x_2 . Какую переменную перевести вместо нее в неосновные? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сначала составить отношение свободных членов к коэффициентам при данной переменной для каждого из уравнений системы (4.3). В нашем случае свободный член и коэффициент при переменной имеют разные знаки, потому отношение записывается по модулю. Для первого уравнения системы (4.3) отношение будет равняться:

$$|200/-4| = 50.$$

Для второго $|100/-6| = 50/3$, для третьего $|30/-2| = 15$.

Замечание. В случае, когда свободный член и коэффициент при переменной имеют одинаковые знаки, а также в случае, когда переменная, что переводится, не входит в какое-то уравнение системы, такое отношение мы принимаем равным бесконечности.

В неосновные переводится и переменная, для которой модуль отношения является самым наименьшим. Полученные отношения – это положительные числа, которые показывают нам на сколько можно увеличить переменную x_2 , чтобы все другие остались неотрицательными.

Уравнение, которому соответствует наименьшее такое отношение, называют *опорным*.

В нашем примере наименьшим является модуль последнего отношения, который равен 15. Основная переменная x_6 , соответствующая этому отношению, должна быть переведена в неосновные. Таким образом, опорным уравнением есть третье, последнее уравнение системы (4.3).

Шаг 2.1. Основные переменные x_2, x_4, x_5

Неосновные переменные x_1, x_3, x_6

Выражаем основные переменные через неосновные. При этом нужно начинать обязательно с опорного уравнений. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_2 = 15 - \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_6 \\ x_4 = 200 - 5x_1 - 4(15 - \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_6) - 7x_3 = 140 - 3x_1 + x_3 + 2x_6 \\ x_5 = 100 - 3x_1 - 6(15 - \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_6) - 3x_3 = 10 + 9x_3 + 3x_6 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}) \end{cases} \quad (4.4)$$

Имеем план $X_2 = \{0, 15, 0, 140, 10, 0\}$.

Целевую функцию также выражаем через неосновные переменные:

$$F = 40x_1 + 70(15 - \frac{1}{2}x_1 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_6) + 50x_3 = 1050 + 5x_1 - 90x_3 - 35x_6;$$

$$x_1, x_3, x_6 = 0 \Rightarrow F = 1050$$

На этом шаге критерий оптимальности целевой функции не выполняется, так как неизвестная x_1 имеет положительный коэффициент (+5). x_1 нужно перевести в основные.

Поскольку среди отношений $x_1 = \min\{30, 140/3, \infty\} = 30$, то в неосновные переменные нужно перевести x_2 . Опорным теперь является первое уравнение системы (4.4).

Шаг 2.2. Основные переменные x_1, x_4, x_5

Неосновные переменные x_2, x_3, x_6

$$\begin{cases} x_1 = 30 - 2x_2 - 4x_3 - x_6 \\ x_4 = 140 - 3(30 - 2x_2 - 4x_3 - x_6) + x_3 + 2x_6 = 50 + 6x_2 + 13x_3 + 5x_6 \\ x_5 = 10 + 9x_3 + 3x_6 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$X_3 = \{30, 0, 0, 50, 10, 0\}$$

$$F = 1050 + 5(30 - 2x_2 - 4x_3 - x_6) - 90x_3 - 35x_6 = 1200 - 10x_2 - 110x_3 - 40x_6$$

$$x_2, x_3, x_6 = 0 \Rightarrow F = 1200$$

Поскольку выражение целевой функции больше не содержит переменных с положительными коэффициентами, это значит что выполняется критерий оптимальности на максимум.

Максимальное значение целевой функции $F_{\max} = 1200$. Оптимальный план $\{30, 0, 0, 50, 10, 0\}$.

Исходя из результатов моделирования, можно сделать следующие экономические выводы. Максимальную прибыль машиностроительному предприятию обеспечит производство 30 деталей А за 1 смену. При этом, несмотря на большую прибыль на единицу продукции, детали Б и В производиться вообще не будут. С оптимального плана также видно, что после каждой смены остается неиспользованными 50 кг стали и 10 кг цветных металлов. Фактором, сдерживающим рост производства и увеличение максимально возможной прибыли, есть время использования токарных станков. Поэтому количество последних

целесообразно увеличить. Можно также увеличить нормативный использования имеющихся в настоящее время мощностей этого оборудования.

За год на данном предприятии можно произвести $500 \cdot 30 = 15\,000$ деталей А и получить максимально возможную прибыль $1200 \cdot 500 = 600\,000$ грн.

4.3. Частные случаи использования симплекс-метода

Мы рассмотрели пример с допустимым исходным базисным решением, при котором система ограничений была совместимой, а линейная форма достигала единого и конечного оптимального значения.

Рассмотрим некоторые частные случаи, в которых вышеупомянутые условия нарушаются.

Случай 1. Начальное решение недопустимое.

Если на первом этапе симплексного метода любая из переменных базисного решения отрицательная, то такое решение будет недопустимым. В этом случае нужно сначала перейти к допустимому базисному решению. Следует отметить, что переход к нему не обязательно происходит за один шаг.

Пример. Найти минимум функции $F = x_1 - 3x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 6 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Решение

Этап 1. Шаг 1.1. Основные переменные x_3, x_4, x_5

Неосновные переменные x_1, x_2

$$\begin{cases} x_3 = -1 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 5 - x_1 - x_2 \\ x_5 = -6 + x_1 + 3x_2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Полученное решение $X_1 = \{0, 0, -1, 5, -6\}$ – недопустимое (две компоненты плана отрицательные).

Попробуем перевести в основные переменную x_1 . В этом случае $x_1 = \min\{\frac{1}{2}, 5, 6\} = \frac{1}{2}$; $x_3 \rightarrow$ в неосновные.

Шаг 1.2. Основные переменные x_1, x_4, x_5

Неосновные переменные x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 5 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3) - x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_5 = -6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 3x_2 = -\frac{11}{2} + \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

План $X_2 = \{ \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{9}{2}, -\frac{11}{2} \}$ – недопустимый (одна компонента отрицательная).

Переводим следующую переменную, т.е. x_2 в основные:

$$x_2 = \min \{ \infty, 3, \frac{11}{7} \} = \frac{11}{7}; \ x_5 \rightarrow \text{в неосновные.}$$

Шаг 1.3. Основные переменные x_1, x_2, x_4

Неосновные переменные x_3, x_5

$$\begin{cases} x_2 = \frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 \\ x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5) + \frac{1}{2}x_3 = \frac{9}{7} + \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_5 \\ x_4 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}(\frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5) - \frac{1}{2}x_3 = \frac{15}{7} - \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_5 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

План $X_3 = \{ \frac{9}{7}, \frac{11}{7}, 0, \frac{15}{7}, 0 \}$ – допустимый.

Выражаем целевую функцию через неосновные:

$$F = \frac{9}{7} + \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_5 - 3(\frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5) = -\frac{24}{7} + \frac{6}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_5$$

$$x_3, x_5 = 0 \Rightarrow F = -\frac{24}{7}$$

Поскольку переменная x_5 в выражении $F = -\frac{24}{7} + \frac{6}{7}x_3 - \frac{5}{7}x_5$ отрицательная, значит критерий оптимальности на минимум не выполняется: $F \downarrow = x_5 \uparrow \Rightarrow x_5 \rightarrow$ в основные.

$$x_5 = \min \{ \infty, \infty, 5 \} = 5; \ x_4 \rightarrow \text{в неосновные.}$$

Этап 2. Шаг 2.1. Основные переменные x_1, x_2, x_5

Неосновные переменные x_3, x_4

$$\begin{cases} x_5 = 5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}(5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4) = 3 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_1 = \frac{9}{7} + \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}(5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4) = 2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

$$\text{План } X_4 = \{2, 3, 0, 0, 5\}. F = -\frac{24}{7} + \frac{6}{7}x_3 - \frac{5}{7}(5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4) = -7 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4$$

Поскольку в выражении целевой функции все неосновные переменные имеют положительные коэффициенты, то критерий оптимальности на минимум выполнен:

$$F_{\min} = -7 \text{ при плане } \{2, 3, 0, 0, 5\}.$$

Случай 2. Оптимальное значение целевой функции равно бесконечности

Если на любом этапе нахождения оптимального решения окажется, что в линейную форму (выражение целевой функции) входит некоторая положительная переменная $x_k > 0$, для которой отношение свободных членов к коэффициентам при этой переменной во всех уравнениях системы равно бесконечности ($x_k = \min \{\infty, \infty, \dots, \infty\} = \infty$), то это означает, что переменную x_k можно увеличивать как угодно много. При этом $F_{\max} \rightarrow \infty$, а оптимального плана не существует.

Случай 3. Оптимальное решение не единственно.

Если допустимое базисное решение дает оптимальное значение линейной формы, но в ее выражении отсутствует хотя бы одна из неосновных переменных (обозначим ее x_r), значит полученное оптимальное решение не единственно. Можно считать, что переменная x_r входит в целевую функцию с нулевым коэффициентом, поэтому и не увеличивает, и не уменьшает её значение. Для того, чтобы найти другое оптимальное решение, нужно перевести переменную x_r в основные.

Случай 4. Система ограничений несовместима

Если в полученном на любом шаге решении существует некоторая основная переменная x_k , которая является отрицательной при любых значениях неосновных переменных x_j , значит система ограничений несовместима, то есть данная задача не имеет допустимого базисного решения. Очевидно, что такая задача не может иметь оптимального решения.

Пример. Найти максимум функции $F = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_5 = 16 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Решение

Этап 1. Шаг 1.1. Основные переменные x_3, x_4, x_5

Неосновные переменные x_1, x_2

$$\begin{cases} x_3 = -6 - 4x_1 + x_2 \\ x_4 = 11 - x_1 - x_2 \\ x_5 = -16 + 2x_1 - x_2 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

План $X_1 = \{0, 0, -6, 11, -16\}$ – недопустимый. Переведем в основные переменную x_1 : $x_1 = \min\{\infty, 11, 8\} = 8$; $x_5 \rightarrow$ в неосновные.

Шаг 1.2. Основные переменные x_1, x_3, x_4

Неосновные переменные x_2, x_5

$$\begin{cases} x_1 = 8 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = -6 - 4(8 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5) + x_2 = -38 - x_2 - 2x_5 \\ x_4 = 11 - (8 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5) - x_2 = 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

План $X_2 = \{8, 0, -38, 3, 0\}$ – недопустимый. При этом основная переменная x_3 будет отрицательной при любых положительных значениях неосновных переменных x_2 и x_5 .

Таким образом, условие $x_j \geq 0$ для данной системы ограничений не выполняется, поэтому она несовместимая (не имеет ни одного допустимого решения).

ГЛАВА 5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

5.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи

5.2. Методы построения начального опорного плана

5.3. Решение транспортной задачи методом потенциалов

5.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи

Транспортная задача принадлежит к классу оптимизационных задач линейного программирования. Содержательно транспортная задача формулируется следующим образом.

Пусть в пунктах $A_1, A_2, \dots, A_m$ производится некоторый однородный продукт, причем объем производства этого продукта в пункте A_i составляет a_i единиц, $i = 1, 2, \dots, m$ (m – количество пунктов производства). Произведенный в пунктах производства продукт должен быть доставлен в пункты потребления $B_1, B_2, \dots, B_n$, причем объем потребления в пункте B_j составляет b_j единиц продукта, $j = 1, 2, \dots, n$ (n – количество пунктов потребления). Предполагается, что транспортировка готовой продукции возможна из любого пункта производства в любой пункт потребления и транспортные издержки, приходящиеся на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j , составляет c_{ij} денежных единиц. Задача состоит в организации такого плана перевозок, при котором суммарные транспортные издержки были бы минимальными.

Формально задача ставится следующим образом. Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j . Требуется определить совокупность из mn величин x_{ij} , удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

и обращающих в минимум линейную форму $z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$,

В соответствии с условиями задачи обратные перевозки не допускаются $x_{ij} \geq 0$.

Группа ограничений (5.1) связана с тем обстоятельством, что объем вывезенного из каждого пункта производства продукта, а объем ввезенного в пункт потребления продукта в точности соответствует его потребности. При этих ограничениях необходимым и достаточным условием для разрешимости транспортной задачи является *условие баланса*

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Если условие баланса соблюдается, то такая транспортная задача называется закрытой, в противном случае – открытой и для решения должна быть сведена к закрытой путем введения фиктивного потребителя либо поставщика.

Специфическим для транспортной задачи являются следующие два обстоятельства:

- а) каждое из переменных x_{ij} входит в два уравнения системы (5.1);
- б) все коэффициенты при переменных x_{ij} принимают лишь два значения 0 или 1.

Эти условия позволили разработать для решения транспортной задачи алгоритмы, существенно более простые, чем симплексный метод, который является одним из основных методов решения задач линейного программирования.

Исходные данные транспортной задачи удобно представлять в виде табл. 5.1, где $A_i, i = \overline{1, m}$ – пункты отправления (производства); $B_j, j = \overline{1, n}$ – пункты назначения (потребления).

Таблица 5.1

Пункты отправления	Пункты назначения				a_j
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i$

В верхнем правом углу каждой клетки таблицы записываются затраты на перевозку c_{ij} , а в самих клетках – искомые количества грузов x_{ij} . Суммируя x_{ij} по горизонтали и вертикали и приравнивая их соответственно a_i и b_j , мы получаем систему ограничений (5.1).

5.2. Методы построения начального опорного плана

Так же, как и в обычном симплексном методе, решение транспортной задачи состоит в целенаправленном переборе и проверке на оптимальность опорных планов. Началом такого итерационного процесса всегда является построение начального опорного плана.

Опорным планом $X = \{x_{ij}\}$ транспортной задачи будем называть такой допустимый ее план, содержащий ровно $m + n - 1$ положительных компонент ($x_{ij} > 0$), а все остальные его компоненты равны нулю. Такой план является невырожденным. Если же количество положительных компонент меньше, чем $m + n - 1$, то получим вырожденный опорный план.

Существует достаточно большое количество методов поиска начальных опорных планов транспортной задачи. Наиболее распространенными являются методы северо-западного угла и наименьшей стоимости.

1. Метод северо-западного угла

Идея этого метода заключается в заполнении таблицы поставок начиная с левого верхнего (северо-западного) угла. В ячейку $[1,1]$ записывают поставку, равной меньшему из двух чисел a_1 и b_1 , т.е. либо полностью исчерпывают запасы первого пункта поставки, или же полностью удовлетворяют потребности первого потребителя. Далее переходят к следующей клетке в этой же строке (если меньше оказалось число b_1) или в столбце (если число a_1) и заполняют ее, и т. д. Заканчивают заполнение таблицы в правой нижней ячейке. Таким образом значение поставок будут расположены по диагонали таблицы. Главное преимущество метода северо-западного угла – простота расчетов, а главный недостаток – низкая эффективность. Процесс отыскания оптимального плана после начального опорного, определенного методом северо-западного угла, как правило, связан со значительным объемом вычислительных работ.

2. Метод наименьшей стоимости (метод минимального элемента)

Сущность этого метода заключается в заполнении таблицы поставок начиная с той ячейки, которая имеет наименьший показатель затрат на перевозку единицы груза. Затем переходят к ячейке, которая имеет наименьшую стоимость среди всех остальных. Такие действия повторяют до тех пор, пока не будет распределена вся продукция между поставщиками и потребителями. Главным преимуществом метода наименьшей стоимости является то, что найден начальный опорный план значительно ближе к оптимальному (а иногда является сразу же и оптимальным), а недостатком – несколько больше сложность по сравнению с методом северо-западного угла.

Задача 5.1.

В мощном промышленном регионе строятся пять новых потребителей электроэнергии: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , питание которых может быть выполнено от трех электростанций: E_1, E_2, E_3 .

Расчетные мощности и величина тока потребителей, расстояние от электростанций к потребителям, резервная мощность, которой располагают электростанции, приведены в таблице 5.2.

Требуется построить начальные опорные планы распределения электроэнергии между потребителями методами:

- а) северо-западного угла;
- б) наименьшей стоимости.

Затраты на передачу электроэнергии считать пропорциональными произведению расстояния на переданный ток от электростанции к потребителю.

Таблица 5.2

Показатель	Резерв мощности электростанции, тыс. кВт	Потребитель				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
Плановая мощность, тыс. кВт		30	70	25	25	60
Электростанции		Расстояние от электростанции к потребителю, км				
E_1	90	3	5	14	3	6
E_2	40	4	2	7	10	9
E_3	80	8	7	2	5	11

Решение

а) метод северо-западного угла

Так как резерв мощностей первой электростанции E_1 больше потребностей первого потребителя B_1 , то сначала полностью удовлетворяем потребности последнего: $\min(e_1; b_1) = \min(90, 30) = 30$. В ячейку [1,1] таблицы 5.3 записываем поставку электроэнергии в объеме 30 тыс. кВт.

Таблица 5.3

Электро- станции	Резервы мощностей	Потребители				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		Потребности				
		$b_1 = 30$	$b_2 = 70$	$b_3 = 25$	$b_4 = 25$	$b_5 = 60$
E_1	$e_1 = 90$	3 30	5 60	14	3	6
E_2	$e_2 = 40$	4	2 10	7 25	10 5	9
E_3	$e_3 = 80$	8	7	2	5 20	11 60

Далее переходим к удовлетворению потребностей следующего (второго) потребителя B_2 . Их объем $b_2 = 70$ тыс. кВт, а на первой электростанции e_1 после удовлетворения потребностей первого потребителя остается мощностей $90 - 30 = 60$ тыс. кВт. Поэтому частично удовлетворяем потребности второго потребителя – записываем в ячейку [1,2] поставку объемом 60 тыс. кВт, при этом мощности первой электростанции будут исчерпаны. Переходим к использованию мощностей второй электростанции $e_2 = 40$ тыс. кВт. Ее резервов хватает для удовлетворения остатка потребностей второго потребителя объемом 10 тыс. кВт. Эту поставку и записываем в ячейку [2,2].

Для удовлетворения потребностей третьего потребителя $b_3 = 25$ тыс. кВт используем остатки мощностей второй электростанции $e_2 = 40 - 10 = 30$ тыс. кВт: в ячейку [2,3] записываем поставку 25 тыс. кВт.

Для удовлетворения потребностей четвертого потребителя $b_4 = 25$ тыс. кВт мощностей второй электростанции не хватает: их остаток составляет $40 - 10 - 25 = 5$ тыс. кВт. Поэтому за счет электростанции E_2 потребности пункта B_4 будут удовлетворены только частично: в ячейку [2,4] записываем число 5. Потребности потребителя b_4 остались неудовлетворенными на $25 - 5 = 20$ тыс. кВт. Для их

удовлетворения воспользуемся резервами последней электростанции E_3 . В ячейку [3,4] записываем число 20.

Переходим к последнему потребителю B_5 . Его потребности полностью удовлетворяются за счет остатка резервов мощностей третьей электростанции: $80-20 = 60$.

В построенном опорном плане число заполненных ячеек равно 7. Ранг матрицы системы ограничений также равен 7. Таким образом, построенный нами начальный опорный план является невырожденным.

Замечание. В случае вырожденности начального опорного плана необходимо в какую-то из пустых ячеек записать нулевую поставку так, чтобы не нарушить опорности построенного плана (можно занять любую пустую ячейку, что не образует замкнутого цикла (понятие цикла будет рассмотрено далее) с заполненными ячейками).

Определим общую стоимость поставок электроэнергии согласно начальному плану. Так как по условию затраты на передачу электроэнергии пропорциональны произведениям расстояний на мощности тока, то нужно объемы передаваемой электроэнергии умножить на эти расстояния:

$$F = 30 \cdot 3 + 60 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 25 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 20 \cdot 5 + 60 \cdot 11 = 1395.$$

б) метод наименьшей стоимости (метод минимального элемента)

Наименьшую стоимость имеют поставки электроэнергии, осуществляемые от электростанции E_2 к потребителю B_2 и от E_3 к B_3 (равны двум). Начать заполнение таблицы поставок можно с любой из ячеек [2,2] или [3,3] (см. табл. 5.4).

Таблица 5.4

Электростанции	Резервы мощностей	Потребители				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		Потребности				
		$b_1 = 30$	$b_2 = 70$	$b_3 = 25$	$b_4 = 25$	$b_5 = 60$
E_1	$e_1 = 90$	3 30	5 30	14	3 25	6 5
E_2	$e_2 = 40$	4	2 40	7	10	9
E_3	$e_3 = 80$	8	7	2 25	5	11 55

Начнем с ячейки [2,2]. Поскольку потребитель B_2 нуждается в 70 тыс. кВт электроэнергии, а поставщик E_2 имеет в резерве только 40 тыс. кВт, то в эту ячейку мы записываем именно 40. Мощности электростанции E_2 использованы полностью.

Теперь заполним ячейку [3,3]. Потребности потребителя B_3 составляют 25 тыс. кВт при резервах поставщика в 80 тыс. кВт. Уменьшилась первая величина, ее и записываем в эту ячейку. Потребности потребителя B_3 удовлетворены полностью.

С ячеек, оставшихся незаполненными, выбираем следующее минимальное значение стоимости поставок. Оно равняется 3 усл. ед. и соответствует ячейками [1,1] и [1,4]. Мощностей электростанции E_1 (90 тыс. кВт) хватает для удовлетворения потребностей и первого ($b_1 = 30$ тыс. кВт), и четвертого ($b_4 = 25$ тыс. кВт) потребителей. При этом на первой электростанции остается неиспользованными еще 35 тыс. кВт электроэнергии.

Заполнение ячейки [2,1] невозможно, поскольку поставщик E_2 уже полностью исчерпал свой объем запасов. Следующими являются ячейки [1,2] и [3,4] со стоимостью 5 усл. ед. Заполнить мы можем только первую из них, ведь потребности четвертого потребителя удовлетворены полностью. Потребности второго потребителя ($b_2 = 70$ тыс. кВт) удовлетворены лишь частично: ему предоставлено 40 тыс. кВт второй электростанцией. В ячейку [1,2] записываем поставку объемом 30 тыс. кВт. Таким образом, второй потребитель доволен полностью, а потому соответствующий столбик можно исключить из рассмотрения.

Опять выбираем наименьшую стоимость для ячеек таблицы, что остались нерассмотренными, и продолжаем процесс до тех пор, пока все резервы не будут использованы, а потребности – удовлетворены.

Построен начальный опорный план является невырожденным.

Общая стоимость поставок электроэнергии согласно этому плану:

$$F = 30 \cdot 3 + 30 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 40 \cdot 2 + 25 \cdot 2 + 55 \cdot 11 = 1080$$

5.3. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Решение транспортной задачи можно получить обычным симплексным методом. Однако в силу специфики системы ограничений (все ограничения заданы в виде линейных уравнений, каждая неизвестная переменная входит только в два уравнения, все коэффициенты при переменных – единицы или нули) транспортную задачу

можно решить более простыми и рациональными модификациями симплексного метода, наиболее распространенным из которых является *метод потенциалов*. Данный метод базируется на следующей теореме.

Теорема (условие оптимальности опорного плана транспортной задачи)

Если для некоторого опорного плана $X^* = (x_{ij}^*)$ существуют числа u_i и v_j , для которых выполняются условия:

а) $u_i + v_j + c_{ij} = 0$ для $x_{ij} > 0$ (т.е. заполненных ячеек таблицы), $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$;

б) $u_i + v_j + c_{ij} \geq 0$, $x_{ij} = 0$ (т.е. незаполненных ячеек), $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$,

то он является оптимальным планом транспортной задачи.

Числа u_i и v_j принято называть *потенциалами* соответствующих строк и столбцов. Потенциалы опорного плана определяют из системы уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$, которые (уравнения) записывают для всех заполненных ячеек транспортной таблицы.

В исходном виде данная система уравнений является неопределенной, но если одному из потенциалов придать какое-либо известное значение система становится определенной и с единственным решением (количество неизвестных будет равняться количеству уравнений).

Как правило, либо потенциалу u_1 либо потенциалу v_1 присваивают нулевое значение. После этого по цепочке рассчитываются другие потенциалы. Сделать это можно и без составления соответствующей системы уравнений. Достаточно добавить в транспортной таблице дополнительную строку (для записи потенциалов v_j) и столбец (для потенциалов u_i) и подобрать числа в них таким образом, чтобы оценки заполненных ячеек стали равны нулю.

Оценка каждой ячейки является алгебраической суммой показателя затрат ячейки и потенциалов соответствующей строки и столбца, на пересечении которых находится данная ячейка, т.е. это сумма чисел $u_i + v_j + c_{ij}$. Если система потенциалов составлена правильно, то оценки всех заполненных ячеек будут нулевыми, а пустых – отрицательными, нулевыми или положительными. Если любая из оценок будет отрицательной, значит данное распределение поставок неоптимальное. Ячейку транспортной таблицы, которая соответствует отрицательной оценке необходимо сделать заполненной. Делается это путем построения для данной ячейки цикла перераспределения поставок.

Циклом является замкнутый многогранник (не обязательно выпуклый), сторонами которого являются только горизонтальные или вертикальные отрезки. Первая вершина такого многогранника всегда лежит в ячейке с отрицательной оценкой, а все остальные вершины – в заполненных ячейках.

Теорема

Для каждой пустой клетки транспортной таблицы можно построить цикл, причем единственный.

Все вершины цикла можно пронумеровать, начиная с пустой ячейки (все равно в каком направлении). *Объем перераспределения поставок по циклу* является равным наименьшей поставке среди парных его ячеек. Данный объем добавляется ко всем нечетным ячейкам (на цикле такие клетки часто обозначают знаком "+") и вычитается из всех четных (знак "-"). Следует помнить, что при осуществлении перераспределения поставок пустая ячейка становится заполненной, а одна из заполненных ячеек – пустой. Очевидно, что последней всегда должна быть четная ячейка с наименьшим поставкой.

После каждого перераспределения мы получаем новый, более выгодный план поставок. Если объем перераспределения поставок по циклу обозначить как x_{kl} , а оценку ячейки, для которой строится данный цикл, как λ_{kl} , то по сравнению с предыдущим планом значение целевой функции в новом плане уменьшится ровно на величину $x_{kl} \cdot \lambda_{kl}$.

Далее новый план поставок нужно проверить на оптимальность. Для этого необходимо пересчитать потенциалы и оценки ячеек. Если план не является оптимальным, нужно снова осуществить перераспределение поставок. Такие действия повторяются до тех пор, пока среди оценок больше не останется ни одной отрицательной.

Задача. Найти оптимальный план для задачи 5.1.

Решение

В примере 5.1 мы построили два начальных опорных планы распределения электроэнергии между потребителями. Для отыскания оптимального плана можно воспользоваться любым из них. Возьмем опорный план, который был построен по

методу наименьших затрат (см. табл. 5.4 § 5.2). Добавим к таблице 5.4 по дополнительной строке и столбце, в которых запишем соответственно потенциалы v_j и u_i ($j = \overline{1,5}$; $i = \overline{1,3}$).

Потенциалу v_1 присвоим нулевое значение. Для того, чтобы оценка заполненной ячейки $[1,1]$ стала равной нулю, потенциал u_1 должна равняться "-3". В первом столбце больше не осталось заполненных ячеек, поэтому потенциалы u_2 и u_3 мы подсчитать пока не можем. Обращаем свое внимание на первую строку таблицы 5.5. Потенциал u_1 нам уже известен, а заполненными ячейками (кроме ячейки $[1,1]$) в этой строке есть ячейки $[1,2]$, $[1,4]$ и $[1,5]$. Таким образом, мы можем вычислить значения потенциалов v_2 , v_4 и v_5 . Подбираем их опять же таким образом, чтобы оценки указанных ячеек были нулевыми: $v_2 = 2$ (оценка клетки $[1,2] = -2 + 5 - 3 = 0$); $v_4 = 0$ ($0 + 3 - 3 = 0$); $v_5 = -3$ ($-3 + 6 - 3 = 0$).

Таблица 5.5

Электростанции	Потребители					u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
E_1	3 30	5 30	14	3 25	6 5	-3
E_2	4	2 40	7	10	9	0
E_3	8	7	2 25	5	11 55	-8
v_j	0	-2	6	0	-3	

Теперь мы можем подсчитать потенциалы u_2 и u_3 . Для того, чтобы оценка клетки $[2,2]$ стала нулевой, потенциал u_2 должна равняться 0, а чтобы ячейка $[3,5]$ стала нулевой u_3 должна равняться "-8". И последним найдем потенциал $v_3 = 6$ (таким образом оценка заполненной ячейки $[3,3]$ равна нулю).

Теперь мы можем вычислить оценки для всех ячеек транспортной таблицы:

0	0	17	0	0
4	0	13	10	6
0	-3	0	-3	0

Видим, что начальное распределение поставок не является оптимальным, т.к. две оценки (ячеек $[3,2]$ и $[3,4]$) отрицательные. Поскольку в обоих случаях значения одинаковы (-3), то цикл можно начинать строить для любой из этих ячеек (в

противном случае следует начинать с ячейки, имеет большую абсолютную величину отклонения). Пусть начнем с ячейки $[3,2]$. Цикл для этой ячейки изображен на рис. 5.1. Нечетные вершины цикла обозначены знаком "+", а четные – знаком "-". Наименьший объем поставок среди парных ячеек равен 30 ед. Этот объем и будет перераспределяться по циклу.

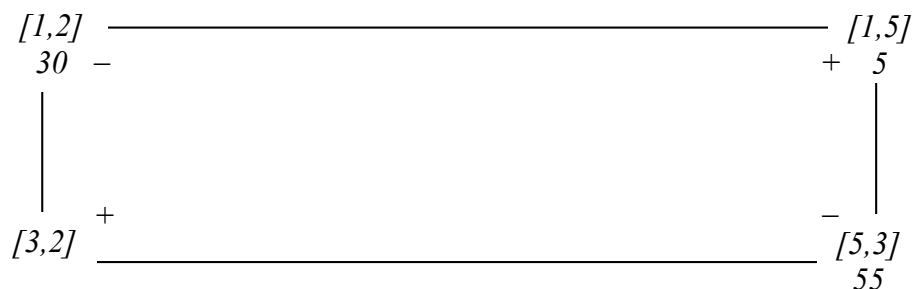


Рис. 5.1. Цикл для ячейки $[3,2]$

Получили новое распределение поставок электроэнергии, которое является более выгодным, чем предыдущее. Значение целевой функции теперь равняется: $F = 1080 - 30 \cdot 3 = 990$ (ум. од.).

В новой транспортной таблице целесообразно вместо затрат на поставку электроэнергии поставить значения соответствующих оценок. В таком случае отпадет необходимость в формировании двух таблиц (первой – с распределением поставок, второй – с оценками) на каждом шагу нахождения оптимального плана (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Электростанции	Потребители					u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
E_1	0 30	0	17	0 25	0 35	3
E_2	4	0 40	13	10	6	0
E_3	0	-3 30	0 25	-3	0 25	3
v_j	-3	0	-3	-3	-3	

Очевидно, что оценка заполненной на этом этапе клетки $[3,2]$ должна теперь равняться нулю, а не "-3". Осуществим перерасчет системы потенциалов. Потенциалу v_2 присвоим нулевое значение, тогда потенциал $u_3 = 3$. В второй колонке кроме

ячейки $[3,2]$ заполненной также является ячейка $[2,2]$. Поскольку потенциал $v_2 = 0$ и предыдущая оценка ячейки $[2,2] = 0$, то потенциал $u_2 = 0$. Аналогичным образом находим значения других потенциалов (табл. 5.7).

Таблица 5.7

Электростанции	Потребители				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
E_1	0 30	3	17	0 25	0 35
E_2	1	0 40	10	7	3
E_3	0	0 30	0 25	-3	0 25

Видим, что и это распределение поставок неоптимальное: необходимо построить цикл для клетки [3,4] (рис. 5.2). Минимальное поставки цикла = 25 ед.

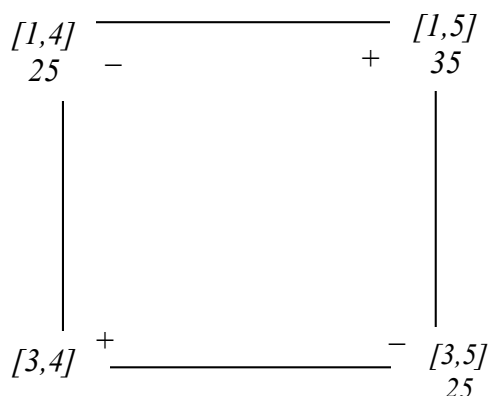


Рис. 5.2. Цикл для ячейки [3,4]

Обе парные вершины цикла имеют минимальные поставки, однако сделать незаполненной можно только одну из них (в противном случае будет нарушено правило, согласно которому количество заполненных ячеек должно равняться $m + n - 1$), а в другой следует записать нулевую поставку.

Затраты на перевозку единицы продукции ячейки [1,4] составляют 3 усл. ед., тогда как ячейки [3,5] – 11 усл. ед. Запишем нулевую поставку в ячейку [1,4]. Таким образом полученный план будет содержать нулевую поставку, а потому является

вырожденным (табл. 5.8). Значение целевой функции для нового плана составит:
 $F = 990 - 25 \cdot 3 = 915$.

Таблица 5.8

Электростанции	Потребители					u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
E_1	0 30	3	17	0 0	0 60	0
E_2	1	0 40	10	7	3	3
E_3	0	0 30	0 25	-3 25	0	3
v_j	0	-3	-3	0	0	

Пересчет оценок показывает, что среди них больше нет отрицательных:

0	0	14	0	0
4	0	10	10	6
3	0	0	0	3

Таким образом, распределение поставок электроэнергии, показанное в табл. 5.8 (план $X^* = \{30; 0; 0; 0; 60; 0; 40; 0; 0; 0; 0; 30; 25; 25; 0\}$) является оптимальным и обеспечивает минимум суммарных затрат в объеме $F_{\min} = 915$ (усл. ед.).

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Замков О.О. Математические методы в экономике: Учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных / Под общ. ред. А.В. Сидоровича. – 4-е изд., стереотип. – М.: Издательство «Дело и Сервис», 2004. – 368 с.
2. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. / И.Л. Калихман. – Изд. 2-е, доп. и перераб. – М.: Высшая школа, 1975. – 270 с.
3. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование: Учеб. пособие. / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1980. – 300 с.
4. Кундышева Е.С. Математическое моделирование в экономике: Учебное пособие / Е.С. Кундышева / Под науч. ред. проф. Б.А. Суслакова. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К⁰», 2004. – 352 с.
5. Минюк С.А. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие. / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.
6. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. / А.В. Монахов. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.
7. Семененко М.Г. Введение в математическое моделирование. / М.Г. Семененко. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 112 с.
8. Сигал И.Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы: Учеб. пособие. / И.Х. Сигал, А.П. Иванова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 240 с.
9. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс: Учеб. пособие. / Ю.Ю. Тарасевич. – М.: Едиториал УРССЮ, 2002. – 144 с.
10. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е изд.: пер. с англ. / Хемди Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

Для записей

