

**Міністерство освіти і науки України**  
**Центральноукраїнський національний технічний**  
**університет**

**Кафедра автоматизації виробничих процесів**

# **Теорія автоматичного управління**

**Лабораторний практикум**  
**для здобувачів спеціальності G7«Автоматизація,**  
**комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх**  
**форм навчання**

**“Затверджено”**  
**на засіданні кафедри автоматизації**  
**виробничих процесів,**  
**протокол № 10 від 27 травня 2026 р.**

**м. Кропивницький**  
**2026**

Теорія автоматичного управління. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для здобувачів спеціальності G7«Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх форм навчання /Укладачі: О.М. Сербул, А.М. Мацуй, М.О. Федотова. – Кропивницький: ЦНТУ, 2026. – 78 с.

Укладачі: к.т.н., доцент Сербул О.М.

д.т.н., професор Мацуй А.М.

к.т.н., асистент Федотова М.О.

Рецензент: к.т.н., доцент Березюк І.А.

## З М І С Т

	Стор.
Вступ.....	3
Витяг з інструкції № 117 з охорони праці при виконанні лабораторних робіт в лабораторії.....	4
Короткий опис системи MathCAD.....	5
Лабораторна робота №1	
Дослідження характеристик підсилювальної ланки.....	9
Лабораторна робота №2	
Дослідження характеристик аперіодичної ланки 1-го порядку.....	13
Лабораторна робота №3	
Дослідження характеристик коливальної ланки.....	19
Лабораторна робота №4	
Дослідження характеристик інтегруючої ланки.....	24
Лабораторна робота №5	
Дослідження характеристик форсуючої ланки 1-го порядку.....	28
Лабораторна робота №6	
Дослідження характеристик форсуючої ланки 2-го порядку.....	32
Лабораторна робота №7	
Дослідження характеристик запізнілої ланки.....	37
Лабораторна робота №8	
Дослідження частотних характеристик лінійної САР.....	41
Лабораторна робота №9	
Дослідження стійкості системи за критерієм Гурвіца.....	42
Лабораторна робота №10	
Дослідження стійкості системи за критерієм Михайлова.....	50

Лабораторна робота №11	
Дослідження стійкості системи за критерієм Найквіста-	
Михайлова.....	55
Лабораторна робота №12	
Дослідження стійкості системи по методу D-розбиття.....	60
Лабораторна робота №13	
Побудова перехідних процесів та визначення прямих	
показників якості.....	64
Лабораторна робота №14	
Дослідження стійкості систем з запізнюванням.....	71
Література.....	76

## Вступ

Лабораторний практикум з курсу “Теорія автоматичного управління” містить чотирнадцять лабораторних робіт, метою яких є засвоєння та поглиблення конкретних знань з базових понять теорії автоматичного управління і відпрацювання навичок практичного застосування цих знань.

Перелік лабораторних робіт дозволяє лектору чи керівнику практичних занять скласти необхідний цикл лабораторних робіт для відповідної спеціальності, визначити для студентів кількість робіт, що виконуються в лабораторії та кількість робіт для самостійного відпрацювання.

Матеріал в теоретичних відомостях викладений так, щоб студент в процесі домашньої підготовки до проведення лабораторних робіт міг детально ознайомитись з основними питаннями теорії автоматичного управління, користуючись даним лабораторним практикумом. Лабораторні роботи виконуються з використанням математичного редактора MathCAD, який дозволяє виконувати як чисельні, так і аналітичні (символьні) обчислення, має надзвичайно зручний математико-орієнтований інтерфейс і великі можливості щодо виконання графічного матеріалу.

Даний лабораторний практикум дозволяє отримати фундаментальні знання та практичні навички для дослідження на цій основі інших типів систем, які не ввійшли до переліку конкретних робіт.

Лабораторні роботи розраховані на виконання в комп'ютерних класах кафедри, зорієнтованих на проведення робіт з теорії автоматичного управління. Однак їх легко можна виконати на будь-яких персональних комп'ютерах або в комп'ютерних класах при порівняно простій підготовці.

# **Витяг з інструкції № 117 з охорони праці при виконанні лабораторних робіт в лабораторії**

## **1. Загальні положення**

1.1. До проведення лабораторних робіт в лабораторії допускаються студенти, які пройшли інструктаж з охорони праці на робочому місці.

1.2. В лабораторії робоча напруга змінного струму 220/380 В. При невмілому поводженні та невиконанні правил техніки безпеки із струмоведучими частинами ця напруга є небезпечною для здоров'я.

## **2. Вимоги перед початком роботи**

2.1. Розпочинати виконання лабораторних робіт тільки з дозволу викладача, який проводить заняття. Студент, який приступає до виконання лабораторної роботи, повинен чітко уявляти порядок її виконання, попередньо ознайомившись з інструкцією по ТБіПБ на лабораторну установку, на якій виконується робота.

## **3. Вимоги безпеки під час виконання робіт**

3.1. Забороняється доторкатись оголених струмоведучих частин, схем, які знаходяться під напругою.

3.2. Забороняється студентам самостійно проводити які-небудь вмикання на головному розподільчому щиті.

3.3. Забороняється проводити які-небудь перемикання в схемі, яка знаходиться під напругою.

3.4. У всіх випадках виявлення ушкодження електрообладнання, вимірювальних приладів необхідно негайно сповістити викладача.

## **4. Вимоги безпеки при аварійних ситуаціях**

4.1. У випадку ураження електричним струмом негайно відключити живлення стенду для звільнення постраждалого від дії електричного струму, надати першу допомогу до прибуття на місце події лікаря.

## Короткий опис системи MathCAD

Виконання більшості лабораторних робіт з курсу “Теорія автоматичного управління” пов’язане зі складними математичними розрахунками та побудовою різного роду графіків (частотних характеристик, перехідних процесів і т.і.), що вимагає від студента певного досвіду. На ці операції, які, до речі, не несуть нових знань, втрачається багато часу. Полегшує розрахунки і побудову характеристик використання в навчальному процесі математичного редактора MathCAD.

Системи MathCAD традиційно займають особливе місце серед безлічі таких систем (Eureka, Mercury, MatLAB, Mathematica, Maple і ін.) і по праву можуть називатися найсучаснішими, універсальними і масовими математичними системами. Вони дозволяють виконувати як чисельні, так і аналітичні (символьні) обчислення, мають надзвичайно зручний математико-орієнтований інтерфейс і прекрасні засоби графіки.

Системи класу MathCAD надають уже звичні, потужні, зручні і наочні засоби опису алгоритмів рішення математичних задач. Викладачі і студенти вузів отримали можливість підготовки з їх допомогою наочних і простих навчальних програм у виді електронних книг з діючими в реальному часі прикладами. Новітні системи MathCAD настільки гнучкі й універсальні, що можуть надати неоціненну допомогу в рішенні математичних задач як школяреві, що осягає ази математики, так і академіку, що працював зі складними науковими проблемами. Системи мають достатні можливості для виконання найбільш масових символьних (аналітичних) обчислень і перетворень.

Винятково велика роль систем класу MathCAD в освіті. Полегшуючи рішення складних математичних задач, система знімає психологічний бар’єр при вивченні математики, роблячи його цікавим і досить простим. Грамотне застосування систем у навчальному процесі забезпечує підвищення фундаментальності математичної і технічної освіти, сприяє справжній інтеграції процесу освіти в нашій країні і найбільш розвинених західних країнах, де подібні системи застосовуються вже давно. Нові версії MathCAD

дозволяють готувати електронні уроки і книги з використанням новітніх засобів мультимедіа, включаючи гіпертекстові і гіпермедіа-посилання, вишукані графіки (у тому числі анімаційні), фрагменти відеофільмів і звуковий супровід.

Як і більшість програм, що працюють у середовищі Windows, система MathCAD успадкувала від нього багатовіконний і зручний користувальницький інтерфейс. Після завантаження системи з'являється вікно, що містить смуги прокручування для скролінга зображення і засоби керування для згортання вікна в піктограму і розгортання його на частину екрана чи на весь екран. Вікна з'являються при виборі відповідних опцій меню чи підменю, а також при виводі повідомлень про помилки. Традиційні для Windows і засоби переміщення вікон і плавної зміни їхніх розмірів.

Система MathCAD дозволяє одночасно працювати з багатьма задачами. Під кожен задачу вона відводить своє вікно. Одне з них звичайно є активним — те, з яким відбувається робота в даний момент. Стан інших документів “заморожується”, але їх можна пустити в роботу в будь-який час без нового завантаження і без виконання зв'язаної з вікном програми.

Користувальницький інтерфейс системи створений так, що користувач, який має елементарні навички роботи з Windows-додатками, може відразу почати роботу з MathCAD. Інтерфейс системи зовні дуже нагадує інтерфейс широко відомих текстових процесорів Word. Це, зокрема, дозволило трохи скоротити опис загальноприйнятих для Windows-додатків деталей роботи з ними.

### **Вікно редагування**

Відразу після запуску система готова до створення документа з необхідними користувачу обчисленнями. Перша ж кнопка панелі інструментів (із зображенням чистого листка папера) New Worksheet дозволяє почати підготовку нового документа. Відповідне йому вікно редагування одержує назва Untitled: N, де N — порядковий номер документа, що починається з цифри 1. Спочатку вікно редагування очищене.

Фактично система MathCAD інтегрує три редактори: формульний, текстовий і графічний. Для запуску формульного редактора досить установити курсор миші в будь-якому вільному місці вікна редагування і клацнути лівою клавішею. З'явиться візир у виді маленького червоного хрестика. Його можна переміщати клавішами переміщення курсору. Візир не треба плутати з курсором миші, він, як говориться, живе своїм життям і має вид жирної похилої стрілки.

Візир указує місце, з якого можна починати набір формул — обчислювальних блоків. Натискання лівої клавіші миші установлює візир на місце, зазначене вістрям стрілки курсору миші. У залежності від місця розташування візир може змінювати свою форму, до чого ви швидко звикнете.

Так, в області формул візир перетворюється в синій куточок, що вказує напрямок і місце введення.

### **Набірні панелі і шаблони**

Замість стовпового перемикача математичних знаків, застосовуваного в ранніх версіях MathCAD, в останніх версіях використовуються більш зручні переміщувані складальні панелі (в оригіналі Palletes — палітри) з такими знаками. Вони служать для виводу заготовок — шаблонів математичних знаків (цифр, знаків арифметичних операцій, матриць, знаків інтегралів, похідних і т.д.).

Кнопки виводу набірних панелей займають п'ятий зверху рядок вікна системи. Набірні панелі з'являються у вікні редагування документів при активізації відповідних піктограм — перша лінія піктограм керування системою.

Панель вибору математичних символів і операторів, як і інші панелі, може бути зміщена зі свого місця і представлена не тільки у виді лінійного, але й іншого розташування кнопок. Для переміщення панелей треба вчепитися за проміжки між кнопками панелей і, натиснувши ліву клавішу миші, перетягати їх у потрібне місце. З їхньою допомогою можна вводити в документи практично усі відомі математичні символи й оператори. На жаль, їх так багато, що вивід усіх панелей звичайно марний, тому що у вікні редагування не залишається місця для підготовки документів. Тому рекомендується

невикористовувані під час роботи панелі закривати, активізуючи кнопку в кінці їхнього титульного рядка з назвою панелі.

Панелі операторів і символів набагато зручніше стовпового перемикача в ранніх версіях системи, у якого був видний лише один стовпець з математичними знаками. Їх можна розташовувати в зручному місці вікна редагування, причому користуватися відразу декількома панелями (стовповий перемикач відкриває доступ до однієї своєї панелі).

Для збереження документа з поточним ім'ям досить натиснути кнопку **Save Worksheet** із зображенням магнітного диска. Файл документа буде записаний у той же каталог, відкіля він був викликаний. Якщо документ раніше не записувався, то з'явиться діалогове вікно для його запису.

Використовуючи кнопки швидкого завдання команд вирізки (Cut, F3 чи Ctrl+ X) і вставки (Copy, F4 чи Ctrl+ V), можна перенести виділені блоки в буфер обміну і помістити їх на нове місце, зазначене курсором миші. Це дає можливість швидкого наведення порядку з блоками.

Якщо натиснути кнопку **Paste** чи клавішу F4 (не змінюючи положення курсору миші), блоки, що зникли знову з'являться на своєму місці. Зачепивши курсором миші будь-який з виділених блоків і натиснувши її ліву клавішу, можна (утримуючи цю клавішу) перетягувати блоки з одного місця на інше.

Операція New [**Ctrl+ N**] (Створити) звичайно використовується, коли користувач має намір створити новий документ. Вона виводить на екран нове поточне вікно редагування і переводить систему в режим редагування.

### **Запис документа на диск без перейменування (Save)**

Ця операція записує файл на диск із використанням його поточного імені і з урахуванням усіх змін, що вводилися в документ у ході його редагування, доробки чи доповнення. Така операція дає швидкий спосіб запису файлу на диск без пошуку його місця у файловій структурі і без зміни імені.

## Лабораторна робота №1

### Дослідження характеристик підсилювальної ланки

Мета роботи: навчитися досліджувати динамічні і статичні характеристики підсилювальної ланки.

#### Короткі теоретичні відомості.

При аналізі динамічних властивостей САР вводять у розгляд поняття типових ланок, як деяких найпростіших частин динамічного елемента.

Різноманітні елементи систем регулювання, що мають різне конструктивне виконання і функціональне призначення, описуються однаковими диференціальними рівняннями і, отже, мають однакові передаточні функції. Коефіцієнти, що входять у вирази для передаточних функцій, безпосередньо зв'язані з конструктивними параметрами елементів систем регулювання.

Так як ланки мають різні передаточні функції, то вони розрізняються по виду перехідного процесу, що виникає при зміні вхідної величини. Для порівняння ланок прийнято розглядати перехідний процес при стрибкоподібній зміні вхідної величини на одиницю і при нульових початкових умовах (ланка в спокої), тобто при одиничному ступінчастому діянні. Функцію, що визначає зміну величини на виході ланки при цих умовах називають перехідною функцією ланки. Вона може бути отримана експериментально шляхом запису зміни вихідної величини при стрибкоподібній зміні вхідної. Цю функцію іноді називають кривої розгону. Частотні характеристики ланок можуть бути отримані з диференціальних рівнянь (передаточних функцій) ланки, а також визначені експериментально.

Можна виділити сім типових ланок: *аперіодична, коливальна, інтегруюча, підсилювальна, форсуюча 1-го порядку, форсуюча 2-го порядку і запізнювальна.*

Більшість ланок САР володіє напрямленою (детектуючою) властивістю (властивістю передачі сигналу в одному напрямку – зі входу до виходу), тому передаточні функції послідовного з'єднання таких елементів можуть бути отримані в результаті перемноження передаточних функцій кожної з цих ланок.

У загальному вигляді вираз для передаточної функції можна записати в наступному вигляді:

$$W(p) = \frac{\prod_{i=1}^{\chi} k_i \prod_{i=1}^{\mu} (\tau_i p + 1) \prod_{i=1}^{\eta} (\tau_{di}^2 p^2 + 2\xi_{di} \tau_{di} p + 1)}{p^{\nu} \prod_{i=1}^{\rho} (T_i p + 1) \prod_{i=1}^{\sigma} (T_{ki}^2 p^2 + 2\xi_{ki} T_{ki} p + 1)} e^{-\tau_0 p} \quad (1.1)$$

де  $\Pi$  – знак добутку.

**Підсилювальна (пропорційна) ланка** відтворює без спотворення і запізнювання, але зі зміною масштабу (зі збільшенням чи зменшенням) вхідну величину.

Передаточна функція підсилювальної ланки:

$$W(p) = k, \quad (1.2)$$

а диференціальне рівняння:

$$x_{\text{вих}}(t) = k \cdot x_{\text{вх}}(t). \quad (1.3)$$

Для підсилювальних ланок залежність між вихідною і вхідною величинами описується співвідношенням  $x_2 = kx_1$ . При подачі на вхід підсилювальної ланки ступінчастого впливу  $x_1(t)$  на його виході відбувається миттєва зміна сигналу  $x_2(t)$  (рис. 1.1).

З рівняння (1.3) випливає, що при вхідному сигналі  $X_{\text{вх}} = A_{\text{вх}} \sin(\omega t)$  вихідний сигнал  $X_{\text{вих}} = A_{\text{вих}} \sin(\omega t)$ , де  $A_{\text{вих}}$  - амплітуда вихідного сигналу.

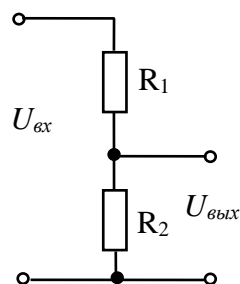


Рис. 1.1. Принципова схема пропорційної ланки(дільник напруги).

Отже, у пропорційній ланці вихідний і вхідний сигнали співпадають по фазі. Крім того, амплітуда вихідного сигналу в  $k$  раз відрізняється від амплітуди вхідного. Отже, фазова частотна характеристика пропорційної ланки:

$$\varphi(\omega) = 0. \quad (1.4)$$

АЧХ визначається виразом

$$A(\omega) = k \quad (1.5)$$

і зображується крапкою на дійсній осі комплексної площини.

Частотні характеристики пропорційної ланки не залежать від частоти.

Логарифмічна фазова частотна характеристика  $\varphi(\omega)$  як і звичайна дорівнює нулю. А от логарифмічна амплітудна частотна характеристика (ЛАЧХ) має особливості. Її рівняння:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg k. \quad (1.6)$$

Отже, ЛАЧХ являє собою пряму, проведену на рівні  $20 \lg k$ . При підсиленні сигналу ( $k > 1$ ) ЛАЧХ розташована вище осі частот, а при послабленні ( $k < 1$ ) - нижче осі частот. Якщо  $k = 1$ , то  $L(\omega) = 0$ , тобто ЛАЧХ проходить по осі частот.

Перехідна функція  $h(t)$  (рис. 1.2.) підсилювальної ланки для випадку, коли  $x_1$  являє собою одиничну ступінчасту функцію  $x_1(t) = 1$ , визначається виразом

$$h(t) = k. \quad (1.7)$$

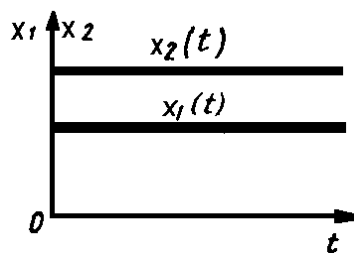


Рис. 1.2. Графіки перехідної функції і вхідного ступінчастого впливу підсилювальної ланки.

### Завдання:

Дослідити наступні характеристики підсилювальної ланки :

- амплітудно-фазову частотну (АФЧХ);

- амплітудну частотну (АЧХ);
- фазову частотну (ФЧХ);
- логарифмічну амплітудну частотну (ЛАЧХ);
- перехідну функцію  $h(t)$ .

Побудувати графіки і проаналізувати їх.

Таблиця 1.1. Варіанти завдань.

Варіант	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$k$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140

Варіант	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
$k$	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню “Пуск” (“Start”) → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції досліджуваної ланки.
10. Виділити дійсну і уявну частини передаточної функції досліджуваної ланки, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
11. Побудувати характеристики, перераховані у завданні, вирази яких описані вище (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).
12. Проаналізувати отримані графіки, зокрема вплив на їх вигляд зміни коефіцієнта підсилення.

13. Зберегти отримані результати в окремий файл.

14. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Які властивості САР описують, використовуючи поняття типових ланок?
2. Перерахувати відомі динамічні ланки.
3. Дати означення детектуючої властивості ланок САР.
4. Дати означення підсилювальної ланки.
5. Записати диференційне рівняння та передаточну функцію підсилювальної ланки.
6. Як залежать від частоти частотні характеристики пропорційної ланки?

## **Лабораторна робота №2**

### **Дослідження характеристик аперіодичної ланки 1-го порядку**

Мета роботи: навчитися досліджувати динамічні і статичні характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку.

### **Короткі теоретичні відомості.**

Аперіодичною ланкою в системах автоматики можна замінити елементи, процеси в яких пов'язані з накопиченням або витратою речовини (енергії). Така ланка повинна мати накопичувальний елемент, який може накопичувати або витрачати речовину (енергію), і опір, що перешкоджає витраті або накопиченню.

Аперіодична (інерційна) ланка має передаточну функцію виду

$$W(p) = k / (T \cdot p + 1), \quad (2.1)$$

де  $k$  – передаточний коефіцієнт;

$T$  – стала часу.

Приклади пристроїв, які можна розглядати як аперіодичні ланки, приведені на рис. 2.1. На рис. 2.1, а вхідною величиною є напруга  $U_1$  на вході RC-контур, вихідною - напруга  $U_2$  на його виході; на рис. 2.1, б вхідною величиною є тиск повітря в магістралі  $P_1$ , вихідною - тиск повітря в резервуарі  $P_2$ ; на рис. 2.1, в вхідною величиною є температура рідини  $\tau_1$ , вихідною - температура тіла, опущеного в рідину  $\tau_2$ .

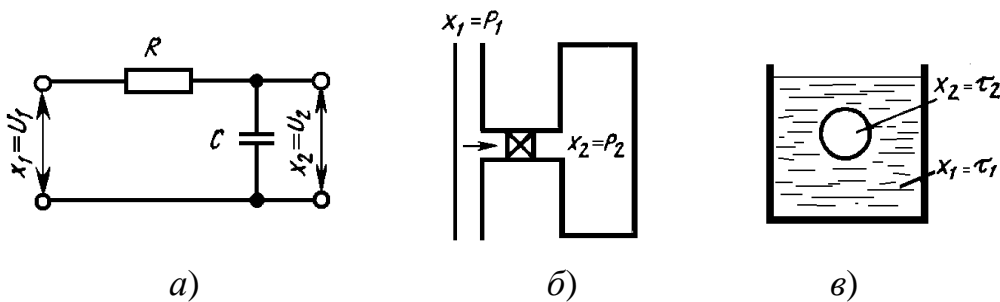


Рис. 2.1. Приклади аперіодичних ланок.

Диференційне рівняння аперіодичної ланки має вид

$$T \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k \cdot x_1, \quad (2.2)$$

де  $x_1$  – величина на вході;  $x_2$  – величина на виході.

Представимо передаточну функцію аперіодичної ланки в такому вигляді

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k \cdot (1 - Tj\omega)}{(1 + Tj\omega) \cdot (1 - Tj\omega)}, \quad (2.3)$$

Виділимо з виразу (2.3) дійсну і уявну частини і тим самим знайдемо дійсну

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} \quad (2.4)$$

і уявну

$$Q(\omega) = -\frac{k \cdot \omega \cdot T}{1 + \omega^2 T^2} \quad (2.5)$$

частотні характеристики.

Графік АФЧХ аперіодичної ланки 1-го порядку приведений на рис. 2.2.

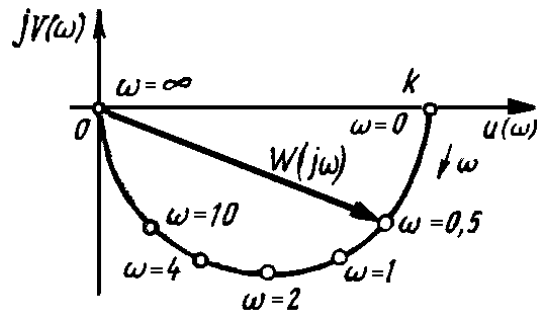


Рис. 2.2. АФЧХ аперіодичної ланки 1-го порядку.

Криву, описувану кінцем вектора передаточної функції  $W(j\omega)$  на комплексній площині [годограф вектора  $W(j\omega)$ ] при зміні частоти від 0 до  $+\infty$ , називають *амплітудно-фазовою частотною характеристикою АФЧХ*. АФЧХ аперіодичної ланки при позитивних значеннях частоти ( $\omega > 0$ ) являє собою півколо, діаметр якого дорівнює передаточному коефіцієнту  $k$ . При частотах  $\omega$ , що прагнуть до нескінченності, вихідна величина відстає від вхідної на  $90^\circ$ .

Частотні характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку можуть бути отримані з виразу для передаточної функції (2.1) шляхом заміни оператора Лапласа  $p$  на  $j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-\arctg(T\omega)} \quad (2.6)$$

Таким чином АЧХ і ФЧХ аперіодичної ланки визначаються виразами:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad (2.7)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = -\arctg(\omega \cdot T). \quad (2.8)$$

З аналізу АЧХ  $A(\omega)$  випливає, що аперіодична ланка має властивість фільтра: добре пропускає сигнали низьких частот і погано – високих, оскільки  $A(\omega)$  з ростом частоти убуває, отже убуває і амплітуда вихідного сигналу.

З аналізу ФЧХ випливає, що вихідні коливання відстають по фазі від вхідних. Це відставання змінюється в межах від  $0^\circ$  до  $-90^\circ$ .

В інженерній практиці точну ЛАЧХ заміняють ламаною, утвореною двома асимптотами, що сполучаються на спрягаючій частоті  $\omega_a = \frac{1}{T}$ . В області високих частот ( $\omega > \omega_a$ ) асимптота має нахил  $-20$  дБ/дек. В порівнянні зі звичайними логарифмічні частотні характеристики аперіодичної ланки мають ряд істотних переваг. При зміні параметрів ланки  $k$  і  $T$  звичайні характеристики деформуються, а логарифмічні - ні, вони тільки переміщуються уздовж осей координат. Крім того, асимптотична ЛАЧХ являє собою ламану, котру дуже легко побудувати.

ЛАЧХ ланки будується по формулі

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(A(\omega)), \quad (2.9)$$

де  $A(\omega)$  - амплітудна частотна характеристика аперіодичної ланки 1-го порядку.

Перехідна функція  $h(t)$  аперіодичної ланки для випадку, коли  $x_1$  являє собою одиничну ступінчасту функцію  $x_1(t) = [1]$ , визначається виразом

$$h(t) = k \cdot (1 - e^{-t/T}). \quad (2.10)$$

Графік цієї функції зображений на рис. 2.3, *a* у виді кривої 1.

Нестійка аперіодична ланка 1-го порядку має передаточну функцію

$$W(p) = k / (T \cdot p - 1) \quad (2.11)$$

і перехідну функцію

$$h(t) = k(e^{t/T} - 1). \quad (2.12)$$

Графік цієї функції зображений на рис. 2.3, *a*, крива 2.

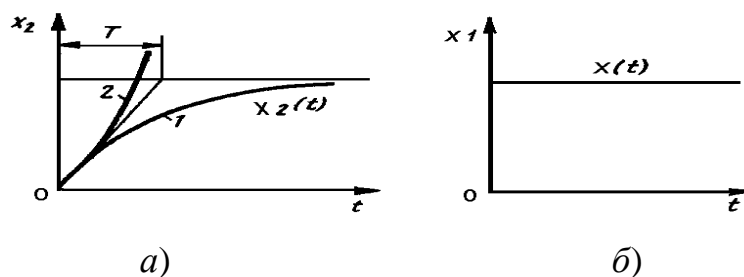


Рис. 2.3. Аперіодична ланка:

*a* – графіки перехідних функцій ланок: 1 – стійкої; 2 – нестійкої;  
*б* – вхідний ступінчастий вплив.

### Завдання:

Дослідити наступні характеристики аперіодичної ланки 1-го порядку (попередньо вивести формули для побудови):

- амплітудно-фазову частотну (АФЧХ);
- амплітудну частотну (АЧХ);
- фазову частотну (ФЧХ);
- логарифмічну амплітудну частотну (ЛАЧХ);
- перехідну функцію  $h(t)$ .

Побудувати графіки і проаналізувати їх.

Таблиця 2.1. Варіанти завдань.

Варіант	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$k$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$T, c$	1	2	1,5	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5

Варіант	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
$k$	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
$T, c$	6	8	10	6,5	8,5	3,2	4,8	5,6	8,4	9,8

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійну часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції досліджуваної ланки.

10. Виділити дійсну і уявну частини передаточної функції досліджуваної ланки, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .

11. Побудувати характеристики, перераховані у завданні, вирази яких описані вище (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).

12. Проаналізувати отримані графіки, зокрема вплив на їх вигляд зміни коефіцієнта підсилення та постійної часу.

13. Зберегти отримані результати в окремий файл.

14. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Які процеси протікають в елементах САР, які можна описати з допомогою аперіодичної динамічної ланки?

2. Які елементи повинна містити частина САР, що описується з допомогою аперіодичної динамічної ланки?

3. Записати диференціальне рівняння та передаточну функцію аперіодичної динамічної ланки першого порядку.

4. Дати означення амплітудно-фазової частотної характеристики (АФЧХ).

5. Записати вирази амплітудної частотної (АЧХ) та фазової частотної (ФЧХ) характеристик аперіодичної динамічної ланки.

6. Записати вираз для ЛАЧХ аперіодичної динамічної ланки першого порядку.

7. Який типовий сигнал подається на вхід динамічної ланки для отримання графіка перехідного процесу?

## Лабораторна робота №3

### Дослідження характеристик коливальної ланки

Мета роботи: навчитися досліджувати динамічні і статичні характеристики коливальної ланки.

#### Короткі теоретичні відомості.

**Коливальна ланка** – це штучно виділена частина системи автоматичного регулювання, у двох накопичувальних елементах якої акумулюється речовина або енергія з наступним взаємним обміном цими запасами.

Приклади коливальних ланок приведені на рис. 3.1 а, б.

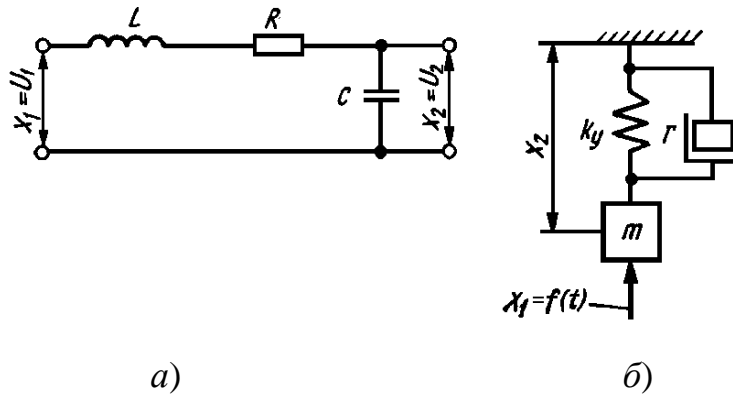


Рис. 3.1. Приклади коливальних ланок:

а – електрична система:

$L$  – котушка індуктивності;  $R$  – резистор;  $C$  – конденсатор;

б – механічна система:

$m$  – маса;  $K_y$  – коефіцієнт пружності пружини;  $r$  – коефіцієнт демпфірування.

Динамічні властивості коливальної ланки описуються диференціальним рівнянням:

$$T_2^2 \frac{d^2 x_{\text{вих}}}{dt^2} + T_1 \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}} = k \cdot x_{\text{вх}}, \quad (3.1)$$

де  $T_1$  і  $T_2$  – сталі часу, що визначаються параметрами елементів ланки;

$k$  – коефіцієнт підсилення.

Характеристичне рівняння лінійного диференційного рівняння (3.1) має вигляд

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0 \quad (3.2)$$

Корені цього рівняння

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \frac{1}{2T_2^2} \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2} \quad (3.3)$$

Якщо  $T_1^2 - 4T_2^2 < 0$ , то корені характеристичного рівняння комплексні і ланка коливальна:

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm j \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2},$$

або

$$p_{1,2} = -\omega_0 \pm j\omega, \quad (3.4)$$

де  $\omega_0$  – коефіцієнт затухання, що дорівнює  $\frac{T_1}{2T_2^2}$ ;

$$\omega = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2} \text{ – колова частота коливань.}$$

Якщо  $T_1^2 - 4T_2^2 > 0$ , то корені характеристичного рівняння дійсні і перехідний процес коливальним не буде. Така ланка називається аперіодичною другого порядку. Прикладом реально існуючої аперіодичної ланки другого порядку може бути система з двох з'єднаних між собою місткостей з рідиною. Перехідний процес в аперіодичній ланці другого порядку описується лінійним диференційним рівнянням виду

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x_{\text{вих}}}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx_{\text{вих}}}{dt} + x_{\text{вих}} = k \cdot x_{\text{вх}}, \quad (3.5)$$

де  $T_1, T_2, k$  – сталі.

У системах аперіодична ланка другого порядку може бути представлена двома простими аперіодичними ланками, з'єднаними послідовно.

Якщо коефіцієнт  $T_1 = 0$ , то  $\omega_0 = 0$  і  $\omega = 1/T_2 = \omega_k$ . У цьому випадку коливання відбуваються з частотою власних коливань ланки  $\omega_k$  і не затухають,

тобто ланка не розсіює енергію. Така ланка називається консервативною.

Передаточна функція ланки має вид

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + 1} \quad (3.6)$$

Коливальна ланка має передаточну функцію виду

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad (3.7)$$

Нестійкі коливальні ланки мають передаточні функції виду

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 - T_1 p + 1} \quad (3.8)$$

або

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p - 1} \quad (3.9)$$

АЧХ і ФЧХ коливальної ланки визначаються виразами:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2(T_1^2 - 2T_2^2) + \omega^4 T_2^4}}, \quad (3.10)$$

$$\phi(\omega) = -\arctg \frac{\omega \cdot T_1}{1 - \omega^2 T_2^2}. \quad (3.11)$$

Перехідна функція стійкої коливальної ланки визначається за виразом:

$$h(t) = k \cdot \left[ 1 - e^{-\omega_0 t} \left( \cos \omega t + \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t \right) \right]. \quad (3.12)$$

Графік перехідної функції у випадку стійкої коливальної ланки зображений на рис. 3.2. Слід зазначити, що коливання виникають лише в тому випадку, якщо корені характеристичного рівняння є комплексними величинами.

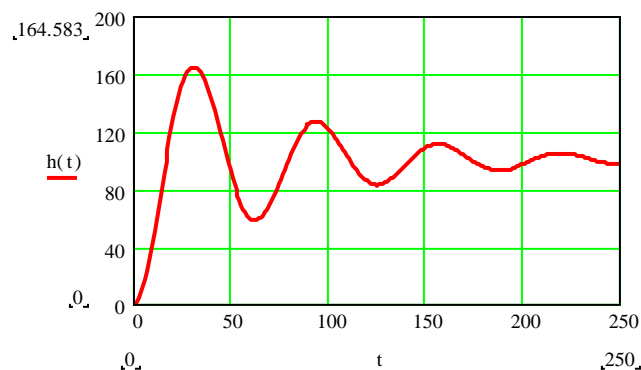


Рис. 3.2. Графік перехідної функції стійкої коливальної ланки.

АЧХ і ФЧХ аперіодичної ланки другого порядку визначаються виразами:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T_{21}^2 \omega^2 - 1)^2 + \omega^2 T_{12}^2}}, \quad (3.13)$$

$$\phi(\omega) = -\arctg \frac{\omega \cdot T_{12}}{1 - \omega^2 T_{21}^2}, \quad (3.14)$$

де  $T_1 T_2 = T_{21}^2$ ;  $T_1 + T_2 = T_{12}$

Перехідна функція стійкої аперіодичної ланки другого порядку визначається за виразом:

$$h(t) = k \cdot \left[ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left( T_1 e^{\frac{1}{T_1} t} - T_2 e^{\frac{1}{T_2} t} \right) \right]. \quad (3.15)$$

АФЧХ ланки показана на рис. 3.3. Вона починається на дійсній осі в точці  $k$  при  $\omega = 0$ . При частоті  $\omega \rightarrow \infty$  крива наближається до початку координат і дотикається до дійсної осі. Вихідна величина на частоті, близькій до нескінченності, відстає від вхідної на  $180^\circ$ .

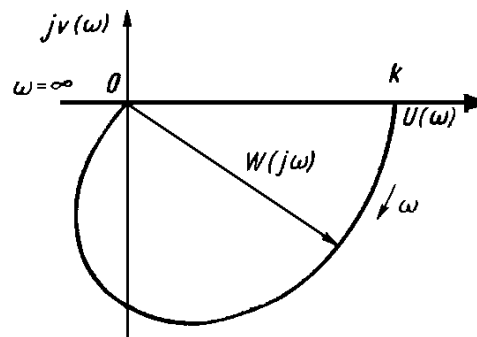


Рис. 3.3. АФЧХ коливальної ланки.

### Завдання:

Дослідити наступні характеристики коливальної ланки:

- амплітудно-фазову частотну (АФЧХ);
- амплітудну частотну (АЧХ);
- фазову частотну (ФЧХ);
- логарифмічну амплітудну частотну (ЛАЧХ);

- перехідну функцію  $h(t)$ .

Побудувати графіки і проаналізувати їх.

Таблиця 3.1. Варіанти завдань.

Варіант	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$k$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$T_1, \text{с}$	1	2	1,5	2,5	3	3,5	4	4,5	2	5,5
$T_2, \text{с}$	6	8	10	6,5	8,5	6,2	7,8	8,6	8,4	9,8

Варіант	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
$k$	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
$T_1, \text{с}$	5	2	1,5	2,5	3,3	3,5	5	5,5	3	5,5
$T_2, \text{с}$	3	6	10	6,5	8,5	3,2	8,8	10,6	8,4	10,2

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійні часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,001..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції досліджуваної ланки.
10. Виділити дійсну і уявну частини передаточної функції досліджуваної ланки, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
11. Побудувати характеристики, перераховані у завданні, вирази яких описані вище (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).

12. Проаналізувати отримані графіки, зокрема вплив на їх вигляд зміни коефіцієнта підсилення та постійних часу.

13. Зберегти отримані результати в окремий файл.

14. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Дати означення коливальної динамічної ланки.
2. Записати диференціальне рівняння, передаточну функцію та характеристичне рівняння коливальної динамічної ланки.
3. Які можуть бути варіанти динамічних ланок, в залежності від коренів характеристичного рівняння?
4. Записати передаточні функції стійкої і нестійкої коливальних динамічних ланок.

### **Лабораторна робота №4**

#### **Дослідження характеристик інтегруючої ланки**

Мета роботи: навчитися досліджувати динамічні і статичні характеристики інтегруючої ланки.

#### **Короткі теоретичні відомості.**

**Інтегруючою ланкою** в системах автоматичного регулювання замінюють елементи, в яких швидкість зміни вихідної величини пропорційна вхідній величині. Введення інтегруючої ланки в склад САР підвищує точність системи в усталеному режимі і перетворює статичну систему у астатичну. Інтегруюча ланка має передаточну функцію виду

$$W(p) = k / p . \quad (4.1)$$

Приклади інтегруючих ланок приведені нижче. На рис. 4.1, а зображена схема електродвигуна постійного струму, в якій вхідною величиною є керуюча напруга  $x_1 = U_y$ , а вихідною – кут повороту якоря  $x_2 = \theta$ . На рис. 4.1, б у резервуар надходить потік рідини  $x_1 = V$ ; вихідною величиною є висота рівня  $x_2 = h$ .

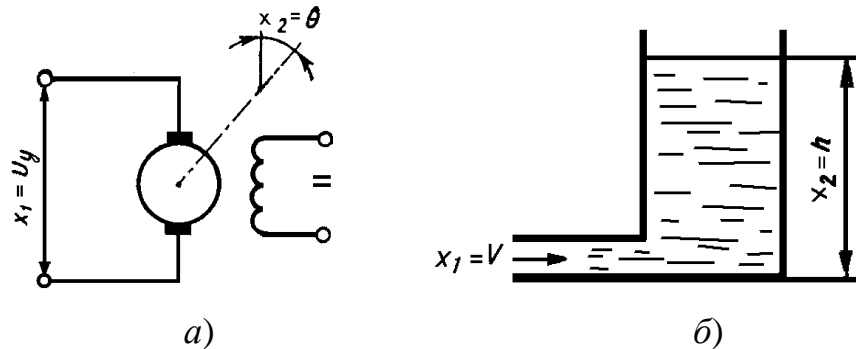


Рис. 4.1. Приклади інтегруючих ланок.

Диференціальне рівняння інтегруючої ланки має вид

$$\frac{dx_2}{dt} = k \cdot x_1, \quad (4.2)$$

де  $k$  – передаточний коефіцієнт, що представляє відношення швидкості зміни вихідної величини до вхідної величини.

Частотні характеристики інтегруючої ланки визначають з виразу

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}. \quad (4.3)$$

При зміні частоти  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  (рис. 4.2) кінець вектора  $W(j\omega)$  рухається по від’ємній частині уявної осі від  $-\infty$  до 0. Інтегруюча ланка створює відставання вихідної величини від вхідної на  $90^\circ$  на всіх частотах. Амплітуда вихідної величини зменшується зі зростанням частоти. Відповідно можна записати вирази АЧХ і ФЧХ інтегруючої ланки:

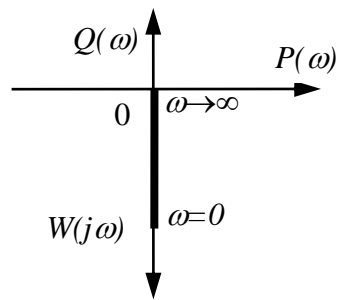


Рис. 4.2. АФЧХ інтегруючої ланки.

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}, \quad \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad (4.4), (4.5)$$

Перехідна функція інтегруючої ланки визначається виразом

$$h(t) = k \cdot t \quad (4.6)$$

Графік перехідної функції зображений на рис. 4.3.

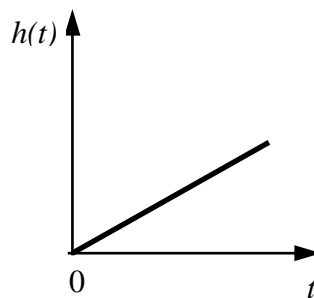


Рис. 4.3. Графік перехідної функції інтегруючого ланки.

### Завдання:

Дослідити наступні характеристики інтегруючої ланки :

- амплітудно-фазову частотну (АФЧХ);
- амплітудну частотну (АЧХ);
- фазову частотну (ФЧХ);
- логарифмічну амплітудну частотну (ЛАЧХ);
- перехідну функцію  $h(t)$ .

Побудувати графіки і проаналізувати їх.

Таблиця 4.1. Варіанти завдань.

Варіант	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
<i>k</i>	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Варіант	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
<i>k</i>	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню “Пуск” (“Start”) → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції досліджуваної ланки.
10. Виділити дійсну і уявну частини передаточної функції досліджуваної ланки, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
11. Побудувати характеристики, перераховані у завданні, вирази яких описані вище (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).
12. Проаналізувати отримані графіки, зокрема вплив на їх вигляд зміни коефіцієнта підсилення.
13. Зберегти отримані результати в окремий файл.
14. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### Контрольні запитання.

1. Дати означення інтегруючої динамічної ланки.
2. Записати диференційне рівняння та передаточну функцію інтегруючої динамічної ланки.
3. Записати вирази АЧХ та ФЧХ інтегруючої динамічної ланки.
4. Як впливає на точність системи в усталеному режимі введення в її склад інтегруючої динамічної ланки?
5. Як підвищити точність системи в усталеному режимі?

### Лабораторна робота №5

#### Дослідження характеристик форсуючої ланки 1-го порядку

Мета роботи: навчитися досліджувати динамічні і статичні характеристики форсуючої ланки 1-го порядку.

#### Короткі теоретичні відомості.

**Форсуюча ланка 1-го порядку** має передаточну функцію виду

$$W(p) = k \cdot (\tau \cdot p + 1), \quad (5.1)$$

де  $k$  – передаточний коефіцієнт ланки;

$\tau$  – постійна часу;

Вихідна величина цієї ланки визначається не тільки поточним значенням, але і швидкістю зміни вхідної величини (похідною від вхідної величини).

Приклади пристроїв, які можна розглядати як форсуючі ланки першого порядку, приведені нижче. На рис. 5.1, а зображена схема тахогенератора постійного струму. Вхідною величиною є кутова швидкість вала

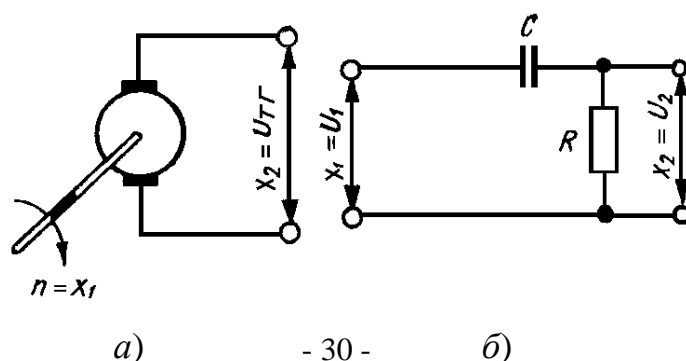


Рис. 5.1. Приклади форсуючих ланок 1-го порядку.

тахогенератора  $n = d\theta/dt$ , а вихідною – напруга  $x_2 = U_{TP}$ , пропорційна цій швидкості. На рис. 5.1, б зображена схема форсуючого *RC*-контуру.

Диференціальне рівняння цієї ланки

$$x_2 = k \cdot \left( \tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 \right). \quad (5.2)$$

Частотні характеристики форсуючої ланки першого порядку визначають з виразу

$$W(j\omega) = k \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1} \times e^{j \cdot \arctg(\tau\omega)}. \quad (5.3)$$

Модуль цієї функції є амплітудно-частотною характеристикою

$$A(\omega) = k \sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}. \quad (5.4)$$

Аргумент представляє собою фазово-частотну характеристику

$$\phi(\omega) = \arctg(\tau\omega). \quad (5.5)$$

АФЧХ форсуючої ланки 1-го порядку зображена на рис. 5.2. АФЧХ являє собою пряму, паралельну уявній осі. Вона починається на дійсній осі в точці  $k$  при частоті  $\omega = 0$ .

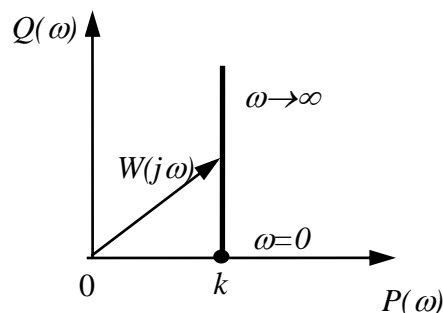


Рис. 5.2. АФЧХ форсуючої ланки 1-го порядку.

Перехідна функція форсуючої ланки 1-го порядку визначається виразом

$$h(t) = k \cdot (\tau \cdot \delta(t) + 1), \quad (5.6)$$

де  $\delta(t)$ -дельта-функція, що описує імпульс безкінечно великої амплітуди і безкінечно малої тривалості.

Графік цієї перехідної функції і приведений на рис. 5.3.

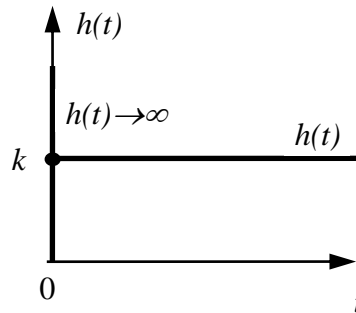


Рис. 5.3. Графік перехідної функції форсуючої ланки 1-го порядку.

При стрибкоподібній зміні вхідної величини на виході форсуючої ланки, одержимо імпульс з нескінченно великою амплітудою, що відповідає нескінченно великій швидкості зміни вхідної величини в момент стрибка. Після цього вихідна величина приймає постійне стає значення.

Форсуюча ланка створює випередження вихідної величини по фазі. При частоті  $\omega \rightarrow \infty$  зсув по фазі прямує до  $90^0$ . Наявність форсуючої ланки 1-го порядку в основному в контурі системи регулювання означає введення похідної в закон регулювання, її введення використовується для покращення динамічних властивостей системи.

### Завдання:

Дослідити наступні характеристики форсуючої ланки 1-го порядку:

- амплітудно-фазову частотну (АФЧХ);
- амплітудну частотну (АЧХ);
- фазову частотну (ФЧХ);
- логарифмічну амплітудну частотну (ЛАЧХ);
- перехідну функцію  $h(t)$ .

Побудувати графіки і проаналізувати їх.

Таблиця 5.1. Варіанти завдань.

Варіант	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$k$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$T, c$	1	2	1,5	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5

Варіант	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
$k$	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
$T, c$	6	8	10	6,5	8,5	3,2	4,8	5,6	8,4	9,8

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню “Пуск” (“Start”) → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійну часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції досліджуваної ланки.
10. Виділити дійсну і уявну частини передаточної функції досліджуваної ланки, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
11. Задати значення дельта-функції  $\delta(t) = 0$  (для зручності побудови графіка перехідної функції  $h(t)$  з допомогою математичного редактора MathCAD).
12. Побудувати характеристики, перераховані у завданні, вирази яких описані вище (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).
13. Проаналізувати отримані графіки, зокрема вплив на їх вигляд зміни коефіцієнта підсилення та постійної часу.
14. Зберегти отримані результати в окремий файл.
15. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту,

графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Що характерно для співвідношення вхідної і вихідної величин форсуючої динамічної ланки першого порядку?
2. Записати диференційне рівняння та передаточну функцію форсуючої динамічної ланки першого порядку.
3. Записати вирази АЧХ та ФЧХ форсуючої динамічної ланки першого порядку.
4. Який типовий сигнал подається на вхід динамічної ланки для отримання графіка перехідного процесу?
5. Графік якого сигналу описує  $\delta(t)$ -дельта-функція?
6. Як пояснити наявність імпульсу безкінечно великої амплітуди та безкінечно малої тривалості на виході форсуючої динамічної ланки першого порядку при стрибкоподібній зміні вхідної величини?
7. Яке співвідношення між фазами вхідного і вихідного сигналів форсуючої динамічної ланки першого порядку?
8. Як впливає на систему введення в її головний контур форсуючої динамічної ланки першого порядку?

### **Лабораторна робота №6**

#### **Дослідження характеристик форсуючої ланки 2-го порядку**

Мета роботи: навчитися досліджувати динамічні і статичні характеристики форсуючої ланки 2-го порядку.

#### **Короткі теоретичні відомості.**

**Форсуюча ланка 2-го порядку** має передаточну функцію виду

$$W(p) = k \cdot (\tau^2 p^2 + 2\xi \cdot \tau \cdot p + 1) \quad (6.1)$$

Передбачається, що вираз (6.1) не можна розкласти на прості співмножники, тобто не можна представити у виді двох двочленів першого ступеня. Диференціальне рівняння такої ланки має вид

$$x_2 = k \cdot \left( \tau^2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\xi \cdot \tau \frac{dx_1}{dt} + x_1 \right) \quad (6.2)$$

Тут вихідна величина  $x_2$  визначається не тільки вхідною величиною  $x_1$ , але також першою і другою похідними від неї, тобто швидкістю та прискоренням зміни вхідної величини. Ланка характеризується трьома параметрами: передаточним коефіцієнтом  $k$ , постійною часу  $\tau_d$  і параметром  $\xi_d$ .

Частотні характеристики ідеальної форсуючої ланки 2-го порядку визначаються з виразу

$$W(j\omega) = k \sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi \cdot \tau \cdot \omega)^2} e^{j \cdot \arctg\left(\frac{2\xi \cdot \tau \cdot \omega}{1 - \tau^2 \omega^2}\right)} \quad (6.3)$$

Модуль цієї функції є амплітудно-частотною характеристикою форсуючої ланки 2-го порядку:

$$A(\omega) = k \cdot \sqrt{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi \cdot \tau \cdot \omega)^2} \quad (6.4)$$

Аргумент являє собою фазово-частотну характеристику ланки:

$$\phi(\omega) = \arctg\left(\frac{2\xi \cdot \tau \cdot \omega}{1 - \omega^2 \tau^2}\right) \quad (6.5)$$

АФЧХ ланки являє собою параболу, що починається з точки  $k$  (рис. 6.1).

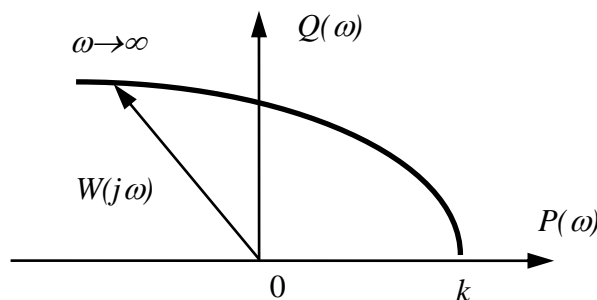


Рис. 6.1. АФЧХ форсуючої ланки 2-го порядку.

Форсууюча ланка 2-го порядку на частотах, що прагнуть до нескінченості, вносить випередження по фазі, що прагне до  $180^\circ$ . Наявність форсууючої ланки другого порядку в основному контурі САР означає введення першої і другої похідних у закон регулювання, її введення застосовується для поліпшення динамічних властивостей системи.

Перехідна функція форсууючої ланки 2-го порядку визначається виразом

$$h(t) = k \cdot \left( \tau^2 \frac{d\delta(t)}{dt} + 2\xi \cdot \tau \cdot \delta(t) + 1 \right) \quad (6.6)$$

де  $\delta(t)$ -дельта-функція, що описує імпульс безкінечно великої амплітуди і безкінечно малої тривалості, тобто  $\delta(t) = \infty$  при  $t = 0$  та  $\delta(t) = 0$  при  $t > 0$ .

Графік перехідної функції зображений на рис. 6.2. При стрибкоподібній зміні вхідної величини на виході з'являються імпульси нескінченно великої амплітуди, що відповідають нескінченно великій швидкості зміни вхідної величини і її похідної в момент стрибка. Після цього вихідна величина приймає постійне значення.

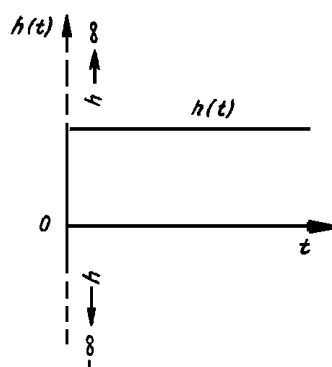


Рис. 6.2. Графік перехідної функції форсууючої ланки 2-го порядку.

$$T = \sqrt{T_1 \cdot T_2} ; \xi = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 \cdot T_2}} \quad (6.7)$$

### Завдання:

Дослідити наступні характеристики форсууючої ланки 2-го порядку:

- амплітудно-фазову частотну (АФЧХ);

- амплітудну частотну (АЧХ);
- фазову частотну (ФЧХ);
- логарифмічну амплітудну частотну (ЛАЧХ);
- перехідну функцію  $h(t)$ .

Побудувати графіки і проаналізувати їх.

Таблиця 6.1. Варіанти завдань.

Варіант	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$k$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$T_1, c$	1	2	1,5	2,5	3	3,5	4	4,5	2	5,5
$T_2, c$	6	8	10	6,5	8,5	6,2	7,8	8,6	8,4	9,8

Варіант	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
$k$	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
$T_1, c$	5	2	1,5	2,5	3,3	3,5	5	5,5	3	5,5
$T_2, c$	3	6	10	6,5	8,5	3,2	8,8	10,6	8,4	10,2

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню “Пуск” (“Start”) → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійну часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції досліджуваної ланки.
10. Виділити дійсну і уявну частини передаточної функції досліджуваної ланки, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .

11. Задати значення дельта-функції  $\delta(t) = 0$  (для зручності побудови графіка перехідної функції  $h(t)$  з допомогою математичного редактора MathCAD).

12. Побудувати характеристики, перераховані у завданні, вирази яких описані вище (в MathCAD View  $\rightarrow$  Toolbars  $\rightarrow$  Math  $\rightarrow$  Graph Toolbar  $\rightarrow$  X-Y Plot).

13. Проаналізувати отримані графіки, зокрема вплив на їх вигляд зміни коефіцієнта підсилення та постійної часу.

14. Зберегти отримані результати в окремий файл.

15. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Що характерно для співвідношення вхідної і вихідної величин форсуючої динамічної ланки другого порядку?

2. Записати диференційне рівняння та передаточну функцію форсуючої динамічної ланки другого порядку.

3. Дати означення АФЧХ.

4. Записати вирази АЧХ та ФЧХ форсуючої динамічної ланки другого порядку.

5. Який типовий сигнал подається на вхід динамічної ланки для отримання графіка перехідного процесу?

6. Яке співвідношення між фазами вхідного і вихідного сигналів форсуючої динамічної ланки другого порядку?

7. Як впливає на систему введення в її головний контур форсуючої динамічної ланки другого порядку?

8. Як пояснити наявність імпульсів безкінечно великої амплітуди та безкінечно малої тривалості на виході форсуючої динамічної ланки другого порядку при стрибкоподібній зміні вхідної величини?

## Лабораторна робота №7

### Дослідження характеристик запізнілої ланки

Мета роботи: навчитися досліджувати динамічні і статичні характеристики запізнілої ланки.

#### Короткі теоретичні відомості.

**Запізнілою** називається ланка, в якій вихідна величина відтворює вхідну, але з деяким постійним відставанням у часі. Між вхідною і вихідною величинами запізнілої ланки є залежність

$$x_{\text{вих}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau), \quad (7.1)$$

де  $\tau$  – час запізнення, що визначається як відношення довжини об'єкта до швидкості переміщення середовища. Як правило, вхідна величина передається на вихід без спотворень, але з деяким запізненням. Таке запізнення є дуже важливим параметром елемента і його треба враховувати при дослідженні динаміки системи автоматичного регулювання.

Запізніла ланка має передаточну функцію

$$W(p) = e^{-\tau \cdot p}, \quad (7.2)$$

і частотну характеристику

$$W(j\omega) = e^{-\tau \cdot j \cdot \omega} = \cos \tau\omega - j \sin \tau\omega, \quad (7.3)$$

Приклади систем із запізнюванням приведені нижче. На рис. 7.1, а зображена схема САР концентрації суміші А і В. Датчик Д вимірює склад суміші і по закінченні часу  $\tau = l/V$  в залежності від складу суміші регулюючий пристрій Р змінює положення заслінки, відкриваючи чи закриваючи її. Тут  $l$  –

відстань вимірювального елемента (датчика  $D$ ) від заслінки;  $V$  - швидкість руху рідини.

На рис. 7.1, б зображена схема САР товщини прокату. Регулюючий вплив надходить на валки з запізнюванням  $\tau = l/V$ , де  $l$  – відстань датчика  $D$  від валків;  $V$  – швидкість прокату.

Амплітудно-частотна характеристика запізнілої ланки

$$A(\omega) = 1, \quad (7.4)$$

фазово-частотна характеристика

$$\phi(\omega) = -\tau \cdot \omega. \quad (7.5)$$

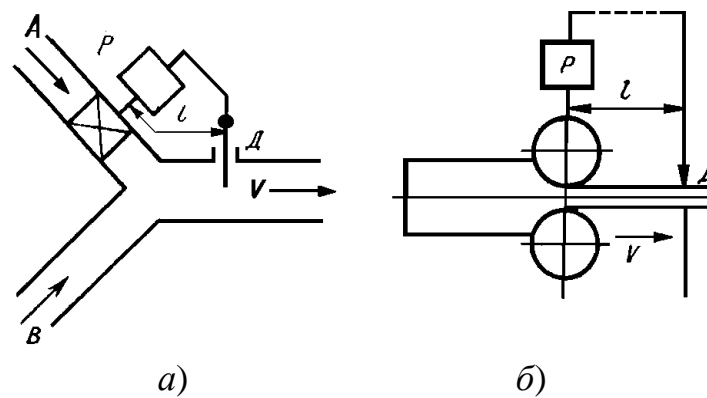


Рис. 7.1. Приклади САР із запізнілою ланкою.

Дійсна частотна характеристика запізнілої ланки

$$P(\omega) = \cos \tau \omega. \quad (7.6)$$

Уявна частотна характеристика запізнілої ланки

$$Q(\omega) = -\sin \tau \omega. \quad (7.7)$$

АФЧХ являє собою коло одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 7.2).

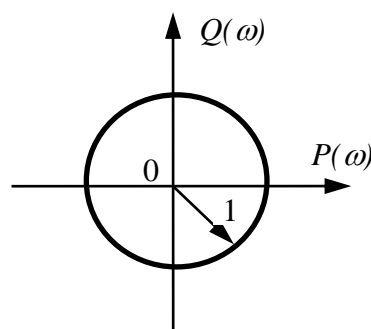


Рис. 7.2. АФЧХ запізнілої ланки.

При збільшенні частоти вектор  $W(j\omega)$  обертається за годинниковою стрілкою.

Вхідний сигнал відтворюється на виході запізнілої ланки без перекручування, але з запізнюванням, рівним  $\tau$  (рис. 7.3).

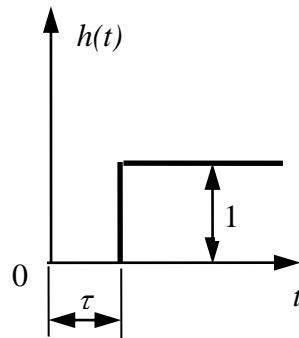


Рис. 7.3. Перехідна функція запізнілої ланки.

Перехідна функція запізнілої ланки

$$h(t) = k \cdot (t - \tau). \quad (7.8)$$

**Завдання:**

Дослідити наступні характеристики запізнілої ланки:

- амплітудно-фазову частотну (АФЧХ);
- амплітудну частотну (АЧХ);
- фазову частотну (ФЧХ);
- логарифмічну амплітудну частотну (ЛАЧХ);
- перехідну функцію  $h(t)$ .

Побудувати графіки і проаналізувати їх.

Таблиця 7.1. Варіанти завдань.

Варіант	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$k$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$\tau, c$	1	2	1,5	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5

Варіант	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
$k$	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
$\tau, c$	6	8	10	6,5	8,5	3,2	4,8	5,6	8,4	9,8

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійну часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції досліджуваної ланки.
10. Виділити дійсну і уявну частини передаточної функції досліджуваної ланки, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
11. Побудувати характеристики, перераховані у завданні, вирази яких описані вище (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).
12. Проаналізувати отримані графіки, зокрема вплив на їх вигляд зміни коефіцієнта підсилення та постійної часу.
13. Зберегти отримані результати в окремий файл.
14. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### Контрольні запитання.

1. Дати означення запізнілої ланки.
2. Як визначається час запізнювання?
3. Записати диференційне рівняння та передаточну функцію запізнілої динамічної ланки.

4. Записати частотну характеристику запізнілої динамічної ланки.
5. Дати означення АФЧХ, намалювати графік АФЧХ запізнілої динамічної ланки.
6. Записати дійсну та уявну частотні характеристики запізнілої динамічної ланки.
7. Записати вирази АЧХ та ФЧХ запізнілої динамічної ланки.
8. Записати вираз перехідної функції запізнілої динамічної ланки та побудувати її графік в загальному вигляді.

## **Лабораторна робота №8**

### **Дослідження частотних характеристик лінійної САР**

Мета роботи: навчитися досліджувати частотні характеристики лінійної системи автоматичного регулювання.

#### **Короткі теоретичні відомості.**

Під **системою автоматичного керування (САК)** розуміють сукупність об'єкта керування (робочої машини, механізму) та з'єднаних певним чином елементів, взаємодією яких забезпечується розв'язання поставленого завдання керування об'єктом. В окремий клас виділяють системи автоматичного регулювання. Система автоматичного регулювання повинна забезпечувати підтримування на певному рівні або зміну за заданим законом деяких змінних характеристик (регулюємих величин) в машинах и агрегатах без участі людини з допомогою різного роду технічних засобів. Під **системою автоматичного регулювання** розуміють динамічну систему, в якій керування джерелом енергії здійснюється з допомогою сигналу різниці між керуючим діянням і дійсною зміною регулюємої змінної.

Перетворення вхідного сигналу системи (керуючого діяння) у вихідний сигнал (регулюєму величину) визначає закон зміни регулюємої величини.

*Статичні характеристики* визначають поведінку системи в усталеному режимі. Рівняння статичної характеристики лінійної системи звичайно має вигляд

$$X_{вих} = k \times X_{вх}, \quad (8.1)$$

де  $X_{вих}$  – вихідна величина;

$X_{вх}$  – вхідна величина;

$k$  – передаточний коефіцієнт або коефіцієнт підсилення.

*Динамічні характеристики* відображають зв'язок між вихідною і вхідною величинами у перехідному процесі. Динамічні характеристики дістають складанням і розв'язанням диференціальних рівнянь.

Геометричне місце кінця вектора комплексного коефіцієнта передачі системи при зміні частоти від 0 до  $\infty$  називають частотним годографом коефіцієнта передачі або **амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ)**. АФЧХ характеризує зміну амплітуди коливань вихідної величини і зсуву фаз між вихідним і вхідним сигналами від частоти при незмінній амплітуді вхідного гармонічного діяння.

Залежність зміни амплітуд вихідного сигналу від частоти при незмінному вхідному діянні показує амплітудно-частотна характеристика  $[A(\omega)]$ , а фази – фазова-частотна характеристика  $[\varphi(\omega)]$ , які визначаються за формулами:

$$A(\omega) = \sqrt{(P(\omega))^2 + (Q(\omega))^2}, \quad (8.2)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right), \quad (8.3)$$

де  $P(\omega)$  – дійсна частотна характеристика ;

$Q(\omega)$  – уявна частотна характеристика.

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика (ЛАЧХ) розімкнutoї системи будується в логарифмічному масштабі за формулою :

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(A(\omega)). \quad (8.4)$$

Логарифмічна фазова частотна характеристика (ЛФЧХ) розімкнутої системи дорівнює сумі ЛФЧХ усіх ланок, що входять в систему:

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (8.5)$$

Побудову ЛФЧХ виконують на одному бланку з ЛАЧХ.

Система називається **статичною**, якщо при будь-якому постійному задаючому діянні  $X_{ex} = const$  усталена похибка не дорівнює нулю.

Система називається **астатичною**, якщо при будь-якому постійному задаючому діянні усталена похибка дорівнює нулю. Введення в склад статичної системи інтегруючої ланки перетворює її у астатичну. Астатичні системи можуть бути першого, другого та більш високих порядків, в залежності від кількості інтегруючих ланок у їх складі.

#### **Завдання:**

Побудувати структурну схему САР згідно заданої передаточної функції.

Записати передаточні функції розімкнутої та замкнутої САР (вважаючи, що зворотній зв'язок від'ємний одиничний)

Дослідити наступні характеристики САР:

- амплітудну фазову частотну (АФЧХ);
  - амплітудну частотну (АЧХ);
  - фазову частотну (ФЧХ);
  - логарифмічну амплітудну частотну (ЛАЧХ);
  - логарифмічну фазову частотну (ЛФЧХ);
- та побудувати їх графіки.

4. Проаналізувати вплив параметрів ланок ( $T$  та  $k$ ) на побудовані характеристики та зробити висновки.

Таблиця 8.1. Варіанти завдань.

Варіант	Передаточна функція розімкнутої системи	Значення параметрів				
		T <sub>1</sub> , с	T <sub>2</sub> , с	T <sub>3</sub> , с	T <sub>4</sub> , с	k
1.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p))$	0,1	1	0,5	-	100
2.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	0,01	0,1	-	-	50
3.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p))$	0,2	5	1	1	10
4.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p)$	0,01	0,03	-	-	100
5.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)p)$	0,05	0,2	1	-	200
6.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p))$	1	0,1	0,5	-	50
7.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1)(1+T_3p))$	0,02	0,1	0,05	-	20
8.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p)$	0,2	2	0,5	-	150
9.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1)(1+T_3p)p)$	0,1	0,5	2	-	250
10.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	2	1	5	-	50
11.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p)$	0,05	0,1	-	-	100
12.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	2	5	-	-	150
13.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p))$	0,5	0,02	1	-	100
14.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p))$	1	0,5	0,2	-	40
15.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p)$	5	2	4	-	120

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійні часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції досліджуваної системи автоматичного регулювання.
10. Виділити дійсну і уявну частини передаточної функції досліджуваної системи автоматичного регулювання, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .

11. Побудувати характеристики, перераховані у завданні, вирази яких описані вище (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).

12. Проаналізувати отримані графіки, зокрема вплив на їх вигляд зміни коефіцієнта підсилення.

13. Зберегти отримані результати в окремий файл.

14. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Дати означення системи автоматичного керування.
2. Дати означення системи автоматичного регулювання.
3. В якому режимі поведінку системи визначають статичні характеристики САР?
4. Який режим САР визначають її динамічні характеристики?
5. Дати означення амплітудно фазової частотної характеристики.
6. Записати вираз для амплітудної частотної характеристики САР та дати означення.
7. Записати вираз для фазової частотної характеристики САР та дати означення.
8. Записати вираз для логарифмічної фазової частотної характеристики САР та дати означення.
9. Дати означення статичної та астатичної систем автоматичного регулювання.

## Лабораторна робота №9

### Дослідження стійкості системи за критерієм Гурвіца

Мета роботи: навчитися досліджувати САР на стійкість за допомогою алгебраїчних критеріїв.

#### Короткі теоретичні відомості.

Лінійна система автоматичного регулювання буде стійкою, якщо всі дійсні корені і всі дійсні частини комплексних коренів характеристичного рівняння будуть від'ємними. Якщо корені характеристичного рівняння нанести на комплексну площину, то система автоматичного регулювання буде стійкою при розташуванні всіх коренів ліворуч від уявної осі. Знаки дійсної частини коренів можна знайти безпосереднім розв'язуванням характеристичного рівняння. Однак легко розв'язуються рівняння не вище другого ступеня. Для полегшення дослідження систем на стійкість запропоновано непрямі методи визначення знака дійсної частини коренів характеристичного рівняння, які дістали назву критеріїв стійкості. До алгебраїчних критеріїв стійкості належать критерії Рауса, Гурвіца, Вишеградського, Льенара-Шипара. Вони дозволяють встановлювати стійкість за коефіцієнтами характеристичного рівняння замкнутої системи.

Характеристичне рівняння одноконтурної системи має вид

$$P(p) + Q(p) = 0. \quad (9.1)$$

Після перемноження співмножників, які входять до складу операторів:

$$P(p) = P_1(p)P_2(p)\dots P_n(p); Q(p) = Q_1(p)Q_2(p)\dots Q_n(p)$$

та зведення подібних членів, характеристичне замкнутої системи матиме вигляд

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n = 0. \quad (9.2)$$

Аналіз перехідних характеристик типових ланок першого і другого порядків показує, що для рівняння першого і другого порядків необхідною і

достатньою умовою є додатне значення коефіцієнтів, що зумовлюється від'ємними знаками дійсних коренів або дійсних частин комплексних коренів.

Для систем вищого порядку ( $n \geq 3$ ), крім додатного знака коефіцієнтів характеристичного рівняння замкнутої системи необхідно, щоб виконувались також інші умови згідно відповідним критеріям.

Критерій стійкості Гурвіца дає змогу визначити стійкість системи автоматичного регулювання досить високого порядку, але користуватись цим критерієм порівняно легко лише при рівняннях до п'ятого порядку, оскільки надалі зростає складність обчислень.

Згідно з цим критерієм умови стійкості формулюються таким чином.

**Всі корені характеристичного рівняння  $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$  матимуть від'ємні дійсні частини, якщо при додатному знаку всіх коефіцієнтів  $a_0, a_1, \dots, a_n$  будуть додатними головний визначник Гурвіца  $\Delta_n > 0$  і його діагональні мінори  $\Delta_{n-1} > 0, \dots, \Delta_2 > 0$ .**

Правила знаходження визначника Гурвіца.

1. По головній діагоналі записують коефіцієнти характеристичного рівняння від  $a_1$  до  $a_{n-1}$ .
2. Місця зверху від діагоналі заповнюють коефіцієнтами з більшими індексами, а знизу від діагоналі – з меншими індексами.
3. При відсутності відповідного коефіцієнта записують 0.
4. Діагональні мінори визначають з головного детермінанта Гурвіца викреслюванням відповідних рядків і стовпців.

Система буде стійкою при всіх додатних значеннях отриманих результатів. У кожному визначнику кількість рядків дорівнює кількості стовпців і номеру визначника.

Можливі також спрощення обчислень на основі того факту, що в окремих випадках можна обмежитись розкриттям лише деяких визначників. Як видно, кількість визначників на одиницю менша від порядку характеристичного

рівняння. Отже, для системи 4-го порядку треба скласти три визначники, для системи 3-го порядку – 2, 2-го – 1 визначник.

### Загальна методика дослідження впливу параметрів системи на її стійкість.

Дослідження впливу деякого параметра  $T_x$  на стійкість системи можна проводити в такій послідовності:

1. Відповідно до степеня характеристичного рівняння прийняти умови: при  $n = 3$   $\Delta_2 > 0$ , при  $n = 4$   $\Delta_3 > 0$ , при  $n = 5$   $\Delta_4 > 0$  та  $\Delta_2 > 0$ , при  $n = 6$   $\Delta_5 > 0$  та  $\Delta_3 > 0$ .

2. Встановити функціональну залежність відповідного визначника або визначників і параметра  $T_x$

$$\Delta_x = f(T_x). \quad (9.3)$$

Наприклад, при  $n = 5$  матимемо залежності  $\Delta_4 = f(T_x)$  та  $\Delta_2 = f(T_x)$ .

3. З умов  $\Delta_x = f(T_x) = 0$  визначити критичні значення  $T_x$  (значення  $T_x$ , при яких система знаходиться на межі стійкості), а також зони, в яких  $T_x$  відповідає стійкому або нестійкому стану системи.

4. У зоні “стійких” значень  $T_x$  встановити необхідний запас стійкості по параметру  $T_x$  і виділити зону рекомендованих значень цього параметра.

Знайдені значення параметра  $T_x$  за умови стійкості даної системи надалі треба узгоджувати з вимогами якості перехідного процесу. Якщо параметр  $T_x$  входить до складу коефіцієнта  $a_n$  характеристичного рівняння і визначає статичну точність системи, то вимоги стійкості і якості мають бути узгоджені з вимогами статичної точності.

### Завдання:

1. Дослідити задану систему на стійкість за критерієм Гурвіца.
2. Визначити граничний коефіцієнт підсилення  $k_{gr}$  та встановити необхідний запас стійкості по даному параметру.

Таблиця 9.1. Варіанти завдань.

Варіант	Характеристичне рівняння	Значення параметрів				
		T <sub>1</sub> , с	T <sub>2</sub> , с	T <sub>3</sub> , с	T <sub>4</sub> , с	k
1.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p) + k = 0$	0,1	1	0,5	-	100
2.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	0,01	0,1	-	-	50
3.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p) + k = 0$	0,2	5	1	1	10
4.	$T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k = 0$	0,01	0,03	-	-	100
5.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)p + k = 0$	0,05	0,2	1	-	200
6.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p) + k = 0$	1	0,1	0,5	-	50
7.	$(T_1T_2p^2+(T_1+ T_2)p+1)(1+T_3p) + k = 0$	0,02	0,1	0,05	-	20
8.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	0,2	2	0,5	-	150
9.	$(T_1T_2p^2+(T_1+ T_2)p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	0,1	0,5	2	-	250
10.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	2	1	-	-	50
11.	$T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k = 0$	0,05	0,1	-	-	100
12.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	2	5	-	-	150
13.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p) + k = 0$	0,5	0,02	1	-	100
14.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p) + k = 0$	1	0,5	0,2	-	40
15.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	5	2	4	-	120

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Дослідити систему на стійкість за критерієм Гурвіца, виконуючи пункти правил дослідження за даним критерієм, що описані вище.
6. З допомогою математичного редактора MathCAD або вручну порахувати головний визначник Гурвіца і його діагональні мінори. Для цього необхідно зайти на закладку View → Toolbars → Matrix, натиснути на екрані клавішу "Determinant", потім клавішу "Matrix or Vector" і, задавши необхідну кількість рядків і стовпців матриці, ввести відповідні коефіцієнти визначника. Після введення останнього коефіцієнту натиснути на клавіатурі клавішу "=". За отриманим результатом зробити висновок.

7. Визначити граничний коефіцієнт підсилення  $k_{cp}$  та встановити необхідний запас стійкості по даному параметру, також слідуючи правилами, що описані в даних методичних вказівках, запам'ятати  $k_{cp}$  для використання в наступних лабораторних роботах.

8. Зберегти отримані результати в окремий файл.

9. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, розрахунки визначників, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. До групи яких критеріїв належить критерій стійкості Гурвіца? Які ще критерії стійкості входять до цієї групи?

2. Який вираз є вихідним для дослідження системи на стійкість за критерієм Гурвіца?

3. Сформулювати умови стійкості системи автоматичного регулювання за критерієм стійкості Гурвіца.

4. Загальна методика дослідження впливу параметрів системи на її стійкість.

## **Лабораторна робота №10**

### **Дослідження стійкості системи за критерієм Михайлова**

Мета роботи: навчитися досліджувати САР на стійкість за допомогою частотних критеріїв.

### **Короткі теоретичні відомості.**

Частотні критерії стійкості отримали найбільш широке практичне застосування, так як, по-перше, вони дозволяють судити про стійкість замкнутої системи за більш простою передаточною функцією розімкнутої системи; по-друге, аналіз стійкості можна виконати і за експериментально

визначеними частотними характеристиками; по-третє, з допомогою частотних характеристик можна судити про якість перехідних процесів у системах.

Михайлов А.В. першим запропонував використовувати розвинуті у радіотехніці Найквістом частотні методи для аналізу стійкості лінійних систем регулювання. Критерій стійкості Михайлова був запропонований в 1938 р. і є досить зручним для аналізу лінійних систем, особливо високого порядку ( $n \geq 5$ ).

Оцінка стійкості системи за даним критерієм виконується на основі характеристики (годографа) Михайлова, яка будується таким чином.

1. В характеристичному рівнянні замкнутої системи

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = F(p) \quad (10.1)$$

виконують підстановку  $p(\omega) = j\omega$ , де  $j = \sqrt{-1}$ , після чого вираз годографа Михайлова дістають у вигляді

$$F(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n. \quad (10.2)$$

2. У виразі  $F(j\omega)$  виділяють дійсну  $P(\omega)$  та уявну  $Q(\omega)$  частини

$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (10.3)$$

де  $P(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - a_{n-6}\omega^6 \dots$ ;  $Q(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots$

3. Задаючи значення  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  на комплексній площині в координатах  $P(\omega)$  та  $Q(\omega)$  будують годограф Михайлова, радіус-вектор  $F(\omega)$  якого при зміні  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  обертається проти годинникової стрілки.

Оцінка стійкості системи здійснюється за виглядом і розміщенням кривої  $F(j\omega)$  відносно квадрантів площини  $P(\omega) - Q(\omega)$  (рис. 10.1). Годограф Михайлова стійкої системи має починатись на додатній дійсній осі й огинати на комплексній площині початок координат, проходячи проти годинникової стрілки послідовно таку кількість квадрантів, яка дорівнює порядку характеристичного рівняння. Якщо годограф проходить через меншу кількість квадрантів, система нестійка. Якщо крива Михайлова проходить через початок координат, то система може знаходитись на межі стійкості або бути нестійкою.

Першому випадку відповідає така крива, яка при найменшій її деформації в околі початку координат буде відповідати стійкій або нестійкій системі, а другому випадку - якщо деформація кривої не призведе її до вигляду, відповідному стійкій системі. Отже, для оцінки стійкості системи за допомогою критерію Михайлова важливо встановити розташування кривої Михайлова відносно початку координат.

Щоб за допомогою критерію Михайлова оцінити вплив зміни параметрів елементів системи на її стійкість, необхідно побудувати криву Михайлова при даному значенні параметру, що нас цікавить. Нехай, наприклад, виявилось, що система знаходиться на межі стійкості. Після цього треба змінити цей параметр, наприклад збільшити, і побудувати криву Михайлова для цього випадку.

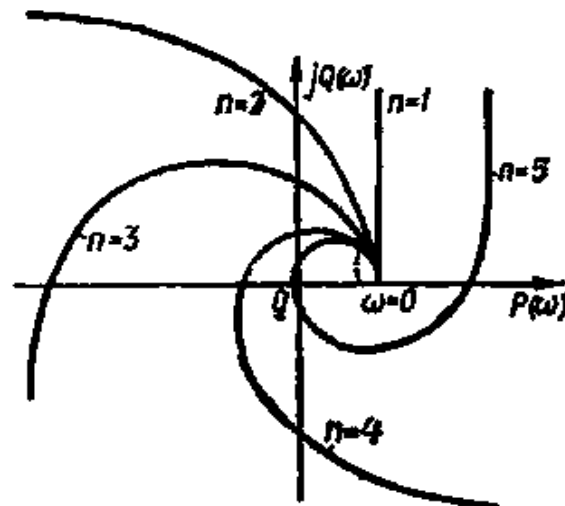


Рис. 10.1. Годографи стійких систем 1,2,3,4, та 5-го порядків.

#### Завдання:

1. Дослідити задану систему на стійкість за критерієм Михайлова.
2. Визначити граничний коефіцієнт підсилення  $k_{gr}$  та встановити необхідний запас стійкості по параметру  $k$ .

Таблиця 10.1. Варіанти завдань.

Варіант	Характеристичне рівняння	Значення параметрів				
		T <sub>1</sub> , с	T <sub>2</sub> , с	T <sub>3</sub> , с	T <sub>4</sub> , с	k
1.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p) + k = 0$	0,1	1	0,5	-	100
2.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	0,01	0,1	-	-	50
3.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p) + k = 0$	0,2	5	1	1	10
4.	$T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k = 0$	0,01	0,03	-	-	100
5.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)p + k = 0$	0,05	0,2	1	-	200
6.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p) + k = 0$	1	0,1	0,5	-	50
7.	$(T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1)(1+T_3p) + k = 0$	0,02	0,1	0,05	-	20
8.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	0,2	2	0,5	-	150
9.	$(T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	0,1	0,5	2	-	250
10.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	2	1	-	-	50
11.	$T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k = 0$	0,05	0,1	-	-	100
12.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	2	5	-	-	150
13.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p) + k = 0$	0,5	0,02	1	-	100
14.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p) + k = 0$	1	0,5	0,2	-	40
15.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	5	2	4	-	120

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійні часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз характеристичного рівняння досліджуваної системи автоматичного регулювання.
10. Виділити дійсну і уявну частини характеристичного рівняння досліджуваної системи автоматичного регулювання, підставивши у виразі характеристичного рівняння замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .

11. Побудувати годограф Михайлова (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot), скопіювати отриманий графік і збільшити окіл початку координат у копії, слідуючи такій послідовності View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → Zoom.

12. Проаналізувати отриманий графік згідно правилу, описаному вище; у випадку стійкої системи, змінити значення коефіцієнту  $k$ , взявши його дещо більшим, ніж  $k_{cr}$ , що було отримане в лабораторній роботі № 9, побудувати годограф Михайлова, скопіювати його, збільшити ділянку копії поблизу початку координат, для цього необхідно активізувати графік, натиснувши один раз ліву кнопку миші, поставивши курсор на поле графіка, далі виконати операції View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → Zoom; у випадку не стійкої вихідної системи, змінити значення коефіцієнту  $k$ , взявши його дещо меншим, ніж  $k_{cr}$ , що було отримане в лабораторній роботі № 9 та побудувати графік, скопіювати його, збільшити окіл початку координат. В результаті має бути 4 графіка – годограф вихідної системи, його копія зі збільшеним околom початку координат, годограф Михайлова зі зміненим коефіцієнтом  $k$  та його копія зі збільшеним околom початку координат. Зберегти отримані результати в окремий файл.

13. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. В чім зручність частотних критеріїв стійкості САР?
2. Який вираз є вихідним для дослідження системи на стійкість за критерієм Михайлова?
3. Перерахувати послідовність операцій при дослідженні системи на стійкість за критерієм Михайлова.
4. Сформулювати частотний критерій стійкості Михайлова.
5. Як за допомогою критерію Михайлова оцінити вплив зміни параметрів елементів системи на її стійкість?

## Лабораторна робота №11

### Дослідження стійкості системи за критерієм Найквіста- Михайлова

Мета роботи: навчитися досліджувати САР на стійкість за допомогою частотного критерію Найквіста-Михайлова.

#### Короткі теоретичні відомості.

Спершу критерій розробив у 1932 р. Х. Найквіст стосовно електронних підсилювачів із зворотним зв'язком, а в 1938 р. А. В. Михайлов поширив цей критерій на системи автоматичного регулювання. За цим критерієм стійкість замкнутої системи автоматичного регулювання визначають за амплітудно-фазовою характеристикою стійкої розімкнутої системи. *Розімкнута система автоматичного регулювання стійка* в тому випадку, коли складається тільки із стійких динамічних ланок (має не більше однієї інтегруючої ланки). Цей критерій із іншим формулюванням також можна застосовувати для дослідження систем, що містять як інтегруючі (нейтральні), так і нестійкі ланки.

Особливістю критерію Найквіста є те, що він дає змогу:

Оцінювати динамічні властивості замкнутих систем по частотних характеристиках відповідних розімкнутих систем;

Досліджувати динамічні властивості замкнутої системи при відсутності рівнянь динаміки системи або її окремих елементів.

У цьому разі достатньо мати експериментальні частотні характеристики системи або відповідних ланок, які можуть бути визначені на реальних елементах системи або на її моделях.

При відсутності математичного описання ланок (або й системи в цілому) цей критерій є незамінним для дослідження динамічних процесів в системах регулювання.

Амплітудно-фазову характеристику розімкнутої системи дістають так. Розривають лінію зовнішнього зворотного зв'язку системи на структурній схемі й аналізують динамічні ланки, що входять до головного контуру. Якщо головний контур системи не містить нестійких ланок і має не більше однієї інтегруючої ланки, можна застосовувати критерій стійкості Найквіста-Михайлова. За структурною схемою розімкнутої стійкої системи визначають передаточну функцію. Підставивши замість оператора  $p$  добуток  $j\omega$ , дістають рівняння амплітудно-фазової характеристики розімкнутої системи, праву частину якого зображують у вигляді дійсної  $P(\omega)$  й уявної  $Q(\omega)$  складових, що залежать від частоти. Змінюючи частоту  $\omega$  від 0 до  $\infty$ , дістають пари значень  $P(\omega)$  і  $Q(\omega)$ , за якими на комплексній площині будують амплітудно-фазову характеристику стійкої розімкнутої системи.

**Якщо розімкнута система автоматичного керування є стійкою, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкнутої системи не охоплювала точку з координатами  $(-1; j0)$  при зміні частоти від 0 до  $\infty$ .**

**Якщо розімкнута система автоматичного керування є нестійкою, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкнутої системи при зміні частоти від 0 до  $\infty$  охоплювала точку з координатами  $(-1; j0)$  проти годинникової стрілки і поверталася на кут  $m\pi$  ( $m$ - кількість додатних коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи).**

**Якщо АЧФХ розімкнутої системи проходить через саму точку  $(-1; j0)$ , то замкнута система буде знаходитись на межі стійкості.**

На рис. 1 показані амплітудно-фазові характеристики стійких і нестійких замкнутих статичної (рис. 11.1, а) й астатичної (рис. 11.1, б) систем. Збільшення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи спричинює зростання модуля амплітудно-фазової характеристики. При певному його значенні, яке називається критичним, амплітудно-фазова характеристика пройде через точку

$(-1; j0)$  і система буде на границі стійкості. Якщо  $k > k_{кр}$ , система втратить стійкість. Віддалення амплітудно-фазової характеристики від точки  $(-1; j0)$  визначає запас стійкості за фазою  $\varphi$ , за амплітудою  $A$  (рис. 11.1, а).

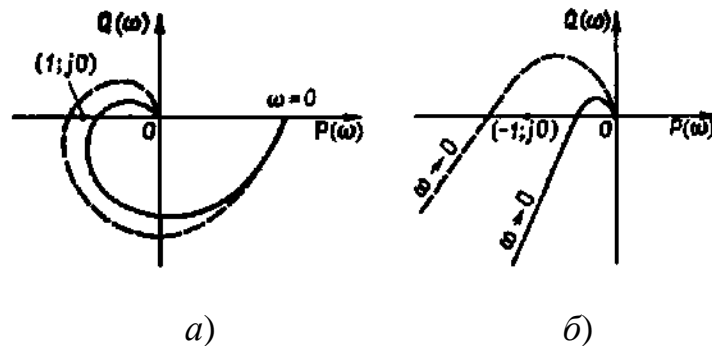


Рис. 11.1. Амплітудно-фазові частотні характеристики стійких (суцільна лінія) і нестійких (штрихова лінія) замкнутих систем:

а — статичної; б — астатичної.

### Завдання:

1. Дослідити задану систему на стійкість за критерієм Найквіста-Михайлова.
2. Визначити запаси стійкості по модулю (амплітуді) і фазі.

Таблиця 11.1. Варіанти завдань.

Варіант	Передаточна функція розімкнутої системи	Значення параметрів				
		$T_1, c$	$T_2, c$	$T_3, c$	$T_4, c$	$k$
1.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p))$	0,1	1	0,5	-	100
2.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	0,01	0,1	-	-	50
3.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p))$	0,2	5	1	1	10
4.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p)$	0,01	0,03	-	-	100
5.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)p)$	0,05	0,2	1	-	200
6.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p))$	1	0,1	0,5	-	50
7.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^2+(T_1+ T_2)p+1)(1+T_3p))$	0,02	0,1	0,05	-	20
8.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p)$	0,2	2	0,5	-	150
9.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^2+(T_1+ T_2)p+1)(1+T_3p)p)$	0,1	0,5	2	-	250
10.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	2	1	-	-	50
11.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p)$	0,05	0,1	-	-	100
12.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	2	5	-	-	150
13.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p))$	0,5	0,02	1	-	100
14.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p))$	1	0,5	0,2	-	40
15.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p)$	5	2	4	-	120

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню “Пуск” (“Start”) → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійні часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції розімкнутої системи автоматичного регулювання.
10. Виділити дійсну і уявну частини розімкнутої системи автоматичного регулювання, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
11. Побудувати амплітудно-фазову частотну характеристику розімкнутої системи (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot), скопіювати отриманий графік і збільшити на копії окіл початку координат та точки з координатами  $(-1; j0)$ , слідуючи такій послідовності View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → Zoom.
12. Проаналізувати отриманий графік згідно правилу, описаному вище, зробити висновок щодо стійкості вихідної системи автоматичного регулювання; у випадку стійкої системи, змінити значення коефіцієнту  $k$ , взявши його дещо більшим, ніж  $k_{сп}$ , що було отримане в лабораторній роботі № 9 “Дослідження стійкості системи за критерієм Гурвіца”, побудувати АФЧХ розімкнутої системи скопіювати отриманий графік, збільшити ділянку копії поблизу початку координат та точки з координатами  $(-1; j0)$ , для цього необхідно активізувати графік, натиснувши один раз ліву кнопку миші, поставивши курсор на поле графіка, далі View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → Zoom; у випадку не

стійкої вихідної системи, змінити значення коефіцієнту  $k$ , взявши його дещо меншим, ніж  $k_{cp}$ , що було отримане в лабораторній роботі № 9 та побудувати графік АФЧХ, зробити його копію та збільшити на ній окіл початку координат і точки з координатами  $(-1; j0)$ . В результаті має бути 4 графіка – АФЧХ вихідної системи, її копія зі збільшеним околом початку координат і точки з координатами  $(-1; j0)$ , АФЧХ розімкнутої САР зі зміненим коефіцієнтом  $k$  та її копія зі збільшеним околом початку координат і точки з координатами  $(-1; j0)$ . Зберегти отримані результати в окремий файл.

13. По графіку АФЧХ розімкнутої системи автоматичного регулювання, роздрукованому у звіті або накресленому вручну у разі отримання стійкої замкненої системи визначити запаси стійкості за модулем  $A$  (відстань від точки перетину кривої АФЧХ з від'ємною дійсною віссю до точки з координатами  $(-1; j0)$ ) і за фазою  $\varphi$  (кут між від'ємною дійсною віссю та вектором, проведеним до точки перетину кривої АФЧХ з колом одиничного радіуса з центром в початку координат).

14. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, креслення визначення запасів стійкості за модулем і фазою, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Перерахувати особливості частотного критерію стійкості Найквіста-Михайлова.

2. Який вираз є вихідним для дослідження системи на стійкість за критерієм Найквіста-Михайлова?

3. В якому випадку розімкнута система автоматичного регулювання є стійкою?

4. Як побудувати графік амплітудно-фазової характеристики розімкнутої системи?

5. Сформулювати частотний критерій стійкості Найквіста-Михайлова у випадку стійкої та нестійкої розімкнутої системи автоматичного регулювання.

6. Як впливає на стійкість системи збільшення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи  $k > k_{кр}$ ?

7. Як визначити по амплітудно-фазовій частотній характеристиці розімкнутої САР запас стійкості за модулем  $A$  і за фазою  $\varphi$ ?

## Лабораторна робота №12

### Дослідження стійкості системи по методу D-розбиття

Мета роботи: навчитися досліджувати стійкість САР за допомогою побудови зон стійкості.

#### Короткі теоретичні відомості.

При розробці САР важливо встановити вплив окремих параметрів (або параметра) на стійкість системи при фіксованих значеннях інших параметрів. При цьому ставиться завдання встановити зони параметрів, в яких їх зміна не приводить до нестійкої роботи системи.

#### D-розбиття по одному параметру.

Розглянемо методику побудови зони стійкості в площині комплексного параметра  $T_x$ .

1. Вихідне характеристичне рівняння  $D(p) = 0$  представимо у вигляді

$$X(p) + T_x Y(p) = 0. \quad (12.1)$$

2. Знаходимо величину досліджуваного параметра

$$T_x = X(p) / Y(p). \quad (12.2)$$

3. Знаходимо комплексний вираз параметра  $T_x$ , використовуючи підстановку  $p = j\omega$ , і виділимо його дійсну  $P(\omega)$  і уявну  $Q(\omega)$  складові:

$$T_x(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (12.3)$$

$T_x(\omega)$  становить деяку криву на комплексній площині, яка відповідає уявним кореням характеристичного рівняння і є сукупністю параметрів  $T_x$ , при

яких система знаходиться на межі стійкості. Така характеристика називається межею стійкості в площині параметра  $D$ , або кривою  $D$ -розбиття.

4. В комплексній площині параметра  $D$  за правилом штриховки знаходимо зону стійкості.

Правило штриховки формулюють так: якщо рухатись по межі  $D$ -розбиття від значень  $\omega = -\infty$  до значень  $\omega = +\infty$ , то зона стійкості буде розташована зліва від кривої.

5. Задаючи запас стійкості в зоні, обмеженій кривою  $D$ -розбиття, виділимо на дійсній (горизонтальній) осі (бо параметр  $T_x$  є дійсною, фізично реальною величиною) необхідний, робочий діапазон значень параметра  $T_x$ , який може бути рекомендовано при проектуванні і налаштуванні відповідної системи.

Приклад  $D$ -розбиття комплексної площини параметра  $k$  наведено на рис. 12.1.

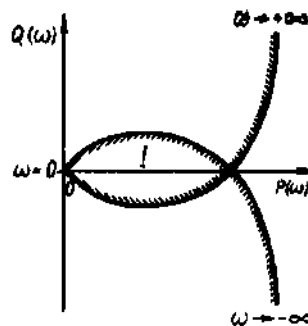


Рис. 12.1.  $D$ -розбиття комплексної площини параметра  $k$ .

Оскільки у стійкої системи всі корені містяться ліворуч від уявної осі, при русі по кривій  $D$ -розбиття від  $-\infty$  до  $+\infty$  ділянка стійкості також буде ліворуч від здобутої кривої. Для зручності відшукування ділянки стійкості нанесемо на криву (рис. 12.1) штриховку зліва при русі від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Ділянка  $I$  на рис. 12.1, можливо, є ділянкою стійкості.

Узявши будь-яке дійсне значення  $k_x$  усередині добутої ділянки за допомогою будь-якого критерію стійкості перевіряємо стійкість системи. Якщо система виявиться стійкою, відшукана ділянка є ділянкою стійкості. Ця перевірка потрібна тому, що при певному значенні  $k_x$ , яке лежить на границі ділянки стійкості, крім уявного кореня, коренів з від'ємною дійсною частиною могли бути корені і з додатною дійсною частиною. Може трапитись, що ділянки стійкості

немає, отже, система є нестійкою при будь-якому значенні  $k_x$  або іншому розглядуваному параметрі. Якщо ділянки стійкості немає, система автоматичного регулювання називається структурно-нестійкою. Щоб добитися стійкості цих систем, треба змінити структурну схему – ввести додаткові ланки, замінити одну або кілька ланок або змінити порядок з’єднання елементів. У структурно-стійких системах для досягнення стійкості треба тільки змінити числові значення параметрів.

### Завдання:

1. Дослідити задану систему на стійкість відносно коефіцієнта підсилення розімкненої системи за допомогою побудови зон стійкості.
2. Визначити граничний коефіцієнт підсилення  $k_{zp}$  та встановити необхідний запас стійкості по параметру  $k$ .

Таблиця 12.1. Варіанти завдань.

Варіант	Характеристичне рівняння	Значення параметрів				
		T <sub>1</sub> , с	T <sub>2</sub> , с	T <sub>3</sub> , с	T <sub>4</sub> , с	k
1.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p) + k = 0$	0,1	1	0,5	-	100
2.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	0,01	0,1	-	-	50
3.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p) + k = 0$	0,2	5	1	1	10
4.	$T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k = 0$	0,01	0,03	-	-	100
5.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)p + k = 0$	0,05	0,2	1	-	200
6.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p) + k = 0$	1	0,1	0,5	-	50
7.	$(T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1)(1+T_3p) + k = 0$	0,02	0,1	0,05	-	20
8.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	0,2	2	0,5	-	150
9.	$(T_1T_2p^2+(T_1+T_2)p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	0,1	0,5	2	-	250
10.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	2	1	-	-	50
11.	$T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k = 0$	0,05	0,1	-	-	100
12.	$(1+T_1p)(1+T_2p)p + k = 0$	2	5	-	-	150
13.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p) + k = 0$	0,5	0,02	1	-	100
14.	$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p) + k = 0$	1	0,5	0,2	-	40
15.	$(T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p + k = 0$	5	2	4	-	120

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.

3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійні часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = -100, -99.99..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз характеристичного рівняння замкнутої системи автоматичного регулювання у вигляді  $k(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ , виділивши попередньо дійсну і уявну частини характеристичного рівняння, підставивши у його виразі замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
10. Побудувати криву D-розбиття в площині параметру  $k$  (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot), скопіювати отриманий графік і збільшити на копії окіл початку координат та точки з координатами ( $k_{гр}$ ;  $j0$ ), слідуючи такій послідовності View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → Zoom.
11. Проаналізувати отриманий графік згідно правилу, описаному вище, зробити висновок щодо стійкості вихідної системи автоматичного регулювання; порівняти отримане значення граничного значення коефіцієнту підсилення  $k_{гр}$  з зі значенням  $k_{гр}$ , отриманим в лабораторній роботі № 9 "Дослідження стійкості системи за критерієм Гурвіца". Зробити висновок.
12. Зберегти отримані результати в окремий файл.
13. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графік кривої D-розбиття в площині параметру  $k$ , таблиці значень змінних параметрів, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Який вираз є вихідним для дослідження системи на стійкість по методу D-розбиття в площині параметру  $k$ ?

2. Сформулювати правило штриховки за яким в комплексній площині параметра  $D$  знаходять зону стійкості.

3. Чому, задаючи запас стійкості в зоні, обмеженій кривою  $D$ -розбиття, лише на дійсній (горизонтальній) осі виділяється необхідний, робочий діапазон значень параметра, наприклад  $k$ ?

4. Навіщо потрібна перевірка стійкості системи при значенні параметру, за яким будували криву  $D$ -розбиття, що лежить в зоні стійкості, з використанням будь-якого іншого критерію стійкості?

5. Як називається система, крива  $D$ -розбиття якої не має зони стійкості?

## **Лабораторна робота №13**

### **Побудова перехідних процесів та визначення прямих показників якості**

Мета роботи: навчитися визначати прямі показники якості процесів регулювання.

#### **Короткі теоретичні відомості.**

Стійкість є необхідною, але не достатньою умовою працездатності САР. Стійкість системи регулювання означає лише те, що в системі відбувається згасання перехідного процесу під впливом керуючого чи збурюючого зовнішнього впливу. Час згасання перехідного процесу, максимальне відхилення регулюємої величини і кількість коливань в системі при цьому не визначаються, однак ці величини є важливими показниками якості процесів регулювання.

Показники якості процесів регулювання можна визначити з допомогою різних методів. До їх числа в першу чергу слід віднести побудову перехідних процесів по заданим передаточним функціям замкнутих систем, а також визначення показників якості за ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутої системи.

Реакцією системи на зовнішні діяння є перехідний процес. Якісні показники визначають при ступінчастих діяннях, так як вони є найбільш складними для системи. Звичайно використовують одиничну ступінчасту функцію (одиничне ступінчасте діяння)  $f(t) = 0$ , при  $t \leq 0$ ,  $f(t) = 1$ , при  $t > 0$ , при цьому отримуємо реакцію системи у вигляді перехідного процесу. Регульована величина в часі при подачі на вхід системи одиничного ступінчастого діяння описується залежністю

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_3(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega, \quad (13.1)$$

де  $P_3(\omega)$  – дійсна частотна характеристика замкнутої системи.

Якість систем оцінюється багатьма показниками, серед яких основними є: характер (вигляд) перехідного процесу, тривалість перехідного процесу, перерегулювання, точність (похибка) системи та інші, специфічні для окремих видів перехідних процесів. Показники якості, визначені за перехідним процесом, називаються прямими показниками якості.

За характером перехідні процеси поділяють на монотонні, коливальні та аперіодичні з перерегулюванням (рис. 13.1).

Монотонними є перехідні процеси, при яких відхилення регульованої величини  $x$  від усталеного значення  $x_0$  плавно зменшується без зміни знака похідної  $\frac{dx}{dt}$  (рис. 13.1, криві 3, 4).

Колівальними називають перехідні процеси, при яких в системі існують гармонічні коливання з деяким періодом  $T$  і амплітудою, що поступово зменшується (рис. 13.1, крива 1).

Аперіодичними процесами з перерегулюванням називаються перехідні процеси, при яких керована величина набуває усталеного значення після

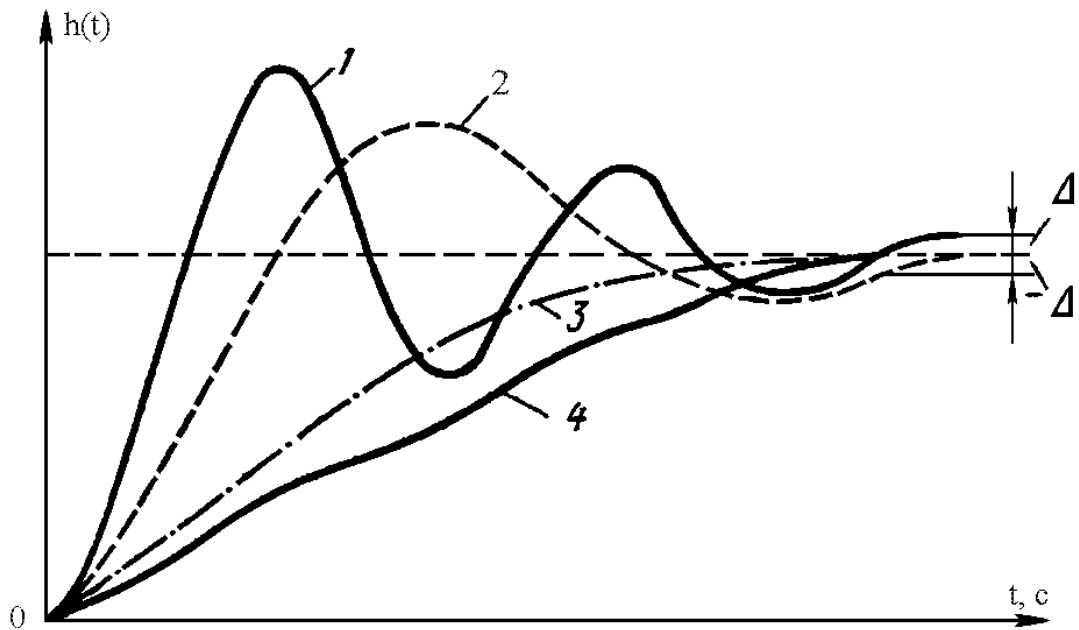


Рис. 13.1. Основні види характеристик перехідних процесів систем автоматичного регулювання при типовому одиничному діянні.

одного, двох або більше коливань з різними періодами (неперіодичні процеси) при наявності перерегулювання (рис. 13.1., крива 2).

Під перерегулюванням розуміють максимальне відхилення керованої величини в бік, протилежний початковому відхиленню від усталеного значення  $x_0$  (див. рис. 13.2.):

$$\delta = \frac{x_m - x_0}{x_0} \times 100\%, \quad (13.2)$$

Тривалість (швидкодія) практично визначається часом  $t_p$  за який відхилення  $\Delta x$  від заданого значення стане меншим за деяку достатньо малу величину  $\varepsilon$  (теоретично тривалість перехідного процесу  $t_p = \infty$ ). Величина  $\varepsilon$  визначається вимогами точності конкретної системи (процесу) і може дорівнювати 3 – 5 % і більше (для “грубих” систем).

Відхилення (похибку)  $\Delta x$ , яке виникає після закінчення перехідного процесу, називають статичною помилкою (похибкою), а відхилення  $\Delta x(t)$ , яке з’являється в перехідному процесі і відображає відхилення деякого значення

регульованої величини у відповідний момент часу від величини  $x_0$  – динамічною похибкою.

Ступінь затухання перехідного процесу  $\psi$  є показником, що характеризує коливальні процеси. Її визначають за формулою

$$\psi(\%) = 100 \cdot \left( 1 - \frac{x_2}{x_1} \right). \quad (13.3)$$

де  $x_1, x_2$  – відхилення від усталеного значення сусідніх коливань. Чим більше значення  $\psi$ , тим швидше затухає перехідний процес.

Наступний показник якості характеризує кількість коливань  $N_p$

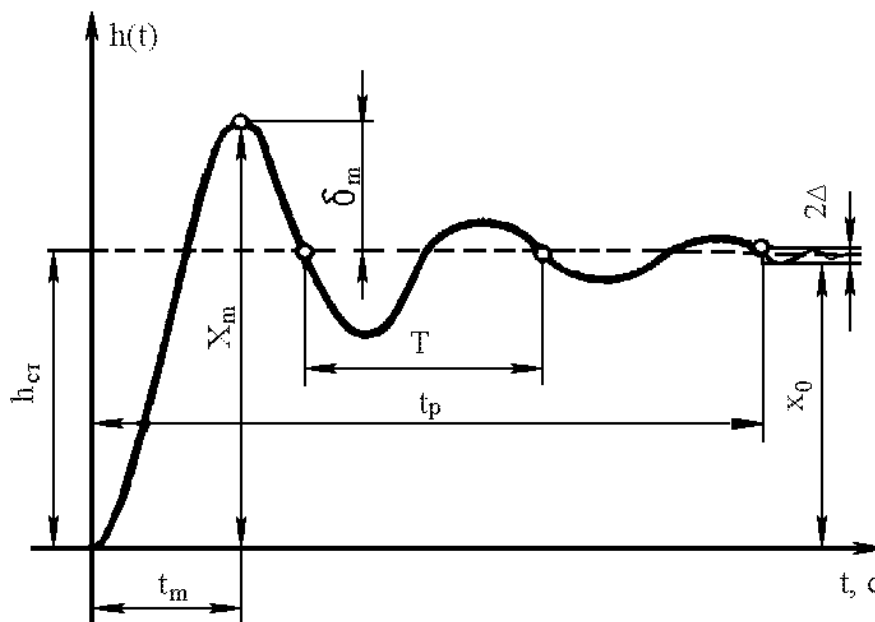


Рис. 13.2. Характеристика перехідного процесу при типовому одиничному збуренні.

регулюємої величини  $x(t)$  впродовж часу перехідного процесу  $t_p$ .

Поряд з цими основними показниками якості при проектуванні систем автоматичного регулювання часто використовують: час наростання  $t_n$  – час досягнення усталеного значення; час досягнення першого максимуму  $t_{max}$ ; період коливань  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Якість системи автоматичного регулювання насамперед визначається технологічними особливостями об'єкта. Так, в різних підйомних машинах,

прокатних станах та інших установках значної потужності, які мають великі моменти інерції, ставиться умова забезпечення перехідного процесу, близького до аперіодичного з перерегулюванням не більше 2 – 3 %; виконання цієї вимоги спричиняє затягування тривалості перехідного процесу  $t_p$ .

Водночас у мало інерційних системах (обчислювальних, слідкуючих), бажано дістати швидкозатухаючий коливальний процес.

### Завдання:

1. Визначити передаточну функцію замкнутої системи, маючи передаточну функцію розімкнутої системи, виділити дійсну частину передаточної функції замкнутої системи та побудувати дійсну частотну характеристику замкнутої системи згідно варіанту завдання.

2. Побудувати криву перехідного процесу.

3. Визначити за побудованим графіком показники якості САР:

- час регулювання, час наростання та час досягнення першого максимуму;
- перерегулювання;
- кількість та період коливань;
- відхилення (похибку);
- ступінь затухання.

Таблиця 13.1. Варіанти завдань.

Варіант	Передаточна функція розімкнутої системи	Значення параметрів				
		$T_1, c$	$T_2, c$	$T_3, c$	$T_4, c$	$k$
1.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p))$	0,1	1	0,5	-	100
2.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	0,01	0,1	-	-	50
3.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p))$	0,2	5	1	1	10
4.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p)$	0,01	0,03	-	-	100
5.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)p)$	0,05	0,2	1	-	200
6.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p))$	1	0,1	0,5	-	50
7.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^2+(T_1+ T_2)p+1)(1+T_3p))$	0,02	0,1	0,05	-	20
8.	$W(p) = k / ((T_2^2p^2+T_1p+1)(1+T_3p)p)$	0,2	2	0,5	-	150
9.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^2+(T_1+ T_2)p+1)(1+T_3p)p)$	0,1	0,5	2	-	250
10.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	2	1	5	-	50
11.	$W(p) = k / ((T_1T_2p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p)$	0,05	0,1	-	-	100
12.	$W(p) = k / ((1+T_1p)(1+T_2p)p)$	2	5	-	-	150

13.	$W(p) = k / ((T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)(1 + T_3 p))$	0,5	0,02	1	-	100
14.	$W(p) = k / ((1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p))$	1	0,5	0,2	-	40
15.	$W(p) = k / ((T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)(1 + T_3 p)p)$	5	2	4	-	120

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення та постійні часу згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вирази передаточних функцій розімкнутої та замкнутої системи автоматичного регулювання.
10. Виділити дійсну частину замкнутої системи автоматичного регулювання, підставивши у виразі передаточної функції замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
11. Побудувати дійсну частотну характеристику замкненої системи (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).
12. Ввести діапазон зміни часу, наприклад  $t = 0..50$ .
13. Ввести вираз перехідної функції.
14. Побудувати графік перехідного процесу (в MathCAD View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot).
15. Зберегти отримані результати в окремий файл.
16. По графіку перехідного процесу, роздрукованому у звіті або накресленому вручну у разі отримання прийняттого для аналізу вигляду визначити показники якості САР, перераховані у завданні; також деякі показники можна визначити з допомогою засобів MathCAD, для цього треба

скористатись засобом Trace в меню інструментів Graph Toolbar, при активованому графіку .

17. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки дійсної частотної характеристики та перехідного процесу, таблиці значень змінних параметрів, креслення визначення прямих показників якості, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Чому стійкість є необхідною, але не достатньою умовою працездатності САР?

2. Назвіть відомі методи визначення показників якості систем автоматичного регулювання.

3. Що таке перехідний процес?

4. Яке діяння необхідно подати на вхід системи для отримання перехідного процесу?

5. Якими показниками оцінюється якість системи автоматичного регулювання?

6. Як називаються показники якості системи автоматичного регулювання, визначені за перехідним процесом?

7. Перерахувати відомі методи визначення показників якості систем автоматичного регулювання.

8. Перерахувати типи перехідних процесів.

9. Дати означення монотонного перехідного процесу.

10. Дати означення коливального перехідного процесу.

11. Дати означення аперіодичного перехідного процесу з перерегулюванням.

12. Дати означення перерегулювання, часу регулювання, ступеню затухання.

## Лабораторна робота №14

### Дослідження стійкості систем з запізнюванням

Мета роботи: навчитися досліджувати САР з запізнюванням на стійкість.

#### Короткі теоретичні відомості.

Лінійна система з запізнюванням має одну або кілька запізнілих ланок, в яких вихідна величина з'являється через деякий проміжок часу  $\tau$  після появи величини на вході ланки. Передаточна функція ланки з запізненням має вигляд  $W(p) = e^{-p\tau}$ . Як правило, запізнювання мають регульовані об'єкти, оскільки елементи системи практично завжди можуть бути підібрані так, щоб виключити запізнення. Структурну схему такої системи звичайно зображують у вигляді послідовно з'єднаних запізнілої ланки і динамічних ланок без запізнювання. Відповідно до рис. 14. 1 передаточна функція розімкнутої системи є добутком передаточних функцій ланок:

$$W_p(p) = W_n(p) \cdot e^{-p\tau}, \quad (14.1)$$

де  $W_n(p)$  – передаточна функція системи без урахування запізнювання;

$e^{-p\tau} = W_z(p)$  – передаточна функція запізнілої ланки.

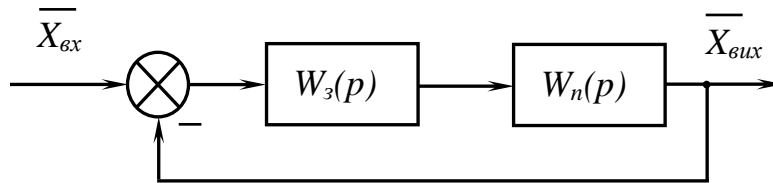


Рис. 14.1. Структурна схема системи з запізнюванням.

Передаточна функція замкнутої системи за керуючим діянням в цьому випадку матиме вигляд

$$W_z(p) = \frac{W_n(p) \cdot e^{-p\tau}}{1 + W_n(p) \cdot e^{-p\tau}}. \quad (14.2)$$

Якщо ланка з запізнюванням входить до кола зворотного зв'язку, то передаточна функція за керуючим діянням випадку матиме вигляд

$$W_z(p) = \frac{W_n(p)}{1 + W_n(p) \cdot e^{-p\tau}}. \quad (14.3)$$

Згідно з виразами (14.2) і (14.3) незалежно від місця знаходження ланки з запізнюванням характеристичне рівняння замкнутої системи матиме вигляд

$$1 + W_n(p) \cdot e^{-\tau p}. \quad (14.4)$$

Це рівняння є трансцендентним і має нескінчену кількість коренів, які для стійкої системи повинні розміщуватись у лівій площині коренів. Знаходження коренів у цьому випадку – трудомістке завдання, тому для аналізу стійкості таких систем найбільш прийнятним є використання частотного критерію Найквіста-Михайлова, використовуючи вираз (14.1). Замінивши у виразі (14.1)  $p$  на  $j\omega$ , дістанемо рівняння амплітудно-фазової характеристики розімкнутої системи з запізнюванням:

$$W_p(j\omega) = W_n(j\omega) \cdot e^{-j\tau\omega}. \quad (14.5)$$

Зобразивши  $W_n(j\omega)$  у показниковій формі, дістанемо:

$$W_p(j\omega) = A_n(\omega) \cdot e^{j\varphi_n(\omega)} \cdot e^{-j\tau\omega} = A_n(\omega) \cdot e^{j[\varphi_n - \tau\omega]}, \quad (14.6)$$

де  $A_n(\omega)$  – модуль частотної функції системи без урахування запізнєння;

$\varphi_n(\omega)$  – аргумент цієї функції.

Із рівняння (14.6) видно, що амплітудно-фазова характеристика системи з запізнюванням може бути побудована за амплітудно-фазовою характеристикою системи без урахування запізнєння, якщо повернути кожен її радіус-вектор за годинниковою стрілкою на кут, який дорівнює  $\tau\omega$ .

Припустимо, що система без урахування запізнєння має амплітудно-фазову характеристику (рис. 14.2, крива 1). Узявши частоту  $\omega_1$ , проведемо радіус-вектор  $OA$ . Визначимо і відкладемо в додатному напрямі кут  $\tau\omega_1$ . На перетині дуги, утвореної радіусом-вектором  $OA$ , і радіуса-вектора  $OA_1$  дістанемо точку шуканої характеристики, що відповідає частоті  $\omega_1$ . Аналогічно можна дістати точки для інших частот, за якими будуємо амплітудно-фазову характеристику 2 системи з запізнєнням. Система стійка, оскільки амплітудно-фазова характеристика 2 із запізнєнням не охоплює точку з координатами  $(-1; j0)$  на комплексній площині.

З наведеного графіка видно, що зростання запізнєння зменшує запас стійкості системи. Проте при деяких складних характеристиках  $W(j\omega)$  можливі

випадки, коли запізнення позитивно впливає на роботу системи. Змінюючи величину  $\tau$ , можна знайти його критичне значення, при якому графік амплітудно-фазової характеристики проходить через точку з координатами  $(-1; j0)$  на комплексній площині. Відповідну частоту при цьому називають критичною.

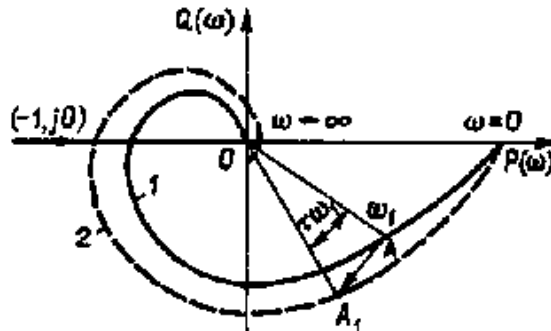


Рис. 14.1. Побудова амплітудно-фазової частотної характеристики систем з запізнюванням.

**Завдання:**

1. Дослідити систему на стійкість при  $\tau = 0,1$  с.
2. Визначити запаси стійкості по модулю (амплітуді) і фазі.

Таблиця 14.1. Варіанти завдань.

Варі-ант	Передаточна функція розімкнутої системи	Значення параметрів				
		$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	$T_4, \text{с}$	$k$
1.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p))$	0,1	1	0,5	-	100
2.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((1+T_1 p)(1+T_2 p)p)$	0,01	0,1	-	-	50
3.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)(1+T_4 p))$	0,2	5	1	1	10
4.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p)$	0,01	0,03	-	-	100
5.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)p)$	0,05	0,2	1	-	200
6.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)(1+T_3 p))$	1	0,1	0,5	-	50
7.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1)(1+T_3 p))$	0,02	0,1	0,05	-	20
8.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)(1+T_3 p)p)$	0,2	2	0,5	-	150
9.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1)(1+T_3 p)p)$	0,1	0,5	2	-	250
10.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((1+T_1 p)(1+T_2 p)p)$	2	1	5	-	50
11.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p)$	0,05	0,1	-	-	100
12.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((1+T_1 p)(1+T_2 p)p)$	2	5	-	-	150
13.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)(1+T_3 p))$	0,5	0,02	1	-	100
14.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p))$	1	0,5	0,2	-	40
15.	$W(p) = k \times e^{-\tau p} / ((T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)(1+T_3 p)p)$	5	2	4	-	120

### Порядок виконання роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Отримати у викладача варіант завдання.
3. З дозволу викладача зайняти робоче місце за комп'ютером.
4. Запустити математичний редактор MathCAD через меню "Пуск" ("Start") → Програми → MathSoft Apps.
5. Ввести коефіцієнт підсилення для випадку стійкої системи автоматичного регулювання (значення  $k$ , що використовувалось для отримання стійкої системи в лабораторній роботі № 11), постійні часу та час запізнювання згідно варіанту.
6. Ввести діапазон зміни частоти  $\omega = 0,0.01..100$ .
7. Ввести значення комплексного коефіцієнту  $j = \sqrt{-1}$ .
8. Ввести значення оператора Лапласа  $p(\omega) = j \times \omega$ .
9. Ввести вираз передаточної функції розімкнутої системи автоматичного регулювання без запізнювання та передаточну функцію розімкнутої системи з запізнюванням.
10. Виділити дійсну і уявну частини розімкнутої системи автоматичного регулювання без запізнювання та системи з запізнюванням, підставивши у виразах передаточних функцій замість оператора Лапласа  $p$  вираз  $j \times \omega$ .
11. Побудувати амплітудно-фазову частотну характеристику розімкнутої системи без запізнювання та системи з запізнюванням (в MathCAD слідуєчии такій послідовності View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → X-Y Plot), скопіювати отримані графіки і збільшити на копіях околиці початку координат та точки з координатами  $(-1; j0)$ , слідуєчии такій послідовності View → Toolbars → Math → Graph Toolbar → Zoom.
12. Проаналізувати отримані графіки згідно правилу, описаному в лабораторній роботі № 11.
13. Зберегти отримані результати в окремий файл.

14. По графіку АФЧХ розімкнутої системи автоматичного регулювання, роздрукованому у звіті або накресленому вручну у разі отримання стійкої замкнутої системи визначити запаси стійкості за модулем  $A$  (відстань від точки перетину кривої АФЧХ з від'ємною дійсною віссю до точки з координатами  $(-1; j0)$ ) і за фазою  $\varphi$  (кут між від'ємною дійсною віссю та вектором, проведеним до точки перетину кривої АФЧХ з колом одиничного радіуса з центром в початку координат). Зробити висновок щодо впливу запізнювання на запас стійкості вихідної системи автоматичного регулювання.

15. Оформити звіт, який повинен містити номер, назву та мету лабораторної роботи, короткі теоретичні відомості, вихідні дані згідно варіанту, графіки характеристик, таблиці значень змінних параметрів, креслення визначення запасів стійкості за модулем і фазою для систем без запізнювання та з запізнюванням, висновки по роботі.

### **Контрольні запитання.**

1. Дати означення системи автоматичного регулювання з запізнюванням.
2. Записати вираз передаточної функції ланки з запізнюванням.
3. Яка частина системи автоматичного регулювання як правило має запізнювання?
4. Як зображують структурну схему системи автоматичного регулювання з запізнюванням?
5. Записати вираз передаточної функції розімкнутої системи автоматичного регулювання з запізнюванням.
6. Яким чином можна побудувати амплітудно-фазову частотну характеристику САР з запізнюванням, при наявності графіка амплітудно-фазової частотної характеристики САР без запізнювання?
7. За яким критерієм звичайно визначається стійкість САР?
8. Як впливає збільшення запізнювання на стійкість САР?
9. Чи завжди запізнювання негативно впливає на стійкість САР?

## Література

1. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ : Либідь, 2007. 656 с.

2. Кондратець В.О. Теорія і технічні засоби систем: Підручник. – К.: Вища шк., 1993. – 319 с. – (Автоматика та автоматизація вир.-ва с.-г. машин: У 2 ч.; Ч.І).

3. Гоголюк П. Ф., Гречин Т. М. Теорія автоматичного керування : підручник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2012. 280 с.

Лабораторна робота № 1:

[1] – с. 61, 75; [2] – с. 67; [3] – с. 307;

Лабораторна робота № 2:

[1] – с. 61, 75; [2] – с. 62; [3] – с. 303, 306;

Лабораторна робота № 3:

[1] – с. 63, 75; [2] – с. 63; [3] – с. 310;

Лабораторна робота № 4:

[1] – с. 66, 76; [2] – с. 66; [3] – с. 308;

Лабораторна робота № 5:

[1] – с. 67, 76; [2] – с. 66; [3] – с. 316, 317;

Лабораторна робота № 6:

[3] – с. 316, 317;

Лабораторна робота № 7:

[1] – с. 69, 77; [2] – с. 68; [3] – с. 321;

Лабораторна робота № 8:

[1] – с. 77, 95; [2] – с. 68; [3] – с. 273;

Лабораторна робота № 9:

[1] – с. 147; [2] – с. 74; [3] – с. 345;

Лабораторна робота № 10:

[1] – с. 155; [2] – с. 75; [3] – с. 349;

Лабораторна робота № 11:

[1] – с. 171; [2] – с. 76; [3] – с. 352, 570;

Лабораторна робота № 12:

[1] – с. 162; [2] – с. 77; [3] – с. 381, 383;

Лабораторна робота № 13:

[1] – с. 193; [2] – с. 82; [3] – с. 386;

Лабораторна робота № 14:

[1] – с. 133; [2] – с. 86; [3] – с. 378.