УДК 531.36:62-752+62-755

Олег О.Горошко,
Геннадій Б.Філімоніхін*,
Володимир В.Пирогов*

Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла маятниковим (кульовим) автобалансиром

Розглянута задача про стійкість руху ізольованої матеріальної системи, яку утворюють абсолютно тверде тіло, що рухається плоскопаралельно, на центральну вісь якого, перпендикулярну площині руху, насаджені два однакових математичних маятника і усередині якого знаходиться матеріальна точка, що створює дисбаланс. Встановлено, що, за умови існування, глобально стійкий основний рух системи, у якому система обертається навколо центральної осі тіла, а решта рухів, побічних - нестійка.

Ключові слова: автобалансир, стабілізація, супутник.

Oleg O.Goroshko,
Hennadiy B.Filimonikhin*,
Volodimir V.Pirogov*

Stabilization by pendulums of the position of the axis of the rotation of the absolute rigid body

Is considered the problem of stabilization, of the position of the axis of the isolated absolute rigid body concerning itself. The isolated absolute rigid body makes plane-parallel motions. On the central axis of the absolute rigid body, which is perpendicular to the plane of motion is installed two identical mathematical pendulums. Inside the absolute rigid body there is a material point, which creates unbalanced weight. Is established, that, under condition of existence, is global stable the main motion of a system – the motion, in which the system rotates around the central axis of the absolute rigid body, other motions - collateral - are unstable.

Key Words: autobalancer, stabilization, satellite.

*E-mail: filimonikhin@narod.ru, pirogov@rambler.ru

Вступ. Маятникові (кульові) автобалансири застосовуються для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються [1]. На закритичних швидкостях обертання маятники, що вільно насаджені на вал ротора, самі займають положення, в якому зрівноважують ротор. Далі вони обертаються з ним як одне ціле, поки не почне змінюватися дисбаланс, або швидкість обертання ротора [1,2]. Це явище запропоновано використовувати для стабілізації положення осі обертання абсолютно твердого тіла щодо самого тіла [3]. Таким тілом може бути штучний супутник Землі, положення якого у просторі стабілізується обертанням навколо певної осі. В ідеальному випадку положення цієї осі щодо супутника не повинно змінюватися, у тому числі і при пересуванні мас, зв'язаних з супутником.

В роботі [3] досліджена стійкість основного руху системи (у якому дисбаланс зрівноважений маятниками і тіло обертається навколо власної центральної осі) за допомогою прямого методу Ляпунова для автономних систем. Метод використовується в подібних задачах, коли поряд з дослідженням стійкості треба оцінити, як швидко система буде повертатися до основного руху, якщо від нього відхилиться, або як швидко система залишить побічний рух (у якому тіло не зрівноважене), якщо опиниться у ньому [3, 4]. Але метод занадто громіздкий для дослідження стійкості всіх усталених рухів системи і дає відповідь на стійкість у малому – в околі незбуреного руху.

В цій роботі в рамках плоскої моделі досліджується задача про стійкість всіх усталених рухів системи шляхом дослідження на мінімум її повної (кінетичної) енергії. Такий підхід грунтується на теоремі .Лагранжа – Дирихле і її узагальненнях, зроблених А.М.Ляпуновим [5]. Подібний підхід вже застосовувався в роботі [6] для двохкульового автобалансира при зрівноваженні ротора на пружних опорах. Але в ній штучно накладалися обмеження на координати системи, що призвело до дослідження повної енергії на умовний екстремум і збільшило області стійкості усталених рухів.

Зауважимо, що для настання автобалансування тіла достатньо, щоб з усіх усталених рухів системи глобально стійким був основний рух, а всі побічні - були нестійкими.

1. Опис моделі системи. Нехай абсолютно тверде тіло масою M здійснює плоскопаралельний рух. У площині рух тіла зображає деяка плоска фігура (рис. 1). В ідеальному випадку тіло повинно обертатися навколо власної центральної осі w, що перпендикулярна площині руху і проходить через точку O фігури.

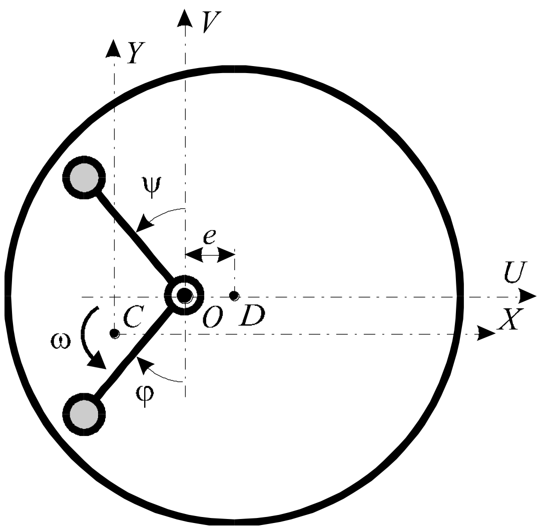


Рис. 1 Плоска модель ізольованої матеріальної системи

Оскільки система ізольована і також повинна обертатися навколо осі w, то остання повинна проходити через центр мас системи C. Позначимо через J_O осьовий момент інерції тіла відносно власної центральної осі w. Усередині тіла може рухатися матеріальна точка маси m_d, що створює дисбаланс. Для зрівноважування дисбалансу на вісь w, жорстко зв'язану з тілом, вільно насаджені два однакових математичних маятники, кожний масою m і довжиною l. Рух тіла визначається відносно осей x, y, що виходять із центра мас системи – точки C і обертаються синхронно з тілом із кутовою швидкістю ω. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що точка C нерухома. Проведемо через точку O допоміжні осі u, v, що паралельні осям x, y. Положення маятників визначається кутами φ, ψ, що відраховуються від осі v, як це показано на рис. 1. Вважаємо, що при повороті маятників відносно тіла на них діють моменти сил в'язкого опору $-h\dot{\varphi}, -h\dot{\psi}$, пропорційні відносним кутовим швидкостям обертання маятників. Положення незрівноваженої маси m_d визначається відстанню $e = |OD|$ від точки D, де знаходиться маса, до точки O. Нехай в основному русі тіло зрівноважене і обертається з кутовою швидкістю ω_0 навколо осі $w = z$. В побічних усталених рухах тіло не зрівноважене і осі w, z не співпадають. В перехідних процесах система здійснює нестаціонарні рухи. В роботі [3] отримані наступні інтеграли руху системи в безрозмірному вигляді ($\gamma = 0$):

$$u + R_m (\sin\varphi_0 - \sin\varphi - \sin\psi) = 0, \quad v + R_m (\cos\psi - \cos\varphi) = 0,$$

$$\left[\frac{1}{R_J} - \frac{u^2 + v^2}{R_m}\right] R_\omega + \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{R_m} + \dot{\psi} - \dot{\varphi} = \frac{1}{R_J}, \tag{1}$$

де в (1) безрозмірні змінні і час:

$$u = \frac{x}{l},\ v = \frac{y}{l},\ R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0},\ \tau = \omega_0 t\ \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}\right), \tag{2}$$

і безрозмірні параметри:

$$R_m = \frac{m}{M + 2m + m_d},\ R_J = \frac{ml^2}{J_C + m_d e^2 + 2ml^2},\ \sin\varphi_0 = \frac{m_d e}{2ml}. \tag{3}$$

Дослідимо, за яких умов буде відбуватися автобалансування системи.

2. Зведення задачі визначення умов автобалансування до задачі дослідження кінетичної енергії системи на умовний екстремум. Оскільки на систему діють тільки дисипативні сили з неповною дисипацією і її повна енергія співпадає з кінетичною, то

$$\frac{dT}{dt} = -2R, \tag{4}$$

де T - кінетична енергія системи, R - дисипативна функція Релея.

В зв'язку з тим, що під час перехідних процесів до системи не підводиться зовнішня і внутрішня енергія, то з часом рух системи установиться і кінетична енергія набуде екстремального значення. В усталених рухах маятники з ротором будуть обертатися як одне ціле і кінетична енергія визначатиметься формулою:

$$T_{сист} = \frac{1}{2} J_{\Sigma} \omega^2 , \qquad (5)$$

де J_{Σ} - сумарний осьовий момент інерції системи відносно осі, що проходить через центр мас системи – точку C

$$J_{\Sigma} = J_{рот} + J_{дис} + J_1 + J_2 , \qquad (6)$$

де відповідно:

$J_{рот} = J_C + M \cdot r_{CO}^{\ 2}$ - осьовий момент інерції ротора;

$J_{дис} = m_d r_{m_d}^2$ - осьовий момент інерції дисбалансу;

$J_1 = m r_1^2$ - осьовий момент інерції першого маятника;

$J_2 = m r_2^2$ - осьовий момент інерції другого маятника.

Радіуси вектори центра мас тіла, матеріальної точки і маятників відносно центра мас системи точки C мають вигляд:

$$\vec{r}_{CO}(x,\ \ y,\ \ 0),\quad \vec{r}_{m_d}(x+e,\ \ y,\ \ 0),$$
$$\vec{r}_1(x - l\sin\varphi,\ \ y - l\cos\varphi,\ \ 0),\ \vec{r}_2(x - l\sin\psi,\ \ y + l\cos\psi,\ \ 0). \qquad (7)$$

Підставивши вирази (7) у (6), а (6) у (5), одержимо кінетичну енергію системи в усталеному русі у вигляді:

$$T_{сист} = \frac{1}{2}\omega^2 (J_C + m_d e^2 + 2ml^2) + \frac{1}{2}\omega^2 (M + m_d + 2m)(x^2 + y^2) +$$
$$+ \omega^2 m_d x e - \omega^2 m l\,[(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + (x\sin\psi - y\cos\psi)]. \qquad (8)$$

У безрозмірних змінних і параметрах кінетична енергія має вигляд:

$$T_{сист} = \frac{1}{2} R_{\omega}^2 \frac{R_m}{R_J} + \frac{1}{2} R_{\omega}^2 (u^2 + v^2) + 2 R_{\omega}^2 R_m u \sin\varphi_0 -$$
$$- R_{\omega}^2 R_m\,[(u\sin\varphi + v\cos\varphi) + (u\sin\psi - v\cos\psi)]. \qquad (9)$$

Отже, в усталеному русі кінетична енергія залежить від п'ятьох безрозмірних узагальнених координат $u, v, \varphi, \psi, R_{\omega}$, які зв'язані інтегралами (1). Зробимо наступні зауваження:

1) як видно з інтегралів (1), параметри $u, v, \varphi, \psi, R_{\omega}$ змінюються одночасно, або одночасно є сталими;
2) під час перехідних процесів кінетична енергія системи зменшується, бо дисипативна функція – додатна;
3) якщо кількість усталених рухів скінчена, то відбуватися будуть тільки ті, у яких кінетична енергія (9) буде мати абсолютний або локальний мінімум.

Кінетичну енергію можна дослідити на умовний екстремум з допомогою методу Лагранжа [7]. Але, так як основні параметри входять лінійно до інтегралів руху (1), то дану задачу можна вирішити шляхом заміни залежних координат незалежними з наступним дослідженням кінетичної енергії на екстремум по незалежним координатам.

Враховуючи, що в усталених рухах похідні дорівнюють нулю, запишемо останнє рівняння (1) у вигляді:

$$R_\omega = 1\Big/\left(1 - \frac{R_J}{R_m}\left(u^2 + v^2\right)\right). \tag{10}$$

Виключивши з рівняння (9) узагальнені координати φ, ψ, R_ω, одержимо такий вигляд кінетичної енергії в координатах u, v:

$$T_{сист}(u, v) = \frac{1}{2}\frac{R_m}{R_J}\frac{1}{1 - \frac{R_J}{R_m}\left(u^2 + v^2\right)}. \tag{11}$$

Виключивши з рівняння (9) узагальнені координати u, v, R_ω, одержимо такий вигляд кінетичної енергії в координатах φ, ψ:

$$T_{сист}(\varphi, \psi) = \frac{\left(R_m/2R_J\right)}{1 - 2R_J R_m\left(1 + 2\sin^2\varphi_0 - \cos(\varphi+\psi) - 2\sin\varphi_0(\sin\varphi + \sin\psi)\right)}. \tag{12}$$

3. Дослідження кінетичної енергії на екстремум.

3.1. Дослідження на екстремум кінетичної енергії, як функції *u, v*. Візьмемо частинні похідні від рівняння (11) за u, v і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{u}{\left[1 - \frac{R_J}{R_m}\left(u^2 + v^2\right)\right]^2} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{v}{\left[1 - \frac{R_J}{R_m}\left(u^2 + v^2\right)\right]^2} = 0. \tag{13}$$

Видно, що $\partial T/\partial u = 0$ і $\partial T/\partial v = 0$ тільки при $u, v = 0$. Це відповідає основному руху. З вигляду кінетичної енергії заключаємо, що на основному русі вона має мінімум. Для того, щоб основний рух був глобально стійкий достатньо, щоб у системи була скінчена кількість побічних усталених рухів за координатами φ, ψ і на них кінетична енергія не мала мінімуму.

3.2. Дослідження на екстремум кінетичної енергії, як функції φ,ψ. З точністю до однакового сталого множника $R_m^2\Big/\left[1 - \frac{R_J}{R_m}\left(u^2 + v^2\right)\right]^2$ знаходимо:

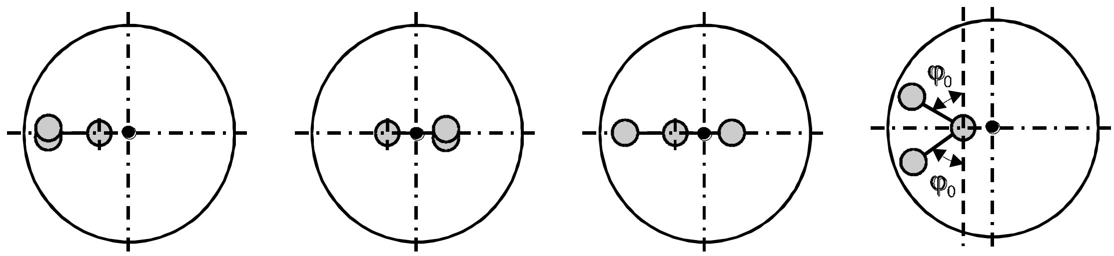
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} \sim \left(\cos\varphi\sin\psi - 2\cos\varphi\sin\varphi_0 + \sin\varphi\cos\psi\right) = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} \sim \left(\sin\varphi\cos\psi - 2\cos\psi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\sin\psi\right) = 0. \tag{14}$$

Розглянемо наступні принципово різні випадки, в яких система рівнянь (14) матиме розв'язки.

1. Випадок, коли $\varphi, \psi = \pm\pi/2$. Він дає такі побічні рухи, у яких тіло не зрівноважене (рис. 2, а, б, в):

1) $\varphi = \psi = \pi/2$ - маятники відхилені в легкий бік тіла;
2) $\varphi = \psi = -\pi/2$ - маятники відхилені у важкий бік тіла;
3) $\psi = \pm\pi/2, \quad \varphi = \mp\pi/2$ - один маятник відхилений у легкий, а другий - важкий бік тіла.



а) б) в) г)

а), б), в) – побічні рухи; г) –основний рух.

Рис. 2 Усталені рухи системи

2. Випадок, коли $\varphi, \psi \neq \pm\pi/2$. Розглянувши $\dfrac{\partial T}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial T}{\partial \psi}$, одержуємо:

$$2\sin\varphi_0 (\cos\psi - \cos\varphi) = 0, \tag{15}$$

що можливо, коли $\cos\psi = \cos\varphi$. Звідки отримуємо такі розв'язки: $\psi = \pm\varphi$. Розглядаємо ці два варіанти.

Якщо $\psi = -\varphi$, то оскільки $\varphi, \psi \neq \pm\pi/2$, то рівняння системи (14) не дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} \sim -2\cos\varphi \sin\varphi_0 \neq 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} \sim -2\cos\psi \sin\varphi_0 \neq 0$$

і цей випадок не дає нових розв'язків.

Якщо $\psi = \varphi$, то система рівнянь (14) приймає вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} \sim 2\cos\varphi(\sin\varphi - \sin\varphi_0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} \sim 2\cos\psi (\sin\psi - \sin\varphi_0) = 0.$$

Оскільки $\varphi, \psi \neq \pm\pi/2$, то рівності будуть виконуватися, коли

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = \varphi_0, \quad 0 \leq \varphi_0 < \pi/2. \tag{16}$$

Це відповідає основному руху (рис. 2, д).

Отже за координатами φ, ψ маємо чотири усталених рухи системи – один основний і три побічні.

Для з'ясування характеру нестійкості побічних рухів дослідимо кінетичну енергію системи на екстремум на цих рухах.

У русі $\psi = \varphi = \pi/2$ з точністю до однакового додатного сталого множника $R_m^2 \big/ \left[-4R_J R_m (1-\sin\varphi_0)^2\right]^2$, матимемо:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \sim -1 + 2\sin\varphi_0; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \psi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \psi \varphi} \sim -1.$$

Позначимо

$$a_{11}=a_{22}=-1+2\sin\varphi_0;\;\; a_{21}=a_{12}=-1,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\left(-2\sin\varphi_0\right)^2-1\le 0. \qquad (17)$$

Видно, що кінетична енергія приймає екстремальне значення, яке не є мінімумом, і тому рух нестійкий [5].

У русі $\psi=\varphi=-\pi/2$ з точністю до однакового додатного сталого множника $R_m^2\big/\left[-4R_JR_m(1+\sin\varphi_0)^2\right]^2$, матимемо:

$$\frac{\partial^2T}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2T}{\partial\psi^2}\sim-1-2\sin\varphi_0;\;\; \frac{\partial^2T}{\partial\varphi\psi}=\frac{\partial^2T}{\partial\psi\varphi}\sim-1.$$

Аналогічно першому випадку знаходимо $a_{11}=a_{22}=-1-2\sin\varphi_0<0$; $a_{21}=a_{12}=-1$, $\Delta=\left(+2\sin\varphi_0\right)^2-1>0$. Видно, що кінетична енергія приймає максимальне значення, і тому рух нестійкий [5].

У русі $\psi=\pm\pi/2$, $\varphi=\mp\pi/2$ з точністю до однакового додатного сталого множника $R_m^2\big/\left[-4R_JR_m\sin^2\varphi_0\right]^2$, матимемо:

$$\frac{\partial^2T}{\partial\varphi^2}\sim 1+2\sin\varphi_0;\;\; \frac{\partial^2T}{\partial\psi^2}\sim 1-2\sin\varphi_0;\;\; \frac{\partial^2T}{\partial\varphi\psi}=\frac{\partial^2T}{\partial\psi\varphi}\sim 1.$$

Аналогічно першому випадку знаходимо $a_{11}=1+2\sin\varphi_0$; $a_{22}=1-2\sin\varphi_0$; $a_{21}=a_{12}=1$, $\Delta=-4\sin^2\varphi_0<0$. Видно, що кінетична енергія приймає екстремальне значення, яке не є мінімумом, і тому рух нестійкий [5].

Висновки. У випадку ізольованої матеріальної системи, яку утворюють абсолютно тверде тіло, що рухається плоскопаралельно, на центральну вісь якого, перпендикулярну площині руху, насаджені два однакових математичних маятника і усередині якого знаходиться матеріальна точка, що створює дисбаланс:

1. система має чотири істотно відмінних усталених рухи: основний – у якому маятники зрівноважують дисбаланс тіла; три побічних, у яких тіло розбалансоване, причому в першому - маятники відхилені в легкий бік тіла, в другому - у важкий, в третьому - один маятник відхилений у легкий, а інший у важкий бік тіла;
2. в основному русі кінетична енергія приймає абсолютний мінімум, в першому і третьому побічному русі кінетична енергія приймає екстремальне значення, що не є мінімумом, у другому побічному русі – максимальна;
3. основний рух глобально стійкий, а побічні – нестійкі.

Література

1. Гусаров А.А., Сусанин В.И. и др. Автоматическая балансировка роторов машин. М.: “Наука”, 1979, 151 с.

2. Филимонихин Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира //Доп. НАН України. Сер.А. – 1996. - №8. – С. 74-78..
3. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла // Вісник, математика-механіка. Київський національний університет. Вип. №7-8, 2002. С.67-71.
4. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космические исследования. – 1997. – т.35. №6. – С. 651-658.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // собр. соч.: в 6-ти т. -М. -Л.: Изд-во АН СССР, 1956. -2. -С.7-264.
6. Муйжниек А.И. Некоторые вопросы теории автоматической динамической балансировки // Вопросы динамики и прочности. Вып. - 6. Рига: Изд-во АН ЛатССР, 1959. -С.123-145.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: Учебник для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов. В 3 т. Т. 2. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 576 с.: ил.

Надійшла до редакції 12.01.2004