УДК 004:519.216

Г.М. Дрєєва, викл., О.М. Дрєєв, канд. техн. наук
Центральноукраїнський національний технічний університет, м.Кропивницький, Україна
E-mail: gannadreeva@gmail.com, drey.sanya@gmail.com
О.О. Денисенко
Інженер програмного забезпечення в Epam Systems, м. Київ, Україна
E-mail: alexey.denisenko.work@gmail.com

Визначення фрактальної розмірності числової послідовності за розподілом ймовірності значень її елементів

В роботі розглянуто фрактальну розмірність числової послідовності утвореною випадковими числами з відомим розподілом густини ймовірності. З розподілу отримано співвідношення для отримання математичного очікування фрактальної розмірності числової послідовності методом покриття прямокутниками. Наведено приклад на окремому випадку.
фрактальна розмірність, числова послідовність, розподіл ймовірності, випадковий, ергодичний, процес

Г.Н. Дреева, препод., А.Н. Дреев, канд. техн. наук
Центральноукраинский национальный технический университет, г. Кропивницкий, Украина
О.О. Денисенко
Инженер программного обеспечения в Epam Systems, г. Киев, Украина

Определение фрактальной размерности числовой последовательности по распределению вероятности значений её элементов

В роботе рассмотрена фрактальная размерность числовой последовательности, которая получена из случайных чисел с известным распределением плотности вероятности. Из распределения получено соотношение для получения математического ожидания фрактальной размерности числовой последовательности методом покрытия прямоугольниками. Приведён пример на частном случае.
фрактальная размерность, числовая последовательность, распределение вероятности, случайный, эргодический, процесс

Постановка проблеми. В сучасних роботах для оптимізації роботи телекомунікаційних систем та мереж є обов'язковим врахування фрактальної природи трафіку в Інтернет мережі [2; 4-7]. Врахування фрактальності дозволяє значно краще прогнозувати параметри системи до дійних значень, тому визначення фрактальної розмірності є актуальною та важливою задачею. Відомі критерії, за якими визначають фрактальну розмірність мають значні похибки та відхилення для окремих реалізацій, тому є доцільним отримувати нові методи оцінювання фрактальних характеристик досліджуваних сигналів, що прослідковується в ряді публікацій, наприклад в [8] наведено методи з використанням вейвлетного аналізу.

Окремі оглядові публікації, в яких розглянуто та проведено порівняння кількох методів, використовують визначення фрактальної розмірності окремих короткочасних реалізацій, на основі яких визначають властивості цього сигналу [9]. Але існують випадки наявності ергодичного сигналу з відомим теоретичним обґрунтуванням його функції розподілу густини ймовірності. В таких випадках короткі реалізації мають високу ймовірність до відхилень, але такі реалізації дозволяють оцінювати вагові коефіцієнти відомого розподілу ймовірності. Саме в таких випадках є корисним мати засоби визначення фрактальної розмірності на основі функції розподілу ймовірності що і є метою наведеного дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В процесах передачі інформації в телекомунікаційних системах та мережах широко використовують пошук фрактальної розмірності трафіку мережі. Для цього використовують різні методи та підходи, що направлені на зменшення випадкових відхилень при проведені розрахунків на відносно малих реалізаціях числових рядів [4-9]. В умовах дефіциту вхідних даних, значно можуть покращити ситуацію додаткові дані про природу часового ряду, який досліджується. Наприклад, за допомогою теоретичних обґрунтувань для моделювання часових рядів, їх реалізацію побудовано на основі випадкових процесів з заданими розподілами ймовірності, такі як Пуасонівський процес [11, с.32], ланцюги Маркова [11, с.89], черги на основі процесу Парето [10] та інші. Кожен з розподілів має власну сферу застосування та обґрунтовується на основі прийнятих гіпотез та експериментальній перевірці на довгих реалізаціях. Проте реальні процеси мають лише наближені розподіли до теоретичних, варто лише нагадати, що теоретичне надходження кількості даних за одиницю часу обмежено пропускною здатністю вхідного каналу мережі. Тому покращити наближення можна врахувавши реальні розподіли ймовірності, які отримано експериментальним шляхом.

Постанова завдання. Виходячи з наведеного, метою цієї роботи є отримання математичного співвідношення для отримання очікуваного значення фрактальної розмірності числової послідовності на основі знання розподілу густини ймовірності $p(x)$.

Виклад основного матеріалу. Для розподілу густини ймовірності $p(x)$ справедливі наступні співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1,\ p(x) \ge 0,\ M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)dx, \tag{1}$$

де $M(x)$ – математичне очікування випадкової величини x. Числова послідовність складається з ряду реалізацій x_i, де i є порядковим номером елементу.

За означенням, розмірність Мінковського це є значення наступної межі: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\ln(N_\varepsilon)}{-\ln(\varepsilon)}$, де ε є діаметром елементу покриття, та N_ε - їх кількість. На практиці геометрично задачу розв'язують покриттям досліджуваної фігури квадратами (кубами), де за діаметр приймається його сторона. В [1; 9] наведено варіант, при якому покриття замінюється прямокутниками шириною ε та висотою, яка є мінімальною для покриття ділянки графічного представлення числового ряду (рис. 1):

При використанні прямокутників, кількість фігур покриття замінюється площею покриття:

$$S(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} h_k\,, \tag{2}$$

де h_k є висотою відповідного прямокутника k.

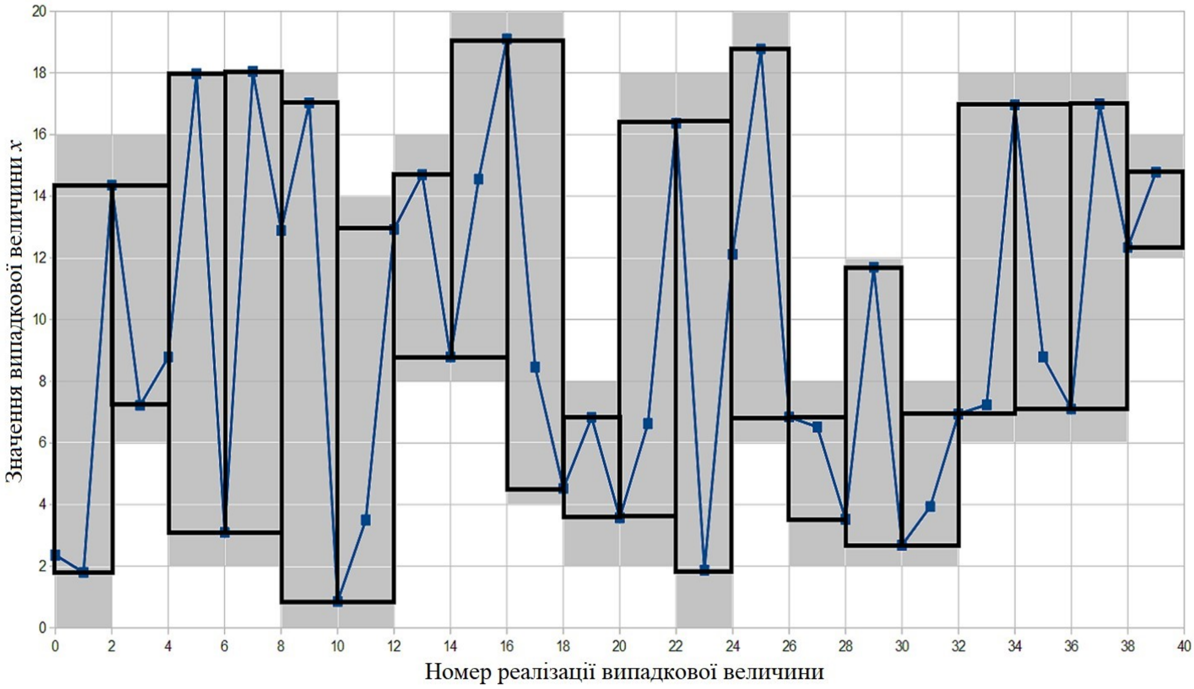

Рисунок 1 – Демонстрація результату покриття прямокутниками та квадратами

Якщо прийняти ε>1 за кількість дискретних відліків числового ряду x_i, тоді h_k шукається за наступним алгоритмом:

$$h_k = max(x_i) - min(x_i), \text{ де } i = k\varepsilon, \ldots, (k+1)\varepsilon - 1. \qquad (3)$$

З рис. 2 видно, що для похилої прямої, покриття зі зменшенням *ε* в 2 рази зменшує площу теж в два рази. На рисунку це показано зафарбованої частиною прямокутників які утворено зменшенням діаметру покриття ε в 2 рази з 10 до 5. Це відповідає розмірності *D*=1.

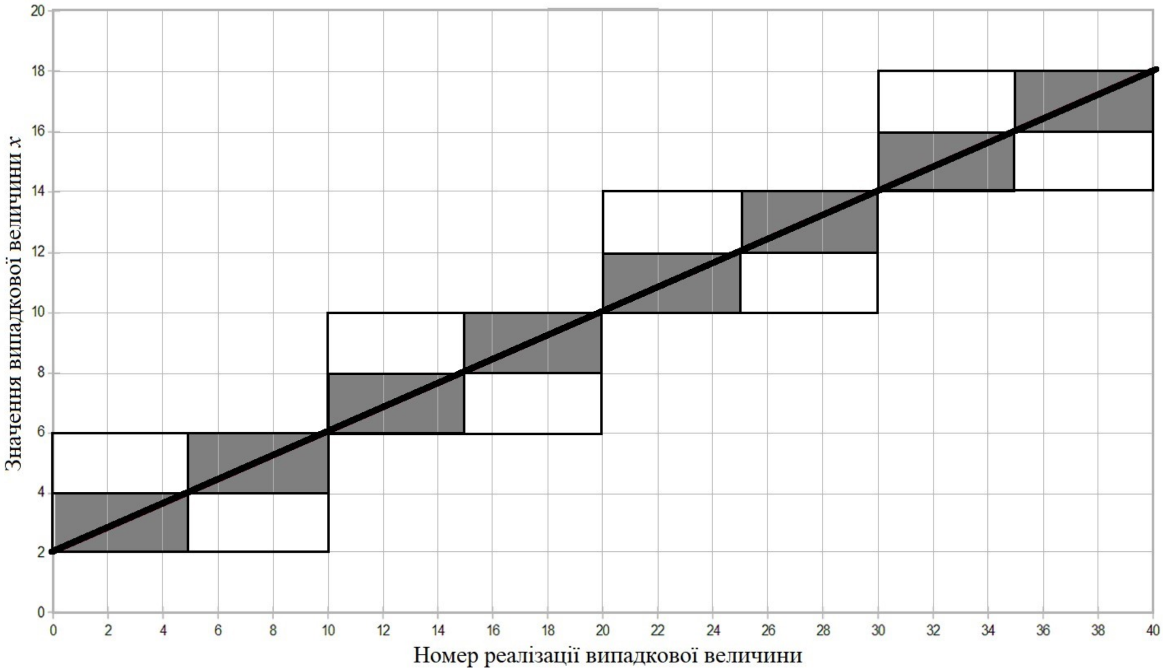

Рисунок 2 – Покриття прямокутниками похилої прямої при *ε*=10 та *ε*=5

Для фігури, яка покриває площину (наприклад, крива Гільберта або Піано), при змінах ε значення площі не змінюється і покриває всю частину площини. Це відповідає фрактальній розмірності площини D=2. Тому фрактальна розмірність виражається через площі покриття [2, 3] за допомогою співвідношення (4), якщо ширину прямокутника змінено в γ раз:

$$D = 2 - \log_\gamma\left(S(\varepsilon\cdot\gamma)/S(\varepsilon)\right). \tag{4}$$

Для значної кількості відліків числової послідовності N, доступна заміна значень висот прямокутників покриття h_k на їх математичне сподівання $M(h_k)$. Але математичне очікування висоти прямокутника залежить від кількості відліків на розбиття ε, і ця залежність є нелінійною. Тому позначимо математичне сподівання висоти прямокутника в залежності від його ширини ε як M(ε), де математичне очікування площі окремого прямокутника виражатиметься як добуток його ширини на очікувану висоту (5):

$$S_k(\varepsilon) = M(\varepsilon)\cdot\varepsilon\,. \tag{5}$$

Тоді матимемо вираз визначення фрактальної розмірності через покриття прямокутниками із формули (2) з врахуванням (5):

$$S(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} S_k(\varepsilon) \Rightarrow \quad S(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} M(\varepsilon)\cdot\varepsilon \Rightarrow \quad S(\varepsilon) = M(\varepsilon)\cdot\varepsilon N_\varepsilon \Rightarrow \quad S(\varepsilon) = M(\varepsilon)\cdot N\,, \tag{6}$$

де N – загальна кількість елементів ряду, націло ділиться на ε (хоча для N>>ε цією вимогою можна знехтувати і приймати неповні останні прямокутники покриття).

Якщо використати отримане співвідношення (6) до значення розмірності, отримаємо:

$$D = 2 - \log_\gamma\left(\frac{M(\varepsilon\cdot\gamma)}{M(\varepsilon)}\right), \tag{7}$$

в якому кількість чисел в реалізації ряду N було скорочено і далі не використовується.

На жаль, математичне сподівання висоти прямокутника (3) не є відомим. Тому отримаємо від математичного сподівання самої величини. Для цього знайдемо ймовірність $q_\varepsilon(h)$ висоти прямокутника для ε=2:

$$q_2(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2p(x)\cdot p(x+h)dx\,, \tag{8}$$

тут використано додатковий множник 2, бо результуюча ймовірність отримується в двох незалежних випадках, коли менше число отримано раніше та пізніше.

Загальний вираз для $q_\varepsilon(h)$ отримується, якщо всі наступні реалізації числа x, по кількості ε-2, будуть розташовані на проміжку [x, x+h]. Для цього ймовірність попадання в цей проміжок $\int_x^{x+h} p(x)dx$ потрібно піднести до степеню ε-2 та помножити на їх можливі комбінації розташування граничних значень x та x+h, в якості котрого виступає біноміальний коефіцієнт $C_\varepsilon^{\varepsilon-2} = \varepsilon(\varepsilon-1)/2$:

$$p_{\varepsilon-2}(x,x+h)=\varepsilon(\varepsilon-1)\left(\int_{x}^{x+h}p(t)dt\right)^{\varepsilon-2}, \tag{9}$$

Тому для $q_\varepsilon(h)$ вираз записується з (8) з врахуванням (9) як наступний інтеграл (10):

$$q_\varepsilon(h)=\varepsilon(\varepsilon-1)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\cdot p(x+h)\left(\int_{x}^{x+h}p(t)dt\right)^{\varepsilon-2}dx\,. \tag{10}$$

Формула (10) по факту надає інформацію про густину розподілу ймовірності висоти прямокутника покриття шириною в ε відліків. Значення виразу не є дійсним при $\varepsilon<2$, бо при одиничні ширині прямокутника, він повинен покривати лише одну точку, тому його висота завжди матиме значення нуля. В інших випадках, нуль та менше відліків взяти не можна, бо кількість відліків ε є натуральним числом.

Тепер, коли є значення розподілу ймовірності ширини прямокутника (10), можна записати значення математичного сподівання цієї висоти (11):

$$M(\varepsilon)=\varepsilon(\varepsilon-1)\cdot\int_{0}^{+\infty}h\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\cdot p(x+h)\left(\int_{x}^{x+h}p(t)dt\right)^{\varepsilon-2}dx\right)dh\,. \tag{11}$$

Для математичного сподівання $M(\varepsilon)$ межі інтегрування взято на проміжку $[0;+\infty]$, бо висота прямокутника не може мати від'ємне значення.

Остаточно, використавши отримане математичне сподівання висоти прямокутника (11) для виразу (7), матимемо оцінку фрактальної розмірності на основі густини розподілу (1):

$$D=2-\log_\gamma\left(\frac{\gamma(\varepsilon\cdot\gamma-1)\cdot\int_{0}^{+\infty}h\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\cdot p(x+h)\left(\int_{x}^{x+h}p(t)dt\right)^{\varepsilon\cdot\gamma-2}dx\right)dh}{(\varepsilon-1)\cdot\int_{0}^{+\infty}h\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\cdot p(x+h)\left(\int_{x}^{x+h}p(t)dt\right)^{\varepsilon-2}dx\right)dh}\right). \tag{12}$$

Іноді вигідно використовувати некратне відношення розбиття, тому більш корисним буде наступний запис виразу (12):

$$D=2-\log_{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_2-1)\cdot\int_{0}^{+\infty}h\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\cdot p(x+h)\left(\int_{x}^{x+h}p(t)dt\right)^{\varepsilon_2-2}dx\right)dh}{\varepsilon_1(\varepsilon_1-1)\cdot\int_{0}^{+\infty}h\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\cdot p(x+h)\left(\int_{x}^{x+h}p(t)dt\right)^{\varepsilon_1-2}dx\right)dh}\right). \tag{13}$$

Формула для отримання математичного сподівання фрактальної розмірності послідовності випадкових чисел з відомою густиною розподілу ймовірності (13) отримана.

Приклад. Розглянемо випадковий процес для якого можливі лише два випадки реалізації випадкового числа, це 0 та 1 з рівними ймовірностями. Для цього приймемо розподіл густини ймовірності (14):

$$p(x) = (\delta(x) + \delta(x-1))/2, \tag{14}$$

де δ є дельта-функція Дірака і має наступні властивості:

$$\delta(x) = 0, x \neq 0; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Тоді $p(x)$=0, крім x=0 та x=1, де функція приймає нескінченні значення, але інтегрування в цих точках дає значення 0,5. В результаті маємо процес рівноймовірної генерації значень 0 та 1.

Припустимо, що було зроблено покриття прямокутниками з шириною ε, тоді прямокутники можуть мати висоту 0 лише тоді, коли всі значення випадкової величини за ε реалізацій співпадають. Таких випадків є два: всі результати дали нуль та всі результати дали одиницю. Кортежі з реалізованих чисел 0 та 1 дають двійкове число зі ε цифр, тому кількість варіантів запису такого числа буде 2^{ε}, з яких лише два є кортежами лише з одиниць чи нулів. Тому ймовірність отримання прямокутника нульової та одиничної висоти складатиме:

$$Q_{\varepsilon}(0) = \frac{2}{2^{\varepsilon}}, \ Q_{\varepsilon}(1) = \frac{2^{\varepsilon}-2}{2^{\varepsilon}}. \tag{15}$$

З ймовірностей отримання висот прямокутників покриття (15), модна записати й математичне сподівання для висоти прямокутника. Завдяки точковій природі розподілу, інтегрування зводиться до пошуку сум двох добутків, для одного з яких величина значення висоти є нульовою:

$$M(\varepsilon) = 0 \cdot \frac{2}{2^{\varepsilon}} + 1 \cdot \frac{2^{\varepsilon}-2}{2^{\varepsilon}} \Rightarrow M(\varepsilon) = 1 - 1/2^{\varepsilon-1}. \tag{16}$$

Скориставшись формулою (7), матимемо вираз для обчислення фрактальної розмірності випадкової послідовності з двома результатами 0 та 1, тобто процесс, який є аналогом підкидання монетки (17):

$$D = 2 - \log_{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\left(\frac{1-2/2^{\varepsilon_2}}{1-2/2^{\varepsilon_1}}\right). \tag{17}$$

На наступному рисунку можна побачити, як змінюється фрактальна розмірність послідовності, якщо розбиття ε_1=ε, ε_2=ε+1 (рис. 3).

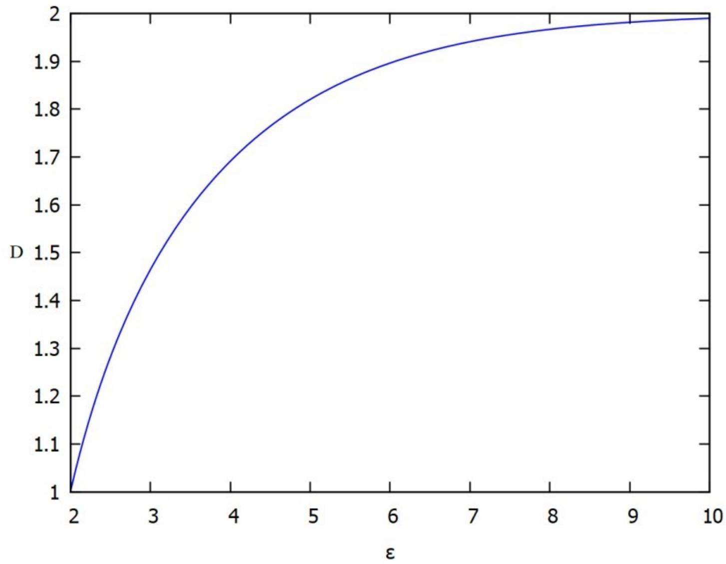

Рисунок 3 – Графік залежності отриманої фрактальної розмірності від довжини розбиття ε

Фактично, формула (17) дозволяє обирати довільне співвідношення розбиття, тому графік зміни фрактальної розмірності можна будувати й для $\varepsilon_1=2$, $\varepsilon_2=\varepsilon+1$ (рис. 4):

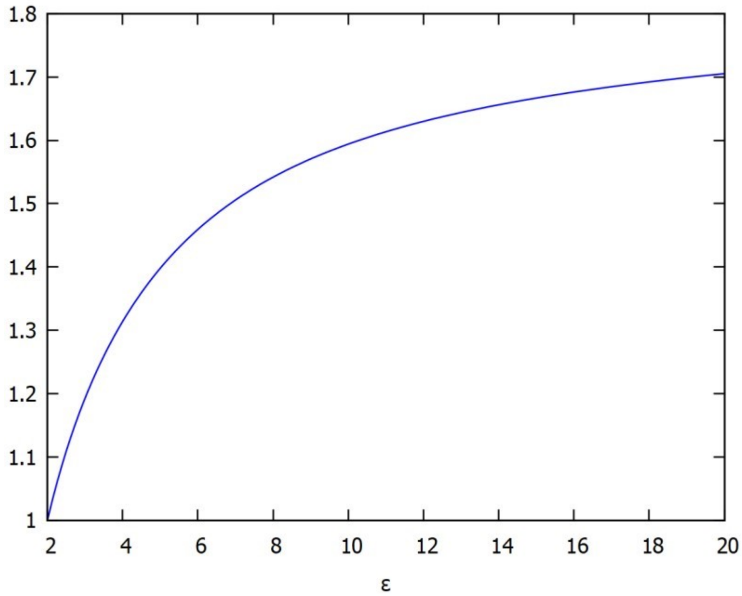

Рисунок 4 – Зростання фрактальної розмірності при фіксації одного розбиття $\varepsilon_1=2$

При цьому можна спостерігати аналогічне, але менш швидке, зростання фрактальної розмірності до межі D=2.

Результат практичної перевірки математичного сподівання фрактальної розмірності при різному розбитті свідчить про залежність фрактальної розмірності від масштабування розбиття. Це означає, що від обраного масштабу розбиття на прямокутники, можна отримати довільне значення розмірності від 1 до 2, що цілком істотно при розглядання граничних випадків. Зокрема, при досить широкому розбитті, коли до прямокутника належить значна кількість елементів числової послідовності, висота прямокутника покриває майже весь дозволений діапазон реалізації випадкових значень; утворюється послідовність майже рівних по висоті прямокутників, що є аналогом двовимірної полоси, яка майже не змінює своєї ширини при збільшенні розбиття. Відповідно до логічної побудови, полоса є двовимірним об’єктом, а вихід з полоси на практиці є забороненим фізичними реальними процесами, в яких не допускається безобмежене зростання сигналу.

Також, залежність фрактальної розмірності від діапазону розбиття означає, що кількість точок вибірки на покриття прямокутником обирається з області зацікавлення конкретної задачі, бо симетрії масштабування для обмежених в діапазоні випадкових чисел немає.

Висновки. Поставлену задачу аналітичного вираження фрактальної розмірності числової послідовності на основі її густини розподілу випадкової величини розв'язано (13). На основі побудованого підходу розглянуто конкретний випадок випадкової бінарної послідовності на якій показано наявність залежності фрактальної розмірності від ширини розбиття послідовності на прямокутники. На основі наявності такої залежності сформульовано вимогу виконувати розбиття в діапазонах, що використовуються для розв'язання конкретних задач. Результати можуть бути використані для покращення моделювання фрактальних випадкових послідовностей, систем масового обслуговування [12], імітування трафіку телекомунікаційних мереж [13].

Список літератури

1. Дубовиков М.М. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов [Текст] / М.М. Дубовиков, А.В. Крянев, Н.В. Старченко // Вестник РУДН, Серия Прикладная и компьютерная математика. – 2004. – Т. 3. – № 1. – С. 30–44.
2. Zmeškal Oldřich, Nežádal Martin, Komendová Barbora, Julínek Martin, Bžatek Tomáš FRACTAL ANALYSIS OF PRINTED STRUCTURE IMAGES // Institute of Physical and Applied Chemistry, of the methods used to perform analysis listed above. Brno University of Technology, Brno, Czech Republic.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы [Текст] / Б. Мандельброт // Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.
4. Кучук Г.А. Аналіз та моделі самоподібного трафіка [Текст] / Г.А. Кучук, О.О. Можаєв, О.В. Воробйов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 9 (35). – С. 173-180
5. Leland W. On the self-similar nature of IP-trafic [Text] / W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 1997. – № 3. – P. 423-431.
6. Кучук Г.А. Метод дослідження фрактального мережного трафіка [Текст] / ГА Кучук // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2005. – Вип. 5 (45). – С. 74-84.
7. Казімірова В.В. Особливості моделювання передачі інформації у комп'ютерній мережі системи автоматичної ідентифікації суден [Текст] / В.В. Казімірова, М.О. Можаєв, В.Є. Кузьменко // Системи обробки інформації. – 2014. – випуск 7 (123). – С. 83-88
8. Малинников В. А. Анализ методов формирования мультифрактальной меры, основанных на вейвлет-обработке экспериментальных данных [Текст] / В. А. Малинников, Д. В. Учаев // Известия вузов. Серия геодезия и аэрофотосъемка. – 2007. – № 6. – С. 57–61.
9. Нич Л.Я. Визначення показника герста за допомого фрактальної розмірності, обчисленої клітинковим методом на прикладі коротких часових рядів [Текст] / Л.Я. Нич, Р.М. Каменський // Вісник Національного університету Львівська політехніка. Інформаційні системи та мережі. – 2015. – Вип. 814. – С. 100-111
10. Романенко І.О. Математична модель розподілу навантаження в телекомунікаційних мережах спеціального призначення [Текст] / І.О. Романенко, Р.М. Животовський, С.М. Петрук, А.В. Шишацький, О.О. Волошин // Системи обробки інформації. – 2017. – № 3(149). – С. 61-71.
11. Воропаєва В.Я. Теорія телетрафіку [Текст] / В.Я. Воропаєва, В.І. Бессараб, В.В. Турупалов, В.В. Червинський. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2011. – 202 с.
12. Рыжиков Ю.П. Алгоритмический подход к задачам массового обслуживания [Текст] : монография / Ю.П. Рыжиков. – СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2013. – 496 с
13. Задорожный В.Н. Аналнтико-имитационные исследования Больших Сетевых структур [Текст] : монография / В.Н. Задорожный. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. – 208 с.
14. Борисов В. Д. Метод фрактального анализа временных рядов [Текст] / Борисов В.Д., Садовой Г.С. // Автометрия. – 2000. – № 6. – С. 10–19.

Referencis

1. Dubovikov, M.M., Krjanev, A.V. & Starchenko, N.V. (2004). Razmernost' minimal'nogo pokrytija i lokal'nyj analiz fraktal'nyh vremennyh rjadov [Dimension of the Minimal Cover and Local Analysis of Fractal Time Series]. *Vestnik RUDN, Serija Prikladnaja i komp'juternaja matematika – RUDN Journal Applied and Computer Mathematics, Vol. 3, 1,* 30-44.
2. Zmeškal, Oldřich & Nežádal, Martin, Komendová, Barbora, Julínek, Martin & Bžatek Tomáš (2003). *FRACTAL ANALYSIS OF PRINTED STRUCTURE IMAGES.* Institute of Physical and Applied Chemistry, of the methods used to perform analysis listed above; Brno University of Technology. Brno, Czech Republic.
3. Mandel'brot, B. (2002). *Fraktal'naja geometrija prirody [Fractal geometry of nature]*. Moskva: Institut komp'juternyh issledovanij.
4. Kuchuk, H.A., Mozhaiev, O.O. & Vorobjov, O.V. (2006). Analiz ta modeli samopodibnoho trafika [Analysis and models of self-similar traffic]. *Avyatsyonno-kosmycheskaia tekhnyka y tekhnolohyia – Aerospace Engineering and Technology*, *9 (35)*, 173-180.
5. Leland, W., Taqqu, M. & Willinger, W. (1997). On the self-similar nature of IP-trafic. *IEEE/ACM Transactions on Networking, 3,* 423-431.
6. Kuchuk, H.A. (2005). Metod doslidzhennia fraktal'noho merezhnoho trafika [The method of researching fractal network traffic]. *Systemy obrobky informatsii – Information Processing Systems.* Kharkov: KhU PS, Vol. 5 (45), 74-84.
7. Kazimirova, V.V., Mozhaiev, M.O. & Kuz'menko, V.Ye. (2014). Osoblyvosti modeliuvannia peredachi informatsii u komp'iuternij merezhi systemy avtomatychnoi identyfikatsii suden [Traffic modeling in computer network of vessel identification automatic system*]. Systemy obrobky informatsii – Information Processing Systems*, *Vol. 7 (123)*, 83-88.
8. Malinnikov, V.A. & Uchaev, D.V. (2007). Analiz metodov formirovanija mul'tifraktal'noj mery, osnovannyh na vejvlet-obrabotke jeksperimental'nyh dannyh [Analysis of methods for forming a multifractal measure based on wavelet processing of experimental data]. *Izvestija vuzov. Serija geodezija i ajerofotos#emka – Scientific journal Izvestia vuzov «Geodesy and aerophotography», 6*, 57–61.
9. Nych, L.Ya. & Kamins'kyj, R.M. (2015). Vyznachennia pokaznyka hersta za dopomoho fraktal'noi rozmirnosti, obchyslenoi klitynkovym metodom na prykladi korotkykh chasovykh [Hurst exponent evaluated via calculated by box-counting method on short time series example fractal dimension]. *Visnyk Natsional'noho universytetu L'vivs'ka politekhnika. Informatsijni systemy ta merezhi – Proceedings Information systems and networks of Lviv Polytechnic National University*, *Vol. 814*, 100-111.
10. Romanenko, I.O., Zhyvotovs'kyj, R.M., Petruk, S.M., Shyshats'kyj, A.V. & O.O. Voloshyn (2017). Matematychna model' rozpodilu navantazhennia v telekomunikatsijnykh merezhakh spetsial'noho pryznachennia [Mathematical model of load distribution in telecommunication networks of special purpose]. *Systemy obrobky informatsii – Information Processing Systems*, *3(149)*, 61-71.
11. Voropaieva, V.Ya., Bessarab, V.I., Turupalov, V.V. & Chervyns'kyj, V.V. (2011). *Teoriia teletrafiku [The theory of teletraffic]*. Donets'k: DVNZ «DonNTU».
12. Ryzhikov, Ju.P. (2013). *Algoritmicheskij podhod k zadacham massovogo obsluzhivanija [Algorithmic approach to the tasks of mass service]*. SPb.: VKA im. A.F. Mozhajskogo.
13. Zadorozhnyj, V.N. (2011). *Analntiko-imitacionnye issledovanija Bol'shih Setevyh struktur: monografija [Analytical simulation studies of large network structures]*. Omsk: Izd-vo OmGTU.
14. Borisov, V.D. & Sadovoj, G.S. (2000). Metod fraktal'nogo analiza vremennyh rjadov [Fractal time series analysis method]. *Avtometrija – Autometry*, *6*, 10–19.

Ganna Dreyeva , Olexandr Dreyev, PhD tech. sci.

Central Ukranian National Technical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

O. Denisenko

Software engineer in Epam Systems, city Kiev, Ukraine

Calculation of the Fractal Dimension of a Numerical Sequence From the Probability Distribution of the Values of Its Elements

In today's works to optimize work of telecommunication systems and networks, it is mandatory to take into account the fractal nature of traffic on the Internet. Inclusion of fractality makes it much better to predict the system parameters to the actual values, so the definition of fractal dimension is an actual and important task. Known criteria for determining the fractal dimension have significant errors and variations for individual implementations, so it is advisable to obtain new methods for evaluating the fractal characteristics of the investigated signals, which is followed in a number of publications, in which methods are presented using wavelet analysis.

The problem of analytical expression of the fractal dimension of a numerical sequence based on its distribution density of a random variable was solved. Based on the constructed approach, we consider a specific case of a random binary sequence in which the dependence of the fractal dimension on the width of the partition of the sequence on the rectangles is shown. Based on the presence of such dependence, a requirement is made to perform partitioning in the ranges used to solve specific problems. The results can be used to improve the simulation of fractal random sequences; mass service systems; simulation of traffic of telecommunication networks.

The result of the practical verification of the mathematical expectation of fractal dimension with different partitions testifies to the dependence of the fractal dimension on the scaling of the partition. This means that from the selected scale of the partition into rectangles, it is possible to get an arbitrary value of the dimension from 1 to 2, which is quite significant when considering the limiting cases. In particular, with a fairly wide division, when a rectangle contains a large number of elements of a numerical sequence, the height of the rectangle covers almost the entire permitted range of the realization of random values; A sequence of almost equal to the height of rectangles is formed, which is an analogue of a two-dimensional strip, which almost does not change its width with increasing partition. According to the logical construction, the strip is a two-dimensional object, and the exit from the band in practice is forbidden by physical real processes in which no unlimited signal growth is allowed.

fractal dimension, numerical sequence, probability distribution, random, ergodic, process

Одержано (Received) 15.05.2018

УДК 004.41:004.056

О.В. Коваленко, доц., канд. техн. наук
Центральноукраїнський національний технічний університет, м.Кропивницький, Україна, E-mail: Clashav@gmail.com

Управління ризиками розробки програмного забезпечення за умови обмеженості коштів виділених на усунення помилок безпеки

В даній роботі задача управління ризиками розробки ПЗ за умови обмеженості коштів (фінансових, технічних та ін.), виділених на усунення помилок безпеки, розглядається у вигляді напівмарківської моделі прийняття рішень для керованого процесу у безперервному часі з критерієм мінімуму витрат на усунення аномалій. Для вирішення задачі пропонується метод управління ризиками розробки ПЗ, який відрізняється від відомих використанням псевдобулевих методів бівалентного програмування з нелінійною цільовою функцією і лінійними обмеженнями для визначення оптимальної стратегії усунення експлуатаційних помилок. Як приклад розглянуті ситуації виникнення помилок безпеки ПЗ і визначена оптимальна стратегія управління для усунення вказаної аномальної ситуації.
розробка програмного забезпечення, управління ризиками, псевдобулевий метод

А. В. Коваленко, доц., канд. техн. наук
Центральноукраинский национальный технический университет, г.Кропивницкий, Украина

Управление рисками разработки программного обеспечения при условии ограниченности средств выделенных на устранение ошибок безопасности

В данной работе задача управления рисками разработки ПО при условии ограниченности средств (финансовых, технических и др.), выделенных на устранение ошибок безопасности, рассматривается в виде полумарковских моделей принятия решений для управляемого процесса в непрерывном времени с критерием минимума затрат на устранение аномалий. Для решения задачи предлагается метод управления рисками разработки ПО, который отличается от известных использованием псевдобулевих методов бивалентного программирования с нелинейной целевой функцией и линейными ограничениями для определения оптимальной стратегии устранения эксплуатационных ошибок. В качестве примера рассмотрены ситуации возникновения ошибок безопасности ПО и определена оптимальная стратегия управления для устранения указанной аномальной ситуации.
разработка программного обеспечения, управления рисками, псевдобулевый метод