МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

КРЕДИТНО-МОДУЛЬНА СИСТЕМА

Методичні вказівки для студентів технічних спеціальностей

КІРОВОГРАД
2011

Конспект лекцій з курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Кредитно модульна система. Методичні вказівки для студентів технічних спеціальностей/ Укл.: Гончаров В.В., Гончарова С.Я., Філімоніхіна І.І. – Кіровоград: КНТУ, 2011.– 147 с.

Методичні вказівки містять курс лекцій з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, теоретичні питання для самоконтролю, задачі та вправи для проведення семінарських занять, індивідуальні та тестові завдання для модульного контролю.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики та фізики.
Протокол № 10 від 19.05.2011 р.

ЗМІСТ

ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ЗА КРЕДИТНО-МОДУЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Модуль І. Матриці. Визначники. Системи лінійних рівнянь.

№ тижня	Теми лекцій	Теми практичних занять	Індивідуальні завдання	Самостійна робота
1	2	3	4	5
1	1. Матриці. *Основні поняття. Дії над матрицями. Транспонування матриць.*	1. Матриці.	№ 1.	1. Матриці.
2	2. Визначники. *Основні поняття. Властивості визначників.*	2. Визначники.	№ 2.	2. Визначники.
3	3. Невироджені матриці. *Основні поняття. Обернена матриця. Ранг матриці.*	3. Невироджені матриці.		3. Невироджені матриці.
4	4. Системи лінійних рівнянь. *Розв’язання невироджених лінійних систем. Розв’язання довільних лінійних систем.*	4. Системи лінійних рівнянь.	№ 3, № 4..	Модульний контроль І.

Модуль ІІ. Векторна алгебра.

1	2	3	4	5
5	5. Вектори. *Лінійні операції над векторами. Розклад вектора за базисом. Лінійні операції над векторами в координатній формі.*	5. Вектори.	№ 5.	5. Вектори.
6	6. Добутки векторів. *Скалярний добуток. Векторний добуток. Мішаний добуток.*	6. Добутки векторів.	№ 6.	Модульний контроль ІІ

Модуль III. Площина. Пряма в просторі і на площині. Лінії другого порядку.

1	2	3	4	5
7	7. Лінії на площині. Поверхні і лінії в просторі.	7. Лінії на площині. Поверхні і лінії в просторі.		7. Лінії на площині. Поверхні і лінії в просторі.
8	8. Площина. Пряма в просторі і на площині. *Загальні рівняння площини і прямої на площині. Канонічні і параметричні рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Рівняння площини, що проходить через три точки. Кут між площинами, кут між прямими, кут між прямою і площиною. Відстань від точки до площини і від точки до прямої на площині.*	8. Площина. Пряма в просторі і на площині.	№ 7, № 8.	8. Площина. Пряма в просторі і на площині.
9	9. Лінії другого порядку. *Еліпс. Гіпербола. Парабола. Еліпс, гіпербола, парабола з осями, паралельними осям координат.*	9. Лінії другого порядку.	№ 9.	Модульний контроль III

Розділ I. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 1

§1. МАТРИЦІ

1.1. Основні поняття

Матрицею (числовою матрицею) називається прямокутна таблиця складена з $m \cdot n$ чисел вигляду

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}. \end{matrix}$$

Матрицю позначають наступним чином:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

або, скорочено, $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, де $i = 1, 2, ..., m$ – номер рядка, $j = 1, 2, ..., n$ – номер стовпця.

Матрицю *A* називають матрицею *розміру* $m \times n$ і записують $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, які складають матрицю, називаються її *елементами.*

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

що містить один стовпчик називається ***матрицею-стовпцем***.

Матриця $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$, що містить один рядок, називається ***матрицею-рядком***.

Матриця розміру 1×1, що складається з одного числа, ототожнюється з цим числом.

Матриці рівні між собою, якщо рівні всі відповідні елементи цих матриць, тобто $A=B$, якщо $a_{ij}=b_{ij}$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною.*** Квадратну матрицю розміру $n\times n$ називають матрицею *n-го порядку*. Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють ***головну діагональ***.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, рівні нулю, називається ***діагональною.***

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі рівні одиниці, називається ***одиничною.*** Її позначають буквою E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

– одинична матриця n-го порядку.

Квадратна матриця називається ***трикутною***, якщо всі елементи, що розташовані по одну сторону від головної діагоналі, рівні нулю.

Матрицю довільних розмірів називають ***трапецієвидною***, якщо вона має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

де $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ відмінні від нуля.

Матриця, всі елементи якої рівні нулю, називається ***нульовою*** і позначається буквою O:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричному численні матриці O і E відіграють роль чисел 0 і 1 в арифметиці.

1.2. Дії над матрицями

Додавання. Дія додавання матриць вводиться тільки для матриць однакових розмірів.

Сумою двох матриць $A_{m\times n}=(a_{ij})$ і $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n}=(c_{ij})$ така, що $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Сума трьох матриць $A+B+C$ – це матриця, яка отримується послідовним додаванням даних матриць, тобто $A+B+C=(A+B)+C$.

Аналогічно визначається $A_1+A_2+...+A_n$ для $n>3$.

Приклад 1.1. Знайти суму $A+B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Множення матриці на число. ***Добутком матриці*** $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на число*** α (або числа α на матрицю $A_{m\times n}$) називається матриця $B_{m\times n}=(b_{ij})$ така, що $b_{ij}=\alpha a_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$.

Добуток матриці A на число α позначається αA або $A\alpha$.

Приклад 1.2. Знайти добуток матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

на число $\alpha=-2$.

Розв'язок.

$$-2A=\begin{pmatrix} -4 & -14 & 0 \\ 10 & -2 & -18 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Матриця $-1A=-A$ називається *протилежною* до матриці A.

Різницю матриць $A-B$ можна визначити як $A-B=A+(-B)$.

Операції додавання матриць і множення матриці на число називають ***лінійними операціями над матрицями*** і мають наступні ***властивості***:

1. $A+B=B+A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $A-A=O$;
5. $1\cdot A=A$;
6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
7. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
8. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$,

де *A, B, C, O* – матриці, α,β – числа.

Множення матриць. Операція множення двох матриць вводиться тільки для випадку, коли *число стовпців першої матриці рівне числу рядків другої матриці*. Такі матриці називаються ***узгодженими***.

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на матрицю*** $B_{n\times p}=(b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times p}=(c_{ik})$ така, що $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}$, де $i=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}$, тобто елемент *i*-го рядка і k-го стовпчика матриці C дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпчика матриці B.

Приклад 1.3. Знайти добуток AB, якщо

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix},\quad B_{3\times2}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$C_{2\times2}=A_{2\times3}B_{3\times2}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+7\cdot0+0\cdot6 & 2\cdot4+7\cdot(-2)+0\cdot(-4) & 2\cdot3+7\cdot(-1)+0\cdot7 \\ -5\cdot1+1\cdot0+9\cdot6 & -5\cdot4+1\cdot(-2)+9\cdot(-4) & -5\cdot3+1\cdot(-1)+9\cdot7 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 49 & -58 & 47 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Якщо A і B квадратні матриці одного порядку, то добутки AB і BA завжди існують. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються *перестановочними.*

Якщо матриця A узгоджена з матрицею B, а матриця B узгоджена з матрицею C, то під добутком ABC трьох матриць розуміємо матрицю, отриману послідовним множенням даних матриць, тобто – $(AB)C$.

Операція множення матриць має ***властивості***:

1. $A \cdot E = E \cdot A = A$;
2. $A \cdot O = O \cdot A = O$;
3. $(AB)C = A(BC)$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
5. $(A + B)C = AC + BC$;
6. $C(A + B) = CA + CB$,

де A, B, C – матриці, E, O – одинична та нульова матриці відповідно, α – число.

Елементарні перетворення матриць. Елементарними перетвореннями матриць є наступні перетворення:

1) множення деякого рядка або стовпця матриці на число відмінне від нуля;
2) додавання до одного рядка або стовпця матриці іншого рядка або стовпця, помноженого на довільне число;
3) перестановка місцями двох рядків або стовпців матриці.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них отримується з іншої за допомогою елементарних перетворень і позначаються $A \sim B$.

1.3. Транспонування матриць

Матриця, отримана з даної заміною кожного її рядка (стовпчика) стовпчиком (рядком) з тим же номером, називається ***транспонованою*** до даної.

Матрицю, транспоновану до матриці A, позначають A^T.

Операція знаходження матриці, транспонованої до даної, називається ***транспонуванням матриці.***

Якщо A – матриця розмірів $m \times n$, то A^T має розміри $n \times m$.

Справедливі наступні ***властивості***:

1. $(A^T)^T = A$;

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$, де A і B – матриці однакових розмірів;

4. $(AB)^T = B^T A^T$, де матриця A узгоджена з матрицею B.

Приклад 1.4. Знайти матрицю, транспоновану до матриці

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -5 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$A^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Теоретичні питання

1.1. Що називається матрицею розмірів $m \times n$?

1.2. Які матриці називаються рівними?

1.3. Яка матриця називається квадратною?

1.4. Яка матриця називається діагональною?

1.5. Яка матриця називається одиничною?

1.6. Яка матриця називається трикутною?

1.7. Яка матриця називається трапецієвидною?

1.8. Яка матриця називається нульовою?

1.9. Які дії над матрицями називаються лінійними?

1.10. Які властивості лінійних операцій над матрицями?

1.11. Які матриці називаються узгодженими?

1.12. Що називається добутком матриці A на матрицю B?

1.13. Які властивості добутку матриць?

1.14. Які перетворення матриць називають елементарними?

1.15. Яка матриця називається транспонованою до даної?

1.16. Які властивості має операція транспонування матриці?

Задачі та вправи

1.1. Вказати розміри матриць:

$$
а)\ \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 8 & 10 & 3 \end{pmatrix};\quad б)\ \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 7 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\quad в)\ \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 16 & 5 \end{pmatrix};\quad г)\ \left(7\right).
$$

1.2. Чому рівні в матриці A елементи a_{41}, a_{22}, a_{32}, *якщо*

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 9 & 5 & 12 \\ 6 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}?
$$

1.3. Вказати, які з матриць

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & -2 \end{pmatrix};
$$

$$
A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_7 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 27 \\ 0 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ A_8 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_9 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

є: а) діагональними; б) одиничними; в) трикутними; г) трапецієвидними?

1.4. Знайти матрицю X, якщо

$$
а)\ -5\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 13 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\quad б)\ X + \begin{pmatrix} 4 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 7 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

1.5. Знайти:

$$
3\cdot B\cdot A - (A+B)^T + 2\cdot E,
$$

$$\text{де } A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Обчислення розіб'ємо на окремі дії:

$$1)\ B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot4+3\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot1+3\cdot(-1)+1\cdot2 & 2\cdot0+3\cdot3+1\cdot6\\ 4\cdot4+5\cdot2+2\cdot0 & 4\cdot1+5\cdot(-1)+2\cdot2 & 4\cdot0+5\cdot3+2\cdot6\\ 3\cdot4+6\cdot2+(-1)\cdot0 & 3\cdot1+6\cdot(-1)+(-1)\cdot2 & 3\cdot0+6\cdot3+(-1)\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 1 & 15\\ 26 & 3 & 27\\ 24 & -5 & 12\end{pmatrix};$$

$$2)\ 3\cdot A\cdot B=3\cdot\begin{pmatrix}14 & 1 & 15\\ 26 & 3 & 27\\ 24 & -5 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42 & 3 & 45\\ 78 & 9 & 81\\ 72 & -15 & 36\end{pmatrix};$$

$$3)\ A+B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4 & 1\\ 6 & 4 & 5\\ 3 & 8 & 5\end{pmatrix};$$

$$4)\ (A+B)^T=\begin{pmatrix}6 & 6 & 3\\ 4 & 4 & 8\\ 1 & 5 & 5\end{pmatrix};$$

$$5)\ 2\cdot E=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix};$$

$$6)\ 3\cdot B\cdot A-(A+B)^T=\begin{pmatrix}42 & 3 & 45\\ 78 & 9 & 81\\ 72 & -15 & 36\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 6 & 3\\ 4 & 4 & 8\\ 1 & 5 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & -3 & 42\\ 74 & 5 & 73\\ 71 & -20 & 31\end{pmatrix};$$

$$7)\ 3\cdot B\cdot A-(A+B)^T+2\cdot E=\begin{pmatrix}36 & -3 & 42\\ 74 & 5 & 73\\ 71 & -20 & 31\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38 & -3 & 42\\ 74 & 7 & 73\\ 71 & -20 & 33\end{pmatrix}.\blacktriangleleft$$

1.6. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 8 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 7\\ 1 & 5 & 4\end{pmatrix}$; *б)* $\begin{pmatrix}1 & 8 & 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ -6\\ 12\\ -3\end{pmatrix}$; *в)* $\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ 0 & 3 & 9\\ 1 & 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 8\end{pmatrix}$.

Лекція 2

§2. ВИЗНАЧНИКИ

2.1. Основні поняття

Квадратній матриці A порядку n можна поставити у відповідність ***число***, яке називається її ***визначником*** або *детермінантом* і позначається $\det A$ або $|A|$, або Δ та обчислюється наступним чином:

1. $n=1$, $A=(a_{11})$:

$$\det A=a_{11}.$$

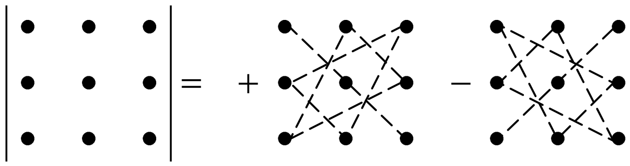
2. $n=2$, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

3. $n=3$, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Для обчислення визначника 3-го порядку зручно користуватися ***правилом трикутників***, яке можна зобразити схематично:



Правило обчислення визначника для матриці порядку $n > 3$ є досить складним для сприйняття і застосування. Проте відомі методи, що дають можливість обчислити визначники високих порядків на основі визначників низьких порядків. Деякі з них розглянемо далі.

Приклад 2.1. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - 5 \cdot 4 = -14 - 20 = -34. \blacktriangleleft$$

Приклад 2.2. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 9 + 3 \cdot 0 \cdot 4 + (-2) \cdot 7 \cdot 6 - 6 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) \cdot 9 - 0 \cdot 7 \cdot 5 =$$

$$= 45 + 0 - 84 - 24 + 54 - 0 = -9. \blacktriangleleft$$

2.2. Властивості визначників

Сформулюємо основні властивості визначників, які справедливі для визначників всіх порядків. Деякі з них пояснимо на визначниках 3-го порядку.

1. *Визначник матриці, транспонованої до даної, рівний визначнику даної матриці*:

Дійсно,

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} = \det A.$$

2. *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) рівні нулю, то визначник рівний нулю*:

Дійсно,

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22}a_{33} + 0 \cdot a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32} \cdot 0 -$$

$$- a_{31}a_{22} \cdot 0 - a_{21} \cdot 0 \cdot a_{33} - a_{32}a_{23} \cdot 0 = 0.$$

3. *Якщо елементи деякого рядка (стовпчика) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника*:

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. *При перестановці двох рядків (стовпчиків) визначник міняє знак*:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. *Якщо визначник має два однакові рядки (стовпчики), то він рівний нулю.*

Дійсно, міняючи місцями однакові рядки (стовпчики) і враховуючи властивість 4, отримаємо $\det A = -\det A = 0$.

6. *Якщо визначник має два пропорційні рядки (стовпчики), то він рівний нулю.*

Дійсно, якщо винести коефіцієнт пропорційності λ за знак визначника, то отримаємо визначник з двома однаковими рядками (стовпчиками).

7. *Визначник, у якого кожний елемент деякого рядка (стовпчика) є сумою двох доданків, рівний сумі двох визначників, у першого з яких у вказаному рядку (стовпчику) стоять перші доданки, а в другому – другі доданки, інші рядки* *(стовпчики) у всіх визначників однакові:*

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{(1)}+a_{12}^{(2)} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}^{(1)}+a_{22}^{(2)} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}^{(1)}+a_{32}^{(2)} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{(1)} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{(2)} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}^{(2)} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. *Якщо матриця B отримана з матриці A додаванням до деякого рядка (стовпчика) іншого рядка (стовпчика), помноженого на число* λ, то $\det B=\det A$.

Ця властивість випливає з властивостей 6, 7.

Подальші властивості визначників пов’язані з поняттями мінору та алгебраїчного доповнення.

Мінором елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається визначник *n-1*-го порядку, отриманий з початкового шляхом викреслювання i-го рядка і j-го стовпчика (на перетині яких знаходиться вибраний елемент). Позначається M_{ij}.

Так, наприклад, якщо $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} квадратної матриці називається число

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

тобто його мінор, взятий із знаком "+", якщо сума $i+j$ – парне число, та із знаком "$-$", якщо сума $i+j$ непарна.

Так, наприклад, $A_{11}=M_{11}$, $A_{12}=-M_{12}$.

9. Розклад визначника за елементами деякого рядка або стовпчика. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпчика) на алгебраїчні доповнення цих елементів:*

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in},$$

де i – номер фіксованого рядка, $1 \le i \le n$, або

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$$

де j – номер фіксованого стовпчика, $1 \le j \le n$.

Проілюструємо і доведемо властивість 9 на прикладі визначника 3-го порядку. Так розклад за елементами 1-го рядка має вигляд

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = \det A.$$

10. *Сума добутків елементів деякого рядка (стовпчика) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпчика) рівна нулю.*

Так, наприклад, якщо $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$$

$$= a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11} \cdot (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{12} \cdot (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{13} \cdot (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) =$$

$$- a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{31}a_{13} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{31}a_{12} = 0.$$

11. *Визначник трикутної матриці (або визначник трикутного вигляду) дорівнює добутку елементів її головної діагоналі:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}.$$

Дійсно, розкладаючи визначник за елементами 1-го стовпчика, отримаємо

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник знову розкладемо за елементами 1-го стовпчика:

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.

Аналогічно можна показати, що

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Властивість 9 – розклад визначника за елементами деякого рядка або стовпчика – дозволяє звести обчислення визначників n-го порядку до обчислення n визначників $n-1$-го порядку.

Використовуючи властивості визначників, можна перетворити визначник n-го порядку так, щоб всі елементи деякого рядка або стовпця, крім можливо одного, дорівнювали нулю. Таким чином, обчислення визначника n-го порядку, якщо він відмінний від нуля, зводиться до обчислення визначника $n-1$-го порядку.

Приклад 2.3. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

розклавши його за елементами деякого рядка або стовпчика.

Розв’язок. Для розкладу визначника зазвичай вибирають той рядок або стовпчик, де є нульові елементи, так як відповідні їм доданки в розкладі будуть рівні нулю, тому розкладемо визначник за елементами 1-го рядка:

$$\begin{vmatrix}3&-2&0\\4&6&-2\\5&3&7\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6&-2\\3&7\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&-2\\5&7\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&6\\5&3\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot(42+6)+2\cdot(28+10)=3\cdot48+2\cdot38=144+76=220\,.\ \blacktriangleleft$$

Приклад 2.4. Обчислити визначник матриці

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\4&6&-2\\5&3&7\end{pmatrix},$$

використовуючи властивості визначників.

Розв’язок. Приведемо визначник до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix}3&-2&0\\4&6&-2\\5&3&7\end{vmatrix}\begin{array}{l}\times(-1)\\ \\ \\ \end{array}=\begin{vmatrix}3&-2&0\\1&8&-2\\5&3&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&8&-2\\3&-2&0\\5&3&7\end{vmatrix}\begin{array}{l}\times(-3)\ \times(-5)\\ \\ \\ \end{array}=$$

$$=-\begin{vmatrix}1&8&-2\\0&-26&6\\0&-37&17\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \times(-1)\end{array}=-\begin{vmatrix}1&8&-2\\0&11&-11\\0&-37&17\end{vmatrix}=-11\cdot\begin{vmatrix}1&8&-2\\0&1&-1\\0&-37&17\end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \times37\\ \end{array}=$$

$$=-11\cdot\begin{vmatrix}1&8&-2\\0&1&-1\\0&0&-20\end{vmatrix}=-11\cdot(-20)=220.\ \blacktriangleleft$$

Теоретичні питання

2.1. *Що називається визначником матриці 1-го порядку?*

2.2. *Що називається визначником матриці 2-го порядку?*

2.3. *Що називається визначником матриці 3-го порядку?*

2.4. *Які основні властивості визначників?*

2.5. *Що називається мінором елемента* a_{ij} *матриці* n*-го порядку?*

2.6. *Що називається алгебраїчним доповненням елемента* a_{ij} *матриці* n*-го порядку?*

2.7. *Які є методи обчислення визначників* n*-го порядку?*

Задачі та вправи

2.1. *Обчислити визначники:*

$$а)\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix};\quad б)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \\ 5 & -6 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.2. *Обчислити визначники, використовуючи властивості визначників:*

$$а)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 8 & 16 & 13 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 8 \end{vmatrix};\quad в)\ \begin{vmatrix} 150 & 128 \\ 500 & 256 \end{vmatrix}.$$

2.3. *Знайти алгебраїчні доповнення елементів* a_{12}, a_{21}, a_{33} *матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.4. *Обчислити визначник*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

трьома способами:

а) за означенням (правило трикутника);

б) розклавши за елементами рядка або стовпчика;

в) звівши за допомогою властивостей до трикутного вигляду.

2.5. *Обчислити визначник:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Використовуючи властивості визначників, зведемо обчислення визначника *4*-го порядку до обчислення визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times(-3)\ \times(-5)\ \times 2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 12 & -5 & -25 \\ 0 & 17 & -19 & -44 \\ 0 & -4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -1\cdot A_{11} = -(-1)^{1+1}M_{11} = -\begin{vmatrix} 12 & -5 & -25 \\ 17 & -19 & -44 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \times 4 \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 12 & -5 & -25 \\ 1 & 9 & -4 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 12 & -5 & -25 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \times 3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & 16 & 5 \\ -4 & 7 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times 4 \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & 16 & 5 \\ 0 & 43 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} = \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 43 & -6 \end{vmatrix} = 16\cdot(-6) - 43\cdot 5 = -96 - 215 = -311. \blacktriangleleft$$

Лекції 3–4

§3. НЕВИРОДЖЕНІ МАТРИЦІ

3.1. Основні поняття

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається ***невиродженою***, якщо її визначник $\det A \neq 0$, в протилежному випадку ($\det A = 0$) матрицю називають ***виродженою***.

Матрицею, ***союзною до матриці*** A, називається матриця

$$C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

3.2. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою до матриці*** A, якщо виконується умова

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Будь-яка невироджена матриця має обернену.*

Доведення. Знайдемо добуток матриць A і C:

$$AC=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+...+a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+...+a_{1n}A_{2n} & \dots & a_{11}A_{n1}+...+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+...+a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21}+...+a_{2n}A_{2n} & \dots & a_{21}A_{n1}+...+a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11}+...+a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21}+...+a_{nn}A_{2n} & \dots & a_{n1}A_{n1}+...+a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}.$$

З властивостей визначників 9, 10 отримаємо

$$AC=\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}=\det A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=\det A\cdot E,$$

тобто

$$AC=\det A\cdot E. \tag{3.2}$$

Аналогічно доводимо, що

$$CA=\det A\cdot E. \tag{3.3}$$

Рівності (3.2), (3.3) перепишемо у вигляді

$$A\cdot\left(\frac{1}{\det A}C\right)=E\,,\quad \left(\frac{1}{\det A}C\right)\cdot A=E\,,\quad (\det A\neq 0)\,.$$

Порівнюючи отримані результати з означенням (3.1), робимо висновок:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}. \qquad (3.4)$$

Властивості оберненої матриці:

1. $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$;

2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

3. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

Приклад 3.1. Вияснити,чи існує обернена матриця A^{-1} до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

і, якщо існує, то знайти її.

Розв'язок. Знаходимо визначник матриці A:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+(-3)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-6+1)-3\cdot(-9+2)-2\cdot(3-4)=5+21+2=28\neq 0\,.$$

Отже, дана матриця невироджена, і A^{-1} існує.

Згідно формули (3.4)

$$A^{-1}=\frac{1}{28}\cdot C=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів даної матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6+1) = 5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-3-4) = 7; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6+1) = -7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11.$$

Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 7 & -7 & -7 \\ 7 & 1 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28} \\ \frac{7}{28} & \frac{-7}{28} & \frac{-7}{28} \\ \frac{7}{28} & \frac{1}{28} & \frac{-11}{28} \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{7}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28} \\ \frac{7}{28} & \frac{-7}{28} & \frac{-7}{28} \\ \frac{7}{28} & \frac{1}{28} & \frac{-11}{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 7 & -7 & -7 \\ 7 & 1 & -11 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix} 3\cdot 7 + 2\cdot 7 + (-1)\cdot 7 & 3\cdot 5 + 2\cdot(-7) + (-1)\cdot 1 & 3\cdot 1 + 2\cdot(-7) + (-1)\cdot(-11) \\ 1\cdot 7 + (-3)\cdot 7 + 2\cdot 7 & 1\cdot 5 + (-3)\cdot(-7) + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-3)\cdot(-7) + 2\cdot(-11) \\ 2\cdot 7 + 1\cdot 7 + (-3)\cdot 7 & 2\cdot 5 + 1\cdot(-7) + (-3)\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot(-7) + (-3)\cdot(-11) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Також

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{7}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28}\\ \frac{7}{28} & \frac{-7}{28} & \frac{-7}{28}\\ \frac{7}{28} & \frac{1}{28} & \frac{-11}{28}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 7 & -7 & -7\\ 7 & 1 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}7\cdot3+5\cdot1+1\cdot2 & 7\cdot2+5\cdot(-3)+1\cdot1 & 7\cdot(-1)+5\cdot2+1\cdot(-3)\\ 7\cdot3-7\cdot1-7\cdot2 & 7\cdot2-7\cdot(-3)-7\cdot1 & 7\cdot(-1)-7\cdot2-7\cdot(-3)\\ 7\cdot3+1\cdot1-11\cdot2 & 7\cdot2+1\cdot(-3)-11\cdot1 & 7\cdot(-1)+1\cdot2-11\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{28}\cdot\begin{pmatrix}28 & 0 & 0\\ 0 & 28 & 0\\ 0 & 0 & 28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E. \blacktriangleleft$$

3.3. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розмірів $m\times n$:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Виділимо в ній k рядків і k стовпців $(k\le\min(m,n))$. З елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, складемо визначник k-го порядку. Всі такі визначники називаються ***мінорами*** даної ***матриці.*** (Відмітимо, що таких мінорів можна скласти $C_m^k\cdot C_n^k$ штук, де $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сполучень з n елементів по k).

Найбільший з порядків мінорів даної матриці, відмінних від нуля, називають ***рангом матриці*** і позначають $r,\ r(A),\ \mathrm{rang}A$.

Очевидно, що $0\le r\le\min(m,n)$.

Мінор, порядок якого визначає ранг, називається ***базисним.*** Позначатимемо його $M_б$. У ненульової матриці може бути декілька базисних мінорів.

Приклад 3.2. Використовуючи означення, знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

і вказати базисні мінори.

Розв'язок. Серед мінорів 1-го порядку (елементів матриці) є відмінні від нуля, отже, $r \geq 1$. Серед мінорів 2-го порядку є відмінні від нуля, наприклад:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15 \neq 0.$$

Отже, $r \geq 2$. Всі мінори 3-го порядку рівні нулю. Таким чином, $r = 2$.

В якості базисного мінору можна взяти

$$M_б = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \quad \text{або} \quad M_б = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \neq 0. \blacktriangleleft$$

Відмітимо ***властивості*** рангу матриці:

1. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.
2. Якщо викреслити з матриці нульовий рядок або стовпчик, то її ранг не зміниться.
3. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.

Неважко показати, що за допомогою елементарних перетворень будь-яку ненульову матрицю A можна привести до трапецієвидного вигляду:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1r} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2r} & \ldots & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{rr} & \ldots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $b_{11}, \; b_{12}, \; \ldots, \; b_{rr}$ відмінні від нуля.

Викреслимо в матриці B рядки, всі елементи яких рівні нулю. Ранг отриманої матриці, що складається з r рядків, рівний r, так як мінор порядку r, що стоїть у верхньому лівому куті, відмінний від нуля. Отже, і ранг матриці *B* рівний r – кількості ненульових рядків.

Так як матриця *B* отримана з матриці *A* шляхом елементарних перетворень, то ранг матриці *A* теж рівний r.

Приклад 3.3. Знайти ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. За допомогою елементарних перетворень зведемо дану матрицю до трапецієвидного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \quad \times(-5) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & 15 & -25 \\ 0 & 19 & 19 & -38 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 1/19 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & 15 & -25 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 12 & 15 & -25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-12) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг отриманої матриці рівний трьом, а отже і ранг даної матриці рівний трьом. ◀

Теоретичні питання

3.1. *Яка матриця називається невиродженою?*

3.2. *Яка матриця називається союзною?*

3.3. *Яка матриця називається оберненою?*

3.4. *Для якої матриці існує обернена?*

3.5. *Запишіть формулу, за якою знаходиться обернена матриця.*

3.6. *Які властивості оберненої матриці?*

3.7. *Що називається мінором матриці?*

3.8. *Що називається рангом матриці?*

3.9. *Що називається базисним мінором матриці?*

3.10. Як знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень?

Задачі та вправи

3.1. Знайти матриці, обернені до даних, якщо вони існують:

$$а)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix};\quad б)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix};\quad в)\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix};\quad г)\begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ -8 & 7 & -2 \\ 12 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.2. Знайти ранг матриці та вказати один із базисних мінорів:

$$а)\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -8 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix};\quad б)\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix};\quad в)\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

§4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Основні поняття

Системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

де числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, називаються ***коефіцієнтами системи***, числа b_i – ***вільними членами***; x_j – ***невідомі.***

Матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

складена з коефіцієнтів при невідомих системи (4.1), називається ***матрицею*** або ***основною матрицею системи***, а матриця

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

отримана з матриці A дописуванням стовпця з вільних членів, називається ***розширеною матрицею системи***.

Систему (4.1) зручно записувати ***в матричній формі***:

$$AX=B,$$

де A – матриця системи,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця-стовпчик з невідомих x_j,

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матриця-стовпчик з вільних членів b_i.

Добуток матриць AX визначений, так як матриця A узгоджена з матрицею X.

Впорядкована система чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$ називається ***розв'язком системи*** (4.1), якщо кожне з рівнянь системи перетворюється в правильну рівність після підстановки замість $x_1, x_2, ..., x_n$ відповідних чисел $c_1, c_2, ..., c_n$.

Розв'язок $(c_1, c_2, ..., c_n)$ можна записати у вигляді матриці-стовпця

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок і ***невизначеною***, якщо вона має більше одного розв'язку. В останньому випадку кожний її розв'язок називається ***частинним розв'язком системи.*** Сукупність всіх частинних розв'язків системи називається ***загальним розв'язком.***

Розв'язати систему – означає вияснити, сумісна вона чи несумісна, і у випадку сумісності знайти її загальний розв'язок.

Дві системи називаються ***еквівалентними (рівносильними)***, якщо вони мають один і той же загальний розв'язок.

Система лінійних рівнянь називається ***однорідною***, якщо всі вільні члени рівні нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Однорідна система завжди сумісна, так як

$$C=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

є розв'язком системи. Цей розв'язок називається ***нульовим*** або ***тривіальним***.

Система (4.2), крім тривіального, може мати і інші розв'язки (нетривіальні).

Елементарними перетвореннями системи назвемо наступні перетворення:

1) множення деякого рівняння системи на число відмінне від нуля;

2) додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на

довільне число;

3) перестановка місцями двох рівнянь системи.

При елементарних перетвореннях системи відповідні елементарні перетворення зручно виконувати над рядками розширеної матриці системи.

4.2. Розв'язання невироджених лінійних систем

Нехай дана система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4.3}$$

або в матричній формі $AX = B$.

Основна матриця *A* такої системи квадратна. Визначник цієї матриці

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається ***визначником системи*** (4.3).

Якщо визначник системи відмінний від нуля, то система називається ***невиродженою***, в протилежному випадку – ***виродженою***.

Знайдемо розв'язок даної системи рівнянь у випадку, коли $\Delta \neq 0$. В цьому випадку для матриці *A* існує обернена матриця A^{-1}.

Помножимо обидві частини рівняння $AX = B$ зліва на матрицю A^{-1}, отримаємо $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \tag{4.4}$$

Знаходження розв'язку системи за формулою (4.4) називають ***матричним способом розв'язку системи***.

Матричну рівність (4.4) запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots + A_{n1} \cdot b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \dots + A_{n2} \cdot b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \dots + A_{nn} b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$x_1 = \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \dots + A_{n1} \cdot b_n}{\Delta};$$

$$x_2 = \frac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \dots + A_{n2} \cdot b_n}{\Delta};$$

…………………………………..

$$x_n = \frac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \dots + A_{nn} \cdot b_n}{\Delta}.$$

Сума $A_{11} \cdot b_1 + A_{21} b_2 + \dots + A_{n1} b_n$ є розкладом визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами першого стовпчика. Визначник Δ_1 отримується з визначника Δ шляхом заміни першого стовпчика стовпчиком вільних членів.

Таким чином, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогічно: $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, де Δ_2 – отриманий з Δ шляхом заміни другого стовпчика коефіцієнтів стовпчиком вільних членів; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формули

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = \overline{1, n} \tag{4.5}$$

називаються ***формулами Крамера.***

Таким чином, невироджена система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний розв'язок, який може бути знайденим матричним способом (4.4) або за формулами Крамера (4.5).

Приклад 4.1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \end{cases}$$

а) матричним способом; б) за формулами Крамера.

Розв'язок. а) Матриця системи має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$-(-3) \cdot 2 \cdot 3 = 6 + 8 - 3 + 8 + 1 + 18 = 38 \neq 0.$$

Отже, система невироджена.

Обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{38} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}=2+6=8; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-(-1+3)=-2;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-(-1-8)=9; \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-3-4=-7;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-3+8=5; \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-(-9-4)=13;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=2+2=4; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(6-1)=-5;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6-1=-7.$$

Тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{38}\cdot\begin{pmatrix}8 & -2 & 4\\ 9 & -7 & -5\\ 5 & 13 & -7\end{pmatrix}.$$

За формулою (4.4)

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{38}\cdot\begin{pmatrix}8 & -2 & 4\\ 9 & -7 & -5\\ 5 & 13 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 5\end{pmatrix}=\frac{1}{38}\cdot\begin{pmatrix}8\cdot 2-2\cdot(-1)+4\cdot 5\\ 9\cdot 2-7\cdot(-1)-5\cdot 5\\ 5\cdot 2+13\cdot(-1)-7\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{38}\cdot\begin{pmatrix}38\\ 0\\ -38\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{cases}3\cdot 1+1\cdot 0-1=2,\\ 1-2\cdot 0+2\cdot(-1)=-1,\\ 4\cdot 1-3\cdot 0-(-1)=5.\end{cases}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

б) За формулами (4.5) $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Знайдемо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 38 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 - 5 \cdot (-2) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$- (-3) \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 10 + 3 + 10 - 1 + 12 = 38;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 3 + 16 + 5 + 4 + 2 - 30 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \cdot 2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 5 -$$

$$- (-3) \cdot (-1) \cdot 3 = -30 - 4 - 6 + 16 - 5 - 9 = -38.$$

Таким чином, $x_1 = \dfrac{38}{38} = 1$; $x_2 = \dfrac{0}{38} = 0$; $x_3 = \dfrac{-38}{38} = -1$.

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. ◀

4.3. Розв'язання довільних лінійних систем. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай дана довільна система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Відповідь на питання щодо сумісності цієї системи дає терема Кронекера-Капеллі:

Теорема 4.1. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи рівний рангу основної матриці.*

Приймемо її без доведення.

Правила знаходження всіх розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь випливають з наступних теорем:

Теорема 4.2. *Якщо ранг сумісної системи рівний кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.*

Теорема 4.3. *Якщо ранг сумісної системи менший кількості невідомих, то система має безліч розв'язків.*

Правило розв'язання довільних лінійних систем.

1. Знайти ранги основної і розширеної матриць системи. Якщо $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несумісна.
2. Якщо $r_A = r_{\tilde{A}} = r$, то система сумісна. Знайти базисний мінор порядку r. Взяти r рівнянь, з коефіцієнтів яких складений базисний мінор (інші рівняння відкинути). Невідомі, коефіцієнти при яких входять в базисний мінор, називають ***базисними*** або ***основними*** і залишають зліва, а інші $n-r$ невідомих називають ***вільними*** або ***неосновними*** і переносять в праві частини рівнянь.
3. Виразити базисні невідомі через вільні. Отримаємо загальний розв'язок системи.
4. Надаючи вільним невідомим довільних значень, отримаємо відповідні значення базисних невідомих. Таким чином можна знайти частинні

розв'язки системи рівнянь.

4.4. Розв'язання лінійних систем методом Гауса

Універсальним методом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гауса, який полягає в послідовному виключенні змінних.

Нехай дана система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.6}$$

Процес розв'язання за методом Гауса складається з двох етапів. На першому етапі (прямий хід) система зводиться до ступінчастого (зокрема, до трикутного) вигляду.

Наведена нижче система має ступеневий вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

де $k \le n,\ a_{ii} \ne 0,\ i = \overline{1,k}$.

На другому етапі (обернений хід) йде послідовне знаходження невідомих з цієї ступінчастої системи.

Опишемо метод Гауса детальніше.

Прямий хід.

Вважатимемо, що елемент $a_{11} \ne 0$ (якщо $a_{11} = 0$, то першим в системі запишемо рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від нуля).

Перетворимо систему (4.6), виключивши невідому x_1 з усіх рівнянь, крім першого, використовуючи елементарні перетворення системи. Для цього помножимо обидві частини першого рівняння на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ і додамо почленно до другого рівняння системи. Потім помножимо обидві частини першого рівняння на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ і додамо до третього рівняння системи. Продовжуючи цей процес, отримаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad .... \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_k + ... + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

де $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$, $i, j = \overline{2, m},$ – нові значення коефіцієнтів і вільних членів, які отримуються після першого кроку.

Аналогічно, вважаючи $a_{22}^{(1)} \neq 0$, виключаємо невідому x_2 з усіх рівнянь системи, крім першого і другого, і так далі. Продовжуємо цей процес поки це можливо.

Якщо в процесі приведення системи (4.6) до ступінчастого вигляду з'являться нульові рівняння, тобто рівняння вигляду $0 = 0$, то їх відкидаємо. Якщо ж з'являться рівняння вигляду $0 = b_i$, $b_i \neq 0$, то система несумісна.

Обернений хід.

Розв'язуємо ступінчасту систему, яка, взагалі, має безліч розв'язків. В останньому рівнянні цієї системи виражаємо першу невідому x_k через інші невідомі $x_{k+1},...,x_n$. Потім підставляємо значення x_k в передостаннє рівняння системи і виражаємо невідому x_{k-1} через невідомі $x_{k+1},...,x_n$; потім знаходимо $x_{k-2},...,x_1$. Надаючи вільним невідомим $x_{k+1},...,x_n$ довільних значень, отримаємо безліч розв'язків системи.

Зауваження.

1. Якщо ступінчаста система виявиться трикутною, тобто $k = n$, то початкова система має єдиний розв'язок. З останнього рівняння знаходимо x_n, з передостаннього рівняння x_{n-1}, далі, піднімаючись по системі вверх, знаходимо всі інші невідомі $x_{n-2},...,x_1$.

2. На практиці зручно замість перетворень системи виконувати елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи, тобто приводити її до трапецієвидного вигляду. Зручно, щоб коефіцієнт a_{11} дорівнював 1 або -1 (переставляємо рядки або множимо рядок на $\dfrac{1}{a_{11}}$, $a_{11} \neq 0$).

Теоретичні питання

4.1. *Яка система називається лінійною?*

4.2. *Що називається основною матрицею і розширеною матрицею системи m лінійних рівнянь з n невідомими?*

4.3. *Що називається розв'язком системи m лінійних рівнянь з n невідомими?*

4.4. *Яка система лінійних рівнянь називається сумісною і яка – несумісною?*

4.5. *Яка система лінійних рівнянь називається визначеною і яка – невизначеною?*

4.6. *Які системи називаються еквівалентними?*

4.7. *Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?*

4.8. *Які перетворення системи називають елементарними?*

4.9. *Яка система лінійних рівнянь називається невиродженою і яка – виродженою?*

4.10. *Скільки розв'язків має невироджена система?*

4.11. *Запишіть в матричному вигляді розв'язок невиродженої системи* $AX = B$.

4.12. *Запишіть формули Крамера.*

4.13. *Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.*

4.14. *В якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок?*

4.15. *В якому випадку система лінійних рівнянь має безліч розв'язків?*

4.16. *Яке правило розв'язання довільних лінійних систем?*

4.17. *В чому полягає метод Гауса?*

З а д а ч і т а в п р а в и

В задачах 4.1–4.2 розв'язати системи: а) матричним способом; б) за формулами Крамера.

4.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$

4.3. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + \qquad 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-2) \; \times(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Отримали $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$. Так як $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несумісна. ◀

4.4. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 3 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 4 & 4\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-2)\quad \times(-4)\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -8 & 0\\ 0 & 5 & -8 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1)\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & -8 & 0\end{array}\right)$$

Отримали $r_A = r_{\tilde{A}} = r = 2$. Отже, система сумісна.

Кількість невідомих – $n = 3$.

Так як $r < n$, то система має безліч розв’язків.

В якості базисного мінора можна взяти, наприклад, мінор

$$M_б = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Тоді базисними будуть невідомі x_1, x_2, а x_3 – вільна.

Дана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + 3x_3 = 1,\\ \qquad 5x_2 - 8x_3 = 0.\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}x_1 - x_2 = 1 - 3x_3,\\ \qquad 5x_2 = 8x_3.\end{cases}$$

За методом Гауса знаходимо

$$\begin{cases}x_2 = \dfrac{8x_3}{5},\\ x_1 = \dfrac{8x_3}{5} - 3x_3 + 1 = \dfrac{5-7x_3}{5}.\end{cases}$$

Покладемо $x_3 = c,\ c \in R$, тоді множина розв’язків системи має вигляд

$$\left(\frac{5-7c}{5};\frac{8c}{5};c\right).$$

Перевірка:

$$\begin{cases} \dfrac{5-7c}{5} - \dfrac{8c}{5} + 3c = \dfrac{5-7c-8c+15c}{5} = 1, \\ 2 \cdot \dfrac{5-7c}{5} + 3\dfrac{8c}{5} - 2c = \dfrac{10-14c+24c-10c}{5} = 2, \\ 4 \cdot \dfrac{5-7c}{c} + \dfrac{8c}{5} + 4c = \dfrac{20-28c+8c+20c}{5} = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} \dfrac{5-7c}{5} \\ \dfrac{8c}{5} \\ c \end{pmatrix}$, $c \in R$. ◀

4.5. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок. Знаходимо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)\end{array} \begin{array}{l} \times(-2)\ \times(-3)\ \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-7)\ \times(-7) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times(-1/3) \\ \times(-1/5) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Отримали $r_A = r_{\tilde{A}} = r = 3$. Отже, система сумісна.

Кількість невідомих – $n = 3$.

Так як $r = n = 3$, то система має єдиний розв'язок.

Дана система еквівалентна системі:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ \qquad x_2 = 1, \\ \qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

За методом Гауса знаходимо

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_1 = 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1. \end{cases}.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 = 4, \\ 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1, \\ 3 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 1 = 7, \\ 1 - 1 + 2 \cdot 1 = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ◄

4.6. Розв'язати систему методом Гауса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язок.

Прямий хід. За допомогою елементарних перетворень зведемо розширену матрицю системи до трапецієвидного вигляду:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&1&7\\1&-1&1&-2\\2&3&-3&11\\4&1&-1&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\4&2&1&7\\2&3&-3&11\\4&1&-1&7\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-4)\ \times(-2)\ \times(-4)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&6&-3&15\\0&5&-5&15\\0&5&-5&15\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times 1/3\\ \times 1/5\\ \times 1/5\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&1&-1&3\\0&2&-1&5\\0&1&-1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \times(-2)\ \times(-1)\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&1&-1&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&1&-1&3\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

Цій матриці відповідає система:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=-2,\\ \qquad x_2-x_3=3,\\ \qquad\qquad x_3=-1.\end{cases}$$

Обернений хід. Знаходимо

$$\begin{cases}x_3=-1,\\ x_2=3+x_3=3-1=2,\\ x_1=-2+x_2-x_3=-2+2-(-1)=1.\end{cases}.$$

Перевірка:

$$\begin{cases}4\cdot 1+2\cdot 2-1=7,\\ 1-2-1=-2,\\ 2\cdot 1+3\cdot 2-3\cdot(-1)=11,\\ 4\cdot 1+2-(-1)=7.\end{cases}$$

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. ◀

Розділ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 5

§5. ВЕКТОРИ

5.1. Основні поняття

Вектор – це направлений відрізок, тобто відрізок, який має певну довжину і певний напрямок. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначають $\overrightarrow{AB}$. Часто вектор позначають однією буквою $\overline{a}$. Вектор $\overline{BA}$ називають ***протилежним*** до вектора $\overline{AB}$. Вектор протилежний до вектора $\overline{a}$ позначають $-\overline{a}$.

Довжиною або ***модулем вектора*** $\overline{AB}$ називається довжина відрізка, на якому побудований вектор, і позначається $\left|\overline{AB}\right|$ або $|\overline{a}|$.

Вектор, довжина якого рівна нулю, називається ***нульовим*** і позначається $\overline{0}$. Нульовий вектор напрямку не має.

Вектор, довжина якого рівна одиниці, називається ***одиничним*** і позначається $\overline{e}$. Одиничний вектор, напрямок якого співпадає з напрямком вектора $\overline{a}$, називається ***ортом*** вектора $\overline{a}$ і позначається $\overline{a}_0$.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Позначають $\overline{a} \,||\, \overline{b}$. Колінеарні вектори можуть бути направлені однаково або протилежно. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

За ***кут між векторами*** $\overline{a}$ і $\overline{b}$ приймають кут, величина якого не перевищує π і позначають $(\overline{a},\overset{\wedge}{\overline{b}})$ (рис. 5.1):

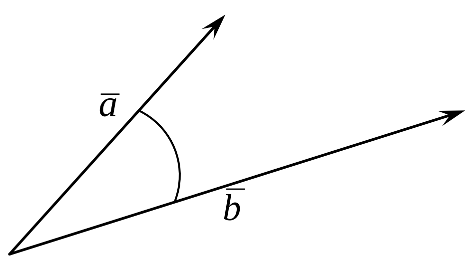


Рис. 5.1

Два вектори називаються ***ортогональними***, якщо кут між ними рівний $\pi/2$.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково направлені і їх довжини рівні. Позначають $\overline{a} = \overline{b}$.

З означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора розміщувати в будь-якій точці простору.

Всі рівні вектори називаються ***вільним вектором.***

Три вектори в просторі називаються ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Якщо серед трьох векторів хоча б один нульовий або два колінеарні, то такі вектори компланарні.

5.2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами називають додавання і множення векторів на число.

Нехай $\overline{a} = \overline{AB}$ і $\overline{b} = \overline{BC}$ – два довільні вектори (рис. 5.2). Тоді вектор $\overline{c} = \overline{AC}$ називається ***сумою векторів*** $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та позначається $\overline{a} + \overline{b}$. Це правило додавання векторів називають ***правилом трикутника***.

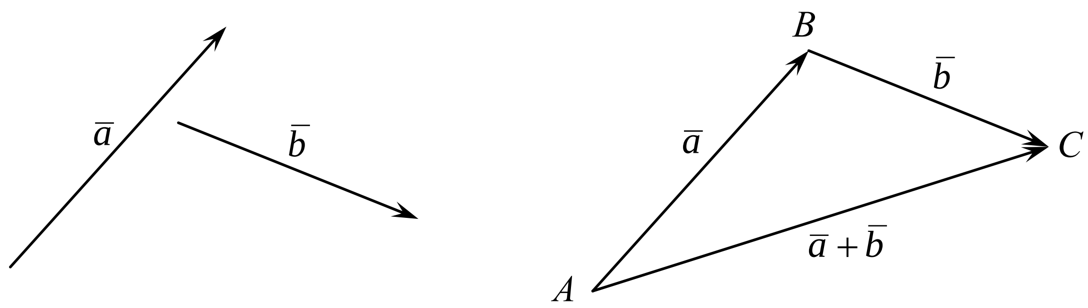


Рис. 5.2

Суму двох векторів можна знайти і за ***правилом паралелограма*** (рис. 5.3).

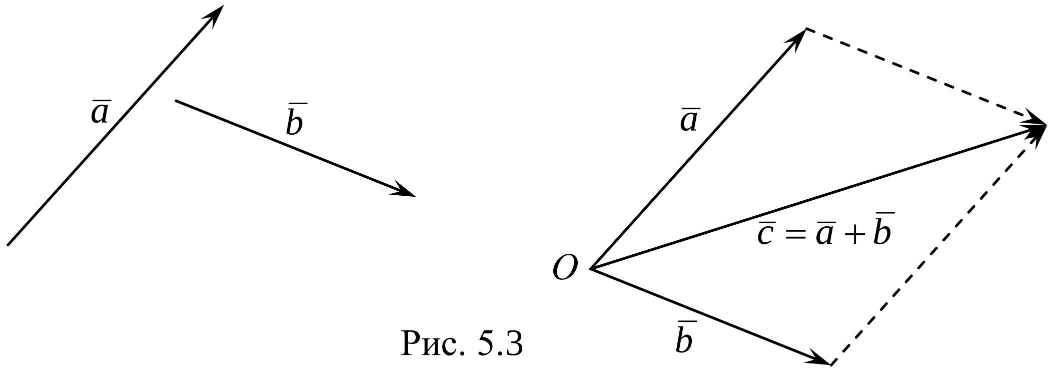


Рис. 5.3

Під сумою $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ трьох векторів розуміють вектор, отриманий послідовним додаванням даних векторів: $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

Аналогічно визначається сума *n* векторів.

Різницею $\bar{a}-\bar{b}$ векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор, рівний сумі векторів $\bar{a}$ і $-\bar{b}$: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$.

Відмітимо, що в паралелограмі, побудованому на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, одна направлена діагональ є їх сумою, а інша – різницею (рис. 5.4).

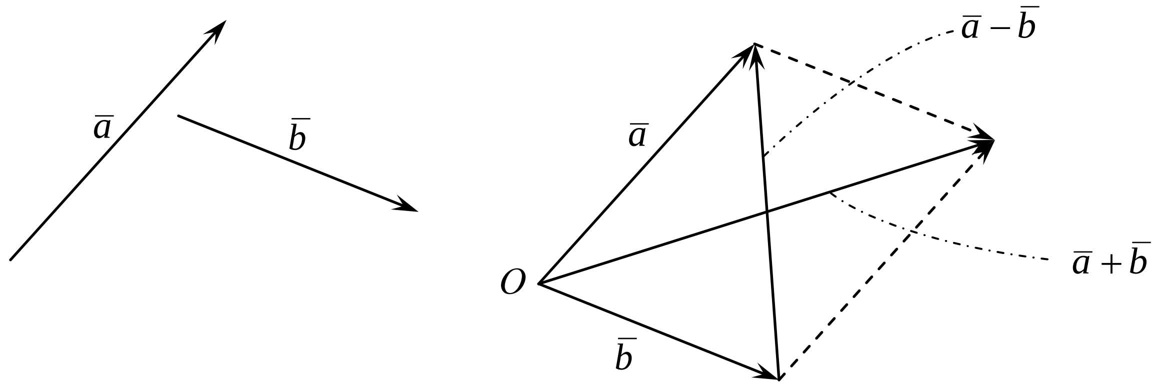


Рис. 5.4

Добутком вектора $\bar{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\bar{a}$ або $\bar{a}\lambda$, довжина якого рівна $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, має напрямок вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda>0$ і протилежно направлений, якщо $\lambda<0$.

З означення добутку вектора на число випливають ***властивості*** цього ***добутку:***

1) якщо $\bar{b}=\lambda\bar{a}$, то $\bar{a}\parallel\bar{b}$ і навпаки, якщо $\bar{a}\parallel\bar{b}$ $(\bar{a}\neq\bar{0})$, то при деякому λ вірна рівність $\bar{b}=\lambda\bar{a}$;

2) $\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\bar{a}_0$, тобто кожний вектор рівний добутку його модуля на орт.

Властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;

2. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$;

3. $\lambda_1(\lambda_2\bar{a})=\lambda_1\lambda_2\bar{a}$;

4. $(\lambda_1+\lambda_2)\bar{a}=\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{a}$;

5. $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$.

Ці властивості дозволяють проводити перетворення в лінійних операціях над векторами так, як це робиться в алгебрі: доданки міняти місцями, вводити дужки, групувати, виносити за дужки як скалярні, так і векторні множники.

5.3. Розклад вектора за базисом

Нехай дано вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$.

Вектор

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – числа,

називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – ***коефіцієнтами*** цієї комбінації.

Якщо вектор $\bar{a}$ представлений у вигляді лінійної комбінації векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, тобто $\bar{a} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$, то кажуть, що ***вектор*** $\bar{a}$ ***розкладений за векторами*** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$.

Базисом на площині назвемо два ненульових, неколінеарних вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ цієї площини, взятих в певному порядку.

Нехай на площині заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Доведемо, що будь-який вектор $\bar{a}$ цієї площини можна єдиним чином розкласти за базисними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Розглянемо можливі випадки:

1) Вектор $\bar{a}$ колінеарний одному з базисних векторів, наприклад, $\bar{e}_1$. Тоді за властивостями добутку вектора на число існує таке число α_1, що $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1$ або $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + 0\bar{e}_0$ і такий розклад єдиний.

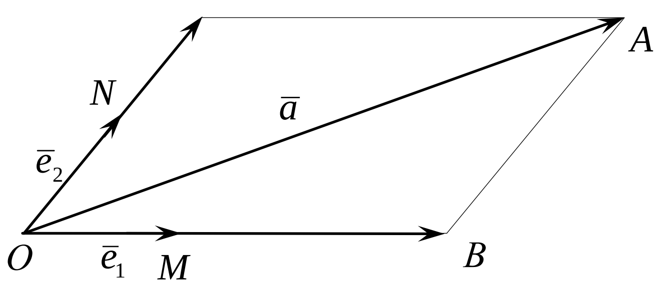


Рис. 5.5

2) Вектор $\bar{a}$ не колінеарний ні одному з базисних векторів. Зобразимо три вектори $\bar{e}_1 = \overline{OM}$, $\bar{e}_2 = \overline{ON}$, $\bar{a} = \overline{OA}$ (рис. 5.5). Очевидно, що $\bar{a} = \overline{OA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BA}$, де $\overline{OB}$ і $\overline{BA}$ колінеарні відповідно векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, а отже існують такі числа α_1 і α_2, що $\overline{OB} = \alpha_1 \bar{e}_1$, $\overline{BA} = \alpha_2 \overline{e_2}$ і

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2. \tag{5.1}$$

Коефіцієнти α_1 і α_2 розкладу (5.1) називаються ***координатами вектора*** $\bar{a}$ ***в базисі*** $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і записують $\bar{a}\,(\alpha_1, \alpha_2)$.

Таким чином, кожному вектору на площині в заданому базисі відповідає єдина пара чисел, взятих в певному порядку, і навпаки, кожній парі чисел, взятих в певному порядку, відповідає в заданому базисі єдиний вектор на площині.

Базисом в просторі назвемо три некомпланарних вектори, взятих в певному порядку.

Нехай в просторі заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Доведемо, що будь-який вектор $\bar{a}$ можна єдиним чином розкласти за базисними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Розглянемо можливі випадки:

1) Вектор $\bar{a}$ і два базисних вектори, наприклад, $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ компланарні. Як показано вище, $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$ або $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + 0\bar{e}_3$.

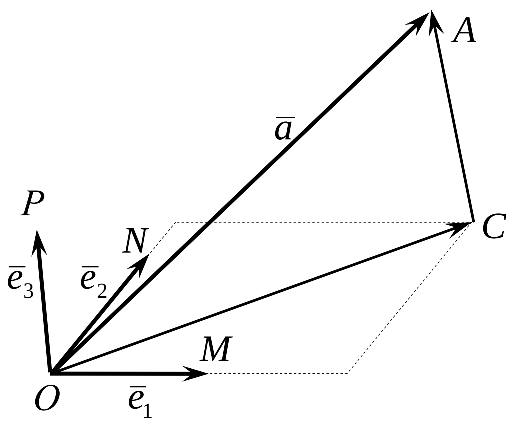


Рис. 5.6

2) Вектор $\bar{a}$ не компланарний з жодними двома з базисних векторів. Зобразимо вектори $\bar{e}_1 = \overline{OM}$, $\bar{e}_2 = \overline{ON}$, $\bar{e}_3 = \overline{OP}$, $\bar{a} = \overline{OA}$ (рис. 5.6). Очевидно, що $\bar{a} = \overline{OA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA}$, де $\overline{CA}$ колі-

неарний $\bar{e}_3$, а $\overline{OC}$ компланарний з векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Тоді існують такі числа α_1, α_2, α_3, що вектор $\overline{CA}$ єдиним чином можна представити у вигляді $\overline{CA} = \alpha_3 \bar{e}_3$, а $\overline{OC} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$. Отже

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3. \tag{5.2}$$

Коефіцієнти α_1, α_2, α_3 розкладу (5.2) називаються ***координатами вектора*** $\bar{a}$ ***в базисі*** $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і записують $\bar{a}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Таким чином, кожному вектору простору в заданому базисі відповідає єдина трійка чисел, взятих в певному порядку, і навпаки, кожній трійці чисел, взятих в певному порядку, відповідає в заданому базисі єдиний вектор.

Відмітимо, що всі координати нульового вектора рівні нулю. Якщо вектор $\bar{a} \neq 0$, то $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0$.

Базис називається ***ортонормованим,*** якщо базисні вектори одиничні і попарно ортогональні.

5.4. Лінійні операції над векторами в координатній формі

Нехай заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і вектори $\bar{a}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$, $\bar{b} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \beta_3 \bar{e}_3$.

Сума векторів. Запишемо суму векторів

$$\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3) + (\beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \beta_3 \bar{e}_3)$$

або, згідно властивостям лінійних операцій над векторами,

$$\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\bar{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\bar{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\bar{e}_3. \tag{5.3}$$

Таким чином, при додаванні векторів їх відповідні координати додаються.

Добуток вектора на число. Помножимо вектор $\bar{a}$ на число λ:

$$\lambda \bar{a} = \lambda(\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3)$$

або

$$\lambda \bar{a} = (\lambda \alpha_1)\bar{e}_1 + (\lambda \alpha_2)\bar{e}_2 + (\lambda \alpha_3)\bar{e}_3. \tag{5.4}$$

Тобто при множенні вектора на число координати вектора множаться на це число.

Приклад 5.1. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ дано вектори $\bar{a} = 6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{b} = -\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$. Знайти вектор $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$.

Розв'язок. Згідно формулам (5.3), (5.4)

$$\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b} = 5\cdot(6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3) + 2\cdot(-\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3) =$$

$$= (30-2)\bar{e}_1 + (-10+8)\bar{e}_2 + (5+6)\bar{e}_3 = 28\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 11\bar{e}_3.$$

Відповідь: $\bar{c}(28,\ -2,\ 11)$. ◀

Рівність векторів. З означення вектора як направленого відрізка, який можна переміщати в просторі паралельно самому собі, випливає, що ***два вектори*** $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$ ***рівні*** тоді і тільки тоді, коли рівні їх координати:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1, \\ \alpha_2 &= \beta_2, \\ \alpha_3 &= \beta_3. \end{aligned}\right\}$$

Колінеарність векторів. Виясними умови колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих своїми координатами.

Так як $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то за властивостями добутку вектора на число можна записати $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, де λ – деяке число, тобто

$$\bar{b} = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3 = \lambda\bar{a} = (\lambda\alpha_1)\bar{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\bar{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\bar{e}_3.$$

Звідси $\beta_1 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\alpha_2$, $\beta_3 = \lambda\alpha_3$, тобто $\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda$, $\dfrac{\beta_2}{\alpha_2} = \lambda$, $\dfrac{\beta_3}{\alpha_3} = \lambda$ або

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \lambda. \qquad (5.5)$$

Таким чином, *координати колінеарних векторів пропорційні*. Справедливе і обернене твердження: *вектори, що мають пропорційні координати, колінеарні.*

Зауваження. Співвідношення (5.5) умовно записуватимемо і у випадку, коли серед чисел β_1, β_2, β_3 є рівні нулю.

Нехай на площині заданий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і вектори $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2)$. В цьому випадку мають місце формули, аналогічні формулам (5.3) – (5.5).

Приклад 5.2. Перевірити, чи колінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, задані в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

а) $\overline{a}(2,\ -3,\ 1)$, $\overline{b}(-4,\ 6,\ -2)$;   б) $\overline{a}(4,\ 0,\ 5)$, $\overline{b}(-4,\ 0,\ -5)$.

Розв'язок. Згідно формули (5.5):

а) $\frac{-4}{2}=\frac{6}{-3}=\frac{-2}{1}=-2$, а отже $\overline{a}\,||\,\overline{b}$.

б) $\frac{4}{-4}=\frac{0}{0}=\frac{5}{-5}$.

Так як друга координата в обох векторів рівна нулю, то їх можна розглядати як вектори, задані на площині в базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_3$, а отже $\frac{4}{-4}=\frac{5}{-5}=-1$ і $\overline{a}\,||\,\overline{b}$. ◀

Приклад 5.3. В базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ дано вектори $\overline{a}=2\overline{e}_1-\overline{e}_2$, $\overline{b}=\overline{e}_1+5\overline{e}_2$. Показати, що вектори $\overline{a},\overline{b}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\overline{c}=6\overline{e}_1+19\overline{e}_2$ в базисі $\overline{a},\overline{b}$.

Розв'язок. Якщо два вектори утворюють базис, то вони неколінеарні. Згідно формули (5.5):

$$\frac{2}{1}\neq-\frac{1}{5},$$

а отже вектори $\overline{a},\overline{b}$ неколінеарні і утворюють базис.

В новому базисі $\overline{a},\overline{b}$ вектор $\overline{c}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\overline{c}=\alpha_1\overline{a}+\alpha_2\overline{b},$$

де коефіцієнти α_1, α_2 – невідомі і є координатами вектора $\overline{c}$ в базисі $\overline{a},\overline{b}$.

Знайдемо ці координати. Для цього розпишемо розклад вектора $\overline{c}$ в координатній формі:

$$\begin{pmatrix}6\\19\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix},$$

що рівносильно системі двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\left.\begin{aligned}6&=2\alpha_1+\alpha_2,\\19&=-\alpha_1+5\alpha_2.\end{aligned}\right\}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \ \ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = 10 + 1 = 11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 - 19 \cdot 1 = 30 - 19 = 11;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 19 \end{vmatrix} = 2 \cdot 19 - (-1) \cdot 6 = 38 + 6 = 44.$$

Отримаємо $\alpha_1 = \frac{11}{11} = 1$; $\alpha_2 = \frac{44}{11} = 4$.

Відповідь: $\overline{c}(1,\ 4)$. ◀

Приклад 5.4. В базисі $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ дано вектори $\overline{a} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{b} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{c} = \overline{e}_2 - \overline{e}_3$. Показати, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\overline{d} = \overline{e}_1 + 8\overline{e}_2 - 5\overline{e}_3$ в базисі $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Розв'язок. Якщо три вектори утворюють базис, то жоден з них не є лінійною комбінацією двох інших. Тоді визначник, складений з координат цих векторів, відмінний від нуля, так як лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх координатами. Обчислимо цей визначник:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$1 + 2 - 1 = 2 \neq 0.$$

Отже, вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють базис.

В новому базисі $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ вектор $\overline{d}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\overline{d} = \alpha_1 \overline{a} + \alpha_2 \overline{b} + \alpha_3 \overline{c},$$

де коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – невідомі і є координатами вектора $\overline{d}$ в базисі $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Знайдемо ці координати. Для цього розпишемо розклад вектора $\overline{d}$ в координатній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

що рівносильно системі трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3, \\ 8 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ -5 = 0\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3. \end{array} \right\}$$

Розв’яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \;\; \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \;\; \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Очевидно, що визначник $\Delta = \det$ як визначник транспонованої матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Обчислимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-5) + 8 \cdot 1 \cdot 0 - (-5) \cdot (-1) \cdot 0 - 8 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 1 - 10 + 16 - 1 = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) \cdot 0 - 0 \cdot 8 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - (-5) \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= -8 + 1 + 5 = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-5) + 2\cdot 8\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(-5) - 1\cdot 8\cdot 1 =$$

$$= 5 + 1 + 10 - 8 = 8.$$

Отримаємо $\alpha_1 = \dfrac{6}{2} = 3$; $\alpha_2 = \dfrac{-2}{2} = -1$; $\alpha_3 = \dfrac{8}{2} = 4.$

Відповідь: $\bar{d}(3, -1, 4)$. ◄

5.5. Декартова прямокутна система координат

Нехай в просторі дано точку O і ортонормований базис, який позначатимемо $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Сукупність точки O і ортонормованого базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ називається ***декартовою прямокутною системою координат в просторі.*** Точку O називають *початком координат*. Вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{i}$, називається віссю Ox або *віссю абсцис*; вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{j}$ – віссю Oy або *віссю ординат*; вісь, що проходить через точку O і має напрямок вектора $\bar{k}$ – віссю Oz або *віссю аплікат*. Осі Ox, Oy, Oz називають *осями координат*. Площини, що проходять через дві осі координат, називають *координатними площинами*.

Декартову прямокутну систему координат позначають $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ або $Oxyz$.

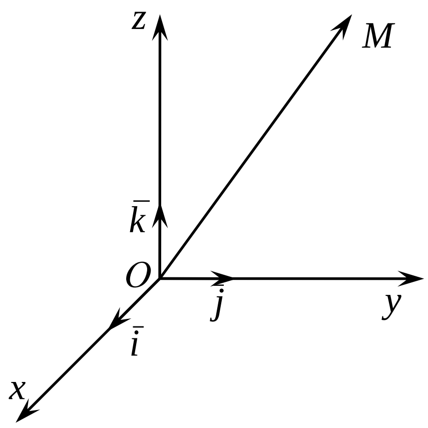


Рис. 5.7

Радіус-вектором точки M назвемо вектор $\overline{OM}$ (рис. 5.7). Нехай $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, де (x, y, z) – координати вектора $\overline{OM}$ в базисі $\bar{i},\ \bar{j}, \bar{k}$, тобто його проекції на відповідні координатні осі, їх називають ***координатами точки М*** в системі $(O, \bar{i},\ \bar{j}, \bar{k})$ і записують $M(x, y, z)$. Координата x називається абсцисою, y – ординатою, z – аплікатою.

Таким чином, кожній точці M в заданій декартовій прямокутній системі координат в просторі відповідає єдина впорядкована трійка чисел, і навпаки, кожній впорядкованій трійці чисел в заданій декартовій прямокутній системі координат в просторі відповідає єдина точка.

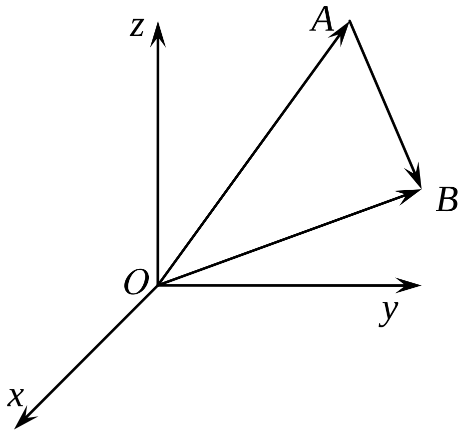


Рис. 5.8

Знайдемо координати вектора $\overline{AB}$, якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Маємо (рис. 5.8):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) - (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Отже, ***координати вектора*** $\overline{AB}$ рівні різницям відповідних координат його кінця і початку.

Три некомпланарних вектори $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$, взятих у вказаному порядку, утворюють *праву орієнтацію* або ***праву трійку***, якщо з кінця $\overline{AD}$ пово-

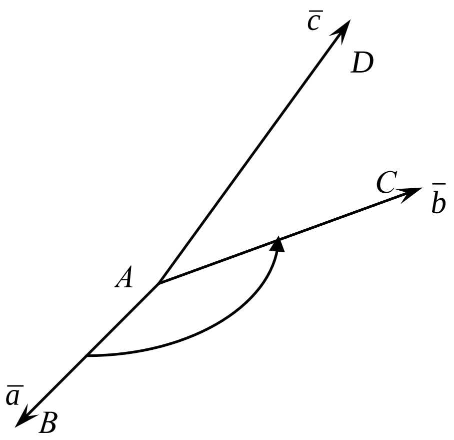


Рис. 5.9

рот від $\overline{AB}$ до $\overline{AC}$ по найкоротшому шляху видно проти ходу стрілки годинника (рис. 5.9). В протилежному випадку трійка векторів утворює ***ліву трійку***.

Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву (ліву) трійку, то, помінявши місцями довільні два вектори, отримаємо ліву (праву) трійку.

Система координат називається ***правою***, якщо її базисні вектори утворюють праву трійку і лівою, якщо – ліву.

Аналогічно визначається декартова прямокутна система координат на площині.

5.6. Поділ відрізка в даному відношенні

Розділити відрізок AB у відношенні $\lambda \; (\lambda \neq -1)$ означає на прямій, що проходить через точки A і B, знайти таку точку C, що $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Якщо $\lambda > 0$, то точка C лежить на відрізку AB, якщо $\lambda < 0$, то точка C лежить за межами відрізка AB.

Нехай в системі координат $Oxyz$ дано точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо на прямій AB координати точки $C(x, y, z)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ.

Розглянемо вектори $\overline{AC}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{CB}(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$. Так як $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$, то $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$; $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$; $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$. З цих рівностей отримаємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{5.6}$$

Зокрема, при $\lambda = 1$ маємо ***координати середини відрізка***:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{5.7}$$

Аналогічно, якщо на площині дано точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то координати точки $C(x, y)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ, визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

а координати середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Приклад 5.5. Точка $C(2,\ 0,\ 4)$ ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{1}{4}$. Знайти координати точки B, якщо $A(3, -1, 5)$.

Розв'язок. Позначимо невідомі координати $B(x_B, y_B, z_B)$. Згідно формулам (5.6)

$$2 = \frac{3 + \frac{1}{4}x_B}{1 + \frac{1}{4}}; \quad 0 = \frac{-1 + \frac{1}{4}y_B}{1 + \frac{1}{4}}; \quad 4 = \frac{5 + \frac{1}{4}z_B}{1 + \frac{1}{4}},$$

звідки $x_B = -2$; $y_B = 4$; $z_B = 0$.

Відповідь: $B(-2,\ 4,\ 0)$. ◄

Приклад 5.6. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(3, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-2, 3)$, $D(2, -1)$ є паралелограмом.

Розв'язок. За ознакою паралелограма його діагоналі точкою перетину діляться пополам. Знайдемо координати середин відрізків AC і BD і якщо вони співпадуть, то чотирикутник – паралелограм.

Позначимо середину відрізка AC через O_1 а середину відрізка BD – через O_2. Тоді

$$x_{O_1} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2};\quad y_{O_1} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2};$$

$$x_{O_2} = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2};\quad y_{O_2} = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Очевидно, що точка O_1 співпадає з точкою O_2, отже чотирикутник є паралелограмом. ◀

Теоретичні питання

5.1. *Що називається вектором?*

5.2. *Який вектор називається ортом?*

5.3. *Які два вектори називаються колінеарними?*

5.4. *Які два вектори називаються рівними?*

5.5. *Які вектори називаються вільними?*

5.6. *Які вектори називаються компланарними?*

5.7. *Які операції над векторами називають лінійними?*

5.8. *Які властивості лінійних операцій над векторами?*

5.9. *Що називається лінійною комбінацією векторів?*

5.10. *Що називається базисом на площині*?

5.11. *Що називається базисом в просторі*?

5.12. *Що називається координатами вектора $\bar{a}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$*?

5.13. *Який базис називається ортонормованим?*

5.14. *Чому рівні координати суми векторів в даному базисі?*

5.15. *Як визначаються координати при множенні вектора на число в даному базисі?*

5.16. *Яка умова колінеарності двох ненульових векторів?*

5.17. *Що називається декартовою прямокутною системою координат в просторі?*

5.18. *Що називається координатами точки М в системі* $Oxyz$ *?*

5.19. *Як визначаються координати вектора* $\overline{AB}$ *в системі* $Oxyz$ *?*

5.20. *Які три вектори утворюють праву трійку, а які – ліву?*

5.21. *Що означає розділити відрізок* AB *у відношенні* λ $(\lambda \neq -1)$ *?*

5.22. *Чому рівні координати точки* C, *що ділить відрізок* AB *у відношенні* λ *?*

5.23. *Чому рівні координати середини відрізка?*

Задачі та вправи

5.1. *В базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{b} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$. *Знайти вектор* $\bar{c} = 4\bar{a} - 6\bar{b}$.

5.2. *Перевірити, чи колінеарні вектори* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$, *задані в базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

а) $\bar{a}(-1,\ 4,\ 1)$, $\bar{b}(2,\ -8,\ -2)$;

б) $\bar{a}(0,\ 1,\ -6)$, $\bar{b}(0,\ -3,\ 18)$;

в) $\bar{a}(5,\ 4,\ 0)$, $\bar{b}(-5,\ -4,\ 1)$.

5.3. *В базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. *Перевірити чи утворюють вони базис:*

а) $\bar{a}(2,\ 0,\ -3)$, $\bar{b}(1,\ 1,\ -2)$, $\bar{c}(-4,\ 6,\ 1)$;

б) $\bar{a}(2,\ 4,\ -1)$, $\bar{b}(-5,\ 2,\ 1)$, $\bar{c}(-2,\ -4,\ 1)$.

5.4. *В базисі* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ *дано вектори* $\bar{a} = 7\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, $\bar{b} = -2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, $\bar{c} = -3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$. *Показати, що вектори* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *утворюють базис, і* *знайти координати вектора* $\overline{d} = -3\overline{e}_1 + 14\overline{e}_2 + 10\overline{e}_3$ *в базисі* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

5.5. Точка $C(-5, 3, 0)$ *ділить відрізок* AB *у відношенні* $\lambda = \frac{1}{3}$. *Знайти координати точки A, якщо* $B(2, -8, 1)$.

5.6. Дано точки $A(-1, 2, 1)$, $B(2, 1, -3)$, $C(3, 0, 5)$. *Підібрати координати точки* D *так, щоб чотирикутник* $ABCD$ *був паралелограмом.*

Лекція 6

§6. ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

6.1. Скалярний добуток векторів

Означення скалярного добутку. ***Скалярним добутком*** двох ненульових векторів $\overline{a}$ ***і*** $\overline{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо хоча б один із двох даних векторів нульовий, то їх скалярний добуток за означенням вважається рівним нулю.

Позначається $\overline{a} \cdot \overline{b}$ або $\overline{a}\overline{b}$, або $(\overline{a}, \overline{b})$. Таким чином, за означенням,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi, \tag{6.1}$$

де $\varphi = (\overline{a}, \overline{b})^{\wedge}$.

Так як $|\overline{b}| \cdot \cos\varphi = np_{\overline{a}}\overline{b}$ є проекцією вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$, а $|\overline{a}| \cdot \cos\varphi = np_{\overline{b}}\overline{a}$ – проекцією вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$, то формулі (6.1) можна надати іншого вигляду:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\overline{a}, \tag{6.2}$$

тобто скалярний добуток рівний добутку довжини одного з них на проекцію іншого на перший вектор.

Властивості скалярного добутку.

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.

Справедливість цієї властивості випливає з означення.

2. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

Доведення. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\lambda\bar{a}=\lambda|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$.

Доведення.

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\cdot(np_{\bar{a}}\bar{b}+np_{\bar{a}}\bar{c})=|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{b}+|\bar{a}|\cdot np_{\bar{a}}\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

4. Скалярний квадрат вектора рівний квадрату його довжини:

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2.$$

Доведення. $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0^o=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot 1=|\bar{a}|^2$.

Зокрема, $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$.

Якщо добути корінь із скалярного квадрата вектора, то отримаємо не початковий вектор, а його модуль $|\bar{a}|$, тобто $\sqrt{\bar{a}^2}=|\bar{a}|$.

5. Якщо ненульові вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні, то їх скалярний добуток рівний нулю і навпаки, якщо скалярний добуток двох ненульових векторів рівний нулю, то ці вектори ортогональні.

Доведення. Так як $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\pi/2$, то $\cos\varphi=\cos\pi/2=0$, а отже і $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Якщо $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ і $|\bar{a}|\neq 0$, $|\bar{b}|\neq 0$, то $\cos\varphi=0$ і $\varphi=\pi/2$.

Зокрема, $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0$.

Приклад 6.1. Знайти $\bar{a}\cdot\bar{b}$, якщо $\bar{a}=3\bar{m}+2\bar{n}$, $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$, $|\bar{m}|=4$, $|\bar{n}|=6$,

$$\varphi=(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=\pi/4.$$

Розв'язок. $\bar{a}\cdot\bar{b}=(3\bar{m}+2\bar{n})\cdot(\bar{m}-\bar{n})=3\bar{m}^2-3\bar{m}\bar{n}+2\bar{n}\bar{m}-2\bar{n}^2=3\bar{m}^2-\bar{m}\bar{n}-2\bar{n}^2=$

$$=3\cdot 4^2-4\cdot 6\cdot\cos\pi/4-2\cdot 6^2=3\cdot 16-4\cdot 6\cdot\sqrt{2}/2-2\cdot 36=48-12\sqrt{2}-72=$$

$$-24-12\sqrt{2}.\ ◀$$

Приклад 6.2. Знайти довжину вектора $\bar{c}=4\bar{a}-\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=7$,

$$\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \pi / 3.$$

Розв'язок. $|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^{\,2}} = \sqrt{(4\bar{a} - \bar{b})^2} = \sqrt{(4\bar{a} - \bar{b}) \cdot (4\bar{a} - \bar{b})} = \sqrt{16\bar{a}^2 - 2 \cdot 4\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b}^2} =$

$= \sqrt{16 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\pi / 3 + 7^2} = \sqrt{16 \cdot 9 - 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1/2 + 49} = \sqrt{144 - 84 + 49} = \sqrt{109}.$ ◀

Скалярний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}$, $\bar{b} = \beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \beta_3\bar{k}$.

Знайдемо скалярний добуток цих векторів, перемноживши їх як многочлени згідно властивостям 1 – 3:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}) \cdot (\beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \beta_3\bar{k}) = \alpha_1\beta_1(\bar{i}\bar{i}) + \alpha_1\beta_2(\bar{i}\bar{j}) + \alpha_1\beta_3(\bar{i}\bar{k}) +$$
$$+ \alpha_2\beta_1(\bar{j}\bar{i}) + \alpha_2\beta_2(\bar{j}\bar{j}) + \alpha_2\beta_3(\bar{j}\bar{k}) + \alpha_3\beta_1(\bar{k}\bar{i}) + \alpha_3\beta_2(\bar{k}\bar{j}) + \alpha_3\beta_3(\bar{k}\bar{k}).$$

Згідно властивостям 4, 5, отримаємо:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{6.3}$$

Таким чином, скалярний добуток векторів рівний сумі добутків їх однойменних координат.

За формулою (6.3) маємо

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3, \tag{6.4}$$

звідки

$$|\bar{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}. \tag{6.5}$$

Приклад 6.3. Знайти довжину вектора $\bar{a} = 6\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$.

Розв'язок. $|\bar{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7.$ ◀

Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Відстань між двома точками M_1 і M_2 рівна

$$|M_1M_2| = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{6.6}$$

Так як $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$, то ***кут між ненульовими векторами*** $\bar{a}$ і $\bar{b}$ визначається за формулами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|},$$

тобто

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}} . \qquad (6.7)$$

З останньої формули випливає ***умова перпендикулярності ненульових векторів*** $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0. \qquad (6.8)$$

Нехай кути, які утворює вектор $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ з осями координат Ox, Oy, Oz, відповідно рівні α, β, γ. Тоді проекції вектора $\bar{a}$ на осі координат рівні

$$\alpha_1 = |\bar{a}|\cdot\cos\alpha,\;\; \alpha_2 = |\bar{a}|\cdot\cos\beta,\;\; \alpha_3 = |\bar{a}|\cdot\cos\gamma. \qquad (6.9)$$

Звідси

$$\cos\alpha = \frac{\alpha_1}{|\bar{a}|},\;\; \cos\beta = \frac{\alpha_2}{|\bar{a}|},\;\; \cos\gamma = \frac{\alpha_3}{|\bar{a}|}. \qquad (6.10)$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються ***напрямними косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Підставивши вирази (6.9) в рівність (6.4), отримаємо

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2\cdot\cos^2\alpha + |\bar{a}|^2\cdot\cos^2\beta + |\bar{a}|^2\cdot\cos^2\gamma.$$

Скоротивши на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, отримаємо співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад 6.4. Довести, що діагоналі чотирикутника, заданого координатами вершин $A(-4, -4, 4)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(2, 5, 1)$, $D(3, -2, 2)$, взаємно перпендикулярні.

Розв'язок. Складемо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$, що лежать на діагоналях даного чотирикутника:

$$\overline{AC} = (2-(-4), 5-(-4), 1-4) = (6, 9, -3);\;\; \overline{BD} = (3-(-3), -2-2, 2-2) = (6, -4, 0).$$

Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 6\cdot 6 + 9\cdot(-4) + (-3)\cdot 0 = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Згідно властивості 5, вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ перпендикулярні, що й треба було довести. ◀

Приклад 6.5. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-1,1,3)$, $B(3,3,-4)$, $C(2,1,-1)$. Знайти проекцію сторони AB на сторону AC.

Розв'язок. Складемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, що лежать на сторонах даного трикутника:

$$\overline{AB}=(3-(-1),3-1,-4-3)=(4,2,-7);\quad \overline{AC}=(2-(-1),1-1,-1-3)=(3,0,-4).$$

З формули (6.2) знаходимо

$$np_{\overline{AC}}\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|}=\frac{4\cdot 3+2\cdot 0+(-7)\cdot(-4)}{\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=\frac{12+0+28}{\sqrt{9+16}}=\frac{40}{5}=8. \blacktriangleleft$$

Приклад 6.6. Знайти кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, якщо $\overline{AB}(4,2,-7)$, $\overline{AC}(3,0,-4)$.

Розв'язок. За формулою (6.7) знаходимо

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot 3+2\cdot 0+(-7)\cdot(-4)}{\sqrt{4^2+2^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=\frac{12+28}{\sqrt{16+4+49}\cdot\sqrt{9+0+16}}=$$

$$=\frac{40}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{25}}=\frac{40}{5\sqrt{69}}=\frac{8}{\sqrt{69}},$$

$\varphi=\arccos\frac{8}{\sqrt{69}}$. ◀

Приклад 6.7. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$, якщо $A(3,4,-5)$, $B(-1,8,-3)$.

Розв'язок. Знайдемо координати і довжину вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=(-1-3,8-4,-3-(-5))=(-4,4,2),$$

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6.$$

За формулами (6.10)

$$\cos\alpha=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

6.2. Векторний добуток векторів

Означення векторного добутку. ***Векторним добутком*** двох неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, такий, що:

1) $\bar{c} \perp \bar{a}$ і $\bar{c} \perp \bar{b}$, тобто $\bar{c}$ перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

2) направлений так, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку;

3) має довжину, що дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними, тобто $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$.

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні, то їх векторний добуток за означенням вважається рівним нульовому вектору.

Векторний добуток позначається $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Геометричний зміст векторного добутку. Модуль векторного добутку $|[\bar{a}, \bar{b}]|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 6.1).

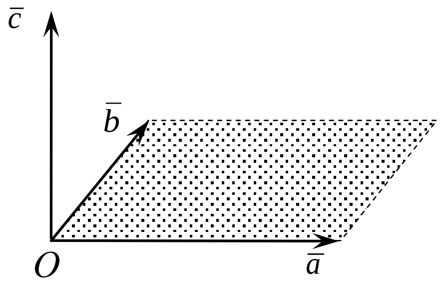


Рис. 6.1

Властивості векторного добутку.

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -\,[\bar{b}, \bar{a}]$.

Справедливість цієї властивості випливає з означення.

2. $[\lambda\bar{a}, \bar{b}] = \lambda[\bar{a}, \bar{b}]$.

Доведення. Нехай $\lambda > 0$. Вектор $[\lambda\bar{a}, \bar{b}]$ перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (вектори $\lambda\bar{a}$ і $\bar{a}$ лежать в одній площині). Вектор $\lambda[\bar{a}, \bar{b}]$ також перпендикулярний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Отже, вектори $[\lambda\bar{a}, \bar{b}]$ і $\lambda[\bar{a}, \bar{b}]$ колінеарні. Очевидно, що їх напрямки співпадають. Вони мають однакову довжину:

$$\left|[\lambda\overline{a},\overline{b}]\right| = \left|\lambda\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi = \lambda\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi \text{ і } \left|\lambda[\overline{a},\overline{b}]\right| = \lambda\ \left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = \lambda\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi .$$

Тому $[\lambda\overline{a},\overline{b}] = \lambda[\overline{a},\overline{b}]$. Аналогічно доведення при $\lambda < 0$.

3. $[\overline{a},\overline{b}+\overline{c}] = [\overline{a},\overline{b}] + [\overline{a},\overline{c}]$.

Приймемо без доведення.

4. Два ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток рівний нульовому вектору, тобто $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow [\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$.

Д о в е д е н н я . Якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то вектор $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$ за означенням.

Якщо $[\overline{a},\overline{b}] = \overline{0}$, то $\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi = 0$. Тоді $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$, тобто $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Приклад 6.8. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a} = 3\overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - \overline{n}$, $\left|\overline{m}\right| = 4$, $\left|\overline{n}\right| = 6$, $\varphi = (\widehat{\overline{m},\overline{n}}) = \pi/4$.

Розв'язок. Використовуючи властивості векторного добутку, отримаємо

$$[\overline{a},\overline{b}] = [3\overline{m} + 2\overline{n}, \overline{m} - \overline{n}] = 3[\overline{m},\overline{m}] - 3[\overline{m},\overline{n}] + 2[\overline{n},\overline{m}] - 2[\overline{n},\overline{n}] =$$

$$= 3 \cdot \overline{0} - 3[\overline{m},\overline{n}] - 2[\overline{m},\overline{n}] - 2 \cdot \overline{0} = -5[\overline{m},\overline{n}].$$

Тоді за означенням

$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right| = \left|-5[\overline{m},\overline{n}]\right| = \left|-5\right| \cdot \left|[\overline{m},\overline{n}]\right| = 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin\pi/4 = 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}/2 = 60\sqrt{2}$. ◀

Векторний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\overline{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overline{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ або, що те ж саме, $\overline{a} = \alpha_1\overline{i} + \alpha_2\overline{j} + \alpha_3\overline{k}$, $\overline{b} = \beta_1\overline{i} + \beta_2\overline{j} + \beta_3\overline{k}$.

Знайдемо векторний добуток цих векторів, перемноживши їх згідно властивостям 1–3:

$$[\overline{a},\overline{b}] = [\alpha_1\overline{i} + \alpha_2\overline{j} + \alpha_3\overline{k},\ \beta_1\overline{i} + \beta_2\overline{j} + \beta_3\overline{k}] = \alpha_1\beta_1[\overline{i},\overline{i}] + \alpha_1\beta_2[\overline{i},\overline{j}] + \alpha_1\beta_3[\overline{i},\overline{k}] +$$

$$+ \alpha_2\beta_1[\overline{j},\overline{i}] + \alpha_2\beta_2[\overline{j},\overline{j}] + \alpha_2\beta_3[\overline{j},\overline{k}] + \alpha_3\beta_1[\overline{k},\overline{i}] + \alpha_3\beta_2[\overline{k},\overline{j}] + \alpha_3\beta_3[\overline{k},\overline{k}]. \quad (6.11)$$

Векторні добутки $[\overline{i},\overline{i}]$, $[\overline{j},\overline{j}]$, $[\overline{k},\overline{k}]$, що входять в цю рівність, рівні нульовому вектору згідно властивості 4.

Векторний добуток $[\bar{i},\bar{j}]$ є вектором, модуль якого рівний $|\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cdot\sin\pi/2=1\cdot1\cdot1=1$ і колінеарний та однаково направлений з вектором $\bar{k}$, а отже $[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k}$. Аналогічно $[\bar{j},\bar{k}]=\bar{i}$, $[\bar{k},\bar{i}]=\bar{j}$ (рис. 6.2). Згідно властивості 1

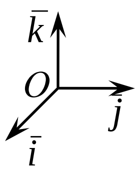


Рис. 6.2

$[\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k}$, $[\bar{k},\bar{j}]=-\bar{i}$, $[\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}$.

Підставивши знайдені добутки в (6.11), отримаємо

$$[\bar{a},\bar{b}]=\alpha_1\beta_2\bar{k}-\alpha_1\beta_3\bar{j}-\alpha_2\beta_1\bar{k}+\alpha_2\beta_3\bar{i}+\alpha_3\beta_1\bar{j}-\alpha_3\beta_2\bar{i}=$$
$$=\bar{i}(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)-\bar{j}(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)+\bar{k}(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1).$$

Цю рівність символічно можна записати у вигляді

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}. \qquad (6.12)$$

Приклад 6.9. Знайти $[\bar{a},\bar{b}]$, якщо $\bar{a}=2\bar{i}+6\bar{j}-5\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$.

Розв'язок. Згідно (6.12) отримаємо

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 6 & -5\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}6 & -5\\ -1 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\end{vmatrix}=13\bar{i}-11\bar{j}-8\bar{k}. \blacktriangleleft$$

Приклад 6.10. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(-1,1,5)$, $B(2,3,-4)$, $C(0,-6,-2)$.

Розв'язок. Очевидно (рис. 6.2), що $S_{\Delta ABC} = 1/2 \cdot \left|[\overline{AB}, \overline{AC}]\right|$. Так як $\overline{AB}(3, 2, -9)$,

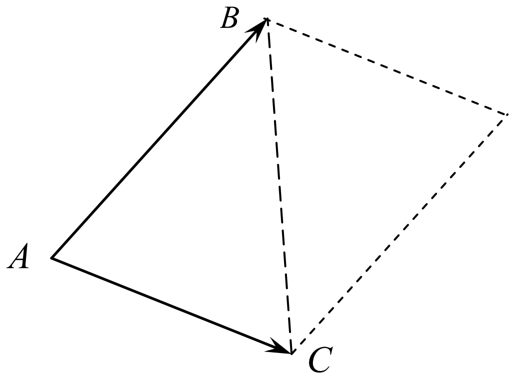


Рис. 6.2

$\overline{AC}(1, -7, -7)$, то

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & -9 \\ 1 & -7 & -7 \end{vmatrix} = -77\bar{i} + 12\bar{j} - 23\bar{k},$$

$$\left|[\overline{AB}, \overline{AC}]\right| = \sqrt{(-77)^2 + 12^2 + (-23)^2} = \sqrt{6602}.$$

Отже, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{6602}/2$. ◀

6.3. Мішаний добуток векторів

Означення мішаного добутку. ***Мішаним добутком*** трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називається число, отримане наступним чином: векторний добуток $[\bar{a}, \bar{b}]$ множимо скалярно на вектор $\bar{c}$.

Мішаний добуток позначається $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Отже,

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}).$$

Геометричний зміст мішаного добутку. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (рис 6.3).

Маємо:

$$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = \bar{d} \cdot \bar{c} = \left|\bar{d}\right| \cdot \text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}, \quad \left|\bar{d}\right| = \left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = S,$$

де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$;

$\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = H$ для правої трійки векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = -H$ для лівої трійки, де H – висота паралелепіпеда.

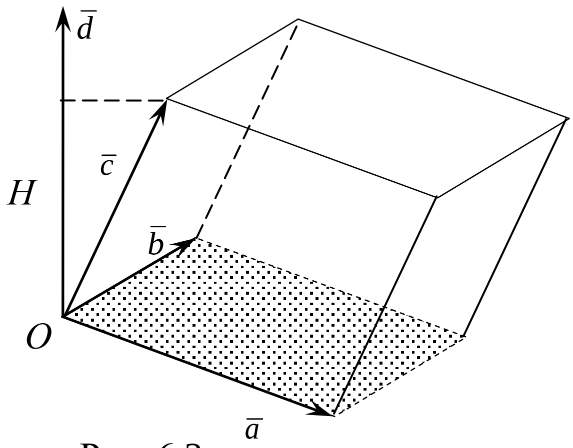


Рис. 6.3

Отримуємо

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = S \cdot (\pm H),$$

тобто

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \pm V,$$

де V – об'єм паралелепіпеда, утвореного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Таким чином, модуль мішаного добутку трьох некомпланарних векторів чисельно рівний об'єму паралелепіпеда, ребрами якого є ці вектори: $|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = V$.

Властивості мішаного добутку.

1. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці його множників: $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = ([\bar{b}, \bar{c}], \bar{a}) = ([\bar{c}, \bar{a}], \bar{b})$.

Дійсно, в цьому випадку не змінюється ні об'єм паралелепіпеда, ні орієнтація векторів.

2. $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$.

Доведення. Так як за властивістю 1 $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = ([\bar{b}, \bar{c}], \bar{a})$ і скалярний добуток $([\bar{b}, \bar{c}], \bar{a})$ не зміниться при перестановці векторів, тобто $([\bar{b}, \bar{c}], \bar{a}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$, то $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$.

3. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c})$, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$.

Дійсно, при перестановці довільних двох векторів, враховуючи властивості

1, 2, переставляються множники векторного добутку, тому знак змінюється на протилежний.

4. Три ненульові вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток рівний нулю.

Доведення. Якщо $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні, то вектор $\bar{d}=[\bar{a},\bar{b}]$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, а отже $\bar{d}\perp\bar{c}$, тому $\bar{d}\cdot\bar{c}=0$, тобто $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$.

Якщо $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=0$ і вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – ненульові, то або вектор $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{0}$, а отже $\bar{a}\parallel\bar{b}$ і $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні, або $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{d}\perp\bar{c}$, а отже $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні.

Мішаний добуток в координатній формі. Нехай в декартовій прямокутній системі координат задані вектори $\bar{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{c}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ або, що те ж саме, $\bar{a}=\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k}$, $\bar{b}=\beta_1\bar{i}+\beta_2\bar{j}+\beta_3\bar{k}$, $\bar{c}=\gamma_1\bar{i}+\gamma_2\bar{j}+\gamma_3\bar{k}$.

Так як згідно (6.12)

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix},$$

то скалярний добуток $[\bar{a},\bar{b}]$ на $\bar{c}$ рівний

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\gamma_1-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}\gamma_2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\gamma_3.$$

Отриману формулу можна записати у вигляді

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}. \qquad (6.13)$$

Приклад 6.11. Виявнити, яка орієнтація трійки векторів $\bar{a}=2\bar{i}+6\bar{j}-5\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{c}=-4\bar{i}+\bar{j}$.

Розв'язок. Згідно (6.13)

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 13 - 11 + 0 = -63 < 0,$$

тому вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ мають ліву орієнтацію. ◀

Приклад 6.12. Перевірити, чи компланарні вектори $\bar{a} = 5\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = 9\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}$.

Розв'язок. Так як

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 40 + 9 - 108 + 25 + 4 = 0,$$

то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні. ◀

Приклад 6.13. Знайти об'єм піраміди $ABCD$, якщо $A(1, 0, 4)$, $B(2, 7, 3)$, $C(4, 0, -1)$, $D(2, 8, -1)$.

Розв'язок. Знайдемо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (2-1, 7-0, 3-4) = (1, 7, -1), \qquad \overline{AC} = (4-1, 0-0, -1-4) = (3, 0, -5),$$

$$\overline{AD} = (2-1, 8-0, -1-4) = (1, 8, -5).$$

Відомо, що $V_{ABCD} = \frac{1}{6}V$, де V – об'єм паралелепіпеда, ребрами якого є вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Отже

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 8 & -5 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6} \cdot \left|0 - 24 - 35 + 0 + 105 + 40\right| =$$

$$= \frac{96}{6} = 16 \text{ (куб. од.)} \blacktriangleleft$$

Теоретичні питання

6.1. *Що називається скалярним добутком двох векторів?*

6.2. *Як виражається скалярний добуток через проекції одного вектора на* *інший?*

6.3. *Які властивості скалярного добутку?*

6.4. *Як виражається скалярний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?*

6.5. *Як виражається довжина вектора через його координати?*

6.6. *Як виражається відстань між двома точками через їх координати?*

6.7. *Чому рівний кут між двома ненульовими векторами?*

6.8. *Яка умова ортогональності двох векторів?*

6.9. *Що називається напрямними косинусами вектора?*

6.10. *Що називається векторним добутком двох векторів?*

6.11. *Який геометричний зміст векторного добутку?*

6.12. *Які властивості векторного добутку?*

6.13. *Як виражається векторний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?*

6.14. *Що називається мішаним добутком трьох векторів?*

6.15. *Який геометричний зміст мішаного добутку?*

6.16. *Які властивості мішаного добутку?*

6.17. *Як виражається мішаний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?*

Задачі та вправи

6.1. *Знайти* $\bar{a}\cdot\bar{b}$, *якщо* $\bar{a}=2\bar{m}+\bar{n}$, $\bar{b}=\bar{m}-3\bar{n}$, $|\bar{m}|=4$, $|\bar{n}|=2$, $\varphi=(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=\pi/3$.

6.2. *Дано трикутник з вершинами в точках* $A(-1,3,5)$, $B(2,1,-1)$, $C(0,2,1)$. *Знайти проекцію сторони* AC *на сторону* AB.

6.3. *Знайти кут між векторами* $\overline{AB}$ *і* $\overline{AC}$, *якщо* $A(-1,3,5)$, $B(2,1,-1)$, $C(0,2,1)$.

6.4. *Знайти* $(4\bar{a}-\bar{b})^2$, *якщо* $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=2$, $\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\pi/4$.

6.5. Знайти напрямні косинуси вектора $\bar{a}(12{,}3{,}-4)$.

6.6. Знайти $\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$, *якщо* $\bar{a}=\bar{m}+2\bar{n}$, $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$, $|\bar{m}|=2$, $|\bar{n}|=8$, $\varphi=(\widehat{\bar{m},\bar{n}})=\pi/6$.

6.7. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(2{,}3{,}-1)$ *і* $\bar{b}(1{,}-1.1)$.

6.8. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=-\bar{i}+\bar{k}$. *Вияснити, яка орієнтація трійки векторів* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

6.9. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}=3\bar{i}+6\bar{j}-8\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+4\bar{i}+\bar{k}$, $\bar{c}=5\bar{i}+2\bar{i}-\bar{k}$.

6.10. Перевірити, чи лежать точки A, B, C, D *в одній площині:*

а) $A(0,\,2,\,-1)$, $B(3,1,1)$, $C(2,\,-1,\,0)$, $D(-4,1,\,2)$*;*

б) $A(5,\,5,\,4)$, $B(3,\,8,\,4)$, $C(3,\,5,10)$, $D(5,\,8,\,2)$.

Розділ ІІІ. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Лекції 7–8

§7. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ, ПОВЕРХНІ І ЛІНІЇ В ПРОСТОРІ

7.1. Рівняння лінії на площині

Лінія на площині часто задається як множина точок, що має деякі геометричні властивості, які характерні тільки для цієї множини.

Введення на площині системи координат дозволяє визначити положення лінії на площині за допомогою рівняння, що пов'язує координати точок лінії.

Рівнянням лінії на площині Oxy називається таке рівняння $F(x,y)=0$ з двома змінними, якому задовольняють координати довільної точки лінії і не задовольняють координати точок, що не лежать на ній.

Координати x і y довільної точки, що входять в рівняння лінії, називаються *поточними координатами*.

Приклад 7.1. Скласти рівняння кола радіуса r з центром в початку координат.

Розв'язок. Як відомо, коло – це множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яку називають центром. Візьмемо на колі довільну точку $M(x, y)$. Відстань від цієї точки до центра кола $O(0,0)$ рівна r, тобто $|OM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$ або $x^2 + y^2 = r^2$. Отриманому рівнянню задовольняють координати довільної точки кола і не задовольняють координати точок, що не лежать на колі, так як для точок, що лежать всередині кола, $|OM| < r$, а для точок, що лежать зовні кола, $|OM| > r$. ◀

Приклад 7.2. Перевірити, чи лежать точки $A(-3,3)$, $B(5,2)$ на лінії $2x + y + 3 = 0$.

Розв'язок. Підставимо в рівняння координати точки A, отримаємо $2 \cdot (-3) + 3 + 3 = 0$.

Підставимо в рівняння координати точки B, отримаємо $2 \cdot 5 + 2 + 3 = 15 \neq 0$.

Отже, точка A лежить на даній лінії, а точка B не лежить на цій лінії. ◀

Методи аналітичної геометрії дозволяють вивчення властивостей лінії звести до вивчення властивостей їх рівнянь. Часто замість «дано рівняння лінії $F(x, y) = 0$» говорять «дана лінія $F(x, y) = 0$».

Відмітимо, що множина точок площини, координати яких задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$, може не утворювати лінію. Так, наприклад, рівнянню $x^2 + y^2 + 4 = 0$ не задовольняють дійсні координати жодної точки; рівнянню $x^2 + y^2 = 0$ задовольняють координати тільки однієї точки – $(0,0)$; множина точок, що задовольняє рівнянню $x^2 - y^2 = 0$, є двома прямими $x - y = 0$ і $x + y = 0$.

Множину точок площини, координати яких задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$, називатимемо *фігурою*.

Будь-яка лінія є фігурою, але не кожна фігура відповідає нашій уяві про лінію.

7.2. Рівняння поверхні та лінії в просторі

Рівнянням поверхні в заданій системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x, y, z) = 0$ з трьома змінними, якому задовольняють координати довільної точки поверхні і не задовольняють координати точок, що не лежать на ній.

Координати x, y і z довільної точки, що входять в рівняння поверхні, називаються *поточними координатами*.

Приклад 7.3. Скласти рівняння сфери радіуса r з центром в початку координат.

Розв'язок. Як відомо, сфера – це множина точок простору, рівновіддалених від даної точки, яку називають центром. Візьмемо на сфері довільну точку $M(x, y, z)$. Відстань від цієї точки до центра кола $O(0,0,0)$ рівна r, тобто $|OM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = r$ або $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Отриманому рівнянню задовольняють координати довільної точки сфери і не задовольняють координати точок, що не лежать на ній, так як для точок, що лежать всередині сфери, $|OM| < r$, а для точок, що лежать зовні – $|OM| > r$. ◀

Приклад 7.4. Скласти рівняння координатної площини Oxy.

Розв'язок. Рівнянню $z = 0$ задовольняють координати довільної точки площини Oxy і не задовольняють координати точок, що не лежать на ній. ◀

Лінія в просторі задається як лінія перетину двох поверхонь.

Нехай дано рівняння поверхонь $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, які перетинають по лінії L.

Систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

якій задовольняють координати довільної точки лінії L і не задовольняють координати точок, що не лежать на ній, називають ***рівняннями лінії в просторі***.

Приклад 7.5. В системі координат $Oxyz$ скласти рівняння кола, що лежить в площині Oxy, радіуса r з центром в початку координат.

Розв'язок. Дане коло можна розглядати як лінію перетину площини Oxy і сфери радіуса r з центром в початку координат:

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Теоретичні питання

7.1. *Що називається рівнянням лінії на площині?*

7.2. *Що називається рівнянням поверхні?*

7.3. *Що називається рівняннями лінії в просторі?*

Задачі та вправи

7.1. *Скласти рівняння множини точок площини, рівновіддалених від точок* $A(2, 4)$ *і* $B(4, 6)$.

7.2. *Вияснити, які з точок* $A(0, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(2, -1)$ *лежать на колі* $x^2 + y^2 = 25$.

7.3. *Лінії задані рівняннями: а)* $x^2 + y^2 = 4$*; б)* $x^2 + y^2 - 6xy = 0$*;* *в)* $x^2 - y^2 + 2x - y = 0$*; г)* $3x - 2y - 6 = 0$.

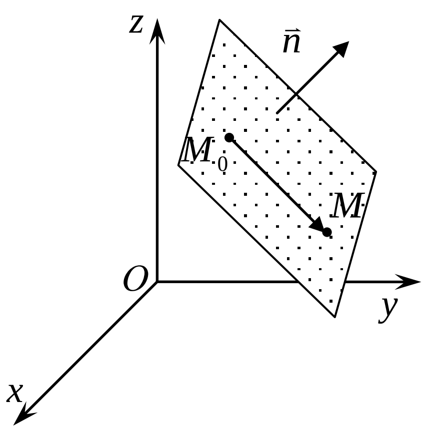


Рис. 8.1

Вияснити, які з них проходять через початок координат.

7.4. *Скласти рівняння сфери радіуса* $r = 2$ *з центром в точці* $C(-1, 2, 0)$.

7.5. *Скласти рівняння сфери з центром в точці* $C(3, -2, 1)$*, що проходить через точку* $A(2, -1, -3)$.

§8. ПЛОЩИНА, ПРЯМА В ПРОСТОРІ І НА ПЛОЩИНІ

8.1. Загальне рівняння площини

Положення площини α в декартовій системі координат $Oxyz$ повністю визначається деякою точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ цієї площини і ненульовим вектором $\overline{n}(A, B, C)$, перпендикулярним до цієї площини (рис. 8.1).

Ненульовий вектор, перпендикулярний до площини, називають ***нормальним вектором*** цієї площини.

Для довільної точки $M(x, y, z)$ площини α і тільки для точок даної площини вектор $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$, тому їх скалярний добуток рівний нулю: $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Записавши умову перпендикулярності цих векторів в координатній формі, отримаємо ***рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора***:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (8.1)$$

Це рівняння є рівнянням першої степені відносно поточних координат x, y, z.

Так як вектор $\overline{n}(A, B, C)$ – ненульовий, то $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Надаючи коефіцієнтам *A, B, C* рівняння (8.1) довільних значень, отримаємо рівняння відповідних площин, що проходять через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Сукупність площин, , що проходять через задану точку, називають ***в'язкою площин***, а рівняння (8.1) – ***рівнянням в'язки площин***.

Перетворимо рівняння (8.1):

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Ввівши позначення $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, отримаємо

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (8.2)$$

Рівняння (8.2) називають ***загальним рівнянням площини***.

Частинні випадки загального рівняння площини:

1) Якщо $D = 0$, то рівняння набуде вигляду $Ax + By + Cz = 0$. Цьому рівнянню задовольняють координати початку координат $O(0,0,0)$. Отже, площина проходить через початок координат.
2) Якщо $C = 0$, то матимемо рівняння $Ax + By + D = 0$. Вектор $\overline{n}(A, B, 0) \perp Oz$. Отже, площина паралельна осі Oz.

Якщо $B = 0$, то площина паралельна осі Oy.

Якщо $A = 0$, то площина паралельна осі Ox.

3) Якщо $C = D = 0$, то площина проходить через початок координат і паралельна осі Oz, тобто площина $Ax + By = 0$ проходить через вісь Oz. Аналогічно, рівнянням $Ax + Cz = 0$, $By + Cz = 0$ відповідають площини, що проходить відповідно через осі Oy, Ox.

4) Якщо $A = B = 0$, то рівняння (8.2) набуде вигляду $Cz + D = 0$ або $z = \frac{-D}{C}$ – рівняння площини, паралельної координатній площині Oxy. Аналогічно, рівнянням $By + D = 0$, $Ax + D = 0$ відповідають площини, паралельні площинам Oxz, Oyz відповідно.

5) Якщо $A = B = D = 0$, то рівняння (8.2) матиме вигляд $Cz = 0$ або $z = 0$ – це рівняння площини Oxy. Аналогічно, $x = 0$ – рівняння площини Oyz, $y = 0$ – рівняння площини Oxz.

Приклад 8.1. Скласти рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(2,-3,0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\bar{n}(5,1,-6)$.

Розв'язок. Підставимо координати точки M_0 і вектора $\bar{n}$ в рівняння (8.1), отримаємо

$$5 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y+3) - 6 \cdot (z-0) = 0 \text{ або } 5x + y - 6z - 7 = 0. \blacktriangleleft$$

8.2. Загальне рівняння прямої на площині

Положення прямої l на площині Oxy повністю визначається деякою точкою $M_0(x_0, y_0)$ цієї прямої і ненульовим вектором $\bar{n}(A, B)$, перпендикулярним до цієї прямої (рис. 8.2).

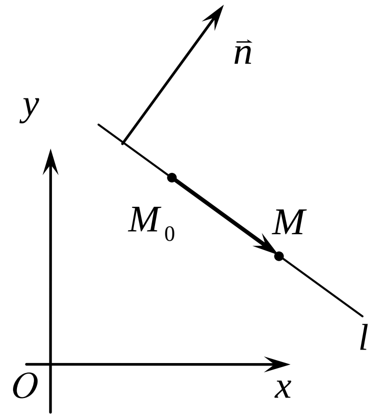


Рис. 8.2

Ненульовий вектор, перпендикулярний до прямої, називають ***нормальним вектором*** цієї прямої.

Для довільної точки $M(x, y,)$ прямої l і тільки для точок даної прямої вектор $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$. Записавши умову перпендикулярності цих векторів в координатній формі, отримаємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора***:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{8.3}$$

Це рівняння є рівнянням першого степеня відносно поточних координат x, y.

Так як вектор $\vec{n}(A, B)$ – ненульовий, то $A^2 + B^2 \neq 0$.

Ввівши позначення $-Ax_0 - By_0 = C$, з рівняння (8.3) отримаємо

$$Ax + By + C = 0. \tag{8.4}$$

Рівняння (8.4) називають ***загальним рівнянням прямої на площині***.

Частинні випадки загального рівняння прямої:

1) Якщо $C = 0$, то рівняння набуде вигляду $Ax + By = 0$. Цьому рівнянню задовольняють координати початку координат $O(0,0)$. Отже, пряма проходить через початок координат.

2) Якщо $A = 0$, то рівняння матиме вигляд $By + C = 0$ або $y = \frac{-C}{B}$ – рівняння прямої, паралельної осі Ox.

3) Якщо $B=0$, то рівняння набуде вигляду $Ax+C=0$ або $x=\frac{-C}{A}$ – рівняння прямої, паралельної осі Oy.

Приклад 8.2. Скласти рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(8,-2)$ перпендикулярно до заданого вектора $\bar{n}(4,-1)$.

Розв'язок. Підставимо координати точки M_0 і вектора $\bar{n}$ в рівняння (8.3), отримаємо

$$4\cdot(x-8)-1\cdot(y+2)=0 \text{ або } 4x-y-34=0. \blacktriangleleft$$

8.3. Канонічні і параметричні рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Канонічні і параметричні рівняння прямої. Положення прямої l в просторі і системі координат $Oxyz$ повністю визначається деякою точкою $M_0(x_0,y_0,z_0)$ цієї прямої і ненульовим вектором $\bar{s}(m,n,p)$, паралельним до цієї прямої (рис. 8.3).

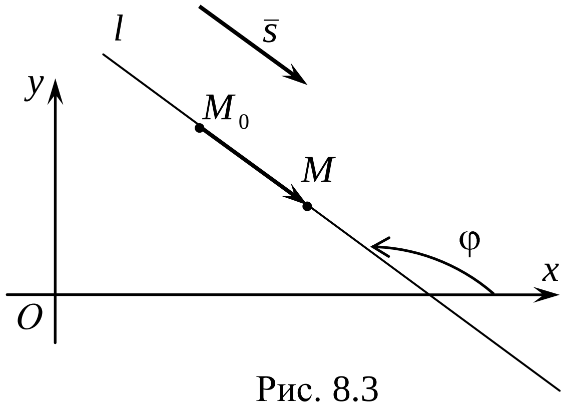


Рис. 8.3

Ненульовий вектор, паралельний до прямої, називають ***напрямним вектором*** цієї прямої.

Для довільної точки $M(x,y,z)$ прямої l і тільки для точок даної прямої вектор $\overline{M_0M} \parallel \bar{s}$. Записавши умову паралельності цих векторів в координатній формі, отримаємо ***канонічні рівняння прямої в просторі***:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{8.5}$$

Так як вектор $\overline{M_0M} \parallel \bar{s}$, то з умови колінеарності векторів маємо $\overline{M_0M}=t\cdot\bar{s}$, де t – скалярний множник, що називається *параметром*. Тоді рівняння (8.5) можна переписати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

або рівносильно

$$\begin{cases} x=x_0+tm, \\ y=y_0+tn, \\ z=z_0+tp. \end{cases} \tag{8.6}$$

Рівняння (8.6) називаються ***параметричними рівняннями прямої в просторі***.

Приклад 8.3. Скласти рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(8,-2,5)$ паралельно до заданого вектора $\bar{s}(4,3,-1)$.

Розв'язок. Підставимо координати точки M_0 і вектора $\bar{s}$ в рівняння (8.5), отримаємо

$$\frac{x-8}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-1}. \blacktriangleleft$$

Якщо задана пряма ***на площині*** Oxy, то ***канонічні рівняння прямої*** мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \tag{8.7}$$

а ***параметричні*** –

$$\begin{cases} x=x_0+tm, \\ y=y_0+tn, \end{cases} \tag{8.8}$$

де x_0, y_0 – координати точки M_0, m, n – координати напрямного вектора $\bar{s}$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Якщо пряма l не паралельна осі Oy, то $m\neq 0$. Тоді рівняння (8.7) можна записати у вигляді

$$y-y_0=\frac{n}{m}\cdot(x-x_0).$$

Величина $\frac{n}{m}=\mathrm{tg}\varphi$, де φ – кут, який утворює пряма l з віссю Ox (кут φ відраховується проти годинникової стрілки від додатного напрямку осі Ox, рис. 8.3). Позначивши $\mathrm{tg}\varphi=k$, отримаємо рівняння:

$$y-y_0=k\cdot(x-x_0), \tag{8.9}$$

k називають кутовим коефіцієнтом, а рівняння (8.9) – ***рівнянням прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.***

Рівняння (8.9) з різними значеннями k називають також ***рівняннями в'язки прямих з центром в точці*** $M_0(x_0,y_0)$. З цієї в'язки не можна визначити лише пряму, паралельну осі Oy.

Позначивши в рівнянні (8.9) $y_0-kx_0=b$, отримаємо ***рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом***:

$$y=k\cdot x+b. \tag{8.10}$$

Приклад 8.4. Скласти рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(8,-2)$ під кутом $\varphi=3\pi/4$ до осі Ox.

Розв'язок. Кутовий коефіцієнт прямої $k=\mathrm{tg}(3\pi/4)=-1$. Підставимо координати точки M_0 і знайдений коефіцієнт k в рівняння (8.9), отримаємо

$$y-(-2)=-1\cdot(x-8) \text{ або } y=-x+6. \blacktriangleleft$$

8.4. Загальні рівняння прямої в просторі

Нехай задані дві непаралельні площини $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ в системі координат $Oxyz$.

Система рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{8.11}$$

визначає пряму лінію в просторі.

Рівняння (8.11) називаються ***загальними рівняннями прямої в просторі.***

Приклад 8.5. Дано загальні рівняння прямої

$$\begin{cases} x+2y-5z+7=0, \\ 3x+y-4z+1=0. \end{cases}$$

Скласти канонічні рівняння цієї прямої.

Розв'язок. Щоб перейти від загальних рівнянь до канонічних (8.5), знайдемо деяку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка лежить на прямій, і напрямний вектор $\bar{s}(m, n, p)$ прямої.

Так як система загальних рівнянь прямої має безліч розв'язків, то щоб знайти довільну трійку чисел x_0, y_0, z_0, що їй задовольняють, покладемо, наприклад, $z_0 = 0$, отримаємо систему

$$\begin{cases} x+2y+7=0, \\ 3x+y+1=0. \end{cases}$$

Її розв'язком є пара чисел $x_0 = 1$, $y_0 = -4$, тому точка $M_0(1,-4,0)$ лежить на прямій.

В якості напрямного вектора можна взяти вектор $\bar{s} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$, де $\bar{n}_1(1,2,-5)$, $\bar{n}_2(3,1,-4)$, так як цей вектор перпендикулярний до нормальних векторів площин, а отже паралельний їх лінії перетину.

Знайдемо вектор $\bar{s}$

$$\bar{s} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\bar{i} - 11\bar{j} - 5\bar{k}.$$

Отже, $\bar{s}(-3,-11,-5)$.

Складемо шукані канонічні рівняння:

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{-11} = \frac{z-0}{-5} \text{ або } \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{11} = \frac{z}{5}. \blacktriangleleft$$

8.5. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай в системі координат $Oxyz$ задані дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Складемо канонічні рівняння прямої, що проходить через ці точки (рис. 8.4).

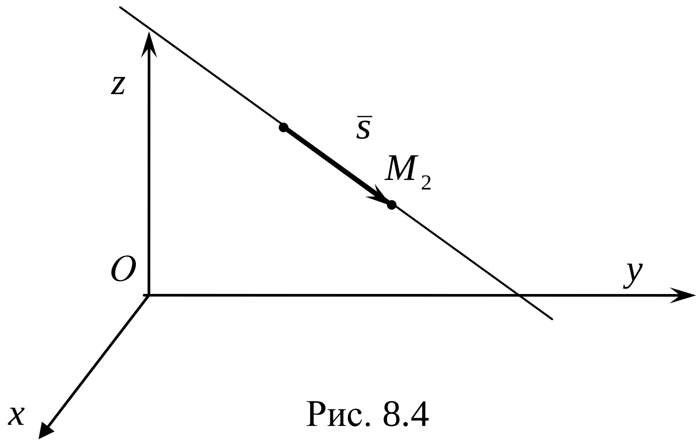


Рис. 8.4

В якості напрямного вектора візьмемо вектор $\bar{s} = \overline{M_1 M_2}\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ і запишемо рівняння прямої (8.5), що проходить, наприклад, через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, отримаємо ***рівняння прямої, що проходить через дві точки***

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (8.12)$$

На площині Oxy *рівняння прямої, що проходить через дві точки* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, матиме вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}. \qquad (8.13)$$

Приклад 8.6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3,-6,0)$, $M_2(1,-2,5)$.

Розв'язок. Підставимо координати точок M_1 і M_2 в рівняння (8.12), отримаємо

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y+6}{-2+6} = \frac{z-0}{5-0} \quad \text{або} \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+6}{4} = \frac{z}{5}. \blacktriangleleft$$

Нехай пряма перетинає вісь Ox в точці $M_1(a,0)$, а вісь Oy – в точці $M_2(0,b)$ (рис. 8.5). В цьому випадку рівняння (8.13) набуде вигляду:

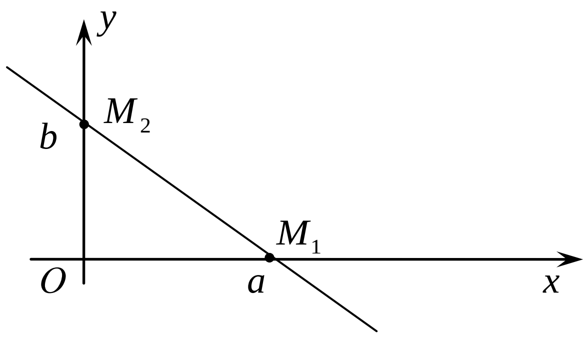


Рис. 8.5

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \quad \text{або} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (8.14)$$

Рівняння (8.14) називається ***рівнянням прямої у відрізках***, так як числа a і b вказують, які відрізки відтинає пряма на осях координат.

8.6. Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай в системі координат $Oxyz$ задані три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій. Складемо рівняння лощини, що проходить через ці точки.

Для довільної точки $M(x, y, z)$, що належить цій площині, і тільки для точок цієї площини, вектори $\overline{M_1M}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3}(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ компланарні, а отже їх мішаний добуток рівний нулю, тобто

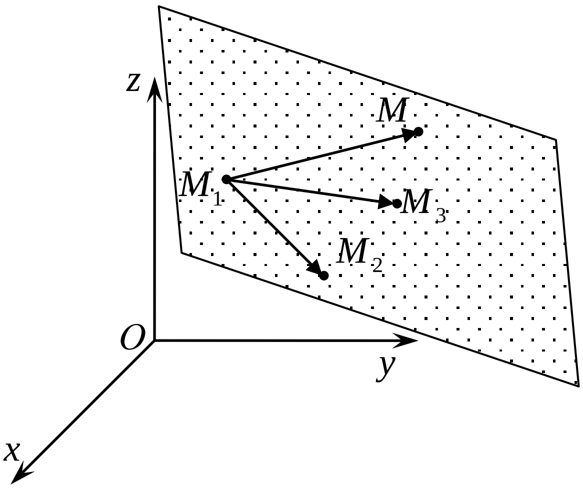


Рис. 8.6

$$\left(\overline{M_1M},\ \overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}\right)=0$$

або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{8.15}$$

Рівняння (8.15) називається ***рівнянням площини, що проходить через три точки.***

Приклад 8.7. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3,-6,0)$, $M_2(1,-2,5)$, $M_3(-4,1-7)$.

Розв'язок. Підставимо координати точок M_1, M_2 і M_3 в рівняння (8.15), отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+6 & z-0 \\ 1-3 & -2+6 & 5-0 \\ -4-3 & 1+6 & -7-0 \end{vmatrix}=0.$$

Так як

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+6 & z \\ -2 & 4 & 5 \\ -7 & 7 & -7 \end{vmatrix}=(x-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -7 \end{vmatrix}-(y+6)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -7 & -7 \end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix}=$$

$$=-73\cdot(x-3)-49(y+6)+14z,$$

то рівняння площини приймає вигляд

$$-73\cdot(x-3)-49(y+6)+14z=0 \text{ або } -73x-49y+14z-75=0. \blacktriangleleft$$

Нехай площина відсікає на осях координат Ox, Oy, Oz відповідно відрізки $a,\ b,\ c$, тобто проходить через три точки $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ (рис.8.7). Підставивши координати цих точок в рівняння (8.15), отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{8.16}$$

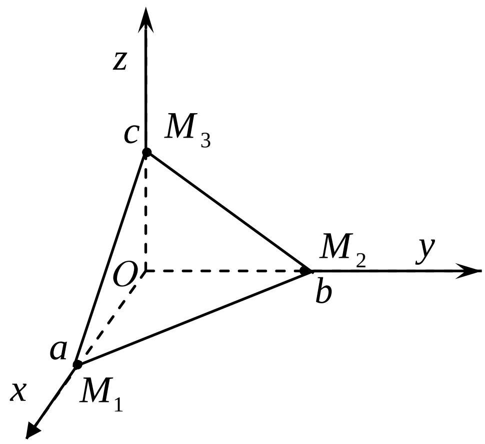


Рис.8.7

Рівняння (8.16) називається ***рівнянням площини у відрізках***, так як числа $a,\ b,\ c$, вказують, які відрізки відсікає площина на осях координат.

8.7. Кут між площинами, кут між прямими, кут між прямою і площиною

Кут між площинами. Нехай задані дві площини

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ і } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Один із кутів φ, утворених площинами, рівний куту між їх нормальними векторами $\bar{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ і $\bar{n}_2(A_2,B_2,C_2)$. Так як другий кут рівний $\pi-\varphi$, то кути між площинами можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{8.17}$$

Під кутом між площинами розуміють менший з двогранних кутів, утворених цими площинами. Для знаходження гострого кута треба взяти модуль правої частини.

Умова паралельності двох площин. Якщо площини паралельні, то паралельні і їх нормальні вектори $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, а отже

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності двох площин. Якщо площини перпендикулярні, то перпендикулярні і їх нормальні вектори $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$, а отже

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Кут між прямими на площині, заданими загальними рівняннями. Нехай задані дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Кути між прямими визначаються за формулою:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{8.18}$$

Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Кут між прямими, заданими канонічними рівняннями. Нехай задані дві прямі

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Один із кутів φ між прямими рівний куту між їх напрямними векторами $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$. Так як другий кут рівний $\pi - \varphi$, то кути між прямими можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{8.19}$$

Для знаходження гострого кута треба взяти модуль правої частини.

Умова паралельності двох прямих. Якщо прямі паралельні, то паралельні і їх напрямні вектори $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2$, а отже

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих. Якщо прямі перпендикулярні, то перпендикулярні і їх напрямні вектори $\bar{s}_1 \perp \bar{s}_2$, а отже

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Кути між двома прямими

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$$

на площині визначаються за формулою:

$$\cos\varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (8.20)$$

Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Кут між прямими з заданими кутовими коефіцієнтами. Нехай прямі l_1, l_2 задані рівняннями $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$, де $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$ (рис.8.9). Треба знайти кут φ між прямими l_1, l_2.

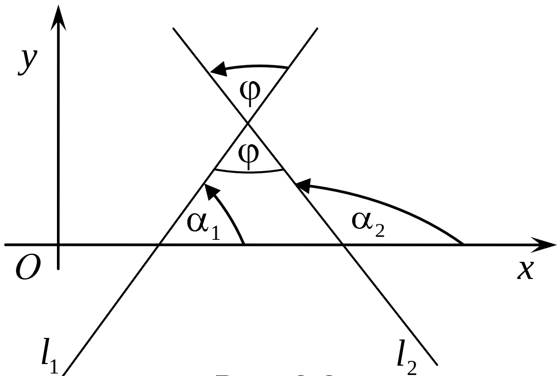


Рис. 8.8

Так як зовнішній кут трикутника $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, то $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Якщо $\varphi \neq \pi/2$, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1 \mathrm{tg}\alpha_2}.$$

Для знаходження гострого кута треба взяти модуль правої частини.

Враховуючи, що $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$, отримаємо:

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \qquad (8.21)$$

Умова паралельності двох прямих. Якщо прямі паралельні, то $\varphi = 0$ і $\mathrm{tg}\varphi = 0$. З формули (8.21) випливає, що в цьому випадку $k_1 = k_2$. Навпаки, якщо $k_1 = k_2$, то $\mathrm{tg}\varphi = 0$, а отже прямі паралельні. Таким чином, умовою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2.$$

Умова перпендикулярності двох прямих. Якщо прямі перпендикулярні, то $\varphi = \pi/2$ і $\mathrm{tg}\varphi$ не існує. З формули (8.21) випливає, що в цьому випадку $1 + k_1 k_2 = 0$ або

$$k_1 k_2 = -1.$$

Справедливе і обернене твердження.

Приклад 8.8. Знайти кут між прямими l_1 і l_2, заданими рівняннями

$$-2x + 3y - 1 = 0 \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-5}$$

відповідно.

Розв’язок. Спосіб 1. Запишемо рівняння прямої l_2 в загальному вигляді: $-5\cdot(x-2) = 1\cdot y \;\Leftrightarrow\; 5x + y - 10 = 0$. Тоді $\bar{n}_1(-2, 3)$, $\bar{n}_2(5, 1)$ – нормальні вектори прямих l_1 і l_2 відповідно. Кут між даними прямими знайдемо як кут між їх нормальними векторами, скориставшись формулою (8.18) (для знаходження гострого кута візьмемо модуль правої частини):

$$\cos\varphi = \frac{|-2\cdot 5 + 3\cdot 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}\cdot\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} = \frac{7}{13\sqrt{2}} \quad \text{і} \quad \varphi = \arccos\frac{7}{13\sqrt{2}}.$$

Спосіб 2. Запишемо рівняння даних прямих у вигляді рівнянь з кутовими коефіцієнтами:

$$3y = 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3},\; k_1 = \frac{2}{3};$$

$$y = -5x + 10,\; k_2 = -5.$$

За формулою (8.21) $\mathrm{tg}\varphi = \left|\dfrac{-5 - \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{2}{3}\cdot(-5)}\right| = \dfrac{17}{7}$ і $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{17}{7}$. ◄

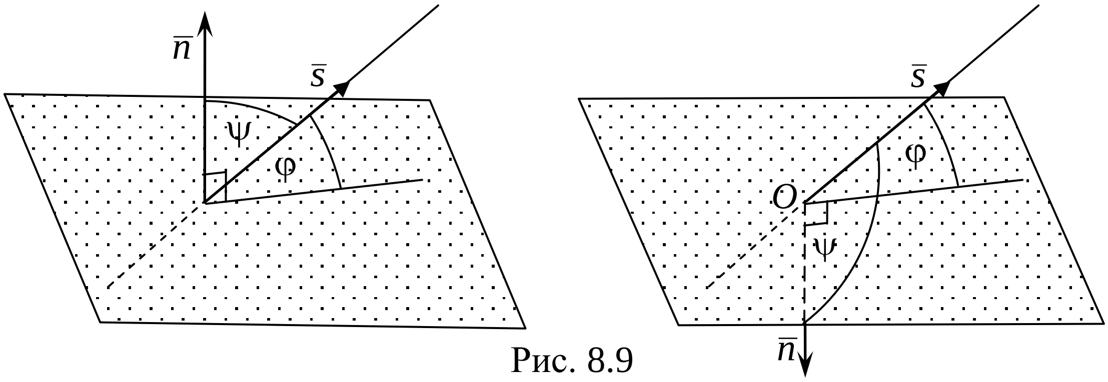


Рис. 8.9

Кут між прямою і площиною. Нехай задані площина $Ax + By + Cz + D = 0$ і пряма $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ (рис. 8.9).

Кут φ між прямою і площиною рівний $\pm(\pi/2 - \psi)$, де ψ – кут між векторами $\bar{n}(A, B, C)$ і $\bar{s}(m, n, p)$. Отже, $\cos\psi = \cos(\pi/2 \pm \varphi) = \pm\sin\varphi$.

Кут φ визначаються за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{8.22}$$

Умова паралельності прямої і площини. Для того, щоб пряма і площина були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектори $\bar{n}$ і $\bar{s}$ були перпендикулярні, тобто

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини. Для того, щоб пряма і площина були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб вектори $\bar{n}$ і $\bar{s}$ були колінеарні, тобто

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

8.8. Відстань від точки до площини і від точки до прямої на площині

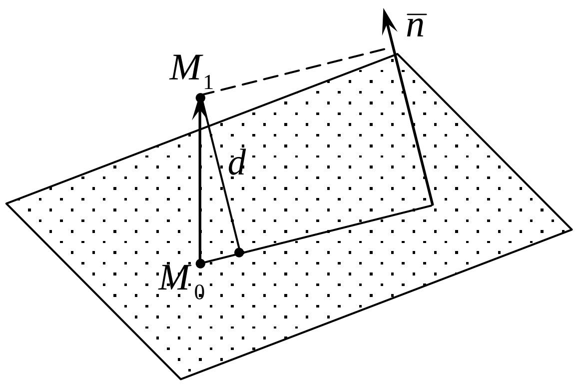


Рис. 8.10

Відстань від точки до площини. Нехай в системі координат $Oxyz$ задані площина $Ax+By+Cz+D=0$ і точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 8.10).

Відстань d від точки M_1 до цієї площини рівна модулю проекції вектора $\overline{M_0M_1}$ на напрямок нормального вектора $\bar{n}(A,B,C)$, де $M_0(x_0, y_0, z_0)$ довільна точка площини. Отже,

$$d=\left|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{M_0M_1}\right|=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\cdot\bar{n}\right|}{|\bar{n}|}=\frac{\left|(x_1-x_0)\cdot A+(y_1-y_0)\cdot B+(z_1-z_0)\cdot C\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+(-Ax_0-By_0-Cz_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Так як точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить даній площині, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, тобто $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$. Отримаємо:

$$d=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8.23}$$

Приклад 8.9. Знайти відстань від точки $M(1,-2,5)$ до площини $2x+4y-z+7=0$.

Розв'язок. За формулою (8.23)

$$d = \frac{|2\cdot 1 + 4\cdot(-2) - 5 + 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \blacktriangleleft$$

Відстань від точки до прямої на площині. Нехай в системі координат Oxy задана пряма $Ax + By + C = 0$ і точка $M_1(x_1, y_1)$.

Відстань від точки M_1 до цієї прямої знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (8.24)$$

Вивід формули (8.24) аналогічний до виводу формули (8.23).

8.9. Умова, при якій дві прямі лежать в одній площині

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Їх напрямні вектори відповідно $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ (рис.8.11).

Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежить на прямій l_1, а точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – на прямій l_2. Умовою, при якій дві прямі належать одній площині, є компланарність векторів $\overline{M_1M_2}$, $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, тобто $(\overline{M_1M_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.25)$$

При виконанні умови (8.25) прямі l_1 і l_2 перетинаються, якщо вектори $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ неколінеарні, і $l_1 \parallel l_2$, якщо $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2$.

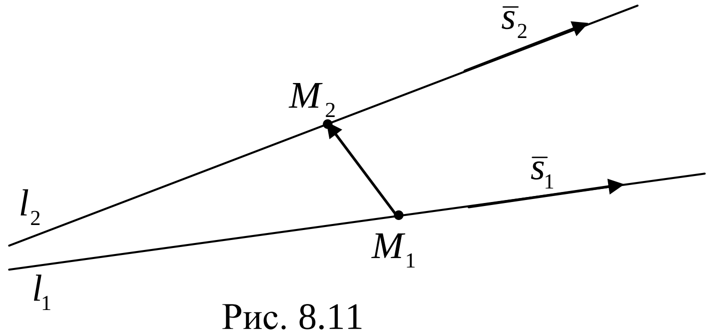


Рис. 8.11

Приклад 8.10. Виясни́ти, чи перетинаються прямі

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{3},\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-5}{1}$$

і, якщо перетинаються, знайти їх точку перетину.

Розв'язок. Точка $M_1(2,\ -3,\ 4)$ лежить на першій прямій, а точка $M_2(3,\ -3,\ 5)$ – на другій. Напрямні вектори даних прямих відповідно $\bar{s}_1(1,\ 2,\ 3)$ і $\bar{s}_2(-2,\ 3,\ 1)$. Умовою, при якій прямі перетинаються, є компланарність векторів $\overline{M_1M_2}$, $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$. Знайдемо мішаний добуток даних векторів

$$\begin{vmatrix} 3-2 & -3-(-3) & 5-4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=2+3+4-9=0.$$

Отже, умова (8.25) виконується, тобто прямі перетинаються.

Знайдемо точку перетину прямих, розв'язавши систему їх рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{3}, \\ \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-5}{1}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}, \\ \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{3}, \\ \dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=y+3, \\ 3x-9=-2y-6, \\ 3y+9=2z-8. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-7, \\ 3x-9+4x-8=0, \\ z=\dfrac{3y+17}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{7}, \\ y=2\cdot\dfrac{17}{7}-7=-\dfrac{15}{7}, \\ z=\dfrac{1}{2}\left[3\cdot\left(-\dfrac{15}{7}\right)+17\right]=\dfrac{37}{7}. \end{cases}$$

Таким чином, точка перетину даних прямих має координати $\left(\dfrac{17}{7},-\dfrac{15}{7},\dfrac{37}{7}\right)$. ◄

Теоретичні питання

8.1. Записати рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

8.2. Записати загальне рівняння площини.

8.3. Записати рівняння прямої на площині, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

8.4. Записати загальне рівняння прямої.

8.5. Записати канонічні рівняння прямої.

8.6. Записати параметричні рівняння прямої.

8.7. Записати рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.

8.8. Записати рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом.

8.9. Записати загальні рівняннями прямої в просторі.

8.10. Записати рівняння прямої, що проходить через дві точки.

8.11. Записати рівняння прямої у відрізках.

8.12. Записати рівнянням площини, що проходить через три точки.

8.13. Записати рівняння площини у відрізках.

8.14. Як визначається кут між площинами?

8.15. Які умови паралельності та перпендикулярності двох площин?

8.16. Як визначається кут між прямими, заданими: а) загальними рівняннями; б) канонічними рівняннями; в) рівняннями з заданим кутовим коефіцієнтом?

8.17. Які умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, заданих: а) загальними рівняннями; б) канонічними рівняннями; в) рівняннями з заданим кутовим коефіцієнтом?

8.18. Як визначається кут між прямою і площиною?

8.19. Які умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини?

8.20. Чому рівна відстань від точки до площини і від точки до прямої на площині?

8.21. Записати умову перетину двох прямих у просторі.

Задачі та вправи

Пряма на площині

8.1 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,\,2)$ *і:*

а) перпендикулярна до вектора $\vec{n}(4,\,-2)$*; б) паралельна до вектора* $\vec{s}(-3,\,9)$*;*

в) утворює з віссю Ox *кут* $\pi/4$*; г) точку* $N(9,\,-7)$.

8.2. Вказати особливості розташування прямих на площині:

1) $2x-5y=0$*;* *3)* $3x-2=0$*;* *5)* $\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1$*;*

2) $7y+12=0$*;* *4)* $5x=0$*;* *6)* $3y=0$.

8.3. Дано вершини трикутника $A(1,\,-1);\quad B(3,\,5);\quad C(-7,\,11)$*. Знайти:*

а) рівняння сторони AB*; б) рівняння та довжину висоти* CH*; в) рівняння та довжину медіани* AM*; г) точку* N *перетину висоти* CH *і медіани* AM*; д) рівняння прямої* l*, що проходить через точку* N *паралельно стороні* AB.

Розв'язок. а) рівняння сторони AB *складемо, використовуючи рівняння (8.13) – прямої, що проходить через дві точки:*

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+1}{5+1}$$

що рівносильно

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{6} \;\; \text{або} \;\; \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}$$

– канонічне рівняння прямої ($AB \parallel \bar{s}_1(1,3)$).

Запишемо рівняння прямої AB *в загальному вигляді:* $3x-y-4=0$, ($AB \perp \bar{n}_1(3,-1)$).

Запишемо рівняння прямої AB *у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:* $y=3x-4$, $k_{AB}=3$.

б) Щоб записати рівняння висоти CH*, використаємо умову перпендикулярності прямих* AB *і* CH*:* $k_{AB}k_{CH}=-1$*. Отримаємо:* $k_{CH}=-\frac{1}{3}$*. Запишемо рівняння прямої* CH*, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом (8.9):* $y-y_C=k_{CH}(x-x_C)$*, тобто* $y-11=-\frac{1}{3}\cdot(x+7)$ *або*

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}.$$

Довжину висоти CH *знайдемо як відстань від точки* C *до прямої* AB*, використавши формулу (8.24):*

$$CH = d = \frac{|3\cdot(-7) - 11 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{36}{\sqrt{10}}$$

в) Щоб записати рівняння медіани AM*, знайдемо координати точки M як середини відрізка і скористаємося рівнянням (8.13).*

Так як

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2},\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2},$$

то

$$x_M = \frac{3-7}{2} = -2,\ y_M = \frac{5+11}{2} = 8,$$

тобто $M(-2,\ 8)$. *Тоді рівняння медіани* AM *матиме вигляд:*

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+1}{8+1},$$

що рівносильно

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{9} \quad \textit{або} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{3}.$$

Знайдемо довжину медіани AM *як відстань між двома точками:*

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (8+1)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

г) Знайдемо точку N *перетину висоти* CH *і медіани* AM*. Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь:*

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}, \\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{3} \end{cases}.$$

Отримаємо $x_N = -2{,}5$*;* $y_N = 9{,}5$*, тобто* $N(-2{,}5;\ 9{,}5)$.

д) Щоб записати рівняння прямої l*, що проходить через точку* N *паралельно стороні* AB*, використаємо умову їх паралельності –* $k_l = k_{AB}$ *і рівняння (8.9)*

$-\ y - y_N = k_3(x - x_N)$. *Отримаємо:* $y - 9{,}5 = 3 \cdot (x + 2{,}5)$ *або* $y = 3x + 17$. ◀

8.4. *Знайти кут між двома прямими:*

1) $x + y - 1 = 0$ *і* $2x + 3y + 4 = 0$; 3) $y = 2x - 3$ *і* $y = -4x + 5$;

2) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y+1}{6}$ *і* $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+7}{-2}$; 4) $y = -7x + 5$ *і* $\dfrac{x+4}{-3} = \dfrac{y-6}{8}$.

8.5. *Знайти відстань між двома паралельними прямими* $3x + 4y - 12 = 0$ *і* $6x + 8y + 13 = 0$.

Площина

8.6. *Вказати особливості розташування площин відносно системи координат* $Oxyz$ *:*

1) $2x - y + 5z = 0$; 3) $7x + 3y - 5 = 0$;

2) $-6y + z = 0$; 4) $8x - 7 = 0$.

8.7. *Скласти рівняння площини, що паралельна площині* Oxy *і проходить через точку* $A(1, 2, -4)$.

8.8. *Скласти рівняння площини, що перпендикулярна до осі* Ox *і проходить через точку* $A(3, 7, -1)$.

8.9. *Знайти рівняння площини, що паралельна осі* Oz *і проходить через точки* $A(2, 3, -1)$ *і* $B(-1, 2, 4)$.

8.10. *Які відрізки відтинає на координатних осях площина* $2x + 3y - 5z + 30 = 0$ *? Побудуйте цю площину.*

8.11. *Знайти рівняння площини, що проходить через точку* $M(2, 3, -1)$ *паралельно площині* $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

8.12. *Знайти відстань між паралельними площинами* $-5x - 3y + 4z - 15 = 0$ *і* $15x + 9y - 12z - 5 = 0$.

8.13. *Знайти кут між двома площинами* $5x - 3y + 4z - 4 = 0$ *і* $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

8.14. *Через три точки*

Пряма в просторі. Пряма і площина

8.15. Дано чотири точки $A_1(2,1,4)$, $A_2(5,3,0)$, $A_3(0,-1,-2)$, $A_4(-2,-3,1)$. *Знайти: а) рівняння прямої* A_1A_2*; б) рівняння прямої* A_4M *паралельної до прямої* A_1A_2*; в) рівняння площини, що проходить через точку* A_4 *перпендикулярно до прямої* A_1A_2*; г) рівняння площини* $A_1A_2A_3$*; д) рівняння прямої* A_4N *перпендикулярної до площини* $A_1A_2A_3$ *та координати точки* N *їх перетину; е) відстань* A_4N *від точки* A_4 *до площини* $A_1A_2A_3$*; є) кут між прямою* A_1A_4 *і площиною* $A_1A_2A_3$*; ж) кут між координатною площиною* Oxy *і площиною* $A_1A_2A_3$.

Розв'язок. а) рівняння прямої A_1A_2 *складемо, використовуючи рівняння (8.12) – прямої, що проходить через дві точки:*

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-4}{0-4} \quad \textit{або} \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-4}$$

– канонічне рівняння прямої, $A_1A_2 \parallel \bar{s}_1(3,\ 2,\ -4)$.

б) Щоб записати рівняння прямої A_4M *паралельної до прямої* A_1A_2*, використаємо канонічні рівняння* (8.5) *прямої в просторі, що проходить через точку* A_4 *паралельно до вектора* $\bar{s}_1(3,\ 2,\ -4)$*, так як* $A_1A_2 \parallel A_4M$*, а* $A_1A_2 \parallel \bar{s}_1$*, то і* $A_4M \parallel \bar{s}_1$. *Отримаємо:*

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-4}.$$

в) Щоб записати рівняння площини, що проходить через точку A_4 *перпендикулярно до прямої* A_1A_2*, використаємо рівняння (8.1) площини, що проходить через задану точку* A_4 *перпендикулярно до заданого вектора* $\bar{n}_1$*. Так як* $A_1A_2 \parallel \bar{s}_1$ *і пряма* A_1A_2 *перпендикулярна до шуканої площини, то і вектор* $\bar{s}_1$ *перпендикулярний до цієї площини, тому в якості нормального вектора* $\bar{n}_1$ *візьмемо вектор* $\bar{n}_1=\bar{s}_1$*. Отримаємо:*

$$3\cdot(x+2)+2\cdot(y+3)-4(z-1)=0 \quad \textit{або} \quad 3x+2y-4z+16=0.$$

г) Щоб записати рівняння площини $A_1A_2A_3$*, використаємо рівняння (8.15) площини, що проходить через три точки:*

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 5-2 & 3-1 & 0-4 \\ 0-2 & -1-1 & -2-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + (z-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$= -20 \cdot (x-2) + 26 \cdot (y-1) - 2 \cdot (z-4) = 0$ або $10x - 13y + z - 11 = 0$ – загальне рівняння площини, $A_1A_2A_3 \perp \bar{n}_2(10, -13, 1)$.

д) Щоб записати рівняння прямої A_4N, перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$, скористаємось рівняннями (8.5). Напрямний вектор $\bar{s}_2$ прямої A_4N перпендикулярний до площини $A_1A_2A_3$, а отже $\bar{s}_2 \parallel \bar{n}_2$, тому візьмемо $\bar{s}_2 = \bar{n}_2$. Отримаємо: $\dfrac{x+2}{10} = \dfrac{y+3}{-13} = \dfrac{z-1}{1}$.

Знайдемо координати точки N перетину прямої A_4N і площини $A_1A_2A_3$. Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь, записавши рівняння прямої A_4N в параметричній формі:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{10} = \dfrac{y+3}{-13} = \dfrac{z-1}{1} = t, \\ 10x - 13y + z - 11 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 10t, \\ y = -3 - 13t, \\ z = 1 + t, \\ 10x - 13y + z - 11 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 10t, \\ y = -3 - 13t, \\ z = 1 + t, \\ 10 \cdot (-2 + 10t) - 13 \cdot (-3 - 13t) + 1 \cdot (1 + t) - 11 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-1}{30}, \\ x = -2 + 10 \cdot \dfrac{-1}{30}, \\ y = -3 - 13 \cdot \dfrac{-1}{30}, \\ z = 1 + \dfrac{-1}{30}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{3}, \\ y = -\dfrac{77}{30}, \\ z = \dfrac{29}{30}. \end{cases}$$

Таким чином, $N\left(-\frac{7}{3}, -\frac{77}{30}, \frac{29}{30}\right)$.

е) Відстань A_4N *від точки* A_4 *до площини* $A_1A_2A_3$ *знайдемо за формулою (8.23):*

$$A_4N = d = \frac{|10\cdot(-2) - 13\cdot(-3) + 1\cdot 1 - 11|}{\sqrt{10^2 + (-13)^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{270}} = \frac{9}{3\sqrt{30}} = \frac{3}{\sqrt{30}} \ .$$

є) Знайдемо кут між прямою A_1A_4 *і площиною* $A_1A_2A_3$.

Запишемо рівняння прямої A_1A_4 *як рівняння прямої, що проходить через дві точки:* $\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z-4}{1-4}$ *або* $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{3}$ – *канонічне рівняння прямої,* $A_1A_4 \parallel \bar{s}_3(4, 4, 3)$.

Для знаходження шуканого кута φ *скористаємося формулою (8.22):*

$$\sin\varphi = \frac{|10\cdot 4 - 13\cdot 4 + 1\cdot 3|}{\sqrt{10^2 + (-13)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{4^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{270}\cdot\sqrt{41}} = \frac{3}{\sqrt{1230}}, \ \varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{1230}} .$$

ж) Знайдемо кут між координатною площиною Oxy *і площиною* $A_1A_2A_3$.

Рівняння площини Oxy – $z = 0$, $Oxy \perp \bar{k}(0, 0, 1)$.

Для знаходження шуканого кута ψ *застосуємо формулу (8.17):*

$$\cos\psi = \frac{|10\cdot 0 - 13\cdot 0 + 1\cdot 1|}{\sqrt{10^2 + (-13)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{270}\cdot 1} = \frac{1}{3\sqrt{30}},$$

$$\psi = \arccos\frac{1}{3\sqrt{30}}. \ ◄$$

8.16. *Знайти кут між прямими* $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-1}$.

8.17. *Знайти проекцію точки* $M(3, -4, 3)$ *на площину* $2x - y - z - 1 = 0$.

8.18. *Знайти рівняння площини, що проходить через пряму* $\begin{cases} 3x - y + z - 5 = 0, \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ *паралельно прямій* $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

8.19. *Знайти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі:*

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4} \text{ і } \frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}.$$

Лекція 9

§9. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

9.1. Еліпс

Еліпсом називається множина точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок цієї площини є сталою величиною, більшою від відстані між даними точками. Дані точки називаються ***фокусами.***

Позначимо фокуси через F_1, F_2, відстань між ними $2c$, а суму відстаней від будь-якої точки еліпса до його фокусів – через $2a$. Згідно означенню еліпса, $a > c$.

Для виведення рівняння еліпса виберемо систему координат Oxy так, щоб фокуси F_1, F_2 лежали на осі Ox, а початок координат співпадав з серединою відрізка F_1F_2 (рис. 9.1). Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

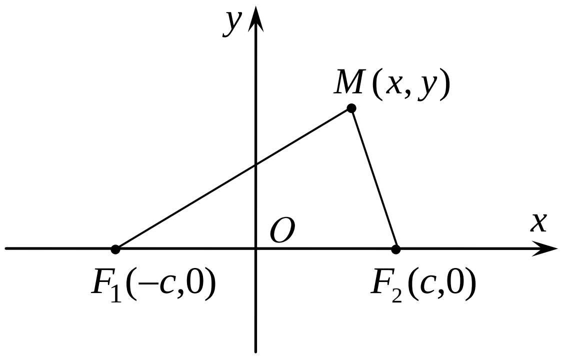


Рис. 9.1

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса. За означенням, для довільної точки еліпса і тільки для точок еліпса справедлива рівність: $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, тобто

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

– це і є рівняння еліпса.

Приведемо отримане рівняння до більш простого вигляду. Для цього перенесемо перший доданок в праву сторону і піднесемо обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

або

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

Піднесемо обидві частини отриманого рівняння до квадрату, отримаємо:

$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$ або $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Так як $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Ввівши позначення $a^2-c^2=b^2$, отримаємо

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{9.1}$$

Можна довести, що рівняння (9.1) рівносильне початковому рівнянню. Воно називається ***канонічним рівнянням еліпса.***

Дослідження форми еліпса за його рівнянням. Координати x і y входять в рівняння (9.1) в парних степенях, тому, якщо точка (x,y) належить еліпсу, то і точки $(-x,-y)$, $(-x,y)$, $(x,-y)$ теж йому належать. Звідси випливає, що еліпс симетричний відносно осей координат і відносно початку координат.

Для точок, що лежать в першій координатній чверті ($x\geq 0,\ y\geq 0$) маємо $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. З цієї рівності випливає, що $a^2-x^2\geq 0 \iff 0\leq x\leq a$. При $x=0$: $y=b$; при $x=a$: $y=0$. При зростанні x від 0 до a значення y спадають від b до 0.

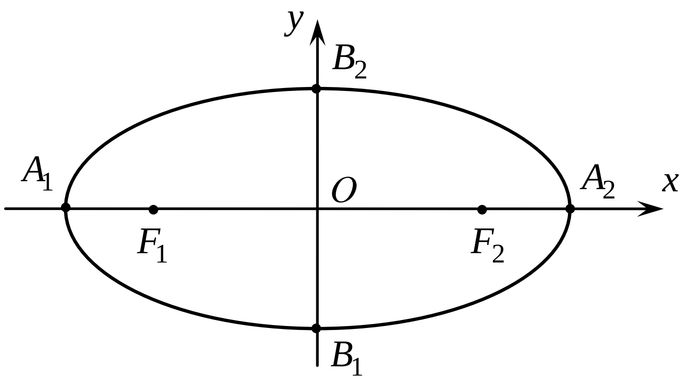


Рис. 9.2

Побудуємо еліпс в першій координатній чверті і, враховуючи симетрію, відобразимо побудовану частину відносно осей координат (рис. 9.2).

Центр симетрії $O(0,0)$ називають *центром еліпса*. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ – точки перетину еліпса з осями координат називають *вершинами еліпса*. Відрізок A_1A_2, а також його довжина $2a$ називаються *великою віссю еліпса*, відрізок B_1B_2, а також його довжина $2b$ – *малою віссю еліпса*.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $a<b$, теж є рівнянням еліпса. Фокуси такого еліпса лежать на осі Oy (рис. 9.3).

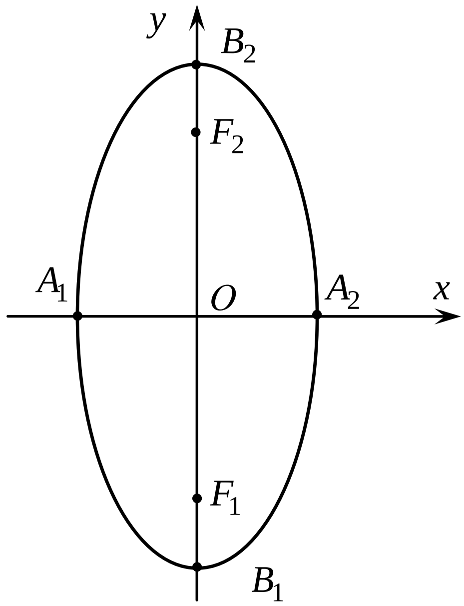


Рис. 9.3

Якщо $a=b$, то рівняння (9.1) набуде вигляду

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{9.2}$$

– рівняння кола радіуса а з центром в $O(0,0)$.

Ексцентриситет еліпса. Форма еліпса залежить від відношення $\frac{b}{a}$.

Відношення $\frac{c}{a}$ відстані між фокусами до довжини великої осі називають ***ексцентриситетом еліпса*** і позначають ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{9.3}$$

Так як, $0 \le c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$. Зауважимо: якщо $a = b$, то $\varepsilon = 0$.

Підставивши в формулу (9.3) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, отримаємо

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ або } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Звідси видно, що чим менше ε, тим ближче відношення $\frac{b}{a}$ до одиниці і, отже, тим ближче форма еліпса до форми кола. Таким чином, ексцентриситет характеризує ступінь стисливості еліпса.

Приклад 9.1. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо:

а) відстань між фокусами рівна 24, а велика піввісь рівна 16;

б) відстань між фокусами рівна 8, а ексцентриситет рівний $\varepsilon = \frac{4}{5}$;

в) відстань між фокусами рівна 24, а сума півосей рівна 18.

Розв'язок. а) Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти a і b. За умовою $a = 16$ і $2c = 24$ або $c = 12$. Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$, отримаємо $b^2 = 16^2 - 12^2 = 256 - 144 = 112$. Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1. \blacktriangleleft$$

б) Так як за умовою $2c = 8$ і $\varepsilon = \frac{4}{5}$, то $c = 4$ і $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = \frac{4}{5}$, звідки $a = 5$. Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$, отримаємо $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$. Отже, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1. \blacktriangleleft$$

в) За умовою $2c=24$ або $c=12$ і $a+b=18$. Щоб знайти a і b, використавши співвідношення $c^2=a^2-b^2$, складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b=18, \\ a^2-b^2=144. \end{cases}$$

З останньої маємо

$$\begin{cases} a+b=18, \\ (a-b)\cdot(a+b)=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=18, \\ a-b=8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=26, \\ a-b=8. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=13, \\ b=5. \end{array}\right. .$$

Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1. \blacktriangleleft$$

Приклад 9.2. Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки

$$M_1\left(-2,\ \frac{4\sqrt{21}}{5}\right),\ M_2\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4},\ 3\right).$$

Розв'язок. Щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти a і b. Так як точки M_1, M_2 лежать на еліпсі, то їх координати задовольняють його рівнянню. Отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{(-2)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\dfrac{4\sqrt{21}}{5}\right)^2}{b^2}=1, \\ \dfrac{\left(-\dfrac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2}{a^2}+\dfrac{3^2}{b^2}=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{\frac{336}{25}}{b^2}=1, \\ \dfrac{\frac{175}{16}}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2+\dfrac{336a^2}{25}=a^2b^2, \\ \dfrac{175}{16}b^2+9a^2=4b^2+\dfrac{336}{25}a^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2+\dfrac{336a^2}{25}=a^2b^2, \\ a^2=\dfrac{25}{16}b^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2+\dfrac{336}{25}\cdot\dfrac{25}{16}b^2=\dfrac{25}{16}b^2\cdot b^2, \\ a^2=\dfrac{25}{16}b^2. \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} b^2=16, \\ a^2=25 \end{array}\right\}.$$

Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1. \blacktriangleleft$$

9.2. Гіпербола

Канонічне рівняння гіперболи. ***Гіперболою*** називається множина точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох даних точок цієї площини є сталою величиною, меншою від відстані між даними точками. Дані точки називаються ***фокусами.***

Позначимо фокуси через F_1, F_2, відстань між ними $2c$, а модуль різниці відстаней від будь-якої точки гіперболи до його фокусів – через $2a$. Згідно означенню гіперболи $a < c$.

Для виведення рівняння гіперболи виберемо систему координат Oxy так, щоб фокуси F_1, F_2 лежали на осі Ox, а початок координат співпадав з серединою відрізка F_1F_2 (рис. 9.4). Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

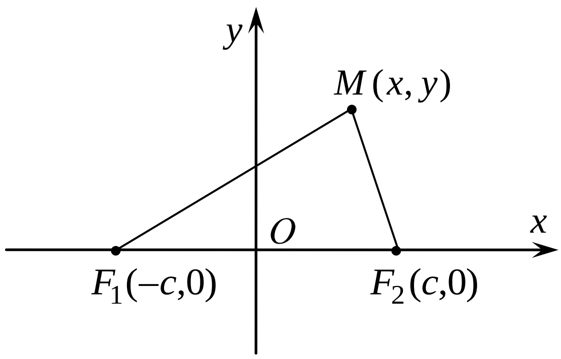


Рис. 9.4

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка гіперболи. За означенням для довільної точки гіперболи і тільки для точок гіперболи справедлива рівність:

$$\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 2a \text{ або } \left| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right| = \pm 2a,$$

тобто

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

– це і є рівняння гіперболи. Приведемо отримане рівняння до більш простого вигляду, як це було зроблено для еліпса. Отримаємо:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Так як $a < c$, то $c^2 - a^2 > 0$. Ввівши позначення $c^2 - a^2 = b^2$, отримаємо:

$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2$ або

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (9.4)$$

Можна довести, що рівняння (9.4) рівносильне початковому рівнянню. Воно називається ***канонічним рівнянням гіперболи.***

Дослідження форми гіперболи за її рівнянням. Координати x і y входять в рівняння (9.4) в парних степенях, тому гіпербола симетрична відносно осей координат і відносно початку координат.

Для точок, що лежать в першій координатній чверті ($x\ge 0,\ \ y\ge 0$) маємо

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,.$$

З цієї рівності випливає, що $x^2-a^2\ge 0 \ \Leftrightarrow\ 0\le x\le a$. При $x=a$: $y=0$. При зростанні x значення y теж зростають, і точка $M(x,y)$ кривої при цьому необмежено віддаляється від осей Ox і Oy.

Побудуємо гіперболу в першій координатній чверті і, враховуючи симетрію, відобразимо побудовану частину відносно осей координат (рис. 9.5). Гіпербола складається з двох частин, які називаються *вітками*.

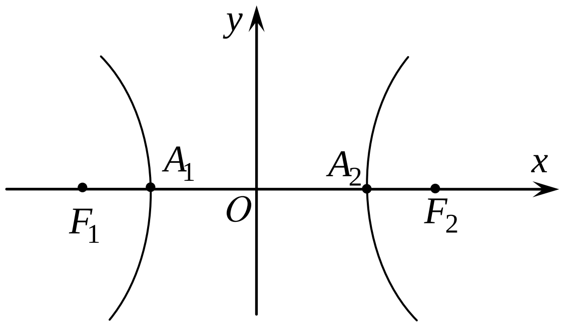


Рис. 9.5

Центр симетрії $O(0,0)$ називають *центром гіперболи*. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ – точки перетину гіперболи з віссю Ox називають *вершинами гіперболи*. З віссю Oy гіпербола не перетинається. Відрізок A_1A_2, а також його довжина $2a$ називаються *дійсною віссю гіперболи*, а число $2b$ – *уявною віссю гіперболи.*

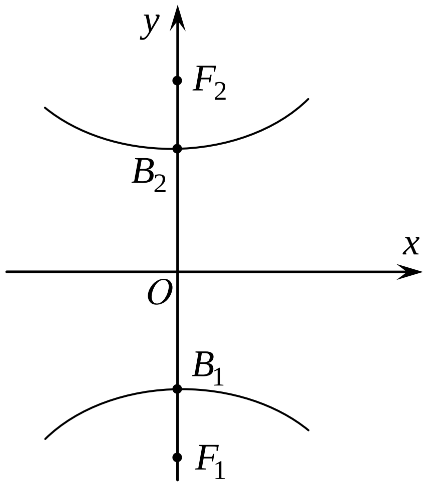


Рис. 9.6

Рівняння $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ теж є рівнянням гіперболи. Фокуси такої гіперболи лежать на осі Oy (рис. 9.6). В цьому випадку точки $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ є *вершинами гіперболи*, а $2b$ *– дійсною віссю,* $2a$ *– уявною.*

Якщо $a = b$, то гіпербола називається *рівносторонньою*.

Асимптоти гіперболи. Пряма l називається ***асимптотою*** необмеженої кривої K, якщо відстань $d = NM$ від точки M кривої K до цієї прямої прямує до нуля при необмеженому віддаленні точки M вздовж кривої K від початку координат (рис. 9.7).

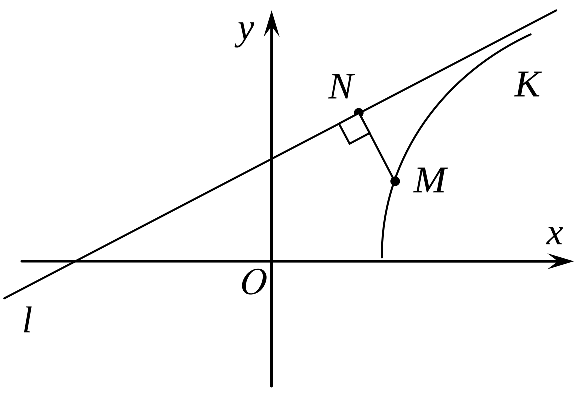


Рис. 9.7

Покажемо, що гіпербола, задана рівнянням (9.4), має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{і} \quad y = -\frac{b}{a}x. \tag{9.5}$$

Так як прямі (9.5) і гіпербола (9.4) симетричні відносно осей координат, то достатньо розглянути тільки ті їх точки, що лежать в першій координатній чверті.

Візьмемо на прямій $y=\frac{b}{a}x$ точку L з такою ж абсцисою x, як і в точки $M(x,y)$, що лежить на гіперболі $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ (рис. 9.8) і знайдемо різницю ML між ординатами прямої і вітки гіперболи:

$$ML=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Чисельник отриманого дробу є постійною величиною, а знаменник збільшується при зростанні x. Отже, довжина відрізка MN прямує до нуля при $OM\to\infty$. Так як $ML>d=NM$, то d теж прямує до нуля. Таким чином, прямі

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

є асимптотами гіперболи.

Для гіперболи, заданої рівнянням $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, асимптоти також мають вигляд (9.5).

При побудові гіперболи доцільно спочатку побудувати прямокутник з центром симетрії в початку координат із сторонами $2a$, $2b$. Прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника, будуть асимптотами гіперболи.

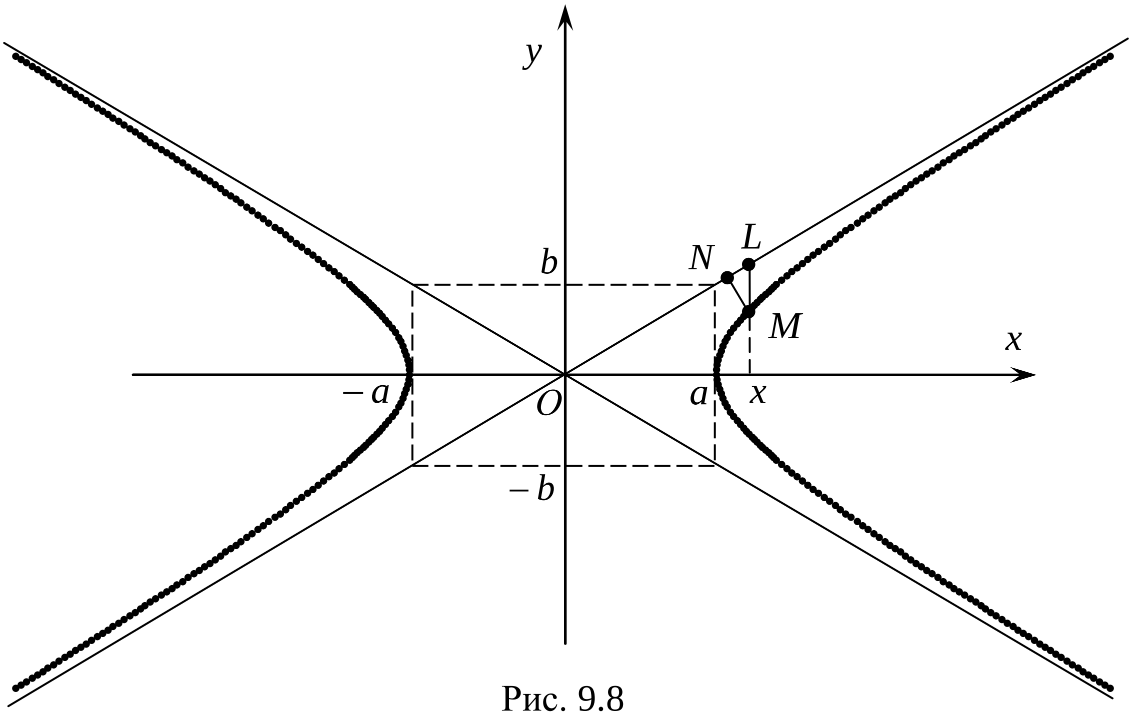


Рис. 9.8

Ексцентриситет гіперболи. Відношення $\frac{c}{a}$ відстані між фокусами до довжини дійсної осі називають ***ексцентриситетом гіперболи*** і позначають ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (9.6)$$

Так як $a < c$, то $\varepsilon > 1$.

Ексцентриситет характеризує форму гіперболи. Дійсно, підставивши в формулу (9.6) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, отримаємо

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \text{ або } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Звідси видно, що чим менше ε, тим менше відношення $\frac{b}{a}$ і тим менші кути між асимптотами, в яких розташована гіпербола.

Якщо гіпербола задана рівнянням $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, то ексцентриситет знаходимо за формулою $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Приклад 9.3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, якщо відстань між фокусами рівна 30, а дійсна вісь рівна 16.

Розв'язок. Щоб скласти рівняння гіперболи, треба знайти a і b. За умовою $2c=30$ або $c=15$ і $2a=16$ або $a=8$. Із співвідношення $b^2=c^2-a^2$, отримаємо $b^2=15^2-8^2=225-64=161$. Таким чином, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{161}=1. \blacktriangleleft$$

Приклад 9.4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Oy, якщо уявна вісь рівна 10, а ексцентриситет рівний $\varepsilon=\frac{13}{12}$. Знайти її асимптоти.

Розв'язок. Так як за умовою $2a=10$ і $\varepsilon=\frac{13}{12}$, то $a=5$ і $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{13}{12}$.

Отримаємо: $\frac{\sqrt{25+b^2}}{b}=\frac{13}{12} \Rightarrow \frac{25+b^2}{b^2}=\frac{169}{144} \Rightarrow 144\cdot(25+b^2)=169b^2$. Звідки $b^2=144$ або $b=12$.

Отже, шукане рівняння гіперболи матиме вигляд

$$\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1,$$

а рівняння асимптот –

$$y=\pm\frac{12}{5}x. \blacktriangleleft$$

9.3. Парабола

Канонічне рівняння параболи. ***Параболою*** називається множина точок площини, кожна з яких однаково віддалена від даної точки і даної прямої. Дану точку називають ***фокусом***, а дану пряму ***директрисою.***

Позначимо фокус через F. Відстань від фокуса F до директриси називається *параметром параболи* і позначається p $(p>0)$.

Для виведення рівняння параболи виберемо систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисі в напрямку від директриси до фокуса. За початок координат виберемо середину між фокусом і точкою перетину директриси з віссю OX. Тоді рівняння директриси матиме вигляд: $x+\frac{p}{2}=0$, а координати фокуса $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ (рис. 9.9).

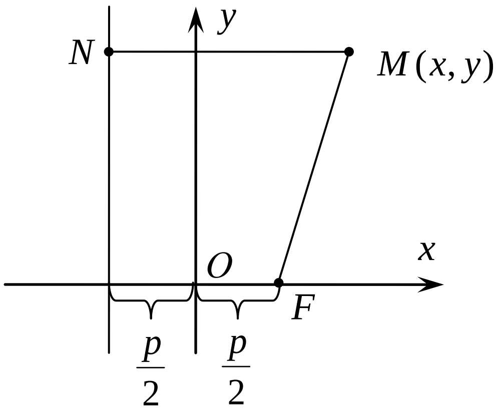


Рис. 9.9

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка параболи. Проведемо відрізок MN перпендикулярно директрисі, тоді $N\left(-\frac{p}{2},y\right)$ За означенням для довільної точки параболи і тільки для точок параболи справедлива рівність:

$$|MF|=|MN|, \text{ тобто } \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$$

– це і є рівняння параболи. Приведемо отримане рівняння до більш простого вигляду. Для цього піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і приведемо подібні, отримаємо:

$$y^2=2px. \tag{9.7}$$

Можна довести, що рівняння (9.7) рівносильне початковому рівнянню. Воно називається ***канонічним рівнянням параболи.***

Дослідження форми параболи за її рівнянням. Координата y входить в рівняння (9.7) в парному степені, тому парабола симетрична відносно осі Ox.

Так як $p>0$, то з рівняння (9.7) випливає, що $x\geq 0$. А отже, парабола розташована справа від осі Oy.

При $x=0$: $y=0$ – парабола проходить через початок координат і точка

$O(0,0)$ називається *вершиною параболи*.

При зростанні x значення модуля y теж зростають.

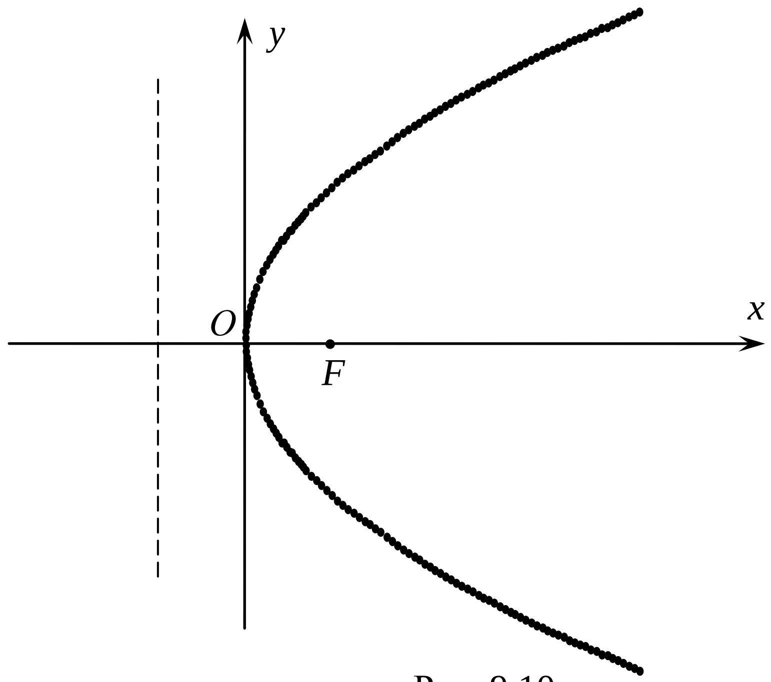


Рис. 9.10

Парабола $y^2 = 2px$ побудована на рис. 9.10.

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ теж є рівняннями параболи.

Парабола має нескінченні вітки. Асимптот у параболи немає.

Ексцентриситет параболи вважають рівним одиниці.

Приклад 9.5. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі Ox і проходить через точку $M(-8,\ 4)$.

Розв'язок. Так як парабола симетрична відносно осі Ox, то її рівняння має вигляд $y^2 = -2px$ $(p > 0)$. Підставимо координати точки M в це рівняння, отримаємо: $4^2 = -2p \cdot (-8)$ або $16 = 16p$, звідки $p = 1$. Отже, $y^2 = -2x$ – шукане рівняння. ◀

9.4. Еліпс, гіпербола, парабола з осями, паралельними осям координат

Розглянемо еліпс з центром в точці $O'(x_0, y_0)$ з осями, паралельними осям координат (рис. 9.11).

Перейдемо від системи координат Oxy до нової системи координат $O'x'y'$ за допомогою паралельного переносу. При цьому початок координат $O(0,0)$ перейде в точку $O'(x_0, y_0)$, а осі $O'x'$, $O'y'$ будуть паралельними осям Ox, Oy і однаково з ними направленими. Як відомо, формули перетворення координат при паралельному переносі осей координат на площині мають вигляд:

$$x' = x - x_0,\ y' = y - y_0. \tag{9.8}$$

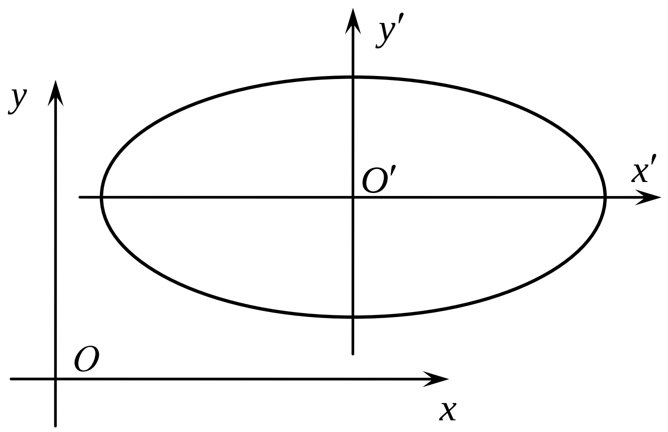


Рис. 9.11

Так як нові осі координат співпадають з осями еліпса, а початок координат – з його центром, то відносно системи координат $O'x'y'$ канонічне рівняння еліпса матиме вигляд:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \tag{9.9}$$

Підставивши в рівняння (9.9) замість x', y' їх вирази з (9.8), отримаємо ***рівняння еліпса*** *з центром в точці* $O'(x_0, y_0)$ *з осями, паралельними осям координат:*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{9.10}$$

Аналогічно отримаємо ***рівняння гіперболи*** *з центром в точці* $O'(x_0, y_0)$ *з осями, паралельними осям координат:*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{9.11}$$

якщо дійсна вісь паралельна осі Ox, і

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1, \tag{9.12}$$

якщо дійсна вісь паралельна осі Oy.

Парабола з вершиною в точці $O'(x_0,y_0)$ *задається* ***рівнянням:***

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0), \tag{9.13}$$

якщо вісь симетрії паралельна осі Ox, і

$$(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0), \tag{9.14}$$

якщо вісь симетрії паралельна осі Oy.

Рівняння (9.10) – (9.14) є рівняннями вигляду

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Останнє є частинним випадком ***загального рівняння кривої другого порядку на площині***

$$Ax^2++Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Теоретичні питання

9.1. *Що називається еліпсом?*

9.2. *Записати канонічне рівняння еліпса.*

9.3. *Що називається ексцентриситетом еліпса?*

9.4. *Що називається гіперболою?*

9.5. *Записати канонічне рівняння гіперболи.*

9.6. *Що називається асимптотою кривої?*

9.7. *Записати рівняння асимптот гіперболи.*

9.8. *Що називається ексцентриситетом гіперболи?*

9.9. *Що називається параболою?*

9.10. *Записати канонічне рівняння параболи.*

9.11. *Записати рівняння еліпса з центром в точці $O'(x_0,y_0)$ з осями, паралельними осям координат.*

9.12. *Записати рівняння гіперболи з центром в точці $O'(x_0,y_0)$ з осями, пара-*

лельними осям координат.

9.13. Записати рівняння параболи з вершиною в точці $O'(x_0, y_0)$ *з осями, паралельними осям координат.*

Задачі та вправи

9.1. Знайти довжини осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 = 144$.

9.2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

а) $a = 6, b = 4$*; б)* $2c = 10, 2a = 16$*; в)* $b = 4, 2c = 10$*;*

г) $a = 12, \varepsilon = 0{,}5$*; д)* $b = 8, \varepsilon = 0{,}6$*; е)* $a + b = 12, 2c = 6\sqrt{2}$.

9.3. Знайти рівняння гіперболи, що проходить через точки

$$A\left(3, \frac{2\sqrt{15}}{5}\right) \text{ і } B(-2\sqrt{5},\ 3).$$

9.4. Знайти рівняння асимптот гіперболи $2x^2 - 3y^2 = 6$ *та кут між ними.*

9.5. Задана рівностороння гіпербола $x^2 - y^2 = 8$. *Знайти рівняння еліпса, фокуси якого співпадають з фокусами гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку* $A(4, 6)$.

9.6. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричною відносно осі Ox*, якщо відстань від її фокуса до вершини дорівнює 4.*

9.7. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричною відносно осі Ox*, що проходить через точку* $A(4, -1)$.

ВІДПОВІДІ

1.1. а) 2×3, б) 4×2, в) 2×2, г) 1×1. **1.2.** $a_{41}=2$, $a_{22}=5$, $a_{32}=4$.

1.3. а) A_1, A_3, б) A_3, в) A_4, A_5, A_7, г) A_8, A_9. **1.4.** а) $\begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 74 & 24 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -9 \\ 0 & -8 & -7 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. **1.6.** а) $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 17 \\ 26 & 50 & 96 \end{pmatrix}$, б) 102, в) $\begin{pmatrix} 22 \\ 69 \\ 31 \end{pmatrix}$. **2.1.** а) 31, б) 260.

2.2. а) 0, б) 0, в) -25600. **2.3.** $A_{12}=-33$, $A_{21}=-14$, $A_{33}=46$. **2.4.** 11.

3.1. а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, б) A^{-1} не існує, в) $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{36} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-2}{3} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$, г) A^{-1} не існує.

3.2. а) 3, б) 3, в) 1. **4.1.** $x_1=2$, $x_2=3$. **4.2.** $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

5.1. $(-2, 24, -22)$. **5.2.** а) так, б) так, в) ні. **5.3.** а) так, б) так.

5.4. $(0, 3, -1)$. **5.5.** $A\left(-\frac{22}{3}, \frac{20}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. **5.6.** $D(0, 1, 9)$. **6.1.** 0. **6.2.** $\frac{29}{7}$.

6.3. $\varphi=\arccos\frac{29}{21\sqrt{2}}$. **6.4.** $580-48\sqrt{2}$. **6.5.** $\frac{12}{13}; \frac{3}{13}; -\frac{4}{13}$. **6.6.** 24. **6.7.** $\sqrt{38}$. **6.8.** -5. **6.9.** 182. **6.10.** а) ні; б) ні. **7.1.** $x+y-8=0$. **7.2.** Точка В. **7.3.** б) і в). **7.4.** $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4$. **7.5.** $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$. **8.1.** а) $y=2x$, б) $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{9}$, в) $y=x+1$, г) $\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{-9}$. **8.2.** а) проходить через початок координат, б) паралельна осі Ox, в) паралельна осі Oy, г) співпадає з віссю Oy, д) відтинає відрізки довжиною 2 і 7 на осях Ox, Oy відповідно, е) співпадає з віссю Ox. **8.4.** а) $\varphi=\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$, б) $\varphi=\pi/2$, в) $\theta=arctg\frac{6}{7}$, г) $\varphi=\arccos\frac{59}{5\sqrt{2\cdot 73}}$. **8.5.** $d=3{,}7$.

8.6. 1) проходить через початок координат, 2) проходить через вісь Ox, 3) паралельна осі Oz, 4) паралельна координатній площині Oyz. **8.7.** $z+4=0$. **8.8.** $x-3=0$. **8.9.** $x-3y+7=0$. **8.10.** -15, -10 і 6.

8.11. $2x-3y+5z+10=0$. **8.12.** $d=\dfrac{50}{\sqrt{450}}$. **8.13.** $\varphi=\arccos\dfrac{19}{5\sqrt{58}}$.

8.15. $\varphi=\arccos\dfrac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}$. **8.16.** $A(\ ;-3;4)$. **8.17.** $6x+5y-2z+1=0$.

8.18. $19x-14y+z+23=0$. **9.1.** $2a=12,\ 2b=8,$ $F_1(-2\sqrt{5};0)$, $F_2(2\sqrt{5};0)$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **9.2.** а) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$, б) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1$, в) $\dfrac{x^2}{41}+\dfrac{y^2}{16}=1$, г) $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{108}=1$, д) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$, е) $\dfrac{x^2}{6{,}75^2}+\dfrac{y^2}{5{,}25^2}=1$. **9.3.** $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{3}=1$. **9.4.** $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$, $\varphi=arctg\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. **9.5.** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$. **9.6.** $y^2=16x$ або $y^2=-16x$. **9.7.** $y^2=\dfrac{1}{4}x$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Знайти матрицю $C = 2\cdot B\cdot A + (A - B)^{T} - 3\cdot E$, *де* E *– одинична матриця третього порядку, якщо:*

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & -6\\ -3 & 6 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 0\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & -6 & 4\\ 3 & -9 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 5 & 4 & -2\end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -7\\ 7 & 6 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 8\\ 5 & 0 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ 5 & 0 & 4\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & -6\end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 3\\ 5 & 2 & -1\end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 3 & 4 & -5\\ 0 & 2 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 1 & 9\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & -9 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -3 & 2 & 8 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 3 & -7 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$

23. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

24. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

25. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

26. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -7 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

27. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$

28. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

29. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

$$30.\ A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -5\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 9\\ 3 & 0 & 2\\ 6 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

$$31.\ A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$$32.\ A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 5 & -3 & 2\\ -4 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$33.\ A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 7 & 6\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

$$34.\ A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ -4 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

$$35.\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 7\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначник трьома способами:

а) за означенням (правило трикутника);

б) розклавши визначник за елементами рядка або стовпчика;

в) звівши за допомогою властивостей до трикутного вигляду.

$$1.\ \begin{vmatrix}-4 & 2 & -5\\ 0 & 1 & 1\\ 7 & 2 & -4\end{vmatrix}.\qquad 2.\ \begin{vmatrix}0 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 5\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}.\qquad 3.\ \begin{vmatrix}-2 & -4 & 3\\ 4 & 5 & 0\\ -2 & -1 & -5\end{vmatrix}.$$

$$4.\ \begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 4 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}.\qquad 5.\ \begin{vmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 7 & 6\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}.\qquad 6.\ \begin{vmatrix}-1 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 3\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}.$$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -5 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} -4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 \\ 9 & 2 & -6 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 8 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

32. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 7 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

33. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

34. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

35. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Розв'язати систему: а) матричним способом; б) за формулами Крамера; в) методом Гауса.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_2 - x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 11, \\ x_1 + 4x_2 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -4, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 - x_3 = -4, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = -3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 4x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -12, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 = -15, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -5, \\ -2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_3 = -5, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -24, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

$$19.\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$20.\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$21.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$22.\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$23.\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

$$24.\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -11. \end{cases}$$

$$25.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$26.\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$27.\begin{cases} -7x_1 + 4x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$$

$$28.\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = -7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$29.\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7, \\ 5x_1 - 3x_3 = 13, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$30.\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$$

$$31.\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$32.\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

$$33.\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$34.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$35.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

4. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку сумісності розв’язати її.

1. $\begin{cases} -x_1-2x_2+x_3=7, \\ x_1+x_2-5x_3=1, \\ 2x_1+4x_2-2x_3=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1-x_2+2x_3=-4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1+4x_3=10, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ 3x_1-4x_2-x_3=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1-x_2=-1, \\ x_1+2x_2=-5, \\ -x_1-2x_2=1, \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1-2x_2-4x_3=3, \\ x_1+x_2-x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=-2, \\ -2x_1+4x_2+8x_3=-6. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=6, \\ 4x_1+6x_2+3x_3=3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1+6x_2-5x_3=2, \\ -x_1+3x_2+2x_3=1, \\ 6x_1+9\quad-4x_3=2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+5x_4=1, \\ x_1-3x_2-x_3-2x_4=7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-3x_4=-6, \\ x_1+x_2-3x_3-2x_4=4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ x_1-7x_2+x_3=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+3x_3=3, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=2, \\ -x_1-x_2-x_3=-1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} -2x_1-3x_2=1, \\ 3x_1+4x_2=-1, \\ 5x_1-x_2=6, \\ 7x_1+3x_2=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3-2x_4=11, \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=-2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=10, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-2x_4-2x_5=8. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 6x_1+x_2+x_3=5, \\ 2x_1+5x_2+x_3=8, \\ 4x_1-3x_2+x_3=2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1-7x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1-2x_2+3x_3+7x_4=4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=9, \\ 3x_1-x_2+2x_3=5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-4, \\ 5x_2-x_3+x_4=-6. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1-x_2=3, \\ 2x_1+4x_2=12, \\ 7x_1-5x_2=23. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2-2x_3+8x_4=3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 3x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 = -6, \\ 7x_1 - 5x_2 = 28. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 = -2, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 7, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 - 7x_2 = 2, \\ -4x_1 + 10x_2 = -4, \\ -2x_1 + 5x_2 = -2. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$

5. В базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ дано вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Показати, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\bar{d}$ в базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

1. $\bar{a} = (3;2;1), \bar{b} = (-2;3;-2), \bar{c} = (-5;-4;3), \bar{d} = (5;12;-1)$
2. $\bar{a} = (1;0;2), \bar{b} = (-2;3;1), \bar{c} = (1;-1;-2), \bar{d} = (7;-7;0)$
3. $\bar{a} = (3;1;2), \bar{b} = (1;-2;4), \bar{c} = (-1;0;1), \bar{d} = (0;3;0)$
4. $\bar{a} = (3;1;-1), \bar{b} = (-2;-1;0), \bar{c} = (-1;2;-1), \bar{d} = (6;-3;0)$
5. $\bar{a} = (1;-2;2), \bar{b} = (1;3;0), \bar{c} = (2;-1;1), \bar{d} = (0;2;1)$
6. $\bar{a} = (4;-3;1), \bar{b} = (0;1;-1), \bar{c} = (-1;2\ 0), \bar{d} = (7;5;-1)$
7. $\bar{a} = (-1;3;0), \bar{b} = (1;7;5), \bar{c} = (-1;1;-2), \bar{d} = (1;9;12)$
8. $\bar{a} = (3;0;1), \bar{b} = (-1;2;-3), \bar{c} = (1;-1;2), \bar{d} = (12;-2;8)$
9. $\bar{a} = (3;2;1), \bar{b} = (3;1;-2), \bar{c} = (2;-1;-3), \bar{d} = (-1;3;4)$
10. $\bar{a} = (2;1;-1), \bar{b} = (-1;0;-1), \bar{c} = (1;2;2), \bar{d} = (2;-4;-7)$
11. $\bar{a} = (1;2;3), \bar{b} = (-2;1;4), \bar{c} = (1;3;1), \bar{d} = (4;5;-2)$
12. $\bar{a} = (3;2;1), \bar{b} = (1;-3;-2), \bar{c} = (-2;-5;1), \bar{d} = (-4;1;5)$
13. $\bar{a} = (1;2;1), \bar{b} = (-1;-3;-2), \bar{c} = (-2;3;3), \bar{d} = (-7;0;3)$
14. $\bar{a} = (1;8;4), \bar{b} = (1;3;1), \bar{c} = (-1;-6;-3), \bar{d} = (1;2;3)$
15. $\bar{a} = (1;2;4), \bar{b} = (1;-1;1), \bar{c} = (2;2;4), \bar{d} = (-1;-4;-2)$
16. $\bar{a} = (1;2;-3), \bar{b} = (2;-7;1), \bar{c} = (-1;0;2), \bar{d} = (-1;4;0)$
17. $\bar{a} = (3;1;2), \bar{b} = (1;-2;3), \bar{c} = (-2;3;-1), \bar{d} = (1;5;-4)$
18. $\bar{a} = (2;1;1), \bar{b} = (-1;2;-3), \bar{c} = (3;1;4), \bar{d} = (3;2;-2)$
19. $\bar{a} = (3;2;1), \bar{b} = (5;3;-1), \bar{c} = (1;-1;3), \bar{d} = (4;2;-4)$
20. $\bar{a} = (1;2;2), \bar{b} = (-3;1;-1), \bar{c} = (1;3;-2), \bar{d} = (2;3;8)$
21. $\bar{a} = (1;2;3), \bar{b} = (1;-3;-2), \bar{c} = (-2;1;6), \bar{d} = (4;3;0)$
22. $\bar{a} = (1;1;2), \bar{b} = (-2;1;3), \bar{c} = (-1;-2;1), \bar{d} = (7;1;0)$
23. $\bar{a} = (1;5;-1), \bar{b} = (-2;0;1), \bar{c} = (3;-3;1), \bar{d} = (-7;13;0)$

24. $\bar{a}=(0;1;4),\bar{b}=(3;-2;1),\bar{c}=(2;1;-3),\bar{d}=(-7;0;5)$

25. $\bar{a}=(2;3;4),\bar{b}=(1;-1;-2),\bar{c}=(0;1;-1),\bar{d}=(5;-4;2)$

26. $\bar{a}=(2;1;3),\bar{b}=(2;-1;2),\bar{c}=(1;2;-1),\bar{d}=(4;-4;3)$

27. $\bar{a}=(1;2;2),\bar{b}=(-3;-1;1),\bar{c}=(-1;3;1),\bar{d}=(1;5;-7)$

28. $\bar{a}=(3;2;3),\bar{b}=(4;-1;1),\bar{c}=(0;1;-2),\bar{d}=(7;2;2)$

29. $\bar{a}=(-7;2;3),\bar{b}=(0;1;-4),\bar{c}=(4;-3;-1),\bar{d}=(-3;1;-6)$

30. $\bar{a}=(2;2;3),\bar{b}=(1;3;2),\bar{c}=(3;1;1),\bar{d}=(7;1;6)$

31. $\bar{a}=(2;1;1),\bar{b}=(3;2;-1),\bar{c}=(-1;3;-2),\bar{d}=(2;0;6)$

32. $\bar{a}=(2;1;4),\bar{b}=(-1;1;1),\bar{c}=(2;2;4),\bar{d}=(3;-4;-3)$

33. $\bar{a}=(1;1;2),\bar{b}=(5;-4;1),\bar{c}=(-1;1;-2),\bar{d}=(-1;0;7)$

34. $\bar{a}=(1;0;3),\bar{b}=(4;5;-2),\bar{c}=(-1;4;5),\bar{d}=(0;-4;-2)$

35. $\bar{a}=(3;3;2),\bar{b}=(-2;4;-1),\bar{c}=(4;-2;-1),\bar{d}=(21;9;10)$.

6. Задано вершини піраміди $A_1A_2A_3A_4$. За допомогою засобів векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) площу грані $A_1A_2A_3$;

4) проекцію вектора $\overline{A_1A_3}$ на вектор $\overline{A_1A_2}$;

5) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

1.	A_1(1, –1, 0)	A_2(3, -2, -3)	A_3(-2 , 1, 4)	A_4(1, 5, 8)
2.	A_1(0, 4, -4)	A_2(5, 1, -1)	A_3(-1, -1, 3)	A_4(0, -3, 7)
3.	A_1(7, 7, -5)	A_2(3, 3, -3)	A_3(5, 14, -13)	A_4(3, 5, -2)
4.	A_1(1, -2, -3)	A_2(5, -2, 1)	A_3(2, 1, -4)	A_4(1, -2, 3)
5.	A_1(0, 3, -4)	A_2(-1, -3, 4)	A_3(2, -1, 3)	A_4(-5, 1, 1)
6.	A_1(8, 0, 1)	A_2(2, 2, 3)	A_3(-5, 3, 2)	A_4(4, -4, 0)

7.	A_1(-6, 4, 2)	A_2(-3, -4, 0)	A_3(0, -1, 2)	A_4(-3, 0, 3)
8.	A_1(-1, 5, -8)	A_2(1, -2, 0)	A_3(-3, -4, 3)	A_4(-3, -6, 2)
9.	A_1(1, 12, -15)	A_2(-1, 1, -5)	A_3(-1, 3, -4)	A_4(3, 5, -7)
10.	A_1(12, -2, 10)	A_2(9, 0, 8)	A_3(1, -4, 0)	A_4(2, -6, 2)
11.	A_1(10, 0, 2)	A_2(7, 2, 0)	A_3(-1, -2, -8)	A_4(0, -4, -6)
12.	A_1(-8, 3, -1)	A_2(3, 5, 9)	A_3(-7, 1, 1)	A_4(0, 7, 7)
13.	A_1(13, 1, 6)	A_2(10, 3, 4)	A_3(2, -1, -4)	A_4(3, -3, -2)
14.	A_1(3, 1, -2)	A_2(4, -2, 0)	A_3(11, 5, 6)	A_4(14, 3, 8)
15.	A_1(1, 0, -8)	A_2(0, 2, 8)	A_3(-10, 6, -2)	A_4(11, 4, 0)
16.	A_1(4, 0, 6)	A_2(6, 9, -5)	A_3(8, 2, 3)	A_4(4, -2, 5)
17.	A_1(6, 1, 10)	A_2(-1, -5, 4)	A_3(9, -1, 12)	A_4(-2, -3, 2)
18.	A_1(-4, 5, -5)	A_2(4, 5, 3)	A_3(7, 7, 5)	A_4(-3, 3, -3)
19.	A_1(-7, 1, 1)	A_2(0, 7, 7)	A_3(-8, 3, -1)	A_4(3, 5, 9)
20.	A_1(6, 1, -1)	A_2(2, -3, 1)	A_3(2, -1, 2)	A_4(4, 8, -9)
21.	A_1(-3, 4, -3)	A_2(-2, 2, -1)	A_3(8, 6, -7)	A_4(5, 8, 5)
22.	A_1(-1, -5, 4)	A_2(9, -1, 12)	A_3(6, 1, 10)	A_4(-2, -3, 2)
23.	A_1(3, 5, -7)	A_2(-1, 1, -5)	A_3(-1, 3, -4)	A_4(1, 12, -15)
24.	A_1(-4, 2, -1)	A_2(0, 6, -3)	A_3(-2, -13, 11)	A_4(-4, 4, 0)
25.	A_1(-5, 1, 1)	A_2(0, 3, -4)	A_3(-1, -3, 4)	A_4(2, -1, 3)
26.	A_1(1, 4, -1)	A_2(4, -1, 2)	A_3(1, -8, 8)	A_4(5, 3, 2)
27.	A_1(4, 2, -1)	A_2(2, -1, 4)	A_3(-2, 3, 4)	A_4(-1, -1, 1)
28.	A_1(7, 7, -5)	A_2 (3, 3, -3)	A_3(3, 5, -2)	A_4(5, 14, -13)
29.	A_1(-1, 4, -4)	A_2(5, 0, -1)	A_3(-4, -1, 3)	A_4 (0, -3, 6)
30.	A_1(0, 7, -2)	A_2(-2, 9, -10)	A_3(-3, 4, 0)	A_4(-6, 2, -1)
31.	A_1(2, 6, -3)	A_2(1, 3, -1)	A_3(-8, 4, 0)	A_4(-5, -2, 1)
32.	A_1(0, 5, -3)	A_2(-2, 1, -4)	A_3(-4, -7, 1)	A_4(3, -1, 7)
33.	A_1(1, 7, 0)	A_2(-1, 5, -9)	A_3(4, 4, 8)	A_4(-3, 2, -1)
34.	A_1(0, 2, -4)	A_2(1, 10, -8)	A_3(-2, -2, 0)	A_4(5, 7, -1)
35.	A_1(-3, 0, -3)	A_2(-2, 4, -11)	A_3(8, -4, 0)	A_4(-7, -2, 6)

7. Дано вершини трикутника A, B, C*. Знайти:*

а) рівняння сторони AB*; б) рівняння та довжину висоти* CH*; в) рівняння та довжину медіани* AM*; г) точку* N *перетину висоти* CH *і медіани* AM*; д) рівняння прямої, що проходить через точку* N *паралельно стороні* AB.

1. $A(2;5),\ B(0;4),\ C(-3;1)$.

2. $A(1;4),\ B(8;-2),\ C(-5;1)$.

3. $A(1;-3),\ B(-2;4),\ C(0;7)$.

4. $A(-2;4),\ B(10;7),\ C(3;1)$.

5. $A(7;0),\ B(-8;-4),\ C(1;4)$.

6. $A(0;2),\ B(-7;-4),\ C(3;2)$.

7. $A(-4;6),\ B(3;-8),\ C(-7;-2)$.

8. $A(-3;-2),\ B(14;4),\ C(6;8)$.

9. $A(11;-3),\ B(1;7),\ C(-3;-1)$.

10. $A(1;0),\ B(-1;4),\ C(9;5)$.

11. $A(7;1),\ B(3;7),\ C(1;-2)$.

12. $A(-2;-6),\ B(4;0),\ C(-3;5)$.

13. $A(-4;-5),\ B(8;1),\ C(-3;-1)$.

14. $A(10;-2),\ B(4;-5),\ C(-3;1)$.

15. $A(-1;-4),\ B(9;6),\ C(-5;4)$.

16. $A(6;1),\ B(-2;-3),\ C(1;6)$.

17. $A(7;3),\ B(1;10),\ C(4;-3)$.

18. $A(4;-4),\ B(3;8),\ C(8;2)$.

19. $A(-7;4),\ B(5;-5),\ C(-7;-2)$.

20. $A(3;-1),\ B(11;3),\ C(-6;2)$.

21. $A(-4;2),\ B(6;-4),\ C(4;10)$.

22. $A(4;1),\ B(7;-3),\ C(-3;-1)$.

23. $A(-4;1),\ B(10;-1),\ C(6;-9)$.

24. $A(-3;-3),\ B(7;7),\ C(5;-7)$.

25. $A(1;-6),\ B(3;4),\ C(-3;3)$.

26. $A(-3;8),\ B(0;-5),\ C(-6;2)$.

27. $A(4;-4),\ B(6;2),\ C(-1;7)$.

28. $A(-4;1),\ B(0;-5),\ C(5;7)$.

29. $A(1;-6),\ B(4;5),\ C(-3;3)$.

30. $A(-1`;3),\ B(4;5),\ C(0;10)$.

31. $A(2;-2),\ B(0;6),\ C(-6;7)$.

32. $A(0;-2),\ B(5;5),\ C(-3;4)$.

33. $A(-2;2),\ B(2;5),\ C(6;-10)$.

34. $A(5;-8),\ B(-2;8),\ C(0;5)$.

35. $A(7;-5),\ B(1;4),\ C(-9;10)$.

8. Дано чотири точки $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$. *Знайти: а) рівняння прямої* A_1A_2; *б) рівняння прямої* A_4M *, паралельної до прямої* A_1A_2; *в) рівняння площини, що проходить через точку* A_4 *перпендикулярно до прямої* A_1A_2; *г) рівняння площини* $A_1A_2A_3$; *д) рівняння прямої* A_4N *перпендикулярної до площини* $A_1A_2A_3$ *та координати точки* N *їх перетину; е) відстань* $|A_4N|$ *від точки* A_4 *до площини* $A_1A_2A_3$; *є) кут між прямою* A_1A_4 *і площиною* $A_1A_2A_3$; *ж) кут між координатною площиною* $Oxyz$ *і площиною* $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(-2,1,4)$, $A_2(5,-3,0)$, $A_3(0,-1,-2)$, $A_4(2,-3,1)$.

2. $A_1(1,-1,0)$, $A_2(-2,1,4)$, $A_3(3,-2,-3)$, $A_4(1,5,8)$.

3. $A_1(5,1,-1)$, $A_2(0,4,-4)$, $A_3(-1,-1,3)$, $A_4(0,-3,7)$.

4. $A_1(3,5,-2)$, $A_2(7,7,-5)$, $A_3(5,14,-13)$, $A_4(3,3,-3)$.

5. $A_1(1,-2,-3)$, $A_2(5,-2,1)$, $A_3(2,1,-4)$, $A_4(1,-2,3)$.

6. $A_1(0,3,-4)$, $A_2(-1,-3,4)$, $A_3(2,-1,3)$, $A_4(-5,1,1)$.

7. $A_1(8,0,1)$, $A_2(2,2,3)$, $A_3(-5,3,2)$, $A_4(4,-4,0)$.

8. $A_1(-6,4,2)$, $A_2(-3,-4,0)$, $A_3(0,-1,2)$, $A_4(-3,0,3)$.

9. $A_1(-1,5,-6)$, $A_2(1,-2,0)$, $A_3(-3,-4,3)$, $A_4(-3,-6,2)$.

10. $A_1(1,12,-15)$, $A_2(-1,1,-5)$, $A_3(-1,3,-4)$, $A_4(3,5,-7)$.

11. $A_1(12,-2,10)$, $A_2(9,0,8)$, $A_3(1,-4,0)$, $A_4(2,-6,2)$.

12. $A_1(10,0,2)$, $A_2(7,2,0)$, $A_3(-1,-2,-8)$, $A_4(0,-4,-6)$.

13. $A_1(-8,3,-1)$, $A_2(3,5,9)$, $A_3(-7,1,1)$, $A_4(0,7,7)$.

14. $A_1(1,0,-8)$, $A_2(0,2,8)$, $A_3(-10,6,-2)$, $A_4(11,4,0)$.

15. $A_1(3,1,-2)$, $A_2(4,-2,0)$, $A_3(11,5,6)$, $A_4(14,3,8)$.

16. $A_1(13,1,6)$, $A_2(10,3,4)$, $A_3(2,-1,-4)$, $A_4(3,-3,-2)$.

17. $A_1(4,7,8)$, $A_2(2,4,9)$, $A_3(1,8,9)$, $A_4(-1,13,0)$.

18. $A_1(0,4,5)$, $A_2(3,3,2)$, $A_3(3,-2,1)$, $A_4(4,5,6)$.

19. $A_1(6,6,5)$, $A_2(6,9,3)$, $A_3(4,6,11)$, $A_4(4,9,5)$.

20. $A_1(6,3,1)$, $A_2(3,2,8)$, $A_3(2,-3,7)$, $A_4(2,-1,7)$.

21. $A_1(2,1,7)$, $A_2(3,3,6)$, $A_3(2,-3,9)$, $A_4(1,2,5)$.

22. $A_1(4,2,10)$, $A_2(1,2,7)$, $A_3(-2,3,5)$, $A_4(5,3,7)$.

23. $A_1(8,-6,4)$, $A_2(10,5,-5)$, $A_3(8,10,7)$, $A_4(5,6,-8)$.

24. $A_1(1,8,2)$, $A_2(5,2,6)$, $A_3(5,7,4)$, $A_4(4,10,9)$.

25. $A_1(2,-1,5)$, $A_2(1,6,3)$, $A_3(3,-9,8)$, $A_4(0,7,1)$.

26. $A_1(9,5,5)$, $A_2(-3,7,1)$, $A_3(5,7,8)$, $A_4(6,9,2)$.

27. $A_1(3,-9,8)$, $A_2(1,6,3)$, $A_3(2,-1,5)$, $A_4(0,7,1)$.

28. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(1, -1, 4)$, $A_3(3, 5, 1)$, $A_4(5, 8, -1)$.

29. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 10, 4)$, $A_3(4, 7, 8)$, $A_4(8, 7, 4)$.

30. $A_1(4, 0, 6)$, $A_2(6, 9, -5)$, $A_3(8, 2, 3)$, $A_4(4, -2, 5)$.

31. $A_1(6, 1, 10)$, $A_2(-1, -5, 4)$, $A_3(9, -1, -12)$, $A_4(-2, -3, 2)$.

32. $A_1(7, 7, 5)$, $A_2(-4, 5, -5)$, $A_3(4, 5, 3)$, $A_4(-3, 3, -3)$.

33. $A_1(0, 7, 7)$, $A_2(-7, 1, 1)$, $A_3(-8, 3, -1)$, $A_4(3, 5, 9)$.

34. $A_1(6, 1, -1)$, $A_2(2, -3, 1)$, $A_3(2, -1, 2)$, $A_4(4, 8, -9)$.

35. $A_1(-3, 4, -3)$, $A_2(-2, 2, -1)$, $A_3(8, 6, 7)$, $A_4(5, 8, 5)$.

9. Скласти канонічні рівняння: а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи (A, B – точки, що лежать на кривій, F – фокус, a –велика піввісь, b – мала піввісь, ε - ексцентриситет, $y = \pm kx$ - рівняння асимптот гіперболи, D - директриса параболи, $2c$ – відстань між фокусами).

1. а) $2c = 6,\ 2a = 10$; б) $A(6,\ 3),\ B(5\sqrt{2},\ -4)$; в) $D: x = -4$.

2. а) $2a = 14,\ \varepsilon = \dfrac{2}{3}$; б) $2c = 10,\ 2a = 6$; в) вісь симетрії $Oy,\ A(4,\ 2)$.

3. а) $A(\sqrt{3},\ \sqrt{6}),\ B(3,\ \sqrt{2})$; б) $F(20,\ 0),\ \varepsilon = \dfrac{5}{3}$; в) $D: x = -3$.

4. а) $2a = 8,\ 2b = 6$; б) $2a = 12,\ \varepsilon = \dfrac{4}{3}$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(5,\ -3)$.

5. а) $2c = 10,\ 2a = 12$; б) $y = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}x,\ A(6,\ -4)$; вісь симетрії $Oy,\ A(2,\ -3)$.

6. а) $F(-2,\ 0),\ 2b = 8$; б) $A(-10,\ -3),\ 2a = 16$; в) $D: y = -7$.

7. а) $F(\sqrt{3},\ 0),\ 2a = 4\sqrt{7}$; б) $A(20,\ 8),\ 2b = 12$; в) $D: x = 5$.

8. а) $F(\sqrt{3},\ 0),\ \varepsilon = \dfrac{1}{3}$; б) $y = \pm\dfrac{4}{3}x,\ F(5,\ 0)$; в) вісь симетрії $Oy,\ A(-3, 1)$.

9. а) $2a = 10,\ \varepsilon = 0{,}6$; б) $b = 5,\ c = 13$; в) $D: x = -4$.

10. а) $a + b = 8, 2c = 8$; б) $2a = 24,\ 2b = 40$; в) $D: y = -3$.

11. а) $a + b = 25, F(-5,\ 0)$; б) $F(-3\sqrt{5},\ 0),\ 2a = 6$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(-4,\ 2)$.

12. а) $A(-6,\ 4),\ 2b = 10$; б) $2b = 8,\ \varepsilon = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; в) $D:\ x = 6$.

13. а) $A(12,\ -12),\ 2a = 40$; б) $2a = 6,\ \varepsilon = \frac{5}{3}$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(-3,\ 1)$.

14. а) $A(6,\ 4),\ B(8,\ 3)$; б) $2a = 12,\ 2b = 4$; в) $D:\ y = -2$.

15. а) $A(\sqrt{2},\ 2),\ B(2,\ \sqrt{3})$; б) $2c = 20,\ 2a = 12$; в) $D:\ x = -9$.

16. а) $A(8,\ 0),\ \varepsilon = \frac{7}{8}$; б) $A(-5,\ 4),\ a = b$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(4,\ -2)$.

17. а) $A(0,\ 8),\ \varepsilon = \frac{3}{5}$; б) $A(8,\ 2),\ a = b$; в) $D:\ x = -7$.

18. а) $A(-3,\ 0),\ B(1,\ \frac{\sqrt{40}}{3})$; б) $2a = 8,\ 2c = 10$; в) $D:\ y = 3$.

19. а) $A(-8,\ 2\sqrt{2}),\ B(6,\ -1)$; б) $F(-4,\ 0),\ 2a = 6$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(-6,\ 4)$.

20. а) $b = 2\sqrt{2},\ \varepsilon = \frac{7}{9}$; б) $y = \pm\sqrt{2}x,\ F(3,\ 0)$; в) $D:\ x = 5$.

21. а) $2a = 22,\ \varepsilon = \frac{10}{11}$; б) $y = \pm\sqrt{3}x,\ F(8,\ 0)$; в) вісь симетрії $Oy,\ A(-4,\ -2)$.

22. а) $b = 5,\ \varepsilon = \frac{12}{13}$; б) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x,\ A(9,\ 3\sqrt{2})$; в) $D:\ y = -5$.

23. а) $2a = 14,\ \varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{6}$; б) $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x,\ A(-4,\ -2)$; в) $D:\ x = 12$.

24. а) $F(3,\ 0),\ 2a = 8$; б) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ A(4\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$; в) $D:\ y = -8$.

25. а) $a + b = 10, 2c = 4\sqrt{5}$; б) $c = 7,\ \varepsilon = \frac{7}{12}\sqrt{6}$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(4,\ -2)$.

26. а) $F(5,\ 0),\ 2a = 16$; б) $b = 9,\ \varepsilon = 1{,}25$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(2,\ 4)$.

27. а) $F(3,\ 0),\ 2a = 12$; б) $\frac{a}{b} = \frac{3}{4},\ c = 15$; в) $D:\ x = 4$.

28. а) $F(-4,\ 0),\ 2b = 6$; б) $A(9,\ -4),\ a = 3$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(4,\ -1)$.

29. а) $A(\sqrt{5},\ \sqrt{6}),\ B(0,\ -2\sqrt{2})$; б) $y = \pm\frac{3}{4}x,\ 2c = 10\sqrt{2}$; в) $D:\ x = -8$.

30. а) $A(3,\ \sqrt{2}),\ 2a = 2\sqrt{15}$; б) $a = 5,\ \varepsilon = 1{,}4$; в) $D:\ y = -6$.

31. а) $A(2\sqrt{5},\ 2\sqrt{3}),\ B(-5,\ -3)$; б) $2c = 30,\ 2a = 20$; в) $D:\ x = -2{,}5$.

32. а) $F(-5,\ 0),\ \varepsilon = \dfrac{2}{3}$; б) $A(4,\ \sqrt{5}),\ B(-4\sqrt{3},\ 5)$; в) $D:\ y = 2{,}5$.

33. а) $2c = 8,\ \varepsilon = 0{,}8$; б) $y = \pm\dfrac{3}{5}x,\ F(-2,\ 0)$; в) $D:\ y = -4$.

34. а) $2b = 24,\ 2c = 10$; б) $y = \pm\dfrac{1}{2}x,\ 2c = 10$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(-7, -7)$.

35. а) $2c = 6,\ \varepsilon = 0{,}6$; б) $A(3,\ \dfrac{2\sqrt{15}}{5}),\ B(-2\sqrt{5},\ 3)$; в) вісь симетрії $Ox,\ A(-5,\ 15)$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. Яка з матриць

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$ є трикутною:

a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

e) інша відповідь.

2. Яка з матриць

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$ є діагональною:

a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

e) інша відповідь.

3. Які з даних матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$ можна додавати:

a) A, B; b) A, C; c) A, F; d) B, C; e) інша відповідь.

4. Знайти матрицю $C = 2A + 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$:

a) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$; b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -7 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -1 & -7 & -2 \end{pmatrix}$; d) $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$;

e) інша відповідь.

5. Які з матриць A, B, C, D є узгодженими, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&0&7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\7&-8\\1&5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3&4\\-2&5\\-1&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}:$$

a) A, C; b) B, C; c) A, B; d) A, D; e) інша відповідь.

6. Знайти елемент d_{23}, якщо $D=A\cdot B$, де $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$:

a) -1; b) 1; c) 0; d) 5; e) інша відповідь.

7. Знайти $\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}^2$:

a) $\begin{pmatrix}-5&-2\\3&-6\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-5&2\\3&6\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}5&2\\3&-6\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}-5&-2\\3&6\end{pmatrix}$; e) інша відповідь.

8. Транспонувати матрицю B, якщо $B=\begin{pmatrix}2&5&0\\4&8&1\end{pmatrix}$:

a) $\begin{pmatrix}2&4\\5&8\\0&1\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}4&8&1\\2&5&0\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}-2&-5&0\\-4&-8&-1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}4&2\\8&5\\1&0\end{pmatrix}$;

e) інша відповідь.

9. Яка з властивостей вірна:

a) $(AB)^T=A^T B^T$; b) $(AB)^T=AB^T$; c) $(AB)^T=B^T A^T$; d) $(AB)^T=A^T B$;

e) інша відповідь.

10. Знайти алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23}, якщо $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}$:

a) 5; b) 0; c) -5; d) 8; e) інша відповідь.

11. Знайти визначник $\begin{vmatrix}5&1\\2&3\end{vmatrix}$:

a) -13; b) 13; c) 0; d) 10; e) інша відповідь.

12. Вказати при якому значенні α рівний нулю визначник $\begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$:

a) 0; b) 1; c) -1; d) -10; e) інша відповідь.

13. Вказати визначник Δ_1 для системи $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -3 & -6 & 4 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}$;

e) інша відповідь.

14. Знайти мінор M_{23} елемента a_{23}, якщо $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$:

a) 1; b) -1; c) 20; d) -2; e) інша відповідь.

15. Які з трійок чисел є розв'язками системи $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$:

a) $(1; 2; 3)$; b) $(-1; 2; 3)$; c) $(1; -2; 3)$; d) $(1; 2; -3)$; e) інша відповідь.

16. Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо вона:

a) має один розв'язок; b) має безліч розв'язків; c) не має жодного розв'язку; d) має хоча б один розв'язок; e) інша відповідь.

17. Система лінійних рівнянь має безліч розв'язків, якщо:

a) вона вироджена; b) ранг матриці системи рівний рангу її розширеної матриці; c) ранг матриці системи менший від кількості невідомих системи; d) ранг матриці системи рівний кількості невідомих системи; e) інша відповідь.

18. Система лінійних рівнянь має один розв'язок, якщо:

a) вона вироджена; b) ранг матриці системи рівний рангу її розширеної матриці; c) ранг матриці системи менший від кількості її невідомих; d) ранг матриці системи рівний кількості її невідомих; e) інша відповідь.

19. Мінор називається базисним, якщо:

a) його порядок рівний рангу системи; b) його порядок рівний кількості невідомих системи; c) його порядок рівний рангу матриці системи; d) він рівний нулю; e) інша відповідь.

20. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо:

a) $AA^{-1} = E$; b) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$; c) $A^{-1} = \frac{1}{A}$; d) $A^{-1} = -A$; e) інша відповідь.

ВІДПОВІДІ

1. e.	**6.** c.	**11**. b.	**16.** d.
2. c.	**7.** a.	**12.** d.	**17.** c.
3. b.	**8.** a.	**13.** b.	**18.** d.
4. e.	**9.** c.	**14.** b.	**19.** a.
5. a.	**10.** a.	**15.** a.	**20.** b.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1. Вказати рівняння площини, що проходить через точку $M(1;-2;3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(4;-1;2)$:

a) $4x-y+2z=0$; b) $4x+y+2z+12=0$; c) $4x-y+2z-12=0$;

d) $4x+y+2z=0$; e) інша відповідь.

2. Знайти довжину вектора $\vec{a}=(4;8;3)$:

a) $\sqrt{67}$; b) $\sqrt{89}$; c) 89; d) $2\sqrt{89}$; e) інша відповідь.

3. Знайти координати середини відрізка AB, якщо $A(1;-3;2)$, $B(4;0;5)$:

a) $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2};-\frac{7}{2}\right)$; b) $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$; c) $\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2};-\frac{7}{2}\right)$; d) $\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$;

e) інша відповідь.

4. Вказати рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;-2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(3;1)$:

a) $3x+y-1=0$; b) $x+3y-1=0$; c) $3x-y-1=0$; d) $3x-y+1=0$;

e) інша відповідь.

5. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1;1;3)$, $B(2;3;1)$:

a) $(1;2;2)$; b) $(-1;2;2)$; c) $(1;2;-2)$; d) $(-1;-2;-2)$; e) інша відповідь.

6. Знайти вектор $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(0;-4;5)$:
a) $(-2;-8;-11)$; b) $(2;-8;-11)$; c) $(-2;8;-11)$; d) $(2;-8;11)$;
e) інша відповідь.

7. Знайти скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(4;-2;-4)$, $\vec{b}=(6;-3;2)$:

a) 22; b) 11; c) -22; d) -11; e) інша відповідь.

8. При якому значенні m вектори $\vec{a}=(3;m;4)$ і $\vec{b}=(m;4;-7)$ перпендикулярні?

a) 0; b) -4; c) 4; d) $-\frac{1}{4}$; e) інша відповідь.

9. Обчислити $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{2\pi}{3}$:

a) 3; b) -3; c) $\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{3}$; e) інша відповідь.

10. При якому значенні α вектори $\vec{c} = \alpha\vec{a} - 4\vec{b}$ і $\vec{d} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$ колінеарні?

a) $\frac{8}{5}$; b) $-\frac{8}{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) 8; e) інша відповідь.

11. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = (2;1;1), \vec{b} = (2;3;2), \vec{c} = (3;3;4)$:
a) 17; b) -7; c) 0; d) 7; e) інша відповідь.

12. Знайти кутовий коефіцієнт прямої $2x + 3y - 6 = 0$:

a) $k = -\frac{2}{3}$; b) $k = \frac{2}{3}$; c) $k = -\frac{3}{2}$; d) $k = \frac{3}{2}$; e) інша відповідь.

13. Яка пряма проходить через точки $A(-1; 0; 4)$ і $B(3; -2; 5)$?

a) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{1}$; b) $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{1}$; c) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{1}$;

d) $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{1}$; e) інша відповідь.

14. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (1; 0; -2)$ і

$\vec{b} = (0; -2; 1)$:

a) $\sqrt{21}$; b) $\sqrt{7}$; c) 21; d) 7; e) інша відповідь.

15. Знайти координати вектора нормалі до площини $2x - 3y + 5z - 8 = 0$:

a) $\{-2; -3; -5\}$; b) $\{2; -3; 5\}$; c) $\{-2; 3; -5\}$; d) $\{2; -3; -5\}$;

e) інша відповідь.

16. Які з векторів $\vec{a} = (2; 3; 5), \vec{b} = (4; 6; 0), \vec{c} = (-4; -6; -10), \vec{d} = (2; -3; 5)$ є колінеарними?

a) $\vec{a}, \vec{b}$; b) $\vec{a}, \vec{d}$; c) $\vec{a}, \vec{c}$; d) $\vec{a}, \vec{b}$; e) інша відповідь.

17. Яка з прямих паралельна до прямої $y = 3x - 4$?

a) $y = -3x + 4$; b) $y = -\frac{1}{3}x - 4$; c) $y = 3x + 7$; d) $y = \frac{1}{3}x - 4$;

e) інша відповідь.

18. Яка з прямих перпендикулярна до прямої $y = 3x - 4$?

a) $y = -3x + 4$; b) $y = -\frac{1}{3}x - 4$; c) $y = 3x + 7$; d) $y = \frac{1}{3}x - 4$;

e) інша відповідь.

19. Яка з прямих проходить через початок координат?

a) $3x-4y+7=0$; b) $5x-7y-8=0$; c) $x=2$; d) $y=-9$;

e) інша відповідь.

20. Яке з рівнянь є рівнянням параболи?

a) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{7}=1$; b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; c) $y^2=4x$; d) $x^2+y^2=36$;

e) інша відповідь.

ВІДПОВІДІ

1. c.	**6.** d.	**11**. d.	**16.** c.
2. b.	**7.** a.	**12.** a.	**17.** c.
3. d.	**8.** c.	**13.** e.	**18.** b.
4. a.	**9.** c.	**14.** a.	**19.** e.
5. c.	**10.** b.	**15.** b.	**20.** c.