

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

ФІЗИКА

Частина I. Механіка

Методичні вказівки до лабораторних робіт
для здобувачів вищої освіти
денної та заочної форми навчання

Затверджено
на засіданні кафедри вищої
математики та фізики
Протокол №2 від 31.08.2021 р.

Кропивницький - 2021

Фізика: Методичні вказівки до лабораторних робіт для здобувачів вищої освіти денної та заочної форми навчання/ Укл.: Гур'євська О.М., Якименко М.С. – Кропивницький: ЦНТУ, 2021.-58 с.

Укладачі:

Гур'євська Олександра Миколаївна – к.п.н., доцент;
Якименко Микола Сергійович – к.ф.-м.н., доцент.

ВСТУП

Вивчення фізики неможливе без лабораторних занять. Виконання лабораторних робіт сприяє більш глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу.

Робота в лабораторіях допоможе:

- краще зрозуміти суть фізичних явищ, величин та законів;
- відтворити фізичні явища, які вивчаються, на експериментальних установках;
- засвоїти основні методи вимірювання фізичних величин;
- навчитися обробляти результати вимірів;
- зрозуміти будову та принцип дії найбільш важливих фізичних приладів.

Для успішної реалізації усіх цих завдань необхідно ще до лабораторного заняття добре підготуватися до нього за допомогою методичних вказівок. Читаючи методичні вказівки, важливо усвідомити суть лабораторної роботи та розібратися у тому, як вона виконується. Малюнок чи схема лабораторної установки допоможе у цьому.

В методичних вказівках до кожної лабораторної роботи приведені короткі теоретичні відомості, в яких викладені необхідні визначення, сформульовані закони. Виведені потрібні формули. При недостатності цих відомостей необхідно звернутися до лекційного матеріалу чи прочитати відповідний параграф у підручнику.

У студента під час лабораторних занять, звичайно, повинен бути зошит для лабораторних робіт, лінійка, міліметровий папір.

Експериментальні результати необхідно представляти у вигляді таблиць та графіків. При оформленні звіту необхідно визначити похибку, з якою була виміряна та чи інша величина.

В опис кожної роботи входять контрольні запитання, які необхідно розглянути при підготовці до здачі лабораторної роботи.

ЗМІСТ

Вступ	3
Лабораторна робота М-1. Вивчення поступального руху на машині Атвуда	5
Лабораторна робота М-2. Вивчення законів обертального руху	15
Лабораторна робота М-3. Дослідження гіроскопа	23
Лабораторна робота М-4. Вивчення пружного та непружного удару куль	35
Лабораторна робота М-5. Визначення швидкості тіл за допомогою крутильно-балістичного маятника	42
Лабораторна робота М-6. Визначення моменту інерції махового колеса	52
Лабораторна робота М-7. Визначення коефіцієнта динамічної в'язкості рідини методом Стокса	62
Лабораторна робота М-8. Визначення радіуса кривини сферичної поверхні методом коливань кульки	67
Додаток. Похибки вимірювань та обробка результатів експерименту В лабораторному практикумі з фізики	73
Література	85

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА М-1

ВИВЧЕННЯ ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ НА МАШИНІ АТВУДА

Мета роботи - перевірити формулу рівномірного, та рівномірно-

прискореного руху, а також другий закон Ньютона.

Короткі теоретичні відомості

Поступальним називається такий рух, при якому будь-яка пряма, що жорстко зв'язана з тілом, залишається при його русі паралельною самій собі.

Умова, при якій тіло рухається рівномірно та прямолінійно, визначається законом інерції (першим законом Ньютона).

Якщо для прямолінійного руху тіла відомі прискорення $\vec{a}(t)$ та початкові умови, тобто початкова швидкість $\vec{V}_0$ та початковий радіус-вектор $\vec{r}_0$, то можна визначити його радіус-вектор $\vec{r}$ та швидкість $\vec{V}$ для будь-якого моменту часу.

Оскільки $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, то $d\vec{V} = \vec{a} \cdot dt$.

(1.1)

Інтегруючи по V ліву, а по t праву частини цього виразу, для випадку $a = const$ одержимо:

$$\int_{V_0}^V d\vec{V} = \int_0^t \vec{a}(t) dt; \quad \vec{V} - \vec{V}_0 = \vec{a} \cdot t; \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot t.$$

(1.2)

Замість векторного виразу (1.2) можна записати швидкість у проекціях на осі координат:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t; \quad v_y = v_{0y} + a_y \cdot t; \quad v_z = v_{0z} + a_z \cdot t.$$

Оскільки швидкість визначається як $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$,

(1.3)

то $d\vec{r} = \vec{v}(t)dt$, звідки $\int_{r_0}^r d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)dt$.

Підставляючи $\vec{v}$ із (1.2), одержуємо:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad \text{або} \quad \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

(1.4)

У проекціях на осі координат вираз (1.4) набуває вигляду:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}; \quad z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

(1.5)

У тому випадку, коли прискорення руху тіла невідоме, а відомі тільки початкові умови та сили, що діють на тіло, для знаходження прискорення руху використовують другий закон Ньютона:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}_p}{m},$$

(1.6)

де $\vec{a}$ - прискорення тіла, $\vec{F}_p$ - рівнодіюча сила.

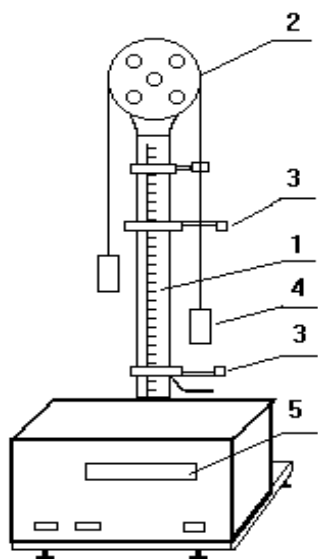
В проекціях на осі координат вираз (1.6) набуває вигляду:

$$a_x = \frac{\sum_{i=1}^n F_{ix}}{m}; \quad a_y = \frac{\sum_{i=1}^n F_{iy}}{m}; \quad a_z = \frac{\sum_{i=1}^n F_{iz}}{m}.$$

(1.7)

Опис установки для перевірки рівнянь кінематики та динаміки поступального руху

Машина Атвуда дає змогу одержати рівномірний та рівноприскорений рухи тягарців, а також виміряти проміжки часу, протягом яких вони рухаються.



Машина Атвуда (рис.1.1) складається з вертикального стояка (1), на верхньому кінці якого закріплено легкий блок (2), що обертається з малим тертям навколо горизонтальної осі. Для фіксації блока в певному положенні служить електромагніт з муфтою. Через блок перекинута легка нитка з тягарцями (4) однакової маси M . На стояку нанесено міліметрові поділки. Вздовж стояка переміщуються і фіксуються у певному положенні два кронштейни з оптопарами (3),

за допомогою яких автоматично вмикається та вимикається електронний секундомір (5). Крім тягарців (4) в комплекті установки є додаткові тягарці, якими користуються для приведення системи в рух.

Розглянемо рух системи (рис. 1.2), яка складається з легкого блока, через який перекинута нитка з тягарцями масою M кожний. На один із тягарців кладеться

Рис 1 додатковий тягарець масою m . Нехтуючи масою блока та нитки, а також тертям тіл з повітрям та тертям в підшипниках блока, рівняння динаміки для руху тягарця масою M в проекціях на вісь (рис. 1.2) можна записати у такому вигляді:

$$Mg - T = -Ma.$$

(1.8)

А для правого тягарця масою $(M + m)$:

$$(M + m)g - T = (M + m)a,$$

(1.9)

де T - сила натягу нитки, a - прискорення тягарців. Із рівнянь (1.8), (1.9) випливає:

$$a = g \frac{m}{2M + m}. \quad (1.10)$$

Звідси видно, що система рухатиметься з прискоренням меншим, ніж прискорення вільного падіння. Збільшуючи масу додаткового тягарця, можна збільшити і прискорення системи. Відстані, які проходить система тіл, вимірюють за шкалою між рухомими кронштейнами (3).

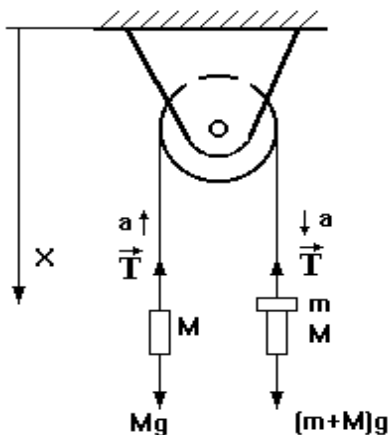


Рис.

Підготовка приладу до вимірювань

1. За допомогою регульовальних ніжок приведіть стояк установки у вертикальне положення.
2. Перемістіть середній кронштейн 3 на задану висоту і встановіть його таким чином, щоб правий тягарець на нитці при його русі проходив через середину робочого віконця фотоелектричного датчика (оптопарі).
3. Ввімкніть установку в електричну мережу і натисніть клавішу "Сеть". Перевірте, чи всі індикатори секундоміра висвічують нулі, і чи світяться лампочки обох фотоелектричних датчиків.
4. Перемістіть правий тягарець у верхнє положення і зафіксуйте його у цьому положенні, відтиснувши клавішу "Пуск" електромагнітної муфти, покладіть на тягарець

додатковий тягарець у вигляді великого кільця з прорізом. Система тягарців повинна знаходитися у стані спокою.

5. Натисніть клавішу "Пуск" і перевірте, чи виник рух системи тягарців, чи затримується на середньому кронштейні додатковий кільцевий тягарець, чи виміряв мікросекундомір час проходження тягарцем шляху між кронштейнами і чи гальмується система в кінці руху.

6. Натисніть клавішу "Сброс" і перевірте, чи виникло обнулення показів секундоміра та розблокування системи тягарців.

7. Перемістіть правий тягарець у верхнє положення і, відтиснувши клавішу "Пуск", перевірте, чи виникло повторне блокування ролика.

Завдання до лабораторної роботи

1. Перевірити формулу рівномірного руху: $v_i = \frac{S_i}{t_i} = const$.
2. Перевірити виконання формули шляху $S = \frac{at^2}{2}$ при рівноприскореному русі.
3. Перевірити другий закон Ньютона.

Порядок виконання роботи

Завдання 1

1. На правий тягарець покладіть додатковий тягарець у вигляді великого кільця з прорізом.
2. Переміщуючи тягарці, сумістіть нижню поверхню правого тягарця з рисою, яка нанесена на верхньому кронштейні. Зафіксуйте це положення тягарця за допомогою електромагнітної муфти, клавішу "Пуск" відтиснуто.

3. Виміряйте за шкалою на стояку та запишіть у таблицю 1.1 шлях рівномірного руху S_1 великого тягарця (віддаль між середнім та нижнім кронштейном).
4. Натисніть клавішу "Пуск". Тягарці повинні перейти у рух.
5. Після гальмування системи у кінці руху запишіть покази секундоміра, тобто час рівномірного руху великого тягарця.
6. Виміри повторіть не менше 4-х разів і визначте середнє значення часу рівномірного руху $\langle t \rangle$ та абсолютну похибку Δt за методикою, описаною в додатку.
7. Повторіть досліди згідно пунктів 1...6 для двох інших шляхів S_2 та S_3 , змінюючи положення нижнього кронштейна.

Таблиця 1.1

S , м м	ΔS , мм	t_1 ,с	t_2 ,с	t_3 ,с	t_4 , с	$\langle t \rangle$, с	Δt , с	V , м/ с	$\Delta v = \frac{1}{\langle t \rangle} \Delta S + \frac{S}{\langle t^2 \rangle} \Delta t$, м/с

8. Перевірте виконання умови

$$\frac{S_1}{\langle t_1 \rangle} = \frac{S_2}{\langle t_2 \rangle} = \frac{S_3}{\langle t_3 \rangle}.$$

9. Відкладіть на шкалі швидкості у вигляді відрізків одержані значення

$v = \langle v \rangle \pm \Delta v$ так, як показано на рис. 1.3

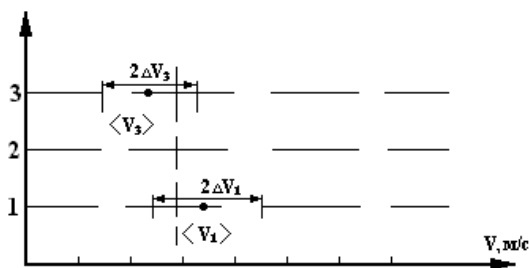


Рис. 1.3.

Якщо інтервали значень v у кожному досліді мають хоча б по одному співпадаючому значенню, то можна вважати, що рух тягарців був рівномірним.

Завдання 2

1. Для перевірки формули $S = \frac{at^2}{2}$ середній кронштейн установіть у крайнє верхнє положення і сумістіть верхню поверхню правого тягарця з площиною, у якій знаходиться кільце середнього кронштейна, щоб рух тягарця відразу викликав включення секундоміра. Зафіксуйте це положення за допомогою електромагнітної муфти.
2. На правий тягарець покладіть один із додаткових тягарців масою m , який вільно проходить через кільце середнього кронштейна разом із основним тягарцем.
3. Виміряйте за допомогою шкали на стояку 1 запишіть у таблицю 1.2 шлях S_1 рівноприскореного руху правого тягарця масою $(M + m)$.
4. Натисніть на клавішу "Пуск".
5. Після гальмування системи в кінці руху запишіть покази секундоміра у таблицю.
6. Виміри повторіть не менше 4-х разів і визначте середнє значення часу руху та абсолютну похибку за методикою, описаною в додатку.

7. Повторіть досліди згідно пунктів 1...6 для двох інших шляхів S_2 та S_3 , змінюючи положення нижнього кронштейна.

8. Усі результати занесіть у таблицю 1.2.

Таблиця 1.2

S , м м	ΔS , м м	t_1 , с	t_2 , с	t_3 , с	t_4 , с	$\langle t \rangle$, с	Δt , с	$\langle t^2 \rangle$, с	$\Delta(t^2) = 2 \langle t \rangle \Delta t$, c^2

9. За результатами вимірів на координатних осях $x = \langle t^2 \rangle$ та $y = S$ побудуйте залежність

$S = f(\langle t^2 \rangle)$ так, як показано на рис. 1.4.

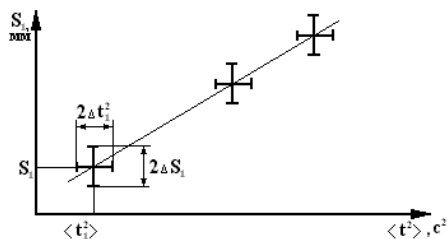


Рис. 1.4.

Якщо одержані експериментальні точки лягають на пряму, то рух системи можна вважати рівноприскореним.

Завдання 3

1. Для перевірки другого закону Ньютона середній кронштейн установіть у крайнє верхнє положення. Переміщуючи тягарці на нитці, сумістіть верхню поверхню правого тягарця з площиною, у якій знаходиться кільце середнього кронштейна.

2. На правий основний тягарець покладіть один з додаткових тягарців масою m_1 , а на лівий - масою m_2 . Маса m_1 повинна бути більшою, ніж m_2 .
3. Проведіть відлік шляху S рівноприскореного руху правого тягарця масою $(M + m_1)$ за шкалою на стояку.
4. Натиском клавіші "Пуск" приведіть систему у рух.
5. Після гальмування системи в кінці руху, запишіть покази секундоміра, тобто час рівноприскореного руху.
6. Виміри повторіть не менш 4-х разів, визначте середнє значення часу руху $\langle t_1 \rangle$ та Δt_1 за методикою, описаною в додатку.
7. На правий основний тягарець покладіть обидва додаткові тягарці масою m_1 та m_2 і виконайте досліди згідно пунктів 1,3...6.
8. Результати занесіть у таблицю 1.3.

Таблиця 1.3

S , мм	ΔS , мм	t_1 , с	t_2 , с	t_3 , с	t_4 , с	$\langle t \rangle$, с	Δt , с	$\Delta(t)^2 =$ $2 \langle t \rangle \Delta t$, с	F_1 , Н	F_2 , Н	$\langle a_1 \rangle$, м · с ⁻²	$\langle a_2 \rangle$, м · с ⁻²

9. Розрахуйте величини F_1 та F_2 за формулами:

$$F_1 = (m_1 - m_2)g \quad ; \quad F_2 = (m_1 + m_2)g \quad (1.11)$$

10. За формулою $\langle a \rangle = 2S / \langle t^2 \rangle$ вирахуйте прискорення $\langle a_1 \rangle$ та $\langle a_2 \rangle$, де S та $\langle t \rangle$ - середні значення.

11. Перевірте рівність $\frac{F_1}{F_2} = \frac{\langle a_1 \rangle}{\langle a_2 \rangle}$ (1.12), враховуючи, що виміри були проведені з деякими похибками.

12. Розрахуйте граничну відносну похибку за формулою:

$$\frac{\Delta(a_1/a_2)}{\langle a_1/a_2 \rangle} = \frac{\Delta a_1}{\langle a_1 \rangle} + \frac{\Delta a_2}{\langle a_2 \rangle},$$

(1.13)

де
$$\Delta a_1 = \frac{2\Delta S_1}{\langle t_1 \rangle^2} + \frac{4S_1}{\langle t_1 \rangle^3} \cdot \Delta t_1 \quad \text{та} \quad \Delta a_2 = \frac{2\Delta S_2}{\langle t_2 \rangle^2} + \frac{4S_2}{\langle t_2 \rangle^3} \cdot \Delta t_2.$$

Задовільним виконання рівності (1.12) можна вважати у тому випадку, коли відношення сил та відношення прискорень не відрізняються більш, ніж на 5%, що відповідає класу установки, яка використовується.

Контрольні запитання

1. Який рух називається рівномірним, який рівнозмінним?
2. Як залежить шлях, пройдений тілом, від часу при рівноприскореному русі з урахуванням початкової швидкості? Накресліть графік цієї залежності.
3. Що називається прискоренням? У яких одиницях вимірюється ця величина у СІ?
4. Сформулюйте другий закон Ньютона. Запишіть його у проекціях на осі координат.

5. Як створюється рівномірний рух тягарців на машині Атвуда?
6. У чому полягає метод прискорень на машині Атвуда?
7. Чому співвідношення (1.12) виконується приблизно?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА М-2

ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Мета роботи - вивчити закони динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі обертання та визначити момент інерції за допомогою маятника Обербека.

Короткі теоретичні відомості

Обертальним рухом зветься такий рух, при якому траєкторії усіх точок тіла являються концентричними колами з центрами на одній прямій, яка називається віссю обертання. Вісь обертання може лежати за межами тіла або проходити крізь нього. Обертання тіла характеризується кутовою швидкістю ω та кутовим прискоренням ε . Причиною, яка зумовлює зміни в обертальному русі тіла, є наявність моментів сил $\vec{M}$, що діють на тіло. Розрізняють момент сили відносно центра

(точки) та момент сили відносно осі. Момент сили відносно точки - величина векторна.

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}],$$

(2.1)

Вектор $\vec{M}$ спрямований перпендикулярно до площини, у якій знаходиться радіус-вектор $\vec{r}$ та сила $\vec{F}$, у той бік, звідки обертання, викликане силою, видно проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.1).

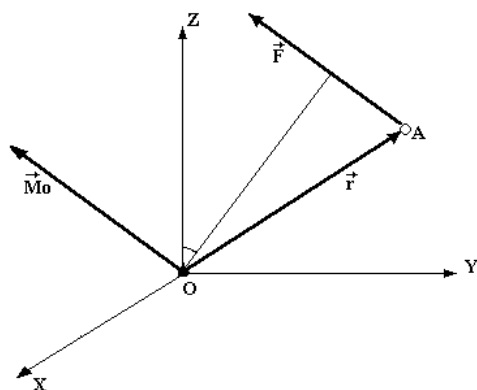


Рис.2.1

Модуль моменту сили дорівнює:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \alpha = F \cdot d,$$

(2.2)

де $d = r \cdot \sin \alpha$ зветься плечем сили (найкоротша відстань від лінії дії сили до точки обертання).

Зміна кутової швидкості характеризується величиною кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

(2.3)

Зв'язок між лінійною швидкістю $\vec{v}$ та кутовою $\vec{\omega}$ виражається співвідношенням:

$$\vec{V} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$$

(2.4)

Зв'язок між кутовим прискоренням $\vec{\varepsilon}$ та тангенціальним прискоренням $\vec{a}_\tau$ виражається співвідношенням:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}]$$

(2.5)

Нехай на частинку твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, що співпадає з віссю Z, діють зовнішні ($\vec{F}_i$) та внутрішні ($\vec{f}_i$) сили, момент яких відповідно $\vec{M}_{i_{зовн.}}$ та $\vec{M}_{i_{внутр.}}$. Рівняння динаміки обертального руху має вигляд:

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i_{зовн.}} + \sum_{i=1}^m \vec{M}_{i_{внутр.}},$$

(2.6)

де $I = I_z$ - момент інерції тіла, який характеризує інертність його при обертальному русі. Оскільки внутрішні сили для кожної пари частинок твердого тіла згідно третього закону Ньютона рівні за модулем $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$, то $\sum_{i=1}^m \vec{M}_{i_{внутр.}} = 0$, тобто внутрішні сили не створюють

результуючого обертального моменту. У зв'язку з цим вираз (2.6) набуває вигляду:

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i_{зовн.}} = \vec{M},$$

(2.7)

де $\vec{M}$ - головний момент зовнішніх сил.

Момент інерції твердого тіла відносно осі залежить не тільки від величини його маси, але і від розподілу її відносно осі. Аналітичний розрахунок моменту інерції виконується шляхом інтегрування виразу:

$$I = \int_V r^2 \rho dV,$$

(2.8)

де ρ - густина речовини у елементі об'єму dV , який знаходиться на віддалі r від осі обертання.

Рівняння динаміки обертального руху (2.7) дає можливість експериментально визначити момент інерції тіла, що являється одним із завдань лабораторної роботи.

Опис установки та методу перевірки основного закону динаміки обертального руху

Установка для вивчення законів обертального руху носить назву маятник Обербека (рис. 2.2). Він складається з тіла у вигляді хрестовини (5), на горизонтальній осі якого є два шківів різних діаметрів (6). На хрестовині симетрично відносно осі обертання закріплюються однакові тягарці. "Маятник" закріплений на вертикальному стояку (7), на кінці якого знаходиться шків (10). Через верхній шків (10) перекинута нитка, один кінець якої кріпиться до двоступінчастого шківів (6), а до іншого кінця чіпляється тягарець (9) змінної маси. Установку оснащено електронною системою відліку часу руху тягарця (9). До цієї системи входить дві оптопари, які розміщено у пересувних кронштейнах (4), (8) та електронний секундомір (1). На передній панелі секундоміра знаходяться кнопки управління - "Сеть", "Пуск", "Сброс".

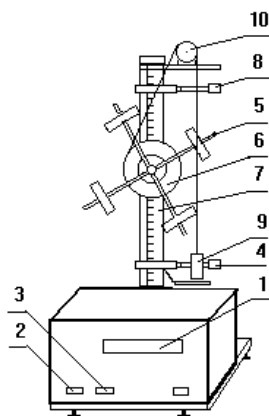


Рис.2.2

Розглянемо, як за допомогою установки можна перевірити справедливості співвідношення

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}.$$

(2.9)

Момент сили $\vec{M}$ залежить від сили натягу нитки $\vec{T}$:

$$M = T \cdot R,$$

(2.10)

де R - радіус шківів, з якого розмотується нитка при русі тягарця. Для знаходження T скористуємося другим законом Ньютона

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}.$$

(2.11)

У проекції на вісь, що співпадає з напрямком руху, рівняння (2.11) запишеться:

$$-T + mg = m_1 a,$$

звідки

$$T = m(g - a).$$

(2.12)

Доведемо, що тягарець масою m рухається рівноприскорено. Враховуючи, що для нашого випадку $a_{\tau} = a = \varepsilon R$, рівняння (2.9) набуває вигляду:

$$m(g - a)R = \frac{I \cdot a}{R},$$

звідки

$$a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}.$$

(2.10)

Беручи до уваги, що момент інерції маятника Обербека $I \gg mR^2$, вираз (2.10) спрощується:

$$a = \frac{mgR^2}{I}.$$

(2.11)

Із виразу (2.11) випливає, що при постійних значеннях величин I , m , R , $a = \text{const}$, а, отже, рух тягарця буде рівноприскореним.

Використовуючи рівняння кінематики для рівноприскореного руху (без початкової швидкості)

$$a = 2h / t^2,$$

(2.12)

де h - шлях пройдений тягарцем,

t - час руху,

з (2.10) дістанемо вираз для розрахунку моменту інерції маятника:

$$I = m \cdot R^2 (g \cdot t^2 / 2h - 1).$$

(2.13)

Для розрахунку моментів сил необхідно скористатися виразом:

$$M = mR(g - 2h / t^2),$$

(2.14)

а для розрахунку кутового прискорення ε - формулою:

$$\varepsilon = 2h / Rt^2,$$

(2.15)

у яких всі величини визначаються експериментально.

Таким чином, при $I = const$, або при $M = const$, можна експериментально перевірити співвідношення

$$\varepsilon_1 / \varepsilon_2 = M_1 / M_2, \quad \varepsilon_2 / \varepsilon_3 = I_3 / I_2,$$

(2.16)

тобто перевірити справедливість рівняння (2.9)

Порядок виконання роботи

1. Ввімкніть установку у електричну мережу. Переконайтеся у роботі електричного секундоміра та електромагнітної муфти для фіксації маятника у стані спокою.
2. Встановіть тягарці на стрижнях маятника на однаковій відстані від осі обертання ≥ 60 мм.
3. Виміряйте радіус шківів, на який будете намотувати нитку.
4. На підставку для тягарців покладіть один з додаткових тягарців. Запишіть сумарну масу підставки з тягарцем у таблицю 2.1.
5. Обнулiть покази електронного секундоміра. При цьому відбувається розблокування електронної муфти маятника і маятник може легко обертатися навколо осі.
6. Провертаючи маятник, намотуйте нитку, доки підставка з тягарцем не займе положення вище риски на корпусі верхньої оптопари. Відіжміть кнопку "Пуск", блокуючи тим самим маятник від переміщення.
7. Натисніть кнопку "Пуск". При цьому маятник повинен прийти в рух і автоматично включитися секундомір. Коли підставка з тягарцем перетне світловий потік у вікні нижньої оптопари, відлік часу

15. Всі результати запишіть у таблицю 2.1.

[illegible]

16. Використовуючи розрахункові величини, перевірте справедливість співвідношень (2.16).

17. Розрахуйте, на скільки процентів відрізняються ліві та праві частини цих співвідношень.

Відносні похибки результатів розрахуйте за формулами:

$$\langle \Delta \varepsilon \rangle / \langle \varepsilon \rangle = \pm (\langle \Delta h \rangle / \langle h \rangle + \langle \Delta R \rangle / \langle R \rangle + 2 \langle \Delta t \rangle / \langle t \rangle),$$

(2.16)

$$\langle \Delta M \rangle / \langle M \rangle = \pm (\langle \Delta m \rangle / \langle m \rangle + \langle \Delta h \rangle / \langle h \rangle + 2 \langle \Delta t \rangle / \langle t \rangle + \langle \Delta R \rangle / \langle R \rangle),$$

(2.17)

$$\langle \Delta I \rangle / \langle I \rangle = \pm \left[\frac{1}{(1 - 2 \langle \Delta h \rangle / \langle g \rangle \langle t^2 \rangle)} (2 \langle \Delta t \rangle / \langle t \rangle + \langle \Delta h \rangle / \langle h \rangle) \right].$$

(2.18)

18. Висновок про справедливість основного закону динаміки обертального руху зробіть з певною достовірністю, враховуючи межу точності експерименту. Приклад. Перевіримо справедливість співвідношення $\varepsilon_1 / \varepsilon_2 = M_1 / M_2$.

Позначимо $\varepsilon_1 / \varepsilon_2 = \alpha$, $M_1 / M_2 = \beta$.

Тепер порівняємо α та β у межах точності проведення експерименту:

$$\Delta \alpha / \langle \alpha \rangle = \Delta \beta / \langle \beta \rangle; \quad \Delta \alpha / \langle \alpha \rangle = \Delta(\varepsilon_1 / \varepsilon_2) / \langle \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \rangle = \frac{\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2}{\langle \varepsilon_1 / \varepsilon_2 \rangle};$$

$$\frac{\Delta \beta}{\langle \beta \rangle} = \Delta(M_1 / M_2) / \langle M_1 / M_2 \rangle = \frac{\Delta M_1 + \Delta M_2}{\langle M_1 / M_2 \rangle}.$$

Контрольні запитання

1. Дайте визначення моменту сили відносно точки, та відносно осі.

2. Який фізичний зміст має момент інерції?

3. Як визначається величина та напрямок вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$?
4. Сформулюйте основний закон динаміки обертального руху.
5. Виведіть формулу (2.13).
6. Складіть рівняння динаміки обертального руху з урахуванням сил тертя.

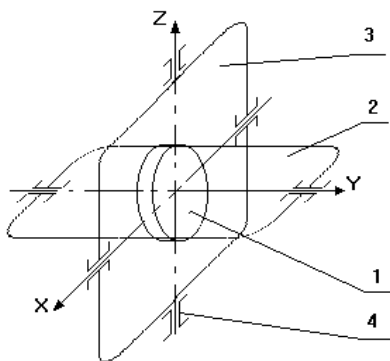
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА М-3

ДОСЛІДЖЕННЯ ГІРОСКОПА

Мета роботи - вивчити рух гіроскопа під дією зовнішніх сил.

Короткі теоретичні відомості

Гіроскопом називається симетричне тіло, що обертається з великою кутовою швидкістю навколо осі симетрії, яка може змінювати своє положення у просторі.



Для того, щоб вісь гіроскопа мала можливість займати довільну орієнтацію у просторі, його розміщують у карданний підвіс (рис.3.1). У такому пристрої гіроскоп 1 вільно

обертається навколо осі Y в рамці 2, яка у свою чергу, вільно обертається у підшипниках рамки 3 навколо осі X .

Рамка 3 також вільно обертається у підшипниках 4 корпусу навколо осі Z .

Рис. 3.1

У такому пристрої всі три перпендикулярні осі обертання рамок перетинаються в одній точці O - центрі карданного підвісу і забезпечують три ступеня вільності гіроскопа. Якщо центр мас гіроскопа співпадає з центром карданного підвісу, гіроскоп називається врівноваженим.

Тертям у підшипниках звично можна знехтувати, у результаті гіроскоп з трьома ступенями вільності ізолювано від дій зовнішніх сил будь-якої орієнтації, прикладених до корпусу, у якому розташовано підвіс. У цьому випадку для гіроскопа справедливий закон збереження імпульсу.

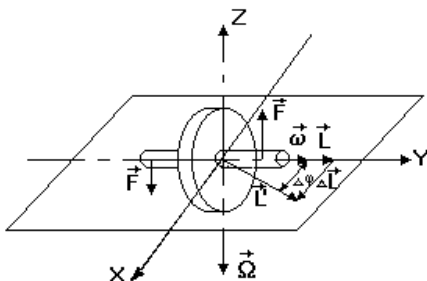
$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \text{const},$$

(3.1)

де I - момент інерції гіроскопа відносно осі обертання,
 $\vec{\omega}$ - кутова швидкість.

Згадаємо, що напрямок $\vec{L}$ співпадає з напрямком $\vec{\omega}$ і визначається правилом правого гвинта (рис.3.2).

Збереження $\vec{L}$ означає, що величина та напрямок осі обертання гіроскопа у даній інерціальній системі відліку (ICB) не змінюється з часом.



Нехай гіроскоп розташовано у деякому об'єкті, наприклад, у літаку, і його вісь зорієнтовано відносно ICB, пов'язаної із

спостерігачем, у напрямку Північ-Південь. Тоді у процесі польоту пілот може визначити зміну орієнтації літака за зміною положення осі гіроскопа відносно корпусу літака. Ця властивість широко використовується

Рис.3.2 у навігації (гірокомпас, гірогоризонт),

гіростабілізаторах напрямку гармат і т.п.

При практичному використанні гіроскопа у навігації необхідно як можна точніше задовільнити рівняння (3.1), тобто звести до мінімуму дію моментів зовнішніх сил. З цією метою прагнуть збільшити момент імпульсу гіроскопа, тобто його момент інерції та кутову швидкість. Така необхідність випливає з рівняння моментів:

$$d\vec{L} / dt = \vec{M}.$$

(3.2)

Тому чим більший L , тим менше відношення $\Delta L / L$ під дією одного і того самого моменту сил M . У результаті, при більшому моменті імпульсу гіроскопа дії зовнішніх сил на зміну напрямку осі гіроскопа у просторі будуть менше помітні. Крім того, застосовують також спеціальний пристрій для корекцій положення осі гіроскопа відносно заданого напрямку.

Розглянемо вплив зовнішніх моментів сил на гіроскоп (рис 3.2). Нехай момент імпульсу гіроскопа спрямовано уздовж осі Y . У момент $t=0$ прикладемо до гіроскопа пару сил $\vec{F}$, момент яких спрямовано уздовж осі X .

Згідно формули (3.2), за малий проміжок часу Δt момент імпульсу $\vec{L}$ одержить приріст $\Delta \vec{L}$:

$$\Delta \vec{L} = \Delta(I \cdot \vec{\omega}) = \vec{M} \cdot \Delta t,$$

(3.3)

який співпадає за напрямком з $\vec{M}$, тобто таким чином спрямований вздовж осі X . Отже, через малий проміжок

часу Δt вектор $\vec{L}$ не буде спрямований вздовж осі Y і його нове положення буде відповідати $\vec{L}'$ на рис 3.2:

$$\vec{L}' = \vec{L} + \Delta\vec{L}.$$

(3.4)

Таким чином, за час Δt гіроскоп повернеться на кут $\Delta\varphi$ навколо осі Z і його вісь розташується у напрямку $\vec{L}'$. **Рух гіроскопа під дією зовнішніх сил називається прецесією.**

Звичайно кутова швидкість прецесії $\Omega \ll \omega$, тому

$$|\vec{L}'| \approx |\vec{L}|.$$

(3.5)

Визначимо Ω . Вважаючи $\Delta\varphi$ малим та враховуючи (3.5), можна записати (див.рис.3.2)

$$\Delta L = L \cdot \Delta\varphi.$$

(3.6)

Поділивши почленно (3.6) на Δt , одержимо середню швидкість зміни моменту імпульсу гіроскопа:

$$\Delta L / \Delta t = L \cdot \Delta\varphi / \Delta t = M.$$

(3.7)

Переходячи до границі одержимо:

$$M = L \cdot d\varphi / dt; \quad |\vec{M}| = |\vec{L}| \cdot |\vec{\Omega}|.$$

(3.8)

Врахування орієнтації $\vec{M}$, $\vec{L}$, $\vec{\Omega}$ та зв'язку їхніх модулів дає можливість записати (3.8) у векторній формі:

$$\vec{M} = [\vec{\Omega} \cdot \vec{L}],$$

(3.9) де $\vec{M}$ визначається векторним добутком векторів $\vec{\Omega}$ та $\vec{L}$. (Векторний добуток двох векторів, наприклад, $\vec{\Omega}$ та $\vec{L}$, дає третій вектор $\vec{M}$, розташований перпендикулярно до площини, в якій знаходиться $\vec{\Omega}$ та $\vec{L}$, і направлений таким чином, що з його кінця суміщення першого вектора $\vec{\Omega}$ з другим $\vec{L}$ найкоротшим шляхом спостерігається проти

годинникової стрілки). Модуль вектора $\vec{M}$, тобто $|\vec{M}|$, дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{\Omega}$ та $\vec{L}$ як на сторонах:

$$|\vec{M}| = \Omega \cdot L \cdot \sin(\vec{\Omega}, \vec{L}). \quad (3.10)$$

Із(3.9) випливає, що вісь гіроскопа $|\vec{L}|$ під дією зовнішнього моменту $\vec{M}$ буде повертатися таким чином, щоб обидва обертання ($\vec{M}$) та ($\vec{L}$) мали один напрямок (правило М.Є. Жуковського). Якщо $\vec{\Omega} \perp \vec{L}$, то з (3.10) випливає, що кутова швидкість прецесії $\Omega = M / L$, а період прецесії:

$$T = 2\pi / \Omega = 2\pi L / M = 2\pi I\omega / M. \quad (3.11)$$

Якщо момент зовнішніх сил створюється, наприклад, вантажем маси m , закріпленим на віддалі l ліворуч від центра гіроскопа О, то момент сили $M = mgl$, а період прецесії можна визначити за формулою:

$$T = 2\pi I\omega / mgl. \quad (3.12)$$

Сили, які діють з боку гіроскопа на підшипники при його повороті, називаються гіроскопічними. Момент цих сил називається гіроскопічним. Він завжди перпендикулярний до моменту зовнішніх сил. Сукупність явищ, пов'язаних з поведінкою гіроскопа, називається гіроскопічними ефектами.

Опис установки

На установці (рис.3.3) лабораторної роботи гіроскопом являється ротор асинхронного двигуна (1), швидкість обертання якого може досягати 10^4 об./хв. Для одержання більшого моменту інерції на валу ротора закріплено спеціальний масивний диск (2). З

протилежного боку, на статорі двигуна, вздовж осі обертання закріплено стальну лінійку (3) з поділками, на якій закріплено контрвантаж (противага) (4). Двигун змонтовано на опорній вилці (5) і він може вільно повертатися у ній навколо горизонтальної осі, перпендикулярної осі обертання ротора. Вилку закріплено на круглій основі з поділками (лімба) (6) таким чином, що вся конструкція має можливість вільно обертатися навколо вертикальної осі. На циліндричному корпусі (7) під лімбом закріплено щітки для подачі електроживлення на двигун. На лімбі виконано спеціальні отвори, за допомогою яких разом із оптопарами (джерело світла та фотоприймач) забезпечується вимірювання швидкості обертання ротора двигуна та кута повороту лімба.

При обертанні ротора або лімба прямокутні імпульси напруги, які виникають при освітленні фотоприймачів, поступають у вимірювальний пристрій, в якому за допомогою аналогового індикатора (приладу магнітоелектричної системи) вимірюється швидкість обертання ротора, а за допомогою цифрових індикаторів - час та кут повороту лімба навколо вертикальної осі. Індикатори - аналоговий (8) та цифрові (9), а також клавіші управління та регулятора швидкості обертання ротора розташовані на передній панелі корпусу (10) вимірювального пристрою.

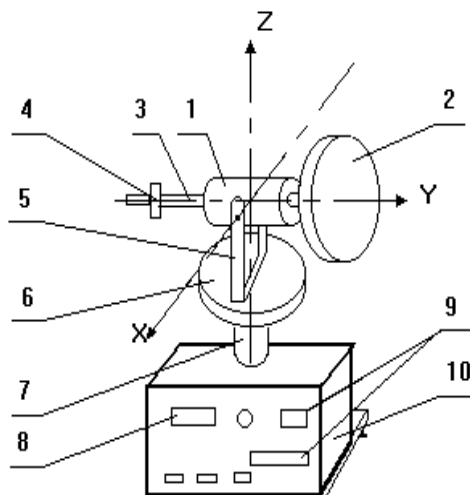


Рис.3.3

Підготовка приладу до вимірювань

1. Ознайомтесь з установкою. За допомогою чотирьох регулювальних гвинтів у плиті-основі встановіть прилад горизонтально.
2. Розташуйте гіроскоп таким чином, щоб лінійка з поділками та вантажем-противагою знаходилась ліворуч від спостерігача. Гіроскоп буде врівноваженим, якщо вантаж закріпити на лінійці таким чином, щоб його права торцева поверхня знаходилась на віддалі 50 мм від нуля шкали. Встановіть вантаж у це положення та закріпіть його гвинтом.
3. Прокрутіть ротор двигуна рукою за маховик і переконайтесь у наявності ступеня вільності обертання навколо осі Y. Переконайтесь також, що гіроскоп може обертатися навколо вертикальної осі Z та відносно осі підшипників кронштейна X. Уявіть собі задані напрямки осей X, Y, Z. Зверніть увагу, що ступінь вільності X обмежено невеликими кутами.
4. Переконайтесь, що ручка регулятора швидкості і обертання ротора двигуна знаходиться у крайньому лівому положенні. Включення приладу в іншому положенні регулятора приводить до перегорання запобіжника мережі через великий пусковий струм двигуна.

5. Ввімкніть прилад у електричну мережу та натисніть лавішу "сеть". Індикатори відліку кута та часу повинні висвічувати нулі в усіх розрядах.

6. Сумістіть "нуль" кутової шкали лімба, на якому закріплено кронштейн з гіроскопом, із стрілкою показчика.

7. Для оволодіння механікою відліку часу повороту гіроскопа на заданий кут, наприклад, на 30^0 , виконайте операції:

- перевірте суміщення "нуля" шкали лімба із стрілкою показчика;
- натисніть клавішу "сброс";
- повільно повертайте рукою лімб у напрямку зліва направо.

Як тільки нульова поділка лімба зміститься відносно показчика, ввімкнеться секундомір відліку часу та пристрій відліку кута. Коли ви повернете лімб на 10^0 , на цифровому індикаторі кута повороту з'явиться одиниця молодшого розряду. Продовжуйте повертати лімб. Коли на індикаторі з'явиться цифра 2, необхідно, продовжуючи повертати лімб, натиснути клавішу "стоп". Це буде сигналом для схеми управління зупинити відлік часу, як тільки кут повороту досягне 30^0 .

8. Визначте для самоконтролю час повороту лімба на інші кути. Не забудьте перед початком вимірів обнулити покази індикаторів натиском клавіші "сброс".

Якщо операція визначення часу повороту гіроскопа на заданий кут вами засвоєна, то можна приступити до виконання завдання.

Завдання до лабораторної роботи

1. Визначити період та кутову швидкість прецесії, розрахувати момент імпульсу та момент інерції гіроскопа згідно заданого моменту сил тяжіння та кутової швидкості обертання ротора.
2. Дослідити залежність періоду прецесії від моменту сили тяжіння та переконатися, що при постійному моменті імпульсу гіроскопа

$$T_{\text{прец}} \approx M^{-1}.$$

3. Перевірити справедливість рівняння $\vec{M} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}]$ для напрямків векторів $\vec{M}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{L}$.

Порядок виконання роботи

Завдання N1

1. Поставте гіроскоп у вихідне положення. Поворотом ручки регулятора швидкості на невеликий кут за годинниковою стрілкою включіть живлення електродвигуна і, повільно повертаючи ручку, задайте ротору швидкість обертання двигуна 7500...8200 об/хв. Процес розгону продовжується 2-3 хв., і якщо покази приладу не змінюються, то процес розгону можна вважати закінченим.
2. Змістіть вантаж на 20...25 мм відносно положення рівноваги і закріпіть його гвинтом. Розташуйте гіроскоп горизонтально, при цьому штифт-обмежувач розміститься посередині отвору у кронштейні. Відпустіть гіроскоп і спостерігайте прецесію навколо вертикальної осі. Зверніть увагу, що прецесія закінчується, коли штифт упирається в обмежувач, оскільки момент сили тяжіння в цьому випадку компенсується моментом сили реакції з боку кронштейна.
3. Для визначення періоду прецесії встановіть гіроскоп горизонтально і, притримуючи його рукою в цьому положенні, сумістіть нуль лімба зі стрілкою показчика.

Натисніть клавішу "сброс" і відпустіть гіроскоп. Визначте час його повороту навколо вертикальної осі на 30° або 60° за вищенаведеною методикою.

4. Повторіть дослід 3 рази. Значення часу повороту на заданий кут запишіть у табл.3.1. Обчисліть період прецесії, тобто час повороту гіроскопа на 360° та кутову швидкість прецесії. Запишіть у таблицю також значення зміщення вантажу та швидкість обертання ротора гіроскопа.

Таблиця

3.1

№ досл.	n , об/хв	ω , рад/с	Зміщен- ня вантаж у l , мм	t ,с для кута $\varphi = 30^\circ$	T , с	Ω , рад/с	L , $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$	I , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$
1								
2								
3								
Се р.								

5. Розрахуйте похибку визначення періоду прецесії для надійності

$\alpha = 0,9$, вважаючи, що систематичні помилки відсутні.

6. Використовуючи вираз 3.11, визначте значення моменту імпульсу та момент інерції ротора. Результати запишіть у таблицю 3.1.

Завдання N 2

1.Для дослідження залежності $T = f(|\vec{M}|)$, визначте період прецесії, розмішуючи вантаж по чергово на

віддалі 10, 20, 30, 40 мм відносно положення рівноваги, виконавши по три досліди для кожного

положення вантажу. Результати вимірів запишіть у таблицю 3.2.

За середніми значеннями побудуйте графік залежності

$$T = f(M^{-1}).$$

Таблиця 3.2

№	Положення вантажу, l , мм	Маса вантажу, m , кг	Час повороту на кут $\varphi = 30^\circ$, с	T , с	M , $H \cdot M$	M^{-1} , $\frac{1}{H \cdot M}$
1						
2						
3						
Серед.						

Завдання N 3

1. Закріпіть вантаж у положенні, яке відповідає рівноваженому гіроскопу, та встановіть його у вихідному положенні.

2. Прикладіть до гіроскопа момент сили, направлений вздовж осі Z , для чого рукою з невеликим зусиллям спробуйте повернути лімб зліва направо. Прослідкуйте за поведінкою гіроскопа. Визначте напрямок вектора кутової швидкості прецесії.

3. Використовуючи векторний вираз $\vec{M} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}]$ або правило М.Є.Жуковського, визначте напрямок вектора $\vec{L}$ та напрямок обертання ротора гіроскопа. Порівняйте

цей напрямок із дійсним. Накресліть у зошиті звітів взаємну орієнтацію векторів $\vec{M}$, $\vec{\Omega}$ та $\vec{L}$.

Після закінчення дослідів повільно зменшіть швидкість обертання ротора двигуна до його повного вимкнення. Вимкніть установку з електромережі.

Контрольні запитання

1. Яка властивість гіроскопа дає можливість використовувати його у навігації? Який закон визначає цю можливість ?
2. Що таке карданний підвіс? Які засоби зменшення впливу зовнішніх сил Ви знаєте?
3. Що таке прецесія гіроскопа та яка причина її виникнення?
4. Як визначити кутову швидкість прецесії за величиною та напрямком? Від чого вона залежить? Одержіть вираз для періоду прецесії.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА М-4

ВИВЧЕННЯ ПРУЖНОГО ТА НЕПРУЖНОГО УДАРУ КУЛЬ

Мета роботи - вивчити прямий центральний удар двох куль та перевірити виконання законів збереження імпульсу та енергії у двох близьких до ідеальних випадках пружного та непружного ударів.

Короткі теоретичні відомості

Ударом називають процес зіткнення тіл, у результаті якого відбувається перерозподіл їхніх імпульсів та енергій. Під час удару обидва тіла деформуються.

Пряму, яка проходить через точку дотику тіл та перпендикулярна до поверхні їхнього дотику, називають лінією удару.

Якщо лінія удару проходить через центри тяжіння обох тіл, удар зветься центральним.

У механіці для опису удару використовують дві ідеалізовані моделі.

1. Абсолютно непружний удар, внаслідок якого тіла рухаються з однаковою швидкістю, а деформація пластична. Частина кінетичної енергії тіл, які співударяються, витрачається на роботу деформації. Тому закон збереження механічної енергії не виконується.

2. Абсолютно пружний удар, внаслідок якого швидкості тіл неоднакові, а деформації абсолютно пружні. У цьому випадку справедливий закон збереження механічної енергії.

Як для пружного, так і для непружного удару виконується закон збереження імпульсу.

Розглянемо прямий центральний удар двох куль. Нехай маси куль m_1 та m_2 , швидкості куль до удару $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$. Імпульси куль до удару $\vec{p}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1$ та $\vec{p}_2 = m_2 \cdot \vec{v}_2$. Кінетичні енергії куль до удару $W_1 = m_1 v_1^2 / 2$ та $W_2 = m_2 v_2^2 / 2$.

Закон збереження імпульсу механічної системи виконується тільки для замкнутих (ізольованих) систем. Якщо ж на механічну систему діють зовнішні сили, але їхні проекції на вісь X дорівнюють нулю, то в цьому випадку можна використовувати закон збереження імпульсу у проекціях на цю ж вісь.

Для абсолютно непружного удару куль закон збереження імпульсу у проекції на горизонтальну вісь X має слідуючий вигляд:

$$m_1 v_{1X} + m_2 v_{2X} = (m_1 + m_2) u_X .$$

(4.1)

Аналогічно для абсолютно пружного удару:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} .$$

(4.2)

Тут u_x, u_{1x}, u_{2x} - проекції на вісь X швидкості куль після удару.

Закон збереження механічної енергії можна застосувати тільки для замкнутих механічних систем, у яких внутрішні сили потенціальні. Але якщо зовнішні сили під час руху потенціальні і перпендикулярні до швидкості, то вони не здійснюють роботи. В цьому випадку закон збереження механічної енергії при абсолютно пружному прямому центральному ударі двох куль може бути записаний у такому вигляді:

$$m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 = m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2 .$$

(4.3)

Розв'язуючи систему рівнянь (4.2) та (4.3), можна знайти швидкості куль після удару:

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 - v_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} ,$$

(4.4)

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 - v_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} .$$

(4.5)

Удар двох реальних куль відрізняється від ідеалізованих випадків - абсолютно пружного та абсолютно непружного ударів. При ударі реальних куль частина сумарної кінетичної енергії, яку вони мали до удару, через роботу неконсервативних внутрішніх сил

перетворюється в інші види енергії. Тому сумарна кінетична енергія куль після удару менша від цієї енергії до удару. Різниця енергії дорівнює роботі консервативних сил.

Для абсолютно непружного удару ця робота дорівнює:

$$A = (m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2) - (m_1 + m_2) u^2 / 2. \quad (4.6)$$

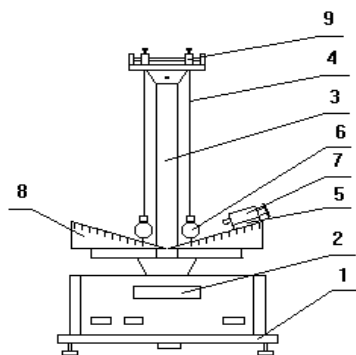
Для реального удару:

$$A = (m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2) - (m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2). \quad (4.7)$$

Удар двох твердих тіл у більшості випадків - процес короткочасовий. За малий час удару імпульси тіл змінюються на кінцеву величину. Оскільки при цьому виникають великі внутрішні сили, то при описі удару можна не враховувати зовнішні сили, тобто механічну систему розглядати як ізольовану і застосувати закони збереження енергії та імпульсу.

Опис установки та методу вимірювання швидкості куль

Установка для вивчення удару куль (рис.4.1) являє собою вертикальний стояк (3), закріпленний на горизонтальній підставці (1). До верхньої частини стояка кріпляться чотири нитки (4), які забезпечують біфілярний підвіс куль (6). Віддаль між центрами куль



можна регулювати за допомогою гвинтів (9). На штанзі (5) закріплюється електромагніт (7), який може утримувати кулю відхиленою на деякий кут від положення рівноваги. Кут відхилення можна змінювати, пересуваючи електромагніт уздовж шкали (5). При зміні віддалі між

центрами куль ліву шкалу (8) можна переміщувати.

Мірою швидкості куль являється кут їхнього відхилення від положення рівноваги. Значення цих кутів відраховуються за шкалами (5) та (8).

При відхиленні правої кулі на кут α закон збереження енергії до удару можна записати:

$$m_1gh = m_1v_1^2 / 2, \quad (4.8)$$

Рис.4.1

звідки $v_1 = \sqrt{2gh}$, де h - висота, на яку піднято праву кулю. З малюнка (4.2) видно, що $h = L(1 - \cos \alpha) = 2L \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Тепер швидкість правої кулі перед зіткненням можна визначити за формулою:

$$v_1 = 2\sqrt{gL} \sin \frac{\alpha}{2}$$

(4.9)

де L - довжина нитки, на якій висить куля.

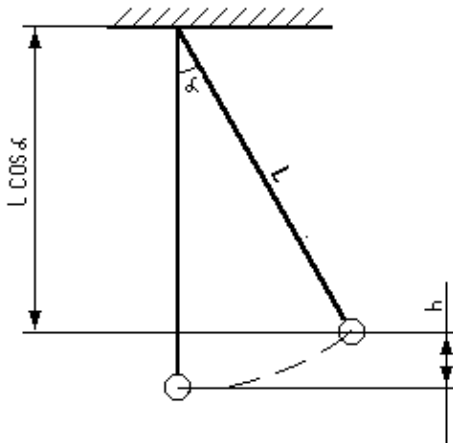


Рис.4.2

Швидкості куль після удару визначається аналогічно:

$$u_1 = 2\sqrt{gL} \sin \frac{\alpha_1}{2},$$

(4.10)

$$u_2 = 2\sqrt{gL} \sin \frac{\alpha_2}{2},$$

(4.11)

де α_1 та α_2 - кути відхилення відповідно правої та лівої куль після удару.

Порядок виконання роботи

1. Ввімкніть установку в електричну мережу. Натисніть клавішу "сброс". Клавіша "пуск" повинна бути відтиснутою.
2. Закріпіть сталеві кулі, які використовуються для дослідження пружного удару на біфілярних підвісах установки.
3. Притисніть праву кулю до сердечника електромагніта.
4. Переміщуючи електромагніт уздовж шкали, виберіть початковий кут відхилення α правої кулі. Ліва куля до удару залишається нерухомою.
5. Натисніть клавішу "пуск".
6. Зафіксуйте кути відхилення куль та α_1 та α_2 після удару. Дослід повторіть тричі.
7. Закріпіть на біфілярних підвісах пластилінові кулі, які використовуються для дослідження непружного удару.
8. Виконайте пункти 3-6 цього завдання.
9. За формулами 4.9-4.11 розрахуйте швидкості куль до та після удару. Врахуйте, що $v_2 = 0$.
10. Використовуючи вираховані швидкості v_1 , u_1 , u_2 , за відповідними формулами перевірте, як виконується закон збереження імпульсу та механічної енергії при

пружному та непружному ударах. Переконайтеся, що удар реальний .

11. Знайдіть роботу пластичної деформації за формулами (4.6) та (4.7).

12. Виміри виконайте для різних кутів відхилення α правої кулі.

13. Результати вімерів та розрахунків запишіть у таблицю 4.1.

Таблиця 4.1

Виміряні величини						Вирахувані величини						
	m_1 ,	m_2 ,	α_1 ,	α_2 ,	α ,	V_1 ,	u_1 ,	u_2 ,	$m_1 v_1$,	$\frac{m_1 v_1^2}{2}$,	$\frac{m_1 u_1^2}{2}$,	$\frac{m_2 u_2^2}{2}$,
	кг	кг	град	град	град	м/с	м/с	м/с	кг· $\frac{м}{с}$	Дж	Дж	Дж
1.												
2.												
3.												
Сер												

Контрольні запитання

1. Дайте визначення абсолютно пружного та абсолютно непружного удару.
2. Сформулюйте закон збереження імпульсу та закон збереження механічної енергії.
3. Чим відрізняються консервативні сили від неконсервативних?
4. Чим визначаються швидкості куль у данній роботі?
5. Розв'яжіть систему рівнянь (4.2), (4.3) з метою одержання формул (4.4), (4.5).
6. Що називається енергією, роботою?

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ КРУТИЛЬНО-БАЛІСТИЧНОГО МАЯТНИКА

Мета роботи – ознайомитись із балістичним методом визначення

швидкості тіл та визначити швидкість тіла за допомогою крутильно – балістичного маятника.

Короткі теоретичні відомості

Крутильно-балістичний маятник являє собою симетричне тіло із великим моментом інерції, яке висить на вертикально розташованій пружній нитці. Маятник має можливість повертатися в горизонтальній площині навколо вертикальної осі, закручуючи нитку. Для забезпечення пружної деформації кручення кути повороту повинні бути невеликими. Для балістичного маятника повинна виконуватись умова: $T \gg \tau$,

де T - період його крутильних коливань;

τ - час його співудару із тілом (снарядом).

Конструкція маятника, який використовується для визначення швидкості тіла, забезпечує умови непружного зіткнення. Під час зіткнення система "маятник - тіло" з достатньою точністю являється ізолюваною, тому до неї можна застосувати закон збереження моменту імпульсу. У загальному випадку

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \text{const} ,$$

тобто момент імпульсу ізольованої системи тіл відносно нерухомої осі обертання не змінюється з часом ні за величиною, ні за напрямком. Момент імпульсу кожного з тіл системи відносно нерухомої осі

$$L = I \cdot \omega$$

де I - момент інерції тіла,

ω - миттєве значення кутової швидкості відносно цієї осі.

Опис установки та методу визначення швидкості тіла

Установку з крутильно-балістичним маятником, який використовується у роботі, зображено на рис. 5.1.

Чотири регулювальних гвинти (1) у підставці установки (2) дозволяють встановити вісь маятника чітко вертикально. На вертикальному стояку (3) закріплюються три кронштейни: нижній (5), середній (6) та верхній (4). До кронштейна закріплені: стріляючий пристрій (7), в якому за допомогою пружини невеликому тілу - "снаряду" надаються швидкість $\sim 10\text{м/с}$; прозорий екран з кутовою шкалою (8) для вимірювання кута повороту маятника та фотоелектричний датчик оптопарі (9). Кронштейн (4) та (5) мають затискачі для кріплення сталюого дроту (11), на який підвішено маятник, що складається з двох стержнів (12) та водилки (14). Фотоелектричний датчик оптопарі має зв'язок із лічильником та секундоміром (13). В оптопарі світловий потік від лампочки падає на фототранзистор. Під час руху маятника світловий потік переривається водилкою, у результаті чого у колі фототранзистора формується вузький імпульс напруги, який надходить до лічильника і секундоміра. Період імпульсів відповідає періоду

вільних коливань маятника. На передній панелі корпусу секундоміра розташовано кнопки керування:

"Сеть" - вмикач електромережі;

"Сброс" - забезпечує обнулення показів індикаторів лічильника та секундоміра;

"Стоп" - забезпечує закінчення підрахунку імпульсів, які надходять до лічильника та секундоміра, із збереженням показів індикаторів.

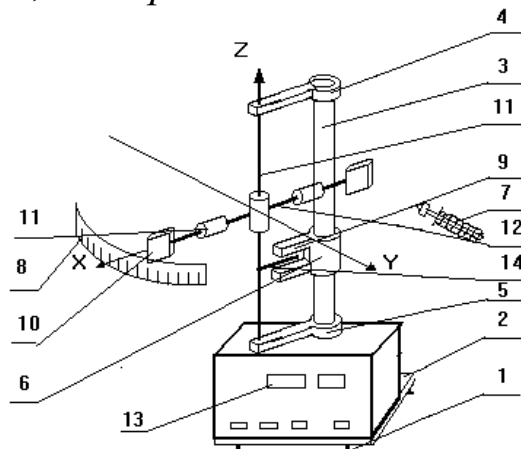


Рис. 5.1

Для визначення швидкості тіла використаємо закон збереження моменту імпульсу для системи тіл. Нехай $L = I \cdot \omega$ - момент імпульсу маятника, $L_T = m_T \cdot v \cdot r$ - момент імпульсу тіла відносно вертикальної осі безпосередньо перед зіткненням, де I - момент інерції маятника, v - швидкість тіла, m_T - маса тіла, r - віддаль від осі обертання до місця удару тіла об мішень. Тоді до зіткнення момент імпульсу системи $L_{cucm} = L_M + L_T = L_T$, оскільки маятник нерухомий. Відразу після зіткнення: $L'_{cucm} = L'_M + L'_T$, де $L'_T = I_T \cdot \omega_T$ момент імпульсу тіла, I_T - його момент інерції відносно осі маятника ($I_T = m_T \cdot r^2$). Оскільки згідно закону збереження $L_{cucm} = const$, то

$$L_T = L_M' + L_T'$$

(5.2)

або

$$m_T \cdot v \cdot r = I \cdot \omega + I_T \cdot \omega = (I + I_T) \cdot \omega$$

(5.3)

З формули (5.3)

$$v = \frac{(I + I_T) \cdot \omega}{m_T \cdot r} = \frac{I \cdot \omega}{m_T \cdot r},$$

(5.4)

оскільки $I_T \ll I$.

Таким чином, для визначення v необхідно всі величини у правій частині рівняння (5.4) визначити у результаті вимірів.

Розглянемо, яким чином можна визначити момент інерції маятника. Після удару тіла об мішень, маятник здійснює крутильні коливання. Основний закон динаміки обертального руху для маятника у цьому випадку має вигляд:

$$I \cdot d^2\theta / dt^2 = M,$$

(5.5)

де θ - кут закручування дроту,

M - крутильний момент сил пружності деформованого дроту.

Згідно закону Гука для пружної деформації кручення:

$$M = k \cdot \theta,$$

(5.6)

де k - жорсткість при крученні.

Якщо знехтувати дисипацією енергії, то з формул (5.5) та (5.6) одержимо диференціальне рівняння руху маятника:

$$I \cdot d^2\theta / dt^2 + k \cdot \theta = 0.$$

(5.7)

Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\theta = \theta_{\max} \cdot \sin(\Omega \cdot t + \alpha),$$

(5.8)

де $\Omega = 2\pi / T$ - циклічна частота коливань маятника,

T - період коливань,
 α - початкова фаза.

Зробивши підстановку (5.8) у (5.7), одержимо: $\Omega = \sqrt{K/I}$,
звідки період крутильних коливань дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{I/k}.$$

(5.9)

Формулу (5.9) можна використати для знаходження I , якщо виразити k через величини, які визначаються експериментально.

Конструкція маятника дозволяє змінювати його момент інерції за рахунок зміни положення тягарців M на стержнях. Тоді згідно теореми Гюйгенса - Штейнера момент інерції маятника можна представити у вигляді:

$$I = I_0 + 2M \cdot R^2,$$

(5.10)

де R - віддаль від центра тягарця до осі обертання при їхньому симетричному розташуванні, I_0 - момент інерції маятника без тягарців.

Розташовуючи тягарці на стержнях симетрично на різних віддях R_1 та R_2 , одержимо, згідно (5.9), для відповідних періодів коливань маятника:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2MR_1^2}{k}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2MR_2^2}{k}}.$$

(5.11)

Перепишемо формулу (5.4), для випадку, коли тягарці розташовано на більшій відстані R_2 від осі маятника:

$$v = \frac{I_2 \cdot \omega_{2\max}}{m_T \cdot r},$$

(5.12)

де I_2 згідно (5.10) запишеться у вигляді

$$I_2 = I_0 + 2MR_2^2 \cdot$$

(5.13)

Виключивши k із (5.11), одержимо:

$$I_0 = \frac{2M(T_1^2 \cdot R_2^2 - T_2^2 \cdot R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}.$$

(5.14)

Тоді

$$I_2 = \frac{2M(T_1^2 \cdot R_2^2 - T_2^2 \cdot R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} + 2MR_2^2 = \frac{2MT_2^2(R_2^2 - R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} \cdot$$

(5.15)

Для визначення $\omega_{2\max}$ в рівнянні (5.12) врахуємо, що ця величина - максимальна. Кутова швидкість, яку набуває маятник до кінця проміжку часу співудару, τ . Якщо знехтувати дисипацією енергії, ця швидкість буде максимальною кутовою швидкістю крутильних коливань маятника після удару. Диференціюючи (5.8), одержимо закон зміни кутової швидкості:

$$\omega = d\theta / dt = \theta_{\max} \Omega \cos(\Omega \cdot t + \alpha) \cdot$$

(5.16)

Якщо тягарці розташовано на віддалі R_2 , то

$$\omega_2 = \theta_{2\max} \Omega_2 \cos(\Omega_2 \cdot t + \alpha),$$

(5.17)

Тому

$$\omega_{2\max} = \theta_{2\max} \cdot 2\pi / T_2$$

(5.18)

Підставляючи I_2 та $\omega_{2\max}$ в (5.12), одержимо вираз для швидкості тіла через виличини, які вимірюються в дослідах:

$$v = \frac{4\pi M T_2 (R_2^2 - R_1^2) \theta_{2\max}}{(T_2^2 - T_1^2) \cdot m_T \cdot r}.$$

(5.19)

Порядок виконання роботи

Завдання 1.

Визначення швидкості тіла

1. Перевірте, чи встановлений крутильний маятник на нульовій поділці кутової шкали. В разі необхідності поворотом гайки кріплення струни підвісу встановіть нуль.
2. Зважте тіло, швидкість якого потрібно визначити. Запишіть значення його маси в таблицю 5.1. Також у цю таблицю запишіть масу M одного з двох тягарців, які закріплюються на горизонтальних стержнях.

Таблиця 5.1

№ п/п	m_T , кг	M , кг	R_1 , м	R_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	T_1 , с	T_2 , с	$\theta_{2\max}$, рад	r , м	V , м/с
1											
2											
3											
Сер.											

3. Відкрутіть гвинти кріплення пересувних тягарців та встановіть їх на мінімальній віддалі від осі обертання (симетрично). Виміряйте віддаль $R_1 = R_{\min}$ від осі обертання до центра одного з тягарців, використовуючи сантиметрові мітки на стержні маятника. Врахуйте, що діаметр циліндра, в який закручені стержні маятника, - 20 мм.

4. Виміряйте періоди коливань маятника T_1 та T_2 для двох положень тягарців $R_1 = R_{\min}$ та $R_2 = R_{\max}$. Для цього необхідно ввімкнути установку в електричну мережу. Відхиліть маятник на кут $20-30^\circ$, натисніть кнопку

"Сброс" (при цьому повинні на індикаторі висвічуватися нулі в усіх розрядах) і відпустіть маятник. Після цього, при першому ж затемненні фотоприймача оптопар, починається відлік часу та кількості коливань. Якщо Ви визначаєте час 10 коливань, то натисніть кнопку "Стоп", коли індикатор висвітить цифру 9. Після десяти повних коливань секундомір автоматично зупиниться. Запишіть час t_1 десяти коливань та період T_1 в таблицю 5.1. Аналогічно визначте період T_2 , попередньо встановивши тягарці на віддалі $R_2 = R_{\max}$. Віддаль R_2 , час t_2 та період T_2 також запишіть у таблицю 5.1.

5. Затріть пластилін на мішені маятника, щоб на ній можна було помітити слід удара. Зарядіть стріляючий пристрій, для чого ручку пристрою відведіть вперед, захопіть пружину і стисніть пружину до спрацьовування заціпки. Надіньте тіло-"снаряд" на стрижень стріляючого пристрою.

6. Виконайте постріл, звільнивши пружину, і зафіксуйте кут, на який повернеться маятник. Дослід повторіть тричі. Запишіть значення кутів $\theta_{2\max}$ та середнє значення $\langle \theta_{2\max} \rangle$ в радіанах у таблицю 5.1.

7. Для середніх значень величин, які входять у (5.19), вирахуйте швидкість тіла V . Знайдіть абсолютну та відносну похибку швидкості ν .

Завдання 2

Зробити оцінку впливу затухання коливань на результат вимірів

Нехтування затуханням коливань приводить до заниженого значення швидкості "снаряда". Так, у формулу (5.19) підставляється величина $\theta_{\max}$, а вона менша, ніж відповідна тій самій початковій швидкості тіла амплітуда незатухаючих коливань $\theta_{0\max}$. Отже, при

визначенні $\theta_{\max}$ виникає систематична похибка, яка дорівнює

$$\Delta\theta_{\text{сист}} = \theta_{0\max} - \theta_{\max}.$$

(5.17)

Ця похибка накопичується за чверть періоду. Зменшення амплітуди коливань за повний період можна виміряти безпосередньо:

$$\Delta\theta = \theta_{\max 2} - \theta_{\max 1},$$

(5.18)

де $\theta_{\max 1}$ та $\theta_{\max 2}$ відповідно кути першого та другого максимального відхилення маятника після попадання у нього "снаряда". Вважаючи залежність амплітуди затухаючих коливань від часу наближено лінійною, знаходимо, що:

$$\frac{\Delta\theta_{T/4}}{\Delta\theta_{(T)}} = \frac{T/4}{T} = \frac{1}{4}.$$

(5.19)

Відповідно:

$$\Delta\theta_{\text{сист}} = \Delta\theta_{(T/4)} \approx \frac{1}{4}\theta_{(T)} = \frac{1}{4}(\theta_{\max 2} - \theta_{\max 1}),$$

(5.20)

тобто

$$|\Delta\theta_{\text{сист}}| = \left| \frac{1}{4}(\theta_{\max 2} - \theta_{\max 1}) \right|.$$

Якщо $\theta_{\max 1}$ та $\theta_{\max 2}$, співпадають у межах точності, з якою вимірюється кут відхилення маятника, то величиною $\Delta\theta_{\text{сист}}$ можна знехтувати і модель затухаючих коливань справедлива.

Зробіть оцінку за формулою (5.20), систематичної похибки $\Delta\theta_{\text{сист}}$.

Для цього:

1. Відхиліть маятник від положення рівноваги на кут θ , відпустіть без поштовху і виміряйте амплітуду $\theta_{\max 2}$ другого відхилення маятника у той самий бік.
2. Виміри повторіть тричі і знайдіть середнє арифметичне значення $\langle \theta_{\max 2} \rangle$.
3. Результат занесіть у таблицю 5.2.

Таблиця 5.2

№ п/п	$\theta_{\max 1}$	$\theta_{\max 2}$	$\Delta\theta_{\text{сист}}$	$\Delta\theta_{\text{шкали}}$
1				
2				
3				
Сер				
.				

4. Порівняйте одержані значення $\Delta\theta_{\text{сист}}$ з похибкою $\Delta\theta_{\text{шкали}}$ вимірів кута за шкалою установки, прийнявши її рівною половині ціни поділу шкали. Зробіть висновок.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте закон збереження та перетворення енергії при взаємодії тіла з маятником.
2. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу для системи тіл.
3. Які фактори найбільш сильно впливають на точність даного досліді?
4. Одержіть рівняння (5.11) з закону збереження енергії, вважаючи заданим рівняння (5.9) та нехтуючи дисипацією енергії.
5. Одержіть формулу швидкості тіла через величини, які вимірюються у досліді.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА М-6

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ МАХОВОГО КОЛЕСА

Мета роботи - визначити момент інерції махового колеса, використовуючи

закон збереження механчної енергії.

Короткі теоретичні відомості

Момент інерції - це фізична величина, яка характеризує розподіл маси у тілі і є мірою інертності тіла при обертальному русі. Ця інертність проявляється при будь-якій зміні швидкості обертання тіла, в тому числі при спробі зупинити обертання або надати обертання тілу, що знаходилося у спокої відносно будь-якої осі, довільно розташованої відносно тіла. Чим більший момент інерції, тим сильніше тіло супротивиться зміні швидкості обертання.

Моментом інерції матеріальної точки відносно якої-небудь осі називається добуток її маси на квадрат віддалі до цієї ж осі :

$$I = m \cdot r^2.$$

(6.1)

Момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює сумі моментів інерції частин тіла відносно тієї ж осі :

$$I = \sum I_i$$

(6.2)

Розмірність моменту інерції - ML^2 , одиниця вимірювання - $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Знаючи момент інерції I_c відносно осі, яка проходить через центр мас тіла, можна визначити його

момент інерції I відносно іншої осі, паралельної першій, користуючись співвідношенням, яке виражає теорему Штейнера:

$$I = I_c + M \cdot d^2,$$

(6.3)

де M - маса тіла,
 d - віддаль між осями.

Для розрахунку моменту інерції тіла його умовно розбивають на нескінченне число фізично малих елементів об'єму dV та масою

$$dM = \rho dV,$$

де ρ - густина тіла в цьому елементі.

Сумування у формулі (6.2) заміняють інтегруванням елементарних моментів інерції $dI = dm \cdot r^2$ по усьому об'єму тіла V :

$$I = \int_V dV = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

(6.4)

Розрахуємо момент інерції суцільного однорідного ($\rho = \text{const}$) циліндра відносно його геометричної осі (рис. 6.1).

Умовно розіб'ємо циліндр на концентричні шари товщиною dr . На рис. 6.1 зображено шар радіуса r . Об'єм такого шару

$$dV = 2\pi r h dr$$

За формулою (6.4) здійснюємо інтегрування по усіх шарах радіусами від 0 до R , де R - радіус циліндра:

$$I = \int_0^R 2\pi r^3 h \rho dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi R^2 h \rho R^2 = \frac{1}{2} M R^2,$$

(6.5)

де $M = \pi R^2 h \rho$ - маса циліндра.

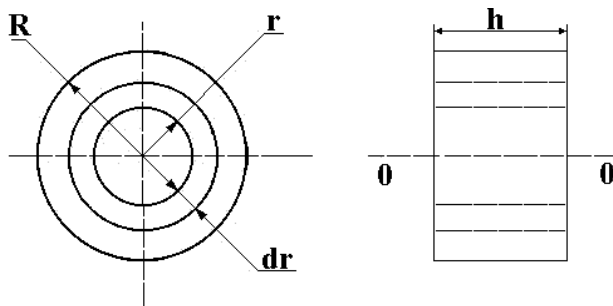


Рис. 6.1.

Розрахунковим шляхом, аналогічно, можуть бути визначені моменти інерції однорідних тіл простих форм, наприклад, кулі, стержня, обода, також їхніх поєднань. Моменти інерції тіл складної конфігурації звичайно визначають експериментально.

Опис методу та установки для визначення моменту інерції

В даній лабораторній роботі для визначення моменту інерції використовується енергетичний підхід. Зміна кінетичної енергії системи при переході з положення 1 у положення 2 відбувається під дією прикладених до системи зовнішніх та внутрішніх сил і дорівнює сумі робіт цих сил на вказаному переміщенні:

$$T_2 \longrightarrow T_1 = A_{1 \longrightarrow 2}^{\text{зовн}} + A_{1 \longrightarrow 2}^{\text{внутр}},$$

(6.6)

Лабораторна установка (рис 6.2) складається з махового колеса (1), насадженого на вал (2), чашки (5) масою m_1 , закріпленої до кінця шнура (3), та гирі (4) масою m_2 , яка розташовується на чашці. Загальна маса вантажу $m = m_1 + m_2$. Вал (2) встановлений горизонтально у шарикопідшипниках c_1

та c_2 . Відлік положення вантажу здійснюється за допомогою вертикальної лінійки (6).

Махове колесо та вантаж, зв'язані шнуром, утворюють незамкнену систему, рух якої зумовлюється спільною дією як зовнішніх сил - тяжіння вантажу, тертя у підшипниках, опору та в'язкого тертя зі сторони повітря, - так і внутрішніх сил тертя, які виникають при деформації шнура. Сила тяжіння $m\vec{g}$ є консервативною силою, решта - дисипативні. Позначимо їхню рівнодіючу через $\vec{F}_0$. Вона завжди спрямована проти руху. Консервативні сили не змінюють повну механічну енергію системи, а дисипативні - зменшують механічну енергію, перетворюючи її у теплову.

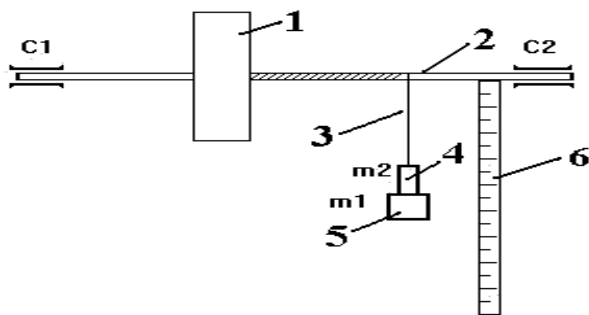


Рис. 6.2

У вихідному стані (стан 1) шнур намотаний на вал, але система утримується від руху за махове колесо. У такий момент кінетична енергія системи $T_1 = 0$. Якщо колесо відпустити, система приходить у рух: вантаж опускається, маховик розкручується. Зростає кінетична енергія поступального руху вантажу $mv^2/2$ та кінетична енергія обертального руху маховика $I\omega^2/2$. Кутова

швидкість ω обертання маховика зв'язана з лінійною швидкістю V вантажу співвідношенням

$$\omega = V / r ,$$

(6.7)

де r - сума радіусів вала та шнура.

У нижньому положенні вантажу (стан 2) кінетична енергія системи максимальна і дорівнює :

$$T_2 = mV_2^2 / 2 + I\omega_2^2 / 2 .$$

Шлях від верхнього до нижнього положення позначимо через h_1 .

Оскільки рух рівноприскорений, то $v_2 = at$ і $h_1 = at^2 / 2$,

де t - час опускання.

З вищепроведених формул одержимо:

$$v_2 = 2h_1 / t$$

(6.8)

Робота сили тяжіння на шляху h_1 додатна і дорівнює mgh_1 , а робота рівнодіючої дисипативних сил від'ємна : $-F_\delta \cdot h_1$.

У відповідності з (6.6):

$$mV_2^2 / 2 + I\omega^2 / 2 = mgh_1 - F_\delta \cdot h_1 .$$

(6.9)

У стані 2 махове колесо продовжує обертатися по інерції. Шнур починає намотуватися на вал, що призводить до підняття вантажу і зменшення його кінетичної енергії та енергії маховика. Система зупиняється (стан 3). Її кінетична енергія $T_3 = 0$. Шлях вантажу від положення 2 до зупинки позначимо h_2 . Робота сил тяжіння на цілому шляху від'ємна і дорівнює $-mgh_2$. Робота рівнодіючої дисипативних сил також від'ємна: $-F_\delta \cdot h_2$. Застосовуємо вираз (6.6) до процесу прерходу системи із вихідного стану спокою 1 до стану спокою 3, минуючи проміжні стани:

$$T_3 - T_1 = mgh_1 - mgh_2 - F_\delta h_1 - F_\delta h_2 .$$

Це дає можливість, враховуючи, що $T_1 = T_3 = 0$ визначити середнє значення рівнодіючої дисипативних сил:

$$F_{\text{с}} = mg \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}.$$

(6.10)

Підставляючи вирази (6.7) , (6.8) та (6.10) у рівняння (6.9) , після перетворень одержимо робочу формулу для розрахунку моменту інерції махового колеса:

$$I = mr^2 \left[\frac{gt^2 h_2}{(h_1 + h_2) h_1} - 1 \right].$$

(6.11)

Оцінка точності вимірів

Величина моменту інерції, визначена за формулою (6.11), є результатом непрямих (посередніх) вимірів. Її одержано за результатами прямих (безпосередніх) вимірів величин m , r , t , h_1 , h_2 , які виконані з похибками Δm , Δr , Δt , Δh_1 , Δh_2 відповідно. Значення прискорення вільного падіння g на широті міста Кіровограда складає $9,806 \text{ м/с}^2$. Якщо при пістановці в (6.11) брати g з числом значущих цифр на одиницю більшим, ніж для інших величин, похибкою Δg можна знехтувати. Визначивши вказані похибки, можна оцінити граничну абсолютну похибку посереднього виміру моменту інерції махового колеса згідно загальної методики (див. дане видання, розділ 8. "Похибки вимірювань та обробка результатів експерименту в лабораторному практикумі з фізики").

Порядок виконання роботи

Завдання 1

Визначити момент інерції махового колеса, використовуючи перший метод обробки результатів.

1. Штангельциркулем виміряйте діаметр вала та шнура - одноразово, технічним методом. Обчисліть значення

радіусів вала r_e та шнура $r_{ш}$, їх суму r , оцініть похибку Δr .

2. Визначіть масу гирі, чашки та шнура одноразово, технічним методом. Визначіть масу гирі на шнурі, оцініть похибку Δm .

3. Встановіть гирю на чашку і зробіть відмітку по лінійці нижнього положення l_0 гирі.

4. Намотайте шнур на вал виток до витка в один шар і, притримуючи маховик, зробіть відмітку верхнього положення l_1 чашки. Очевидно, що $h_1 = (l_1 - l_0)$.

5. Відпустіть маховик і одночасно ввімкніть секундомір. У момент проходження вантажем нижнього положення вимкніть секундомір.

6. Слідкуючи за рухом гирі у зворотному напрямку, зробіть відмітку положення l_2 максимального підйому.

Очевидно, що $h_2 = |l_2 - l_0|$.

7. Досліди згідно пунктів 4-6 повторіть тричі, визначіть середні значення часу опускання гирі $\langle t \rangle$ та висоти підйому гирі $\langle h_2 \rangle$. Визначіть випадкову, систематичну та повну абсолютні похибки Δt і Δh_2 .

8. Обчисліть момент інерції махового колеса за формулою (6.11), підставивши в неї результати технічних вимірів m , r , h_1 , та середні значення вимірів $\langle t \rangle$ і $\langle h_2 \rangle$.

9. Зробіть оцінку граничної абсолютної похибки посереднього виміру моменту інерції махового колеса даним методом.

10. Знайдіть розрахункове значення моменту інерції махового колеса разом із валом, вимірявши їх розміри та використовуючи формули (6.2), (6.5). Використайте значення густини сталі $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

11. Порівняйте експериментальне та розрахункове значення моменту інерції.

Завдання 2

Визначити момент інерції махового колеса, використовуючи другий метод обробки результатів

1. Перетворивши співвідношення (6.11) слідуючим чином,

$$t^2 = \frac{I(h_1 + h_2)h_1}{gh_2r^2} \cdot \frac{1}{m} + \frac{(h_1 + h_2)h_1}{gh_2},$$

(6.12)

і вводячи позначення : $x = \frac{1}{m}$, $y = t^2$,

$$c = \frac{(h_1 + h_2)h_1}{gh_2}, \quad k = \frac{Ih_1(h_1 + h_2)}{h_2r^2g},$$

приведіть його до рівняння прямої

$$y = kx + c.$$

(6.13)

2. Виконайте виміри згідно пунктів 3...6 попереднього завдання для чотирьох значень маси m гирі, вказаних у таблиці 6.1. Виміри повторіть три рази. Значення h_1 в усіх дослідах повинні бути однакові і максимальні.

3. Для кожного з чотирьох дослідів визначіть і занесіть до таблиці (6.1) значення $\langle t \rangle$, Δt , x , y , Δy (згідно наведених у таблиці формул). Вирахуйте середнє за експериментом (по всіх дослідах та повторях) значення $\langle h_2 \rangle$. Запишіть під таблицею значення $h_1, \langle h_2 \rangle, r$.

4. Побудуйте на міліметровому папері графік залежності $y=f(x)$ по чотирьох точках, координати яких візьміть із таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

№ досл.	1	2	3	4
---------	---	---	---	---

маса m , кг	0,2			0,3			0,5			2,0		
N повторнос ті	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
t, c h_2, M												
$\langle t \rangle, c$ $\Delta t, c$ $x = 1/m, \text{кг}^{-1}$ $y = \langle t^2 \rangle, c^2$ $\Delta y = 2 \langle t \rangle \Delta t$												

Рекомендований масштаб: уздовж осі X - $0,5 \text{ кг}^{-1}$ у 1 см, уздовж осі Y - 20 с^2 у 1 см.

Від кожної точки вверх та вниз відкладіть відповідні значення похибки Δy . Похибкою Δx можна знехтувати.

5. Переконайтеся, що згадувані точки з урахуванням похибок, з якими визначено їхнє положення, лягають на пряму лінію.

Не виходячи за межі цих похибок, проведіть можливі прямі з максимальним та мінімальним нахилом. Визначіть максимальне $k_{\max}$ та мінімальне $k_{\min}$ значення коефіцієнта k у рівнянні (6.13), а також його середнє значення.

$$\langle k \rangle = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2}$$

та інтервал $\Delta k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2}$, в межах якого лежать можливі значення k .

$$k = \langle k \rangle \pm \Delta k$$

6. Визначіть величину моменту інерції махового колеса з виразу (6.12).

$$\langle I \rangle = \langle k \rangle \frac{g \langle h_2 \rangle r^2}{(h_1 + \langle h_2 \rangle) h_1}$$

та похибку

$$\Delta I = \Delta k \frac{g \langle h_2 \rangle r^2}{(h_1 + \langle h_2 \rangle) h_1}.$$

Результат запишіть у вигляді: $I = \langle I \rangle + \Delta I$.

7. Виконайте пункти 11, 12 попереднього завдання. Зробіть висновки.

Контрольні запитання

1. Що називається моментом інерції? Як визначається момент інерції твердого тіла?
2. Одержіть вираз (6.5).
3. Одержіть вираз для моменту інерції стержня масою m і довжиною l відносно осі, яка проходить через кінець стержня перпендикулярно до нього.
4. Одержіть вираз для моменту інерції кулі масою m та радіуса R відносно осі, яка проходить через центр.
5. Виведіть формулу (6.11).
6. Викладіть метод визначення моменту інерції, який використовується в даній роботі.
7. Які сили діють на систему маховик-тягар?
8. Яким буде характер руху махового колеса при відсутності дисипативних сил?
9. Як залежить характер руху махового колеса від величини його моменту інерції?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА М-7

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ДИНАМІЧНОЇ В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ МЕТОДОМ СТОКСА

Мета роботи - визначити коефіцієнт динамічної в'язкості

досліджувальної рідини.

Короткі теоретичні відомості

При русі рідини між її шарами виникають сили внутрішнього тертя (в'язкості).

Нехай швидкість рідини у одному шарі дорівнює v_1 , а в іншому шарі v_2 (рис.7.1.). Віддаль між шарами ΔZ , площа дотику шарів рідини ΔS . У цьому випадку сила внутрішнього тертя визначається формулою:

$$(7.1) \quad F_{тер} = \eta(\Delta v / \Delta Z) \cdot \Delta S,$$

де η - коефіцієнт динамічної в'язкості;

$\Delta v / \Delta Z$ - градієнт швидкості.

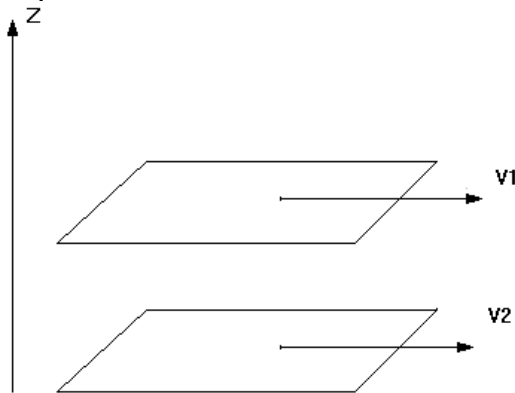


Рис. 7.1

Якщо у формулі (7.1) $\Delta v / \Delta Z = 1$, $\Delta S = 1$, то $|F_{тер}| = |\eta|$, тобто, коефіцієнт динамічної в'язкості чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, яка виникає на кожній одиниці поверхні дотику двох шарів, що рухаються відносно одного одного з градієнтом

швидкості, який дорівнює одиниці. В системі СІ в'язкість вимірюється $[\eta] = 1 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Формула (7.1) являється вихідною для розрахунку сили внутрішнього тертя у кожній конкретній задачі.

Для випадку, коли рухоме тіло представляє собою кулю малого діаметра (поперечний розмір середовища, у якому рухається куля, більший діаметра кулі), Стоксом одержано вираз для розрахунку сили тертя:

$$(7.2) \quad F_{\text{тер}} = 6\pi\eta r \cdot v,$$

де η - коефіцієнт динамічної в'язкості середовища;
 r - радіус кулі;
 v - швидкість руху кулі.

Опис методу та установки для визначення коефіцієнту динамічної в'язкості рідини

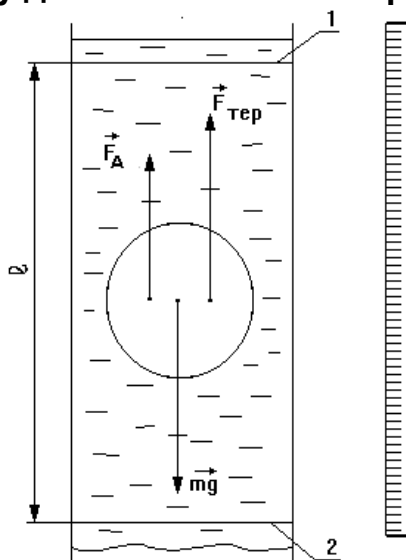


Рис.7.2

У данній роботі для визначення в'язкості використовується метод Стокса. Він полягає у

слідуючому. Якщо маленька кулька падає у посудині з в'язкою рідиною, то на неї діють: сила тяжіння $\vec{P}$, спрямована вниз, архімедова сила $\vec{F}_A$, спрямована догори, та сила внутрішнього тертя $\vec{F}_{\text{тер.}}$, спрямована проти руху кульки (рис.7.2).

Згідно другого закону Ньютона прискорення кульки в проекції на вісь X визначається:

$$a_x = dv/dt = \sum_{i=1}^n F_i / m = \frac{mg - F_A - F_{\text{тер.}}}{m} . \quad (7.3)$$

Враховуючи, що $v_x = v$ та вираз (7.2) для сили внутрішнього тертя, одержимо:

$$mdv/dt + 6\pi\eta r v = mg - F_A . \quad (7.4)$$

Позначивши $6\pi\eta r = \alpha$, $mg - F_A = F$, проінтегруємо вираз (7.4)

$$\frac{mdv}{F - \alpha v} = dt ; \quad \int_0^v dv / F - \alpha v = 1/m \int_0^t dt ;$$

$$-1/\alpha \ln(F - \alpha v)|_0^v = t/m \quad \text{або} \quad \ln \frac{(F - \alpha v)}{F} = -\frac{\alpha t}{m} .$$

Потенціюючи, одержимо:

$$v = \frac{F}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}) \quad \text{або} \quad v = \frac{mg - F_A}{6\pi\eta \cdot r} (1 - \exp(-\frac{6\pi\eta r t}{m})) . \quad (7.5)$$

Із виразу (7.5) випливає, що швидкість кульки збільшується до деякого усталеного значення:

$$v_{\text{уст}} = \frac{mg - F_A}{6\pi\eta \cdot r} , \quad (7.6)$$

при якому виникає рівновага сил:

$$mg = F_A + F_{\text{тер.}} . \quad (7.7)$$

У даній роботі використовується рідина та кулька такого розміру, для яких процес усталення швидкості

відбувається дуже швидко, і на віддалі $l=10$ мм від рівня рідини $v = v_{yct}$ з точністю до 0,1%.

Використовуючи вираз (7.7), можна знайти коефіцієнт динамічної в'язкості. Для цього силу тяжіння та силу Архімеда необхідно виразити через густину матеріалу кульки та рідини:

$$P = mg = \rho_{mat} \cdot V \cdot g = \frac{4}{3} \pi r^3 g \rho_{mat}, \quad (7.8)$$

$$F_A = m_1 g = \frac{4}{3} \pi r^3 g \rho_{pid}. \quad (7.9)$$

ρ_{mat} - густина матеріалу кульки,

ρ_{pid} - густина рідини, в якій рухається кулька,

r - радіус кульки,

g - прискорення вільного падіння.

Підставляючи (7.8) та (7.9) у (7.7), одержимо:

$$\eta = \frac{2(\rho_{mat} - \rho_{pid}) \cdot r^2 g}{v}. \quad (7.10)$$

Враховуючи, що при рівномірному русі $v = l/t$, одержимо формулу для визначення η :

$$\eta = \frac{2(\rho_{mat} - \rho_{pid}) \cdot r^2 g t}{9l}. \quad (7.11)$$

Установка для визначення в'язкості за методом Стокса зображена на рис.7.2. Вона складається з високого скляного циліндра, який наповнений досліджуваною рідиною і має дві горизонтальні мітки (1) та (2), розташовані одна від одної на віддалі l . Верхню мітку розташовано на 8-10 см нижче рівня рідини у тому місці, починаючи з якого рух кульки стає рівномірним. У верхній частині розташовано отвір, через який кидають кульки. Віддаль між мітками

вимірюється лінійкою, час падіння кульки - секундоміром.

Порядок виконання роботи

1. Визначте температуру досліджуваної рідини.
2. Виміряйте мікрометром діаметр кульки у різних місцях. Для кожної кульки повторіть не менше трьох разів і запишіть у таблицю середнє значення $\langle r \rangle$.
3. Опустіть кульку у циліндр з рідиною і зафіксуйте з допомогою секундоміра час руху кульки між мітками.
4. Лінійкою виміряйте віддаль між мітками l .
5. Результати вимірів запишіть у таблицю 7.1.
6. Досліди повторіть тричі з різними кульками.
7. За формулою (7.11) розрахуйте коефіцієнт в'язкості для кожного досліду.
8. Визначте середнє значення в'язкості, середню абсолютну та відносну похибку.

Таблиця 7.1

№ дослід.	Віддаль між мітками l , м	Час руху кульки t , с	Радіус кульки $\langle r \rangle$, м	$\rho_{\text{мат}}$, кг/м ³	$\rho_{\text{рід}}$, кг/м ³	η , Па·с	$\Delta\eta$, Па·с	ε , %
1								
2								
3								
Сер.								

Контрольні запитання

1. Як пояснити виникнення сил внутрішнього тертя з точки зору молекулярно-кінтичної теорії?
2. Від чого залежить сила внутрішнього тертя?

3. Які сили діють на рухому кульку у рідині? Запишіть другий закон Ньютона для руху кульки.
4. Чи виконується закон збереження механічної енергії при русі кульки у рідині?

Лабораторна робота М 8

Визначення радіуса кривини сферичної поверхні методом коливань кульки

Мета роботи: Визначити радіус кривини сферичної поверхні

Короткі теоретичні відомості.

Момент інерції характеризує інертні властивості тіла при обертальному русі.

Момент інерції матеріальної точки відносно будь-якої осі дорівнює добутку її маси на квадрат відстані від цієї осі;

$$I = mr^2 \quad (1)$$

Моментом інерції тіла відносно будь якої осі називається сума моментів інерції всіх точок тіла відносно цієї осі;

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2.$$

Для тіла, що має густину ρ , момент інерції можливо обчислити шляхом інтегрування;

$$I = \int \rho r^2 dV$$

(2)

де dv – елемент об'єму.

Виходячи з формул (1) та (2), момент інерції, як і маса тіла, не залежить від характеру руху, а залежить від розмірів і густини тіла.

Момент інерції має розмірність $|I| = M_x L^2$ В системі СІ- $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Момент інерції суцільної кулі відносно осі, що проходить крізь центр мас, визначається за формулою

$$I = \frac{2}{5} m r^2.$$

(3)

Якщо момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла дорівнює I_0 , то момент інерції відносно будь якої іншої паралельної осі можна обчислити за теоремою Штейнера

$$I = I_0 + m a^2$$

(4)

де m -маса тіла, a - відстань між осями.

Основний закон динаміки при обертальному русі в інтегральній формі має вигляд:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

(5)

де M - сума моментів сил діючих на тіло

I – момент інерції тіла, відносно заданої осі

ε - кутове прискорення.

Виходячи з того, що кутове прискорення $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$,

Есть похідна від кутової швидкості $d\varepsilon$ в часі dt , то формулу (5) можна переписати у вигляді

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I}; \text{ або } M dt = I d\omega.$$

Для кожного тіла відносно заданої осі можна записати закон збереження імпульсу

$$Mdt = d(I\omega)$$

$$Mdt = dL$$

(6)

Формула (6) відображає закон динаміки при обертальному русі в диференціальному вигляді. Він формулюється таким чином:

зміна імпульса моменту зовнішніх сил пропорційна зміні моменту імпульсу тіла.

***Обчислення кривини сферичної поверхні
методом коливального руху кульки.***

На малюнку показана сферична вгнута поверхня в перерізі:

Якщо кульку масою m і радіусом r вивести зі стану рівноваги в точці А, то вона почне виконувати коливання.

Якщо амплітуда коливань мала в порівнянні з радіусом кривини поверхні, то коливання можна вважати гармонічними .

Потенціальна енергія кульки в крайній точці дуги $E_n = mgh$.

З малюнку видно, що $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CE}$; або $BC^2 = AC \cdot CE$;

$CE = (2R - h)$, де

BC – a – амплітуда коливань

R – відстань від центра кривини до центра кульки.

Тобто $a^2 = h(2R - h)$

Враховуючи, що кулька піднімається в порівнянні з радіусом кривини на висоту $h \ll R$, можна записати:

$$a^2 = 2Rh$$

Тоді потенціальна енергія буде дорівнювати

$$E_n = mg \frac{a^2}{2R}$$

(7)

Виходячи з формули (7) можна прийти до висновку, що потенціальна енергія пропорційна квадрату амплітуди. Це означає, що кулька здійснює гармонічні коливання. Під час руху кульки потенціальна енергія переходить у кінетичну енергію поступального та обертального руху кульки:

$$E_n = E_{\kappa}^{пост} + E_{\kappa}^{оберт.}$$

(8)

Якщо врахувати, що $E_{\kappa}^{пост} = \frac{mV^2}{2}$; $E_{\kappa}^{оберт} = \frac{I\omega^2}{2}$, де

I – момент інерції для кульки, що обчислюється за формулою (3);

ω - кутова швидкість кульки, то формула (8) набуде вигляду:

$$\frac{mga^2}{2R} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} ; \text{ або } \frac{mga^2}{2R} = \frac{mV^2}{2} + \frac{2mr^2\omega^2}{10} ; \text{ або } \frac{ga^2}{2R} = \frac{V^2}{2} + \frac{V^2}{5} \text{ звідки } 1,4V^2 = \frac{ga^2}{R}$$

Так як коливання кульки гармонічні, то відхилення кульки зі стану рівноваги X дорівнює:

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

Лінійна швидкість кульки дорівнює: $V = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t$. В

момент, коли кулька проходить положення рівноваги(точка А), її швидкість буде максимальною.

$$V = \frac{2\pi a}{T}$$

(10)

Підставляючи значення швидкості V з рівняння (10) в (9) одержимо:

$$R = \frac{5}{7} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot g$$

Радіус кривини сферичної поверхні буде дорівнювати $R' = R + r$; де r – радіус кульки.

$$R' = \frac{5}{7} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot g + r$$

(11)

Прилади та обладнання

Сферична поверхня, секундомір, кулька.

Виконання роботи.

1. Встановити сферичне дзеркало в горизонтальне положення.
2. Встановити кульку на дзеркало і досягти положення кульки в центрі дзеркала.
3. Вивести кульку з положення рівноваги і визначити час коливання кульки за допомогою секундоміра. Для зменшення похибки необхідно визначити час 10-ти повних коливань, а потім визначити час одного повного коливання – період T .
4. Дослід повторити п'ять разів, а потім визначити середнє значення – періода $-T$.
5. Виміряти радіус r кульки.
6. За формулою (11) визначити радіус кривини данної сферичної поверхні.

Похибку обчислити за формулою: $\Delta R' = \frac{2R'\Delta T}{T} + \frac{\Delta r}{r}$.

Контрольні запитання

1. Дати визначення моменту інерції, записати формулу. В яких одиницях вимірюється момент інерції?
2. Чому рівняння (7) справедливе лише для малих амплітуд?
3. В якій точці повертаюча сила буде максимальною?
4. В якій точці прискорення буде максимальним?
5. Які коливання називаються гармонічними? Записати рівняння.
6. Вивести формулу (11)

8. ДОДАТОК

ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ ТА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ В ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМІ З ФІЗИКИ

8.1. Загальні відомості про похибки вимірювань

Фізика - наука експериментальна. Головне завдання експерименту - знаходження чисельних значень фізичних величин і співвідношень між ними.

Фізичні величини - це кількісні характеристики явищ, процесів або властивостей тіл, які знаходять за допомогою вимірювань.

Вимірювання - це процес порівняння величини з іншою однорідною величиною, яку прийнято за одиницю її міри (за еталон одиниці цієї величини).

Вимірювання можуть бути безпосередніми (прямими) або посередніми (непрямими). При прямих вимірюваннях величина, значення якої треба знайти, безпосередньо порівнюється з її еталоном (мірою) чи вимірюється за допомогою приладу, який проградуєований у відповідних одиницях (вимірювання лінійного розміру штангельциркулем або мікрометром, вимірювання напруги або сили струму вольтметром чи амперметром і т. п.).

При посередніх вимірюваннях невідома величина розраховується за результатом прямих вимірювань

інших величин, зв'язаних із величиною, яка визначається, відомою функціональною залежністю.

При будь-яких вимірюваннях можна одержати тільки приблизні значення величин, тобто будь-яке вимірювання робиться з певною похибкою.

Систематичні похибки - це похибки, пов'язані з обмеженою точністю вимірювального приладу, методом вимірювання величини, недосконалістю конструкції установки та т.п. Систематичні похибки можна зменшити, якщо застосувати інший, більш досконалий метод вимірювання, а також введенням поправок, обліком систематичного впливу зовнішніх факторів, удосконаленням конструкції установки, використанням приладів вищого класу точності, їхньою систематичною перевіркою. Систематична похибка вимірювальних приладів у лабораторному практикумі вважається відомою і вказується на приладах або таблицях, які закріплені на установках.

Величина систематичної похибки (похибки приладу) для приладу з відомим класом точності, наприклад, для приладу зі стрілкою (амперметр, вольтметр і т. д.), визначається числом відсотків вказаного класу від найбільшого показання приладу. Наприклад, для амперметра на 1,0 А, класу 1.0, якщо прилад показує 0,5 А, систематична похибка буде 0,01 А. У випадках, коли на приладі клас точності не вказаний, систематична похибка приймається рівною половині ціни найменшої поділки шкали. Для приладів, які мають ноніус, за похибку приладу приймають похибку ноніуса, (для штангельциркуля- 0,1 мм або 0,05 мм, для мікрометра – 0,01 мм).

Випадкові похибки виникають як результат дії величезної сукупності причин об'єктивного і суб'єктивного характеру: повсякчасний вплив оточення,

недосконалість людських органів чуття, тощо. Усі ці причини призводять до того, що багаторазові вимірювання однієї й тієї ж величини дають різні результати. Повністю виключити випадкові похибки неможливо і теорія ймовірності стосовно до фізичних вимірювань дає можливість обчислити і точно визначити межі дійсного значення фізичної величини.

Випадкові похибки у більшості випадків підлягають закону нормального розподілу (закон Гаусса). Припустимо, що ми виконали досить велику кількість - n -вимірювань величини x , причому систематичною похибкою можна знехтувати. Нехай істинне значення величини – x_{icm} . Відмітимо x_{icm} . та інші виміри величини x на осі OX (див. рис. 8.1).

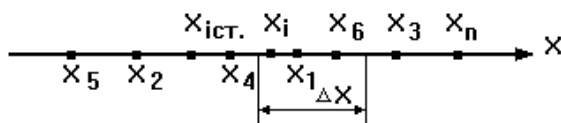


Рис.8.1

Виділимо інтервал Δx значень x , в які попадає деяка кількість Δn значень величини. Якщо відхилення значень x від істинного викликано випадковими факторами, то ймовірність того, що у кожному одиному малому інтервалу Δx поблизу x попадає значення вимірюваної величини, визначається виразом:

$$f(x) = \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i - x_{icm})^2}{2\sigma^2}} \quad (8.1)$$

Графік розподілу Гаусса приведено на рис.8.2. У формулі (8.1),

де σ - характерна для закону Гаусса величина, яка зветься

дисперсією розподілу окремих вимірювань,

x_i - значення x для i -того виміру.

Різниця $(x_i - x_{icm})$ - абсолютна похибка окремого вимірювання.

Звичайно істинне значення величини x невідоме, і використовують середнє арифметичне значення $x_{icm} \approx \langle x \rangle$.

При обмеженій кількості вимірів приблизним значенням, яке визначає дисперсію результату серії вимірювань, є середня квадратична похибка серії:

$$\Delta S_x \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

(8.2)

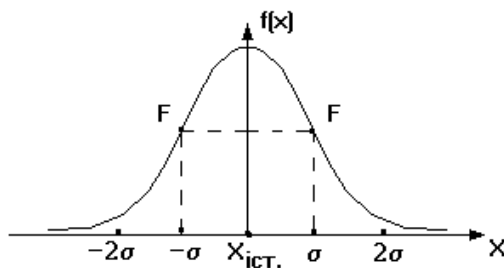


Рис.8.2

З формули (8.1) випливає, що σ відповідає відхиленню від істинного(середнього арифметичного) значення $\sigma = x_{icm} - \langle x \rangle$ для точки F перегину кривої $f(x)$. Саме у цій точці перша похідна $f(x)$ приймає максимальне значення.

Надійним інтервалом зветься інтервал значень x , який містить істинне значення x_{icm} величини з заданою ймовірністю α . Ця ймовірність зветься надійністю результату вимірювань. Величину ΔS_x у формулі (8.2) називають також стандартним надійним інтервалом або стандартним відхиленням від $\langle x \rangle$.

Стандартний надійний інтервал ΔS_x і дисперсія розподілу окремих вимірювань σ зв'язані між собою:

$$\Delta S_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \quad (8.3)$$

Для надійного інтервалу відхилень $\pm \sigma$ відносно $\langle x \rangle$ $\alpha = 0,68$. Це означає, що 68 % усіх значень вимірювання величини попадає у цей інтервал. Можна сказати також, що надійність результату серії вимірювань буде 68 %. Для інтервалу $\pm 2\sigma$ величина $\alpha = 0,95$ (надійність 95 %), для інтервалу $\pm 3\sigma$, $\alpha = 0,997$ (надійність 99,7 %). Якщо відхилення вимірюваної величини від середнього арифметичного більше, ніж $\pm 3\sigma$, то результат вимірювання вважають за промах, а $\pm 3\sigma$ граничною абсолютною похибкою.

Для обмеженої кількості вимірювань ($n < 20$) абсолютна випадкова похибка вимірювань при заданій надійності результату знаходиться за допомогою коефіцієнта Стюдента $t(\alpha, n)$ (див. табл.8.1), і обчислюється за формулою:

$$\Delta x_{\text{вип}} = t(\alpha, n) \cdot \Delta S_x, \quad (8.4)$$

де ΔS_x знаходять за формулою (8.2)

Таблиця 8.1

Значення коефіцієнтів Стюдента $t(\alpha, n)$

Кількість Вимірю- вань, n	Надійність, α				
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98
2	2,0	3,1	6,31	12,71	31,82
3	1,3	1,9	2,92	4,30	6,96
4	1,3	1,6	2,35	3,18	4,54
5	1,2	1,5	2,13	2,78	3,75
6	1,2	1,5	2,02	2,57	3,36
7	1,1	1,4	1,94	2,45	3,14
8	1,1	1,4	1,90	2,36	3,0
9	1,1	1,4	1,86	2,31	2,90
10	1,1	1,4	1,83	2,26	2,82
11	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3

Для лабораторних вимірювань вважається достатнім значення надійності $\alpha=0,95$. Якщо зроблено, наприклад, п'ять вимірювань величини x , то, як видно з таблиці 8.1, $t(\alpha, n) = 2,78$.

8.2. Визначення похибок прямих вимірювань

Припустимо, що необхідно виміряти фізичну величину за допомогою приладу, власна абсолютна похибка якого (похибка приладу, або систематична похибка) дорівнює Δx . При цьому кількість вимірювань обмежена і величина випадкової похибки сумірна $\Delta x_{\text{сум}}$.

Прийmemo, що розподіл випадкових похибок задовольняє закону Гаусса. Тоді при обробці результатів вимірювань рекомендується такий порядок дій:

8.2.1. Результати кожного вимірювання записати в таблицю. Для завдань лабораторних робіт досить зробити 3-5 вимірювань.

8.2.2. Обчислити середнє арифметичне значення вимірюваної величини:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ,$$

(8.5)

де x_i - значення величини для виміру з номером i .

8.2.3. Знайти абсолютні похибки окремих вимірів .

$$\Delta x_i = |x_i - \langle x \rangle|$$

(8.6)

8.2.4. Знайти середню квадратичну похибку результату серії вимірів (стандартний надійний інтервал):

$$\Delta S_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} .$$

(8.7)

8.2.5. Задатися значенням надійності результату серії вимірів, тобто ймовірністю того, що істинне (середнє арифметичне) значення попадає в надійний інтервал ΔS_x . Для завдань лабораторних робіт досить узяти $\alpha = 0,95$.

8.2.6. Знайти (див. табл.8.1) коефіцієнт Стюдента $t(\alpha, n)$ для вибраної надійності, в залежності від кількості зроблених вимірювань.

8.2.7. Знайти межі надійного інтервалу для випадкових похибок (абсолютну похибку випадкових вимірювань):

$$x_{\text{гун}} = t(\alpha, n) \cdot \Delta S_x .$$

(8.8)

8.2.8. Якщо величина випадкової похибки з формули (8.8) одного порядку з похибкою приладу, то для знаходження меж надійного інтервалу необхідно скористатися формулою :

$$\Delta x = \sqrt{(t(\alpha, n) \cdot \Delta S_x)^2 + \left(\frac{K_\alpha}{3} \cdot \Delta x_{\text{сисм}}\right)^2}, \quad (8.9)$$

де $\Delta x_{\text{сисм}}$ - величина похибки приладу, $K_\alpha = t(\alpha, n)$.
Наприклад, для $\alpha = 0,95$, $K_\alpha = t(\alpha, \infty) = 2,0$ (див.табл.8.1).

8.2.9. Результат вимірювань (з показом абсолютної похибки), слід записати у вигляді :

$$x = (\{< x > \pm \Delta x\}) \cdot [x] \quad (8.10)$$

8.2.10. Необхідно також знайти відносну похибку:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{< x >} \cdot 100\%. \quad (8.11)$$

8.2.11. Тоді кінцевий результат вимірювань величини записують у вигляді:

$$x = (\{< x > \pm \Delta x\})[x]; \varepsilon = \{\varepsilon\}\%. \quad (8.12)$$

8.3. Визначення похибок посередніх вимірювань

8.3.1. Для кожної величини, яка входить у формулу, що визначає шукану величину, необхідно провести обробку результатів n вимірювань відповідно пунктів 8.2.1... 8.2.8 розділу 8.2.

8.3.2. Визначити межі надійного інтервалу для результату посередніх вимірювань:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c} \Delta c\right)^2 + \dots},$$

(8.13)

де $x = f(a, b, c, \dots)$ - функція, яка визначає шукану величину;

$\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}, \dots$ - частинні похідні x , які обчислюються при

$$a = \langle a \rangle, \quad b = \langle b \rangle, \quad c = \langle c \rangle, \dots$$

$\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ - абсолютні похибки величин $a, b, c, \dots$, які

обчислюються за формулою (8.9).

Якщо для якихось величин, що входять у формулу шуканої величини, застосовується тільки похибка приладу (тобто випадкова похибка у ваших вимірах не визначається), то перший доданок у формулі (8.9) дорівнює нулю. Якщо випадкова похибка значно перевищує систематичну, то останньою можна знехтувати.

8.3.3. Результат вимірювань слід записати у вигляді:

$$x = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \dots) \pm \Delta x,$$

тобто

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x.$$

(8.14)

8.3.4. Знайти відносну похибку результату посередніх вимірювань і записати його в кінцевому вигляді:

$$\varepsilon = \Delta x / \langle x \rangle \cdot 100 \%; \quad x = (\langle x \rangle \pm \Delta x)[x]; \quad \varepsilon = \{\varepsilon\} \%$$

(8.15)

8.4. Приклад знаходження похибок непрямих вимірювань

В лабораторній роботі "Дослідження властивостей гіроскопа", однією з задач є визначення моменту інерції ротора. Формула для обчислення моменту інерції має вигляд:

$$I = \frac{mgl}{\omega\Omega} = \frac{15mglT}{\pi^2 n},$$

(8.16)

де m - маса тягара, закріпленого на лінійці гіроскопа;

g - прискорення вільного падіння;

l - відстань, на яку зміщений тягар відносно положення, для якого

гіроскоп зрівноважений;

ω - кутова швидкість ротора;

n - швидкість його обертання (об/хв.);

Ω - кутова швидкість прецесії осі гіроскопа, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$,

де T - період прецесії (час одного оберту прецесії).

Межі надійного інтервалу, згідно формули (8.13)

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial g}\right)^2 \Delta g^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial n}\right)^2 \Delta n^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)^2 \Delta T^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)^2 \Delta l^2},$$

(8.17)

де $\Delta m, \Delta g, \Delta n, \Delta T, \Delta l$ - треба знайти за формулою (8.9) розділу 8.2 з урахуванням п.8.3.2 розділу 8.3.

Для похибок m, g, n, l треба скористатися тільки систематичною (приладною) похибкою.

Результати вимірювань і систематичні похибки вказані у таблиці 8.2. Таблицю складено з урахуванням даних елементів установки лабораторної роботи, результатів вимірювань n, l, T (за даними чотирьох вимірів), при чому ΔT знайдено за формулами (8.7; 8.9). Похибкою електронного секундоміра ($\Delta t_{\text{сум.}} = 0,01\text{с}$) можна знехтувати, бо вона значно менша ΔT (див. табл.8.2).

Таблиця 8.2

$\langle m \rangle$, кг	Δm , кг	$\langle g \rangle$, $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	Δg , $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$	$\langle n \rangle$, $\text{об} \cdot \text{хв}^{-1}$	Δn , $\text{об} \cdot \text{хв}^{-1}$	$\langle l \rangle$, м	Δl , м	$\langle T \rangle$, с	ΔT , с
0,375	$0,1 \cdot 10^{-3}$	9,807	-	$6 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^2$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	311	26,89

З таблиці видно, що похибкою для маси тягара по відношенню до інших похибок, можна знехтувати. Дійсно

$$\frac{\Delta m}{\langle m \rangle} = 2,67 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\Delta n}{\langle n \rangle} = 1,6 \cdot 10^{-2};$$

$$\frac{\Delta l}{\langle l \rangle} = 2 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{\Delta T}{\langle T \rangle} = 8,67 \cdot 10^{-2}.$$

Таким чином, формула (8.17) спрощується:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial n} \cdot \Delta n\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial l} \cdot \Delta l\right)^2},$$

(8.18)

Вирази для частинних похідних (див.формулу 8.16):

$$\frac{\partial I}{\partial n} = -\frac{15mgIT}{\pi^2 n^2}; \quad \frac{\partial I}{\partial T} = \frac{15mgl}{\pi^2 n}; \quad \frac{\partial I}{\partial l} = \frac{15mgT}{\pi^2 n}$$

(8.19)

Обчислимо ΔI , підставляючи у вираз для похідних (формули 8.18) середні значення величин (табл.8.2), враховуючи також, що $\Delta n = \frac{2}{3} \Delta n_{\text{сум}}$, $\Delta l = \frac{2}{3} \Delta l_{\text{сум}}$ (за формулою (8.9), якщо знехтувати випадковими похибками.)

Таким чином:

$$\Delta I = \frac{15mg}{\pi^2 n} \sqrt{\left(\frac{2lT}{3n} \cdot \Delta n_{\text{сум}}\right)^2 + (l\Delta T)^2 + \left(\frac{2}{3} T \Delta l_{\text{сум}}\right)^2},$$

де для спрощення запису кутові дужки для середніх величин $\langle \omega \rangle$, $\langle g \rangle$, $\langle n \rangle$, $\langle l \rangle$, $\langle T \rangle$ відкинуто. Робимо розрахунки:

$$\Delta I = \frac{15 \cdot 0,375 \cdot 9,807}{3,14^2 \cdot 6 \cdot 10^3} \sqrt{1,67 \cdot 10^{-2} + 4,52 \cdot 10^{-1} + 1,554 \cdot 10^{-1}} = 7,366 \cdot 10^{-4} (\text{кг} \cdot \text{м}^2).$$

Середнє арифметичне значення моменту інерції, обчислене за формулою (8.16), у підставлені середні значення величин з табл.8.2., буде:

$$\langle I \rangle = \frac{15mgIT}{2} = \frac{15 \cdot 0,375 \cdot 9,807 \cdot 25 \cdot 10^{-2} \cdot 3,11 \cdot 10^2}{3,14^2 \cdot 6 \cdot 10^2} = 7,425 \cdot 10^{-3} (\text{кг} \cdot \text{м}^2).$$

Таким чином, момент інерції ротора гіроскопа, внаслідок обробки результатів вимірювань:

$$I = (7,425 \cdot 10^{-3} \pm 7,366 \cdot 10^{-4}) (\text{кг} \cdot \text{м}^2),$$

або, оскільки відносна похибка:

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{\langle I \rangle} \cdot 100 \% = \frac{7,366 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2}{7,425 \cdot 10^{-3}} = 10 \%,$$

момент інерції ротора гіроскопа дорівнює:

$$I = (7,425 \cdot 10^{-3} \pm 7,366 \cdot 10^{-4}) \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad \varepsilon = 10\%.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И.В. Курс физики. - Т.І.Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1989.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – Т.І.Механика. – М.: Наука, 1980.
3. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента: Справочное руководство. – М.: Наука, 1971.
4. Касандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. – М.: Наука, 1970.