

Г.Б. Філімоніхін, проф., д-р техн. наук, В.В. Пирогов, асп.,

І.І. Філімоніхіна, асистент

Кіровоградський національний технічний університет

Виведення рівнянь руху ізолюваної системи, що здійснює просторовий рух

Виведено рівняння руху ізолюваної системи, що здійснює просторовий рух і складається з витягнутого абсолютно твердого тіла, матеріальних точок, що створюють його незрівноваженість та маятників, які можуть обертатися навколо осі мінімального момента інерції тіла.

вісь обертання, абсолютно тверде тіло, маятники.

В екстракторах, сепараторах, відцентрових машинах тощо, застосовують опори з нелінійною жорсткістю. Сили пружності в таких опорах, при малих деформаціях, майже відсутні. Це зменшує критичну швидкість обертання ротора і теоретично розширює область настання автобалансування, при зрівноваженні таких роторів пасивними автобалансирами (АБП) [1, 2]. Тому представляє інтерес дослідження динаміки такої системи у граничному випадку, коли сили пружності відсутні. Така задача актуальна і для штучних супутників Землі та космічних апаратів, які стабілізуються обертанням і маятниковими (кульовими) АБП.

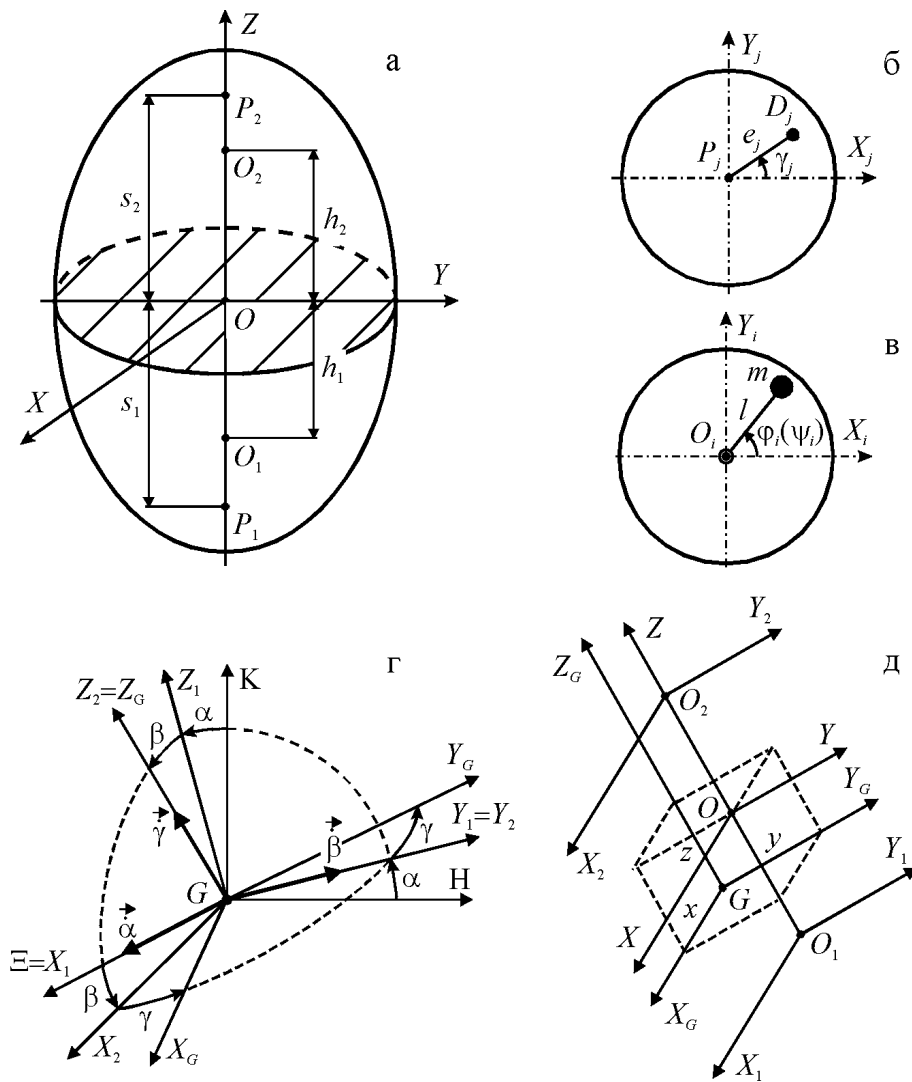
Необхідним етапом дослідження стійкості руху системи зв'язаних абсолютно твердих тіл, якою є система ротор-маятниковий (кульовий) АБП, є виведення рівнянь руху [1-10]. В роботі [8], на основі енергетичного критерію, були знайдені усталені рухи ізолюваної системи, що здійснює просторовий рух і складається з АТТ, матеріальних точок, що створюють його незрівноваженість та маятників, які можуть обертатися навколо однієї з центральних осей інерції АТТ. Також були знайдені необхідні умови стійкості цих рухів. Але залишилося невирішеним питання про стійкість основного усталеного руху системи у випадку витягнутого АТТ, коли маятники обертаються навколо його осі мінімального момента інерції. Відповідь на вказане питання можна отримати з допомогою рівнянь руху зазначеної системи на основі, наприклад, першого методу Ляпунова. В даній роботі виводяться рівняння руху зазначеної системи.

1. Модель системи. Нехай АТТ має масу M . Головні осьові моменти інерції АТТ відносно головних центральних осей X, Y, Z , які виходять з центра мас АТТ – точки O (рис. 1, а), відповідно рівні A, B, C , причому $A \geq B > C$.

Статична або динамічна незрівноваженість АТТ відносно осі Z створюється двома матеріальними точками D_1 і D_2 , розташованими в площинах $X_1P_1Y_1$ і $X_2P_2Y_2$, паралельних площині XOY . Ці площини знаходяться відповідно на відстані s_1 і s_2 по різні сторони від площини XOY . Матеріальні точки однакові, мають масу μ , і їх положення задається ексцентриситетом e_j та кутом γ_j / $j = 1, 2$ / (рис. 1, б).

В площинах $X_1O_1Y_1$ і $X_2O_2Y_2$, які знаходяться на відстані h_1 і h_2 по різні сторони від площини XOY , на вісь Z насаджені по два математичних маятника. Будемо вважати, що маятники не заважають руху один одного. Положення маятників в площині $X_1O_1Y_1$ визначається кутами ϕ_1, ϕ_2 , в площині $X_2O_2Y_2$ – кутами ψ_1, ψ_2 (рис. 1, в). При русі маятників відносно АТТ на них діє момент сил в'язкого опору – $H_1\dot{\phi}_j, -H_2\dot{\psi}_j$, / $j = 1, 2$ /, де H_i , / $i = 1, 2$ / – коефіцієнт сил в'язкого опору, $\dot{\phi}_j, \dot{\psi}_j$ –

відносна кутова швидкість обертання маятника. Маятники однакові, мають масу m , довжину l і осьовий момент інерції ml^2 відносно осі, на яку насаджені.



а – модель АТТ; б – модель матеріальних точок, що створюють незрівноваженість; в – модель маятників; г, д – схеми руху АТТ

Рисунок 1 – Модель ізолюваної системи

Рух системи подамо слідуючим чином. Так як система ізолювана, то центр мас системи - точка G – рухається рівномірно, прямолінійно. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що точка G нерухома. Введемо нерухому (інерціальну) систему координат $G\xi\eta\zeta$, з якої шляхом трьох послідовних поворотів на кути α, β, γ відповідно навколо осей $G\xi, G\eta, G\zeta$ отримуємо систему координат $Gx_Gy_Gz_G$ (рис. 1, г). Осі $Gx_Gy_Gz_G$ – рухомі, центральні і паралельні осям $OXYZ$ (рис. 1, д). Рух АТТ і маятників будемо розглядати як складний. За переносний рух АТТ будемо вважати його обертальний рух навколо точки G , за відносний - поступальний рух разом з осями $OXYZ$ відносно осей $Gx_Gy_Gz_G$, причому положення точки O відносно точки G визначатимемо координатами x, y, z (рис. 1, д). За переносний рух маятників будемо вважати їх рух разом з АТТ, а саме – обертальний рух навколо точки G та поступальний рух відносно цієї ж точки разом з осями $O_iX_iY_iZ_i, /i=1,2/$. За відносний рух маятників будемо вважати їх рух відносно АТТ. Відносні рухи

маятників визначатимемо чотирма кутами $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$. Матеріальні точки D_1 і D_2 нерухомі відносно АТГ. З врахуванням вищесказаного, в загальному випадку рух системи визначається десятима координатами $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$.

2. Рівняння, що описують рух системи. Так як система має десять ступенів вільності, то її рух будуть повністю описувати десять незалежних рівнянь руху.

2.1. Перша група рівнянь руху. Першу групу 4-ох рівнянь руху знайдемо за допомогою теореми про зміну момента кількості руху матеріальної системи, застосувавши її до маятників. Для спрощення запису першої групи рівнянь застосуємо вказану теорему в обертальній системі координат $O_i X_i Y_i Z_i, /i=1,2/$. Для j -го маятника, який знаходиться в площині $X_1 O_1 Y_1$, теорема про зміну момента кількості руху в обертальній системі координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ має вигляд [1, 10]:

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O_{1j}}^\omega}{dt} + \vec{\omega}_{O_1 X_1 Y_1 Z_1} \times \vec{L}_{O_{1j}}^\omega + m\vec{\rho}_{mj} \times \vec{a}_{O_1} \right) \cdot \vec{k} = (\vec{M}_{O_{1j}}^e) \cdot \vec{k}, \quad /j=1,2/, \quad (1)$$

тут

$$\vec{L}_{O_{1j}}^\omega = \vec{\omega}_j J_j, \quad /j=1,2/, \quad (2)$$

де $\vec{L}_{O_{1j}}^\omega$ - момент кількості руху j -го маятника, знайдений відносно точки O_1 ;

$d\vec{L}_{O_{1j}}^\omega/dt$ - локальна похідна від момента кількості руху j -го маятника в рухомій системі координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$;

$\vec{\omega}_{O_1 X_1 Y_1 Z_1}$ - кутова швидкість обертання осей $O_1 X_1 Y_1 Z_1$;

m - маса маятника;

$\vec{\rho}_{mj}$ - радіус вектор j -го маятника, який виходить з точки O_1 і закінчується в центрі мас маятника, визначений відносно осей $O_1 X_1 Y_1 Z_1$;

\vec{a}_{O_1} - абсолютне прискорення точки O_1 ;

\vec{k} - одиничний вектор, спрямований вздовж осі Z_1 ;

$\vec{M}_{O_{1j}}^e$ - головний момент зовнішніх сил, що діють на j -ий маятник, знайдений відносно точки O_1 ;

$\vec{\omega}_j$ - абсолютна кутова швидкість обертання j -го маятника;

J_j - тензор інерції маятника, знайдений відносно точки O_1 .

Аналогічно записується рівняння руху для маятників, які знаходяться в площині $X_2 O_2 Y_2$. З рис. 1 визначаємо:

$$\vec{\omega}_{O_1 X_1 Y_1 Z_1} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix}; \quad \vec{\rho}_{mj} = \begin{bmatrix} l \cos \varphi_j \\ l \sin \varphi_j \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{M}_{O_{1j}}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -H_i \dot{\varphi}_j \end{bmatrix};$$

$$\vec{\omega}_j = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} + \dot{\varphi}_j \end{bmatrix}; \quad J_j = \begin{bmatrix} ml^2 \sin^2 \varphi_j & -ml^2 \cos \varphi_j \sin \varphi_j & 0 \\ -ml^2 \cos \varphi_j \sin \varphi_j & ml^2 \cos^2 \varphi_j & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Шукаємо абсолютне прискорення точки O_1 , як при складному русі. За переносний рух візьмемо її обертальний рух з осями $G X_G Y_G Z_G$ навколо точки G , за відносний - поступальний рух відносно точки G . Тоді за теоремою Коріоліса прискорення точки O_1 має вигляд [10]:

$$\vec{a}_{O_1} = \vec{a}_{O_1}^r + \vec{a}_{O_1}^e + \vec{a}_{O_1}^c, \quad (4)$$

де $\vec{a}_{O_1}^r$ - відносне прискорення точки O_1 ;

$\vec{a}_{O_1}^e$ - переносне прискорення точки O_1 ;

$\vec{a}_{O_1}^c$ - прискорення Коріоліса.

З рис. 1 визначасмо в проекціях на осі $GX_GY_GZ_G$:

$$\vec{r}_{O_1} = (x, y, z - h_1), \quad \vec{v}_{O_1} = (\dot{x}, \dot{y}, 0), \quad \vec{a}_{O_1}^r = (\ddot{x}, \ddot{y}, 0). \quad (5)$$

Оскільки переносний рух точки O_1 є обертальним, то її прискорення можна записати так:

$$\vec{a}_{O_1}^e = \vec{a}_{O_1}^{ob} + \vec{a}_{O_1}^{dou}. \quad (6)$$

де

$$\vec{a}_{O_1}^{ob} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{GX_GY_GZ_G}}{dt} \right) \times \vec{r}_{O_1} = \vec{\epsilon}_{GX_GY_GZ_G} \times \vec{r}_{O_1}, \quad \vec{a}_{O_1}^{dou} = \vec{\omega}_{GX_GY_GZ_G} \times (\vec{\omega}_{GX_GY_GZ_G} \times \vec{r}_{O_1}), \quad (7)$$

де $\vec{a}_{O_1}^{ob}$ - обертальне прискорення точки O_1 ;

$\vec{\omega}_{GX_GY_GZ_G} = \vec{\omega}_{O_1X_1Y_1Z_1}$ - кутова швидкість обертання осей $GX_GY_GZ_G$;

$\vec{\epsilon}_{GX_GY_GZ_G}$ - кутове прискорення осей $GX_GY_GZ_G$;

$\vec{a}_{O_1}^{dou}$ - доцентрове прискорення точки O_1 .

У свою чергу, враховуючи, що $\vec{\omega}_{GX_GY_GZ_G} = \vec{\omega}_{O_1X_1Y_1Z_1}$, кутове прискорення $\vec{\epsilon}_{GX_GY_GZ_G}$ буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_{GX_GY_GZ_G} &= \frac{d\vec{\omega}_{O_1X_1Y_1Z_1}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}_{O_1X_1Y_1Z_1}}{dt} + \vec{\omega}_{O_1X_1Y_1Z_1} \times \vec{\omega}_{O_1X_1Y_1Z_1} = \frac{d'\vec{\omega}_{O_1X_1Y_1Z_1}}{dt} = \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta \sin \gamma + \ddot{\beta} \sin \gamma + \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \gamma \\ - \ddot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma + \ddot{\beta} \cos \gamma - \dot{\beta} \dot{\gamma} \sin \gamma \\ \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (8) \end{aligned}$$

Остаточне рівняння динаміки маятників (1), які знаходяться в площині $X_1O_1Y_1$, в проекції на вісь Z_1 , з врахуванням виразів (3), (5), (7), (8), мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha} ml [l \sin \beta + \sin \beta (x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j) - \cos \beta (z - h_1) \cos(\varphi_j + \gamma)] - \dot{\beta} ml (z - h_1) \sin(\varphi_j + \gamma) + \\ &+ \dot{\gamma} ml (l + y \sin \varphi_j + x \cos \varphi_j) + \ddot{\varphi}_j ml^2 - ml (\ddot{x} \sin \varphi_j - \ddot{y} \cos \varphi_j) + H_i \dot{\varphi}_j + \\ &+ ml \{ \dot{\alpha} \dot{\beta} [l \cos \beta (1 + \cos(2\varphi_j + 2\gamma)) + 2 \cos(\varphi_j + \gamma) (\cos \beta (x \cos \gamma - y \sin \gamma) + \sin \beta (z - h_1))] + \\ &+ 2 \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta (x \sin \varphi_j - y \cos \varphi_j) - \dot{\alpha}^2 [x (\cos^2 \beta \cos \gamma \sin(\varphi_j + \gamma) - \sin \varphi_j) + y (\cos \varphi_j \sin^2 \beta + \\ &+ \cos^2 \beta \cos \gamma \cos(\varphi_j + \gamma)) + (z - h_1) \sin(\varphi_j + \gamma) \sin \beta \cos \beta + \frac{l}{2} \cos^2 \beta \sin(2\varphi_j + 2\gamma)] + \\ &+ \dot{\beta}^2 \left[\frac{l}{2} \sin(2\varphi_j + 2\gamma) + (x \cos \gamma - y \sin \gamma) \sin(\varphi_j + \gamma) \right] + \dot{\gamma}^2 (x \sin \varphi_j - y \cos \varphi_j) + \\ &+ 2 \dot{\alpha} \sin \beta (\dot{x} \cos \varphi_j + \dot{y} \sin \varphi_j) + 2 \dot{\gamma} (\dot{y} \sin \varphi_j - \dot{x} \cos \varphi_j) \} = 0, \quad / j = 1, 2 / . \quad (9) \end{aligned}$$

Аналогічний вигляд мають рівняння руху для маятників, які знаходяться в площині $X_2O_2Y_2$.

2.2. Друга група рівнянь руху. Другу групу рівнянь руху отримаємо з теореми про рух центра мас системи. Відповідно до вибору початку осей – точки G , координати центра мас системи відносно осей X_G, Y_G, Z_G завжди дорівнюють 0. Теорема дає наступні рівняння руху:

$$\begin{aligned}
Mx + \mu(2x + e_1 \cos \gamma_1 + e_2 \cos \gamma_2) + m[4x + l(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 + \cos \psi_2)] &= 0; \\
My + \mu(2y + e_1 \sin \gamma_1 + e_2 \sin \gamma_2) + m[4y + l(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \sin \psi_1 + \sin \psi_2)] &= 0; \\
Mz + \mu(2z - s_1 + s_2) + 2m(2z - h_1 + h_2) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

2.3. Третя група рівнянь руху. Оскільки система ізольована, то третю групу рівнянь руху отримаємо за допомогою закону збереження моменту кількості руху матеріальної системи. В початковий момент часу система мала момент кількості руху рівний $\vec{L}_G^{(0)}$. В довільний момент часу момент кількості руху системи має вигляд:

$$\vec{L}_G^{(cum)} = \vec{L}_G^{(T)} + \vec{L}_G^{(\mu)} + \vec{L}_G^{(m)} = \vec{L}_G^{(0)}, \tag{11}$$

де $\vec{L}_G^{(i)}$, $/i = T, \mu, m/$ - момент кількості руху відповідно для АТТ, матеріальних точок, що створюють незрівноваженість та маятників.

2.3.1. Для АТТ момент кількості руху, згідно з [10], у випадку, коли початок рухомої системи координат лежить у центрі мас АТТ, має вигляд:

$$\vec{L}_G^{(T)} = \vec{r}_O \times M\vec{v}_O + \vec{\omega}_{OXYZ} J_T, \tag{12}$$

де \vec{r}_O - радіус-вектор центра мас АТТ, що виходить з точки G і закінчується в точці O в проекціях на осі $OXYZ$;

\vec{v}_O - абсолютна швидкість центра мас АТТ, як полюса;

$\vec{\omega}_{OXYZ} = \vec{\omega}_{GXGYGZG} = \vec{\omega}_{O_1X_1Y_1Z_1}$ - кутова швидкість обертання осей $OXYZ$;

J_T - тензор інерції АТТ, знайдений відносно точки O .

Тут, в проекціях на осі $OXYZ$,

$$\vec{r}_O = (x, \quad y, \quad z), \quad \vec{v}_O = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \vec{\omega}_{OXYZ} \times \vec{r}_O. \tag{13}$$

Тензор інерції АТТ відносно точки O має вигляд:

$$J_T = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{14}$$

2.3.2. Для матеріальних точок, що створюють незрівноваженість, момент кількості руху має вигляд:

$$\vec{L}_G^{(\mu)} = \vec{L}_G^{(\mu 1)} + \vec{L}_G^{(\mu 2)}. \tag{15}$$

Для i -ої матеріальної точки момент кількості руху згідно з [10] має вигляд:

$$\vec{L}_G^{(\mu i)} = \vec{r}_{\mu i} \times \mu \vec{v}_{\mu i}, \quad /i = 1, 2/. \tag{16}$$

де $\vec{r}_{\mu i}$ - радіус-вектор i -ої матеріальної точки, що виходить з точки G і закінчується в точці D_i , в проекціях на осі $OXYZ$;

$\vec{v}_{\mu i}$ - абсолютна швидкість i -ої матеріальної точки.

Абсолютна швидкість i -ої матеріальної точки має вигляд:

$$\vec{v}_{\mu i} = \vec{v}_O + \vec{v}_{DO}, \quad /i = 1, 2/, \tag{17}$$

тут

$$\vec{v}_{DO} = \frac{d\vec{r}_{\mu i}}{dt} + \vec{\omega}_{OXYZ} \times \vec{r}_{\mu i} = \left\{ \frac{d\vec{r}_{\mu i}}{dt} = 0 \right\} = \vec{\omega}_{OXYZ} \times \vec{r}_{\mu i}, \quad /i = 1, 2/, \tag{18}$$

де \vec{v}_O - швидкість полюса – точки O з (13);

\vec{v}_{DO} - швидкість точки D_i навколо полюса;

$\vec{\rho}_{\mu i}$ - радіус-вектор i -ої матеріальної точки, який виходить з точки O і закінчуються в точці D_i , в проекціях на осі $OXYZ$;

$d\vec{\rho}_{\mu i}/dt$ - локальна похідна від радіус-вектора $\vec{\rho}_{\mu i}$.

З рис. 1 визначаємо в проекціях на осі $OXYZ$:

$$\vec{r}_{\mu i} = (x + e_i \cos \gamma_i, \quad y + e_i \sin \gamma_i, \quad z + s_i), \quad \vec{\rho}_{\mu i} = (e_i \cos \gamma_i, \quad e_i \sin \gamma_i, \quad s_i). \quad (19)$$

2.3.3. Для маятників момент кількості руху має вигляд:

$$\vec{L}_G^{(m)} = \sum_{i=1}^2 \vec{L}_G^{(\varphi_i)} + \sum_{i=1}^2 \vec{L}_G^{(\psi_i)}. \quad (20)$$

де $\vec{L}_G^{(\varphi)}$, $\vec{L}_G^{(\psi)}$ - відповідно момент кількості руху для маятників групи φ та ψ .

Для j -го маятника, який знаходиться в площині $X_1O_1Y_1$, момент кількості руху згідно з [10], запишемо так:

$$\vec{L}_G^{(\varphi)} = \vec{r}_j \times m\vec{v}_{mj}, \quad / j = 1, 2 / . \quad (21)$$

де \vec{r}_j - радіус-вектор j -го маятника, знайдений відносно точки G в проекціях на осі $OXYZ$;

\vec{v}_{mj} - абсолютна швидкість j -го маятника.

Абсолютна швидкість j -го маятника має вигляд:

$$\vec{v}_{mj} = \vec{v}_O + \vec{v}_{mO}, \quad / j = 1, 2 / , \quad (22)$$

тут

$$\vec{v}_{mO} = \frac{d\vec{\rho}_j}{dt} + \vec{\omega}_{OXYZ} \times \vec{\rho}_j, \quad / j = 1, 2 / , \quad (23)$$

де \vec{v}_O - швидкість полюса – точки O з (13);

\vec{v}_{mO} - швидкість j -го маятника навколо полюса;

$\vec{\rho}_j$ - радіус-вектор j -го маятника, знайдений відносно точки O в проекціях на осі $OXYZ$;

$d\vec{\rho}_j/dt$ - локальна похідна від радіус-вектора $\vec{\rho}_j$.

З рис. 1 визначаємо в проекціях на осі $OXYZ$:

$$\vec{r}_j = \begin{bmatrix} x + l \cos \varphi_j \\ y + l \sin \varphi_j \\ z + h_i \end{bmatrix}, \quad \vec{\rho}_j = \begin{bmatrix} l \cos \varphi_j \\ l \sin \varphi_j \\ h_i \end{bmatrix}, \quad \frac{d\vec{\rho}_j}{dt} = \begin{bmatrix} -l\dot{\varphi}_j \sin \varphi_j \\ l\dot{\varphi}_j \cos \varphi_j \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Продиференціювавши один раз за часом рівняння (10), матимемо:

$$M_\Sigma \dot{x} = ml(\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + \dot{\psi}_2 \sin \psi_2);$$

$$M_\Sigma \dot{y} = -ml(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dot{\psi}_1 \cos \psi_1 + \dot{\psi}_2 \cos \psi_2); \quad 0 = 0. \quad (25)$$

де $M_\Sigma = M + 2\mu + 4m$ - сумарна маса системи.

Підставляючи вирази (12-25) в (11) і перетворюючи, одержимо момент кількості руху матеріальної системи у такому вигляді:

$$\vec{L}_G^{(cum)} = (L_{Gx}^{(cum)}, \quad L_{Gy}^{(cum)}, \quad L_{Gz}^{(cum)}), \quad (26)$$

де

$$\begin{aligned} L_{xG}^{(cum)} &= \dot{\alpha}(k_{11} \cos \beta \cos \gamma + k_{12} \cos \beta \sin \gamma - k_{13} \sin \beta) + \dot{\beta}(k_{11} \sin \gamma - k_{12} \cos \gamma) - \dot{\gamma}k_{13} - \\ &\quad - ml[(z - h_1)(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) + (z + h_2)(\dot{\psi}_1 \cos \psi_1 + \dot{\psi}_2 \cos \psi_2)]; \\ L_{yG}^{(cum)} &= -\dot{\alpha}(k_{12} \cos \beta \cos \gamma + k_{22} \cos \beta \sin \gamma + k_{23} \sin \beta) + \dot{\beta}(k_{22} \cos \gamma - k_{12} \sin \gamma) - \dot{\gamma}k_{23} - \\ &\quad - ml[(z - h_1)(\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) + (z + h_2)(\dot{\psi}_1 \sin \psi_1 + \dot{\psi}_2 \sin \psi_2)]; \end{aligned}$$

$$L_{z_G}^{(cucm)} = \dot{\alpha}(-k_{13} \cos \beta \cos \gamma + k_{23} \cos \beta \sin \gamma + k_{33} \sin \beta) - \dot{\beta}(k_{13} \sin \gamma + k_{23} \cos \gamma) + \dot{\gamma}k_{33} + ml^2(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) - M_{\Sigma}(x\dot{y} - \dot{x}y), \quad (27)$$

і в рівняннях (27)

$$\begin{aligned} k_{11} &= A + \mu(s_1^2 + s_2^2 + e_1^2 \sin^2 \gamma_1 + e_2^2 \sin^2 \gamma_2) + m[2(h_1^2 + h_2^2) + l^2(\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2)] - M_{\Sigma}(y^2 + z^2); \\ k_{12} &= -M_{\Sigma}xy + \frac{1}{2}[\mu(e_1^2 \sin 2\gamma_1 + e_2^2 \sin 2\gamma_2) + ml^2(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\psi_1 + \sin 2\psi_2)]; \\ k_{13} &= -M_{\Sigma}xz - \mu(e_1 s_1 \cos \gamma_1 - e_2 s_2 \cos \gamma_2) - ml[h_1(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - h_2(\cos \psi_1 + \cos \psi_2)]; \\ k_{22} &= B + \mu(s_1^2 + s_2^2 + e_1^2 \cos^2 \gamma_1 + e_2^2 \cos^2 \gamma_2) + m[2(h_1^2 + h_2^2) + l^2(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2)] - M_{\Sigma}(x^2 + z^2); \\ k_{23} &= -M_{\Sigma}yz - \mu(e_1 s_1 \sin \gamma_1 - e_2 s_2 \sin \gamma_2) - ml[h_1(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) - h_2(\sin \psi_1 + \sin \psi_2)]; \\ k_{33} &= C + \mu(e_1^2 + e_2^2) + 4ml^2 - M_{\Sigma}(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Отже, отримані десять незалежних рівнянь руху (9), (10) та (27), які повністю описують рух системи. В подальшому, з допомогою цих рівнянь можна виділити усталені рухи системи і дослідити їх стійкість.

Список літератури

1. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
2. Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. - М.: Наука, 1997. - 151 с.
3. Смольников Б.А. Движение вокруг центра инерции твердого тела с вращающимися маятниками, // ПММ. - 1966. - 30, № 4, С. 625-635.
4. Харламов П.В., Кононыхин Г.А. О движении по инерции системы двух твердых тел, связанных сферическим шарниром //Механика твердого тела. - 1980. - Вып. 12. - С. 52-63.
5. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел //Механика твердого тела. - 1972. - Вып. 4. - С. 52-73.
6. Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром //Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2005. - №4. - С. 67-76.
7. Филимоныхин Г.Б., Пирогов В.В. Стабилизация положения оси вращения твердого тела связанными абсолютно твердыми телами. // Прикладная механика. - 2005. - 41, №8. - С. 122 - 129.
8. Филимоныхин Г.Б., Пирогов В.В., Филимоныхина И.И. Пространственная стабилизация положения оси вращения несущего тела маятниковыми демпферами // Збірник наукових праць КНТУ, Кіровоград, 2006, № 17, С. 234-240.
9. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла // Вісник, математика-механіка. Київський національний університет. Вип. №7-8, 2002. С.67-71.
10. Павловський М.А. Теоретична механіка. - К.: Техніка, 2002. - 512 с.: іл.

Получены уравнения движения изолированной системы, осуществляющей пространственное движение и состоящей из вытянутого абсолютно твердого тела, материальных точек, создающих его неуравновешенность и маятников, которые могут вращаться вокруг оси минимального момента инерции тела.

SUMMARY. Equations of motion are got for the isolated system which moves in space. The isolated system consists of rigid body, material points, which creating it's disbalance, and pendulums, which rotate on the axis of minimum moment of inertia of rigid body.

Одержана 30.10.06