

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра сільськогосподарського машинобудування

## **ТЕОРІЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ**

Методичні вказівки до виконання практичних робіт  
для студентів спеціальностей 133 - “Галузеве машинобудування”  
та 208 - “Агроінженерія”

Кропивницький  
2019

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра сільськогосподарського машинобудування

## **ТЕОРІЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ**

Методичні вказівки до виконання практичних робіт  
для студентів спеціальностей 133 - “Галузеве машинобудування”  
та 208 - “Агроінженерія”

Затверджено  
на засіданні кафедри  
сільськогосподарського  
машинобудування  
протокол № 1 від 28 серпня 2019 р.

Кропивницький  
2019

Теорія коливальних процесів : Методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів спеціальностей 133 - “Галузеве машинобудування” та 208 - “Агроінженерія” / Укл. І.М. Осипов. – Кропивницький: ЦНТУ, 2019. – 167 с.

Укладачі: канд. техн. наук, професор І.М. Осипов,

Рецензент: Яцун Володимир Васильович, канд. техн. наук, доцент, член-кореспондент Академії інженерних наук України, академік Академії будівництва України, відмінник освіти України

**Теорія коливальних процесів** – дисципліна самостійного вибору ВНЗ, що вивчає одне з найбільш поширених явищ у природі, фізиці, механіці - коливання елементів конструкцій, які часто являються причиною багатьох аварій. Тому при проектуванні механічних систем інженеру необхідно знати основні властивості та закони коливань.

Механічні коливання можуть бути як корисними, так і некорисними для людини. Тому існують дві задачі теорії коливань: збудити малою силою корисні коливання та послабити шкідливі. До числа корисних можна віднести коливання, які використовуються при вібротранспортуванні, забиванні свай, обробці та укладанні ґрунтів та ін. Шкідливими являються: коливання неврівноважених обертальних частин машин, коливання різця при обробці металу, коливання станків та т.п.

Мета дисципліни - ознайомлення з сучасним станом теорії коливних процесів, розгляд основних підходів та методів розв'язування задач, які виникають у різних галузях людської діяльності. а також придбання практичних умінь та навичок дослідження і розрахунку окремих елементів машин.

**Ділиться на дві частини:**

- коливання систем, з одним та із  $n$  степенями вільності;
- властивості коливань дискретних систем, систем з в'язким тертям та коливання стрижнів.

**Практична робота №1**  
**Механічні коливання**

**Основні формули**

*Рівняння гармонічних коливань та його розв'язок:*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (1a)$$

де  $\omega_0$  – власна частота коливань.

*Періоди гармонічних коливань:*

*пружинного маятника масою  $m$ , коефіцієнтом пружності пружини  $k$*

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}, \quad (1б)$$

*математичного маятника з довжиною  $l$*

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad (1в)$$

*фізичного маятника з моментом інерції  $J$  відносно осі коливань і відстанню  $a$  від центра інерції тіла до точки підвісу*

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mga)}. \quad (1г)$$

*Рівняння загасальних коливань та його розв'язок:*

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (1д)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт загасання,  $A(t)$  – амплітуда,  $\omega$  – частота загасальних коливань:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1е)$$

*Логарифмічний декремент загасання  $\lambda$  і добротність  $Q$ :*

$$\lambda = \beta T, \quad Q = \pi/\lambda, \quad (1є)$$

де  $T = 2\pi/\omega$  – період загасальних коливань.

*Рівняння вимушених коливань і його усталений розв'язок:*

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0 / m) \cos \Omega t, \quad x = A \cos(\Omega t - \varphi), \quad (1\text{ж})$$

де

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1\text{з})$$

Максимум амплітуди зміщення досягається за умови

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (1\text{и})$$

## 1.1 Приклади розв'язування задач

### Приклад 1.1

Точка, що здійснює гармонічні коливання, в деякий момент часу має зміщення  $x = 4,0$  см, швидкість  $v_x = 5,0$  см/с і прискорення  $a_x = -0,80$  м/с<sup>2</sup>. Визначити: 1) амплітуду  $A$  і період  $T$  коливань точки; 2) фазу  $\varphi$  коливань у момент часу, що розглядається; 3) максимальну швидкість  $v_m$  та прискорення  $a_m$  точки.

#### Розв'язання

$A - ? \quad T - ? \quad \varphi - ?$ $v_m - ? \quad a_m - ?$	Аналізуючи відомі та шукані величини, робимо висновок, що для розв'язання задачі потрібно використати кінематичне рівняння гармонічних коливань (1а) та визначення швидкості, прискорення, фази.
$x = 4,0$ см; $v_x = 5,0$ см/с; $a_x = -0,80$ м/с <sup>2</sup> .	

Як відомо, зміщення за умови гармонічних коливань описується співвідношенням (1а):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (1)$$

де

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha \quad (2)$$

є фазою коливань.

Швидкість та прискорення знайдемо, використовуючи визначення цих величин та (1):

$$v_x = dx / dt = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (3)$$

$$a_x = dv_x / dt = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (4)$$

Із цих формул випливає, що максимальні значення швидкості та прискорення дорівнюють

$$v_m = A\omega_0, \quad a_m = A\omega_0^2. \quad (5)$$

Знайшовши амплітуду  $A$  і частоту  $\omega_0$ , можемо визначити за допомогою (5)  $v_m$  та  $a_m$ . Також беремо до уваги, що частота  $\omega_0$  та період коливань  $T$  пов'язані між собою як

$$T = 2\pi / \omega_0. \quad (6)$$

Як випливає з умови задачі та (1) – (4), для деякого моменту часу відомі зміщення, швидкість та прискорення точки:

$$x = A \cos \varphi, \quad v_x = -A\omega_0 \sin \varphi, \quad a_x = -A\omega_0^2 \cos \varphi. \quad (7)$$

Із цих трьох рівнянь знаходимо три невідомі величини: амплітуду  $A$ , частоту  $\omega_0$  та фазу коливань  $\varphi$ :

$$\frac{a_x}{x} = \frac{-A\omega_0^2 \cos \varphi}{A \cos \varphi} = \omega_0^2, \quad \omega_0 = \sqrt{-\frac{a_x}{x}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{-\frac{x}{a_x}}; \quad (8)$$

$$\cos \varphi = x / A, \quad \sin \varphi = -v_x / (A\omega_0), \quad \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$(x / a_x)^2 + (v_x / (A\omega_0))^2 = 1,$$

$$A = \sqrt{(x)^2 + (v_x / \omega_0)^2} = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x / a_x}; \quad (9)$$

$$\varphi = \arccos(x/A) = \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}). \quad (10)$$

Для знаходження максимальних значень швидкості та прискорення використаємо (5), (8) та (9):

$$v_m = A\omega_0 = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} \cdot \sqrt{-a_x/x} = \sqrt{v_x^2 - xa_x}, \quad (11)$$

$$a_m = A\omega_0^2 = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} \cdot (-a_x/x) = \sqrt{a_x^2 - a_x v_x^2/x}. \quad (12)$$

Таким чином, шукані величини  $A$ ,  $T$ ,  $\varphi$ ,  $v_m$  та  $a_m$  визначаються формулами (8) – (12). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (8) – (12), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:  $T = 1,4$  с;  $A = 4,2$  см;  $\varphi = \pi/12$ ;  $v_m = 0,19$  м/с;  $a_m = 0,83$  м/с<sup>2</sup>.

#### *Аналіз отриманого результату*

Проведемо дослідження розрахункових формул у граничному випадку, коли фаза коливання дорівнює нулю  $\varphi = 0$ . Тоді, як випливає з (1) – (3),  $x = A$ ,  $v_x = 0$ . З розрахункових формул (9) та (10) випливає такий самий результат:

$$A = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} = \sqrt{(x)^2 - 0^2 x/a_x} = x,$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}) = \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - 0^2 x/a_x}) = \\ &= \arccos(1) = 0. \end{aligned}$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\varphi = \arccos(x/\sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x}) = \pi/12$ ;

$$T = 2\pi\sqrt{-x/a_x} = 1,4 \text{ с}; \quad A = \sqrt{(x)^2 - v_x^2 x/a_x} = 4,2 \text{ см};$$

$$v_m = \sqrt{v_x^2 - xa_x} = 0,19 \text{ м/с}; \quad a_m = \sqrt{a_x^2 - a_x v_x^2/x} = 0,83 \text{ м/с}^2.$$

### Приклад 1.2

Знайти період малих поперечних коливань кульки масою  $m = 40$  г, яка закріплена на середині натягнутої струни довжиною  $l = 1,0$  м. Силу натягу струни вважати сталою і такою, що дорівнює  $F = 10$  Н. Масою струни і силами тяжіння знехтувати.

#### Розв'язання

$T - ?$	Для розв'язання задачі використаємо рівняння руху кульки (другий закон Ньютона), перетворимо його до вигляду диференціального рівняння гармонічних коливань. Порівняння отриманого рівняння зі стандартним (1а) дозволить знайти частоту власних коливань $\omega_0$ , отже, і період коливань.
$m = 40$ г;	
$l = 1,0$ м;	
$F = 10$ Н.	

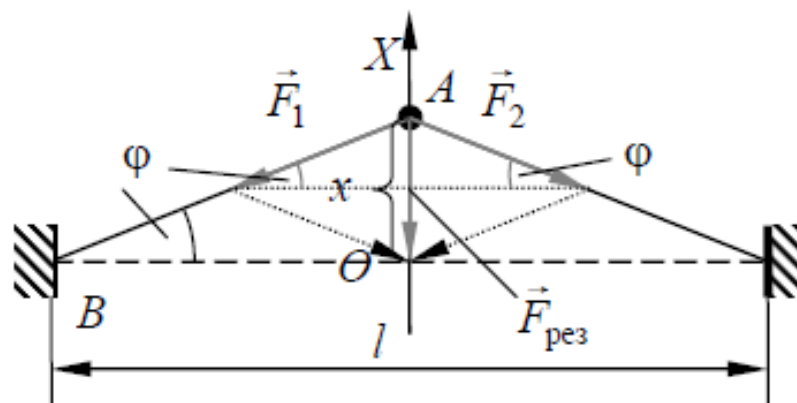


Рисунок 1.1

Розглянемо кульку, що розміщена у точці  $A$  на відстані  $x$  відносно положення рівноваги  $O$  (рис. 1.1). На неї діють сили натягу струни  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$ , модулі яких дорівнюють за умовою задачі  $F$ . Результуюча цих сил, як впливає з рис. 1.1, напрямлена протилежно осі  $X$ . Її проекцію на вісь  $X$  знайдемо з відповідних прямокутних трикутників (рис. 1.1):

$$F_{рез,x} = -2F \sin \varphi. \quad (1)$$

Знак « $\leftarrow$ » у цій формулі означає, що проекція результуючої сили напрямлена протилежно осі  $X$ , протилежно зміщення кульки,  $\varphi = \angle ABO$ .

Кут  $\varphi$  знайдемо з прямокутного трикутника  $\Delta AOB$  :

$$\operatorname{tg}\varphi = x/(l/2) = 2x/l. \quad (2)$$

Для малих коливань кульки її зміщення  $x$  набагато менші за довжину струни  $l$ . Тому умова  $x/l \ll 1$  є правильною. Це означає, що кут  $\varphi \ll 1$ . Тому

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg}\varphi. \quad (3)$$

Тоді проекцію результуючої сили можемо записати у вигляді

$$F_{\text{рез},x} = -2F \cdot 2x/l = -x(4F/l). \quad (4)$$

Підставимо у другий закон Ньютона

$$m\ddot{x} = F_{\text{рез},x}$$

вираз для результуючої сили (4) і отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань:

$$m\ddot{x} = -x(4F/l) \text{ або } \ddot{x} + x \cdot (4F/(ml)) = 0. \quad (5)$$

Порівнюючи отримане рівняння (5) із стандартним (1а), знаходимо циклічну частоту гармонічних коливань  $\omega_0$ , а також і шуканий період коливань кульки  $T$  :

$$\omega_0^2 = 4F/(ml), \quad T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{ml/(4F)} = \pi\sqrt{ml/F}. \quad (6)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (6), в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо  $T = 0,20$  с.

### *Аналіз отриманого результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули (6) у граничному випадку, коли маса кульки прямує до нескінченності  $m \rightarrow \infty$ . У цьому випадку, як впливає із фізичних міркувань, кулька рухатися не буде. Це означає,

що період коливань (найменший час між моментами, коли фази коливань приймають одного і того самого значення) можна вважати таким, що дорівнює нескінченності. З розрахункової формули (6) випливає такий самий результат:

$$T = \pi\sqrt{ml/F} = \pi\sqrt{\infty \cdot l/F} = \infty.$$

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $T = \pi\sqrt{ml/F} = 0,20$  с.

### **Приклад 1.3**

За час  $t_1 = 100$  с система встигає зробити  $N_1 = 100$  коливань. За цей самий час амплітуда коливань зменшується в  $e$  разів. Чому дорівнюють: а) коефіцієнт загасання коливань  $\beta$ ; б) логарифмічний декремент загасання  $\lambda$ ; в) відносне зменшення енергії системи за період коливань?

#### **Розв'язання**

$\beta - ?$	Для розв'язання задачі використаємо залежність амплітуди загасального коливання від часу (1e), формули для логарифмічного декременту загасання (1e). Відносне зменшення енергії системи $\Delta E/E_0$ за період коливань знайдемо, встановивши зв'язок між повною енергією системи та амплітудою.
$\lambda - ?$	
$\Delta E/E_0 - ?$	
$t_1 = 100$ с;	
$N_1 = 100$ ;	
$A_0/A_1 = \eta = e$ .	

Як відомо, амплітуда загасального коливання визначається співвідношенням (1e):

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт загасання. Використовуючи умову задачі, що  $A_0/A_1 = \eta$  та формулу (1), знаходимо коефіцієнт загасання  $\beta$ :

$$A(0) = A_0 e^{-\beta \cdot 0} = A_0, \quad A(t_1) = A_0 e^{-\beta t_1} = A_1,$$

$$A_0 / A_1 = A_0 / (A_0 e^{-\beta t_1}) = e^{\beta t_1} = \eta, \quad \beta \cdot t_1 = \ln \eta, \quad \beta = \ln \eta / t_1. \quad (2)$$

Логарифмічний декремент загасання знаходимо, використовуючи співвідношення (1ε):

$$\lambda = \beta T, \quad (3)$$

де  $T$  – період коливань. Період коливань або час, за який відбувається одне коливання, знаходимо, розділивши час  $t_1$  на кількість коливань  $N_1$ , які відбулися протягом цього часу:

$$T = t_1 / N_1. \quad (4)$$

Тоді з (2) – (4) знаходимо декремент загасання:

$$\lambda = \beta T = (\ln \eta / t_1) \cdot (t_1 / N_1) = \ln \eta / N_1. \quad (5)$$

Знайдемо залежність від часу повної енергії системи, в якій відбуваються загасальні коливання. Як відомо, повна енергія  $E$  механічної системи дорівнює сумі кінетичної  $E_k$  та потенціальної  $E_p$  енергій. У свою чергу, ці енергії пов'язані зі швидкістю  $v$  та зміщенням  $x$ :

$$E = E_k + E_p, \quad E_k = mv^2 / 2, \quad E_p = kx^2 / 2, \quad (6)$$

де  $m$  – маса тіла,  $k$  – коефіцієнт пружності системи. Зміщення за умови загасальних коливань змінюється з часом за законом (1д):

$$x = A(t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

де амплітуда загасальних коливань визначається формулою (1). Швидкість знайдемо, використовуючи її визначення:

$$\begin{aligned} v = dx / dt &= -A(t)\omega \sin(\omega t + \alpha) + (dA(t) / dt) \cos(\omega t + \alpha) \approx \\ &\approx -A(t)\omega \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Тут використали той факт, що швидкість зміни амплітуди набагато менша за швидкість зміни фази. Тоді з (6) – (8) випливає

$$\begin{aligned} E &= m(A(t)\omega \sin(\omega t + \alpha))^2 / 2 + k(A(t) \cos(\omega t + \alpha))^2 / 2 = \\ &= k(A(t))^2 / 2 = kA_0^2 e^{-2\beta t} / 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут використали, що

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Використовуючи (2), (4) та (9), знаходимо відносне зменшення енергії системи за період коливань:

$$\begin{aligned} \Delta E / E_0 &= (E(T) - E_0) / E_0 = \\ &= \left[ (kA_0^2 e^{-2\beta T} / 2) - (kA_0^2 e^{-2\beta \cdot 0} / 2) \right] / (kA_0^2 e^{-2\beta \cdot 0} / 2) = e^{-2\beta T} - 1 = \\ &= e^{-2(\ln \eta / t_1)(t_1 / N_1)} - 1 = e^{-2 \ln \eta / N_1} - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким чином, шукані величини  $\beta$ ,  $\lambda$  та  $\Delta E / E_0$  визначаються формулами (2), (5) та (10). Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул, в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо:  $\beta = 0,01 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda = 0,01$ ;  $\Delta E / E_0 = -0,02$ .

#### *Аналіз отриманого результату*

Проведемо дослідження розрахункових формул (2), (5) та (10) у граничному випадку, коли зменшення амплітуди не відбувається, тобто  $\eta = 1$ . У цій ситуації, як впливає із фізичних міркувань, загасання буде відсутнім, тобто  $\beta = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\Delta E / E_0 = 0$ . З розрахункових формул (2), (5) та (10) випливає такий самий результат:

$$\beta = \ln \eta / t_1 = \ln 1 / t_1 = 0 / t_1 = 0, \quad \lambda = \ln \eta / N_1 = \ln 1 / N_1 = 0 / N_1,$$

$$\Delta E / E_0 = e^{-2 \ln \eta / N_1} - 1 = e^{-2 \ln 1 / N_1} - 1 = e^{-0} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Отже, розрахункові формули (2), (5) та (10) не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\beta = \ln \eta / t_1 = 0,01 \text{ с}^{-1}$ ;  $\lambda = \ln \eta / N_1 = 0,01$ ;

$$\Delta E / E_0 = e^{-2 \ln \eta / N_1} - 1 = -0,02.$$

### **Приклад 1.4**

Математичний маятник виконує коливання у середовищі, для якого логарифмічний декремент загасання  $\lambda_1 = 1,50$ . Яким буде значення  $\lambda_2$ , коли опір середовища збільшити у  $\eta = 2,00$  рази?

#### **Розв'язання**

$\lambda_2 = ?$ $\lambda_1 = 1,50;$ $r_2/r_1 = \eta = 2,00$ $\cdot$	Для розв'язання задачі використаємо зв'язок між опором середовища $r$ та коефіцієнтом загасання $\beta = r/(2J), \quad (1)$
--	---

де  $J$  – момент інерції маятника відносно осі обертання. Також застосуємо співвідношення між коефіцієнтом загасання  $\beta$  та логарифмічним декрементом загасання  $\lambda$  (1е), формулу для частоти загасальних коливань  $\omega$  (1е).

Як впливає з (1), коефіцієнт загасання залежить від опору середовища прямо пропорційно. Це означає, що за умови збільшення опору в  $\eta$  разів коефіцієнт загасання збільшується також у  $\eta$  разів:

$$\beta_2 / \beta_1 = r_2 / r_1 = \eta. \quad (2)$$

Логарифмічний декремент загасання  $\lambda$ , у свою чергу, пов'язаний з коефіцієнтом загасання співвідношенням (1е):

$$\lambda = \beta T = \beta \cdot 2\pi / \omega = \beta \cdot 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 / \beta^2 - 1}$$

або

$$(\omega_0 / \beta)^2 = (2\pi / \lambda)^2 + 1. \quad (3)$$

Тут  $\omega_0$  – власна частота коливань (не залежить від опору середовища). У вищезаписаному виразі використали зв'язок між періодом  $T$  та частотою  $\omega$  загасальних коливань, а також формулу для частоти загасальних коливань  $\omega$  (1e).

Далі запишемо зв'язок (3) для початкового (індекс «1») та кінцевого (індекс «2») станів:

$$(\omega_0 / \beta_1)^2 = (2\pi / \lambda_1)^2 + 1, \quad (\omega_0 / \beta_2)^2 = (2\pi / \lambda_2)^2 + 1. \quad (4)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4), (2) відносно шуканого  $\lambda_2$ , знаходимо

$$\frac{(2\pi / \lambda_2)^2 + 1}{(2\pi / \lambda_1)^2 + 1} = \frac{(\omega_0 / \beta_2)^2}{(\omega_0 / \beta_1)^2} = \frac{1}{\eta^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{\eta \lambda_1}{\sqrt{1 + (\lambda_1 / (2\pi))(1 - \eta^2)}}. \quad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули, в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо  $\lambda = 3,29$ .

#### *Аналіз отриманого результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули (5) у граничному випадку, коли зміни опору середовища не відбувається, тобто коли  $\eta = 1$ . У цій ситуації, як впливає із фізичних міркувань, логарифмічний декремент загасання змінюватися не буде, тобто  $\lambda_2 = \lambda_1$ . З розрахункової формули (5) впливає такий самий результат:

$$\lambda_2 = \eta \lambda_1 / \sqrt{1 + (\lambda_1 / (2\pi))(1 - \eta^2)} =$$

$$= 1 \cdot \lambda_1 / \sqrt{1 + (\lambda_1 / (2\pi))(1 - 1^2)} = \lambda_1.$$

Отже, розрахункова формула (5) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\lambda_2 = \eta\lambda_1 / \sqrt{1 + (\lambda_1 / (2\pi))(1 - \eta^2)} = 3,29$ .

### Приклад 1.5

Вантаж масою  $m = 0,5$  кг підвішений на пружині, коефіцієнт пружності якої  $k = 0,49$  Н/см, і поміщений у масло. Коефіцієнт опору у маслі  $r = 0,5$  кг/с. На верхній кінець пружини діє змушувальна сила, що змінюється за законом  $F = 0,98 \sin(\Omega t)$  (Н). Знайти частоту змушувальної сили, коли амплітуда вимушених коливань буде максимальною. Чому дорівнює ця амплітуда коливань?

#### Розв'язання

$\Omega_{\text{res}} - ?$ $A_{\text{res}} - ?$ $m = 0,5$ кг; $k = 0,49$ Н/см; $r = 0,5$ кг/с; $F = 0,98 \sin(\Omega t)$ (Н).	Для розв'язання задачі використаємо формули для амплітуди вимушених коливань (1з) та частоти резонансу зміщення (1и). Як відомо, амплітуда вимушених коливань стає максимальною, коли частота вимушених коливань дорівнює резонансній (1и):
--	--

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (1)$$

де власна частота  $\omega_0$  визначається масою  $m$  та коефіцієнтом пружності  $k$ :

$$\omega_0^2 = k / m, \quad (2)$$

а коефіцієнт загасання пов'язаний з коефіцієнтом опору  $r$  та масою  $m$  співвідношенням

$$\beta = r / (2m). \quad (3)$$

Підставляючи формули (2) та (3) в (1), знаходимо шукану резонансну частоту:

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{(k/m) - r^2/(2m^2)}. \quad (4)$$

Резонансну амплітуду  $A_{\text{res}}$  знайдемо за допомогою формули для амплітуди вимушених коливань (13):

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad (5)$$

у якій амплітуда змушувальної сили, як впливає з умови задачі, дорівнює  $F_0 = 0,98 \text{ Н}$ , а частота – резонансній  $\Omega = \Omega_{\text{res}}$ . Використовуючи також (1) – (4), знаходимо шукану резонансну амплітуду:

$$\begin{aligned} A_{\text{res}} &= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_{\text{res}}^2)^2 + 4\beta^2\Omega_{\text{res}}^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(2\beta)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} =, \\ &= \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{(k/m) - (r^2/4m^2)}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (4) та (6), в одиницях СІ, виконаємо обчислення й отримаємо:  $\Omega_{\text{res}} = 9,9 \text{ с}^{-1}$ ;  $A_{\text{res}} = 0,20 \text{ м}$ .

#### *Аналіз отриманого результату*

Проведемо дослідження розрахункових формул (4) та (6) у граничному випадку, коли опір середовища відсутній, тобто  $r = 0$ . У цій ситуації, як впливає із фізичних міркувань, максимальна амплітуда спостерігається, коли зовнішня частота дорівнює власній частоті коливань  $\Omega_{\text{res}} = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Амплітуда при цьому, якщо опір відсутній, буде прямувати до нескінченності  $A_{\text{res}} \rightarrow \infty$ . З розрахункових формул (4) та (6) впливає такий самий результат:

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{(k/m) - r^2/(2m^2)} = \sqrt{(k/m) - 0^2/(2m^2)} = \sqrt{(k/m)},$$

$$A_{\text{res}} = \frac{F_0}{r\sqrt{(k/m) - (r^2/4m^2)}} = \frac{F_0}{0\sqrt{(k/m) - (0^2/4m^2)}} = \infty.$$

Отже, розрахункові формули (4) та (6) не суперечать фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\Omega_{\text{res}} = \sqrt{(k/m) - r^2/(2m^2)} = 9,9 \text{ с}^{-1};$

$$A_{\text{res}} = F_0 / \left[ r\sqrt{(k/m) - (r^2/4m^2)} \right] = 0,20 \text{ м.}$$

### Приклад 1.6

Осцилятор масою  $m$  рухається за законом  $x = A \sin(\Omega t)$  під дією зовнішньої сили  $F_x = F_0 \cos(\Omega t)$ . Знайти коефіцієнт загасання  $\beta$  осцилятора.

$\beta - ?$	<b>Розв'язання</b>
$m;$ $x = A \sin(\Omega t);$ $F_x = F_0 \cos(\Omega t)$ $.$	<p>Для розв'язання задачі використаємо формули для амплітуди <math>A</math> та початкової фази <math>\varphi</math> усталених вимушених коливань (13):</p> $F_x = F_0 \cos(\Omega t), \quad x = A \cos(\Omega t - \varphi),$ <p style="text-align: center;">(1)</p>

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad \text{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (2)$$

Визначимо початкову фазу вимушених коливань. Для цього закон руху осцилятора запишемо у стандартному вигляді (1):

$$x = A \sin(\Omega t) = A \cos(\Omega t - \pi/2). \quad (3)$$

Звідси випливає, що початкова фаза  $\varphi$  дорівнює  $\pi/2$ . Це означає (див. формулу (2)), що

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = +\infty = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \text{ або } \omega_0^2 - \Omega^2 = 0. \quad (4)$$

Підставляємо отриманий вираз у формулу для амплітуди (2) і знаходимо

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0 / m}{\sqrt{0^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{2\beta\Omega m}. \quad (5)$$

Звідси можна визначити шуканий коефіцієнт загасання

$$\beta = \frac{F_0}{2A\Omega m}. \quad (6)$$

### *Аналіз отриманого результату*

Проведемо дослідження розрахункової формули (6) у граничному випадку, коли коефіцієнт загасання дорівнює нескінченності  $\beta = \infty$ . В цьому випадку, як впливає з фізичних міркувань, амплітуда усталених вимушених коливань буде дорівнювати нулю  $A = 0$ . З розрахункової формули (6) впливає такий самий результат:

$$\beta = F_0 / (2mA\Omega) = F_0 / (2 \cdot m \cdot 0 \cdot \Omega) = \infty.$$

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

**Відповідь:**  $\beta = F_0 / (2mA\Omega)$ .

## **1.2 Задачі для самостійного розв'язання**

**1.1** Рівняння коливань точки має вигляд  $x = A \cos \omega(t + \tau)$ , де  $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau = 0.2 \text{ с}$ . Визначити період  $T$  і початкову фазу  $\varphi$  коливань.

**1.2** Визначити період  $T$ , частоту  $\nu$  і початкову фазу  $\varphi$  коливань, які задані рівнянням  $x = A \sin \omega(t + \tau)$ , де  $\omega = 2,5\pi \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau = 0,4 \text{ с}$ .

**1.3** Точка виконує коливання за законом  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ , де  $A = 2$  м,  $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau = \pi/4$  рад. Побудувати графіки залежностей від часу: 1) зміщення  $x(t)$ ; 2) швидкості  $v(t)$ ; 3) прискорення  $a(t)$ .

**1.4** Точка виконує коливання з амплітудою  $A = 4$  см і періодом  $T = 2$  с. Написати рівняння коливань, беручи до уваги, що в момент  $t = 0$  зміщення  $x(0) = 0$  і  $\dot{x}(0) < 0$ . Визначити фазу  $(\omega t + \varphi)$  для двох моментів часу: 1) коли зміщення  $x = 1$  см і  $\dot{x} > 0$ ; 2) коли швидкість  $\dot{x} = -6$  см/с і  $x < 0$ .

**1.5** Точка рівномірно рухається по колу проти годинникової стрілки з періодом  $T = 6$  с. Діаметр  $d$  кола дорівнює 20 см. Записати рівняння руху проекції точки на вісь  $x$ , що проходить через центр кола, якщо в момент часу, який прийнятий за початок відліку, проекція на вісь  $x$  дорівнювала нулю. Знайти зміщення  $x$ , швидкість  $v$  та прискорення  $a$  проекції точки в момент  $t = 1$  с.

**1.6** Визначити максимальне значення швидкості  $v_{\max}$  та прискорення  $a_{\max}$  точки, яка бере участь у гармонічних коливаннях з амплітудою  $A = 3$  см і циклічною частотою  $\omega = \pi/2 \text{ с}^{-1}$ .

**1.7** Точка здійснює коливання за законом  $x = A \cos \omega t$ , де  $A = 5$  см;  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ . Визначити прискорення  $|a|$  точки в момент часу, коли її швидкість  $v = 8$  см/с.

**1.8** Точка здійснює гармонічні коливання. Найбільше зміщення точки дорівнює  $x_{\max} = 10$  см, найбільша швидкість  $v_{\max} = 20$  см/с. Знайти циклічну частоту  $\omega$  коливань і максимальне прискорення  $a_{\max}$  точки.

**1.9** Максимальна швидкість точки, що виконує гармонічні коливання, дорівнює  $v_{\max} = 10$  см/с,

максимальне прискорення  $a_{\max} = 100 \text{ см/с}^2$ . Знайти циклічну частоту  $\omega$  коливань, їх період  $T$  та амплітуду  $A$ . Записати рівняння коливань, взявши початкову фазу коливань такою, що дорівнює нулю.

**1.10** Точка виконує коливання за законом  $x = A \sin \omega t$ . У деякий момент часу зміщення  $x_1$  точки дорівнює 5 см. Коли фаза коливань збільшилася удвічі, зміщення  $x_2$  стало дорівнювати 8 см. Знайти амплітуду  $A$  коливань.

**1.11** Точка виконує коливання за законом  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ . У деякий момент часу зміщення  $x$  точки дорівнює 5 см, її швидкість  $v = 20 \text{ см/с}$ , а прискорення  $a = -80 \text{ см/с}^2$ . Знайти амплітуду  $A$ , циклічну частоту  $\omega$ , період  $T$  коливань, максимальну швидкість  $v_{\max}$ , прискорення  $a_{\max}$  точки та фазу  $(\omega t + \varphi)$  у момент часу, що розглядається.

**1.12** Точка виконує гармонічні коливання, амплітуда яких дорівнює  $A = 5 \text{ см}$ , циклічна частота  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ , початкова фаза дорівнює нулю. Визначити прискорення  $a$  точки у момент часу, коли її швидкість дорівнює  $v = 8 \text{ см/с}$ .

**1.13** Точка виконує коливання вздовж осі  $x$  за законом  $x = A \cos(\omega t - \pi/4)$ . Побудувати приблизні графіки: 1) зміщення  $x$ , проекції швидкості  $v_x$  і проекції прискорення  $a_x$  як функції часу  $t$ ; 2) проекції швидкості  $v_x$  і проекції прискорення  $a_x$  як функції координати  $x$ .

**1.14** Деяка точка рухається вздовж осі  $x$  за законом  $x = a \sin^2(\omega t - \pi/4)$ . Знайти: 1) амплітуду  $A$  і період  $T$  коливань; побудувати графік  $x(t)$ ; 2) проекції швидкості  $v_x$  як функцію координати  $x$ ; побудувати графік  $v_x(x)$ .

**1.15** Знайти циклічну частоту  $\omega$  та амплітуду  $A$  гармонічних коливань частинки, якщо на відстані  $x_1$  і  $x_2$  від положення рівноваги її швидкість дорівнювала  $v_1$  і  $v_2$  відповідно.

**1.16** Точка виконує гармонічні коливання вздовж деякої прямої з періодом  $T = 0,60$  с та амплітудою  $A = 10,0$  см. Знайти середню швидкість  $\langle v \rangle$  точки за час, протягом якого вона проходить шлях  $A/2$ : 1) із крайнього положення; 2) із положення рівноваги.

**1.17** У момент  $t = 0$  точка починає виконувати коливання вздовж осі  $x$  за законом  $x = A \sin \omega t$ . Знайти за перші  $3/8$  періоду після початку руху: 1) середнє значення проекції вектора швидкості  $\langle v_x \rangle$ ; 2) модуль середнього вектора швидкості  $|\langle \vec{v} \rangle|$ ; 3) середнє значення модуля швидкості  $\langle v \rangle$ .

**1.18** Два однаково напрямлених гармонічних коливання, з однаковими періодами коливань, з амплітудами  $A_1 = 10$  см і  $A_2 = 6$  см додаються в одне коливання з амплітудою  $A = 14$  см. Знайти різницю фаз  $\Delta\phi$  коливань, що додаються.

**1.19** Два гармонічних коливання, спрямованих вздовж однієї прямої, мають однакові амплітуди та періоди, додаються в одне коливання тієї самої амплітуди. Знайти різницю фаз  $\Delta\phi$  коливань, що додаються.

**1.20** Визначити амплітуду  $A$  і початкову фазу  $\phi$  результуючого коливання, що виникає при додаванні двох коливань однакових напрямків та періодів:  $x_1 = \sin(\pi t)$  см і  $x_2 = \sin \pi(t + 0,5)$  см. Знайти рівняння результуючого коливання.

**1.21** Точка бере участь у двох однаково спрямованих коливаннях:  $x_1 = A_1 \sin \omega t$  і  $x_2 = A_2 \cos \omega t$ , де  $A_1 = 1$  см;  $A_2 = 2$  см;  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ . Визначити амплітуду  $A$  результуючого коливання, його частоту  $\nu$  і початкову фазу  $\varphi$ . Знайти рівняння цього руху.

**1.22** Додаються два гармонічні коливання одного напрямку з однаковими періодами  $T_1 = T_2 = 1,5$  с і амплітудами  $A_1 = A_2 = 2$  см. Початкові фази коливань  $\varphi_1 = \pi/2$  і  $\varphi_2 = \pi/3$ . Визначити амплітуду  $A$  і початкову фазу  $\varphi$  результуючого коливання. Знайти його рівняння і побудувати з дотриманням масштабу векторну діаграму складання амплітуд.

**1.23** Складаються три гармонічні коливання одного напрямку з однаковими періодами  $T_1 = T_2 = T_3 = 2$  с і амплітудами  $A_1 = A_2 = A_3 = 3$  см. Початкові фази коливань  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = \pi/3$ ;  $\varphi_3 = 2\pi/3$ . Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд. Визначити за допомогою діаграми амплітуду  $A$  і початкову фазу  $\varphi$  результуючого коливання. Знайти його рівняння.

**1.24** Два камертони звучать одночасно. Частоти  $\nu_1$  і  $\nu_2$  їх коливань відповідно дорівнюють 440 і 440,5 Гц. Визначити період  $T$  биття.

**1.25** Додаються два взаємно перпендикулярних коливання, що описуються рівняннями:  $x = A_1 \sin \omega t$  і  $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$ , де  $A_1 = 2$  см;  $A_2 = 1$  см;  $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$ ;  $\tau = 0,5$  с. Знайти рівняння траєкторії і побудувати її. Показати напрям руху точки.

**1.26** Точка здійснює одночасно два гармонічні коливання, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках й описуються рівняннями  $x = A_1 \cos \omega t$  і  $y = A_2 \cos \omega(t + \tau)$ , де  $A_1 = 4$  см;  $A_2 = 8$  см;  $\omega = \pi$  с<sup>-1</sup>;  $\tau = 1$  с. Знайти рівняння траєкторії точки і побудувати графік її руху.

**1.27** Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, які описуються рівняннями  $x = A_1 \cos \omega t$  і  $y = A_2 \sin \omega t$ , де  $A_1 = 2$  см і  $A_2 = 1$  см. Знайти рівняння траєкторії точки і побудувати її, вказавши напрямок руху.

**1.28** Рух точки задано рівняннями  $x = A_1 \sin \omega t$  і  $y = A_2 \sin \omega(t + \tau)$ , де  $A_1 = 10$  см;  $A_2 = 5$  см;  $\omega = 2$  с<sup>-1</sup>;  $\tau = \pi/4$  с. Знайти рівняння траєкторії і швидкості точки в момент часу  $t = 0,5$  с.

**1.29** Матеріальна точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що описуються рівняннями  $x = A_1 \cos \omega t$  і  $y = -A_2 \cos 2\omega t$ , де  $A_1 = 2$  см;  $A_2 = 1$  см. Знайти рівняння траєкторії і побудувати її.

**1.30** Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, що описуються рівняннями  $x = A_1 \cos \omega t$  і  $y = A_2 \sin 0,5\omega t$ , де  $A_1 = 2$  см;  $A_2 = 3$ . Знайти рівняння траєкторії руху точки і побудувати її, вказавши напрям руху.

**1.31** Точка бере участь у двох однаково спрямованих коливаннях, що відбуваються за законами:  $x_1 = A \cos \omega t$  і  $x_2 = A \cos 2\omega t$ . Знайти максимальну швидкість точки.

**1.32** При додаванні двох коливань в одному напрямку результуюче коливання має вигляд  $x = A \cos 2,1t \cdot \cos 50,0t$ , де  $t$  в секундах. Знайти циклічні частоти коливань, що додаються, та період биття результуючого коливання.

**1.33** Точка рухається в площині  $xu$  за законом  $x = A \sin \omega t$ ,  $y = B \cos \omega t$ , де  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  – додатні сталі. Знайти: 1) рівняння траєкторії руху точки  $y(x)$  та напрям її руху по цій траєкторії; 2) прискорення точки  $\vec{a}$  залежно від її радіуса-вектора  $\vec{r}$  відносно початку координат.

**1.34** Матеріальна точка масою  $m = 50$  г робить коливання, рівняння яких має вигляд  $x = A \cos \omega t$ , де  $A = 10$  см,  $\omega = 5$  с<sup>-1</sup>. Знайти силу  $F$ , що діє на точку, у двох випадках: 1) у момент, коли фаза коливань  $\omega t = \pi/3$ ; 2) у положенні, коли зміщення точки максимальне.

**1.35** Коливання матеріальної точки масою  $m = 0,1$  г відбуваються згідно з рівнянням  $x = A \cos \omega t$ , де  $A = 5$  см;  $\omega = 20$  с<sup>-1</sup>. Визначити максимальне значення сили  $F_{\max}$  і кінетичної енергії  $T_{\max}$ .

**1.36** Знайти силу  $F$  у момент  $t = 1$  с і повну енергію  $E$  матеріальної точки, що здійснює коливання за законом  $x = A \cos \omega t$ , де  $A = 20$  см;  $\omega = 2\pi/3$  с<sup>-1</sup>. Маса  $m$  матеріальної точки дорівнює 10 г.

**1.37** Коливання матеріальної точки відбуваються згідно з рівнянням  $x = A \cos \omega t$ , де  $A = 8$  см,  $\omega = \pi/6$  с<sup>-1</sup>. У момент, коли сила  $F$  в перший раз досягла значення  $-5$  мН, потенціальна енергія  $\Pi$  точки стала дорівнювати 100 мкДж. Знайти цей момент часу  $t$  і відповідну йому фазу  $\omega t$ .

**1.38** Вантаж масою  $m = 250$  г, підвішений до пружини, виконує коливання вздовж вертикалі з періодом  $T = 1$  с. Визначити коефіцієнт жорсткості  $k$  пружини.

**1.39** До спіральної пружини підвісили вантаж, унаслідок чого пружина розтягнулася на  $x = 9$  см. Який буде період  $T$  коливань вантажу, якщо його дещо відтягнути вниз і потім відпустити?

**1.40** Гиря, підвішена до пружини, виконує коливання вздовж вертикальної осі з амплітудою  $A = 4$  см. Визначити повну енергію  $E$  коливань гирі, якщо коефіцієнт жорсткості  $k$  пружини дорівнює  $1$  кН/м.

**1.41** Знайти відношення довжин двох математичних маятників, якщо відношення періодів їх коливань дорівнює  $1,5$ .

**1.42** Математичний маятник довжиною  $l = 1$  м встановлений у ліфті. Ліфт піднімається з прискоренням  $a = 2,5$  м/с<sup>2</sup>. Визначити період  $T$  коливань маятника.

**1.43** На кінцях тонкого стрижня довжиною  $l = 30$  см закріплені однакові тягарці по одному на кожному кінці. Стрижень із тягарцями коливається біля горизонтальної осі, що проходить через точку, віддалену на  $d = 10$  см від одного з кінців стрижня. Визначити зведену довжину  $L$  і період  $T$  коливань такого фізичного маятника. Масою стрижня знехтувати.

**1.44** На стрижні довжиною  $l = 30$  см закріплені два однакових тягарці: один – посередині стрижня, інший – на одному з його кінців. Стрижень із тягарцями коливається біля горизонтальної осі, що проходить через вільний кінець стрижня. Визначити зведену довжину  $L$  і період  $T$  коливань такої системи. Масою стрижня знехтувати.

**1.45** Система із трьох вантажів, з'єднаних стрижнями довжиною  $l = 30$  см (рис. 1.2), коливається відносно горизонтальної осі, що проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини

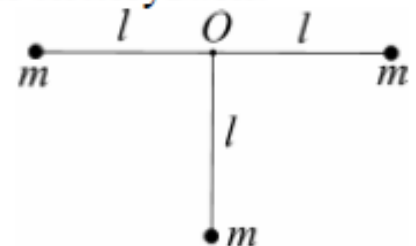


Рисунок 1.2

рисунок. Знайти період  $T$  коливань системи. Масами стрижнів знехтувати, вантажі розглядати як матеріальні точки.

**1.46** Тонкий обруч, повішений на цвях, вбитий горизонтально в стіну, коливається в площині, паралельній стіні. Радіус  $R$  обруча дорівнює 30 см. Знайти період  $T$  коливань обруча.

**1.47** Однорідний диск радіусом  $R = 30$  см коливається біля горизонтальної осі, що проходить через одну з циліндричних поверхонь, які утворюють диск. Знайти період  $T$  коливань диска.

**1.48** Диск радіусом  $R = 24$  см коливається біля горизонтальної осі, яка перпендикулярна площини диска і проходить через середину одного з радіусів. Визначити зведену довжину  $L$  і період  $T$  коливань такого маятника.

**1.49** З тонкого однорідного диска радіусом  $R = 20$  см вирізана частина, що має вигляд кола радіусом  $r = 10$  см, так, як це показано на рис. 1.3. Частина диска, що залишилася, коливається відносно горизонтальної осі  $O$ , що збігається з однією з утворювальних циліндричних поверхонь диска. Знайти період  $T$  коливань такого маятника.

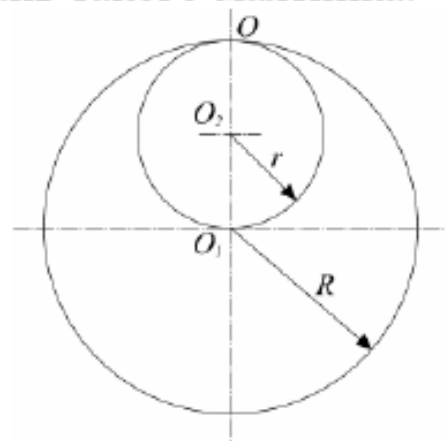


Рисунок 1.3

**1.50** Математичний маятник довжиною  $l_1 = 40$  см і фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня довжиною  $l_2 = 60$  см синхронно коливаються навколо однієї горизонтальної осі. Визначити відстань  $a$  між центром мас стрижня та віссю коливань.

**1.51** Фізичний маятник у вигляді тонкого прямого стрижня, довжина якого  $l = 120$  см, коливається навколо

горизонтальної осі, що проходить перпендикулярно до стрижня через точку, яка віддалена на деяку відстань  $a$  від центра маси стрижня. При якому значенні  $a$  період  $T$  коливань має найменше значення?

**1.52** Тіло масою  $m = 4$  кг, закріплене на горизонтальній осі, виконує коливання з періодом  $T_1 = 0,8$  с. Коли на цю вісь був насаджений диск так, що його вісь збігається з віссю коливань тіла, період  $T_2$  коливань став дорівнювати  $1,2$  с. Радіус  $R$  диска дорівнює  $20$  см, маса його дорівнює масі тіла. Знайти момент інерції  $J$  тіла відносно осі коливань.

**1.53** Ареометр масою  $m = 50$  г, що має трубку діаметром  $d = 1$  см, плаває у воді. Ареометр трішки занурили у воду і відпустили, внаслідок чого він став здійснювати гармонійні коливання. Знайти період  $T$  цих коливань.

**1.54** Набряклу колоду, у якої переріз однаковий по всій довжині, занурили вертикально у воду так, що над водою залишилася лише мала (порівняно з довжиною) її частина. Період  $T$  коливань колоди дорівнює  $5$  с. Визначити довжину  $l$  колоди.

**1.55** Кульку підвішено на нитці завдовжки  $l = 2$  м. Її відхиляють на кут  $\alpha = 4^\circ$  і спостерігають коливання. Знайти швидкість кульки при проходженні нею положення рівноваги, вважаючи коливання незгасальними гармонічними. Перевірити розв'язок, знайшовши швидкість кульки з рівнянь механіки.

**1.56** У салоні автомобіля, що рухається вгору з прискоренням  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>, коливається маленька іграшка на нитці. Визначити період малих коливань іграшки, якщо кут нахилу  $\alpha = 0,1$ . Довжина нитки  $l = 0,3$  м.

**1.57** Кулька масою  $m = 20$  г, що підвішена на нитці, яка не проводить струм, на висоті  $h = 15$  см від великої горизонтальної провідної площини, здійснює малі коливання. Після того як кульці надали деякий заряд  $q$ , період коливань змінився у  $\eta = 3$  рази. Знайти заряд  $q$ .

**1.58** Знайти закон, згідно з яким змінюється з часом натяг  $F$  нитки математичного маятника. Маятник коливається за законом  $\varphi = \varphi_m \cos \omega t$ , маса його дорівнює  $m$ , довжина  $l$ .

**1.59** Кусок глини масою  $m = 1$  кг впав на шальку пружинних терезів з висоти  $h = 10$  см і прилип до неї. Визначити амплітуду і період коливань шальки, якщо маса її і пружини незначна, а жорсткість пружини  $k = 10$  Н/м.

**1.60** Знайти період малих коливань кулі масою  $m$  на стрижні, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець (рис. 1.4). Куля з'єднана з кінцем стрижня пружиною із жорсткістю  $k$ . В якому випадку коливання неможливі?

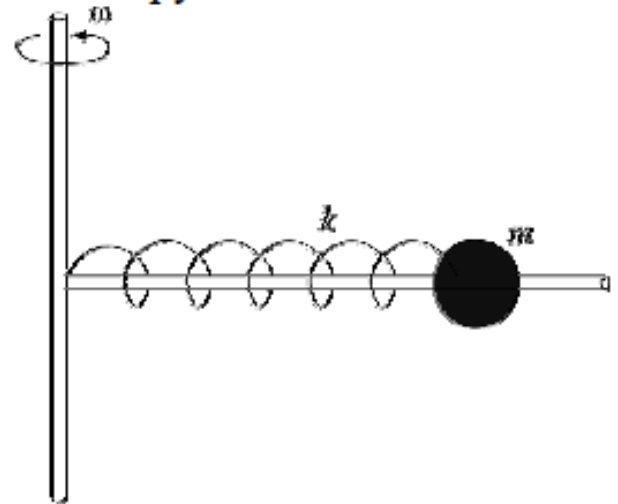


Рисунок 1.4

**1.61** Визначити період  $T$  коливань ртуті масою  $m = 121$  г, що знаходиться в  $U$ -подібній трубці (рис. 1.5). Поперечний переріз трубки  $S = 0,3$  см<sup>2</sup>.

**1.62** Айсберг у вигляді прямої призми коливається вздовж вертикальної осі. Визначити період малих коливань айсберга, якщо висота його надводної частини  $h = 100$  м.

**1.63** Горизонтальна платформа робить у вертикальному напрямку гармонічне коливання за законом  $x = A \cos \omega t$ . На платформі лежить шайба з абсолютно непружного матеріалу. За якої умови шайба відділятиметься від платформи?

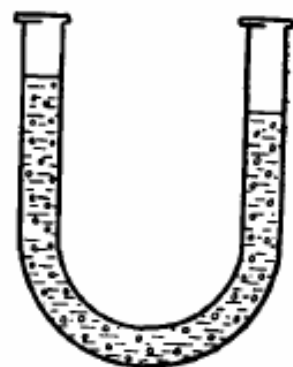


Рисунок 1.5

**1.64** Точковий диполь з електричним моментом  $p_e = 100$  пКл·м

вільно установився в однорідному електричному полі напруженістю  $E = 9$  МВ/м. Диполь був повернений на малий кут і вільно відпущений. Визначити частоту  $\nu$  власних коливань диполя в електричному полі. Момент інерції  $I$  диполя відносно осі, що проходить через центр диполя, дорівнює  $4 \cdot 10^{-12}$  кг·м<sup>2</sup>.

**1.65** Кругла рамка зі струмом силою  $i = 2$  А здійснює малі крутильні коливання відносно вертикальної осі в однорідному магнітному полі. Площа рамки  $S = 2$  см<sup>2</sup>, момент інерції  $I = 1,2 \cdot 10^{-7}$  кг·м<sup>2</sup>, період коливань  $T = 1,2$  с. Визначити магнітну індукцію поля  $B$ .

**1.66** Частинка масою  $m$  знаходиться в одновимірному потенціальному полі, де її потенціальна енергія залежить від координати  $x$  як  $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$ ,  $U_0$  та  $a$  – деякі сталі. Знайти період малих коливань частинки біля положення рівноваги.

**1.67** Те саме питання, що і в попередній задачі, але потенціальна енергія має вид  $U(x) = (a/x^2) - (b/x)$ ,  $a$  та  $b$  – деякі сталі.

**1.68** Визначити період малих коливань математичного маятника – кульки, яка на нитці завдовжки  $l = 20$  см знаходиться в рідині. Густина рідини у  $\eta = 3$  рази менша густини кульки. Опір рідини вважати дуже малим.

**1.69** Є недеформована пружина з коефіцієнтом жорсткості  $\chi = 13 \text{ Н/м}$ , кінці якої закріплені. В точці, що знаходиться на відстані  $\eta = 1/3$  довжини пружини від одного з її кінців, закріплена невелика кулька масою  $m = 25 \text{ г}$ . Вважаючи масу пружини досить малою, знайти період малих поздовжніх коливань кульки. Сили тяжіння відсутні.

**1.70** Визначити період малих поздовжніх коливань тіла масою  $m$  у системі (рис. 1.6), якщо коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють  $\chi_1$  і  $\chi_2$ , а їх масами та тертям можна знехтувати.

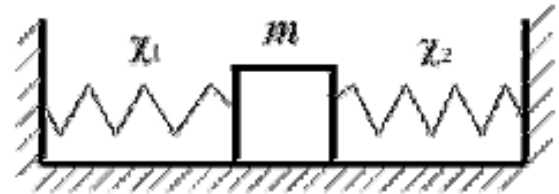


Рисунок 1. 6.

**1.71** Визначити період малих вертикальних коливань тіла масою  $m$  у системі (рис. 1.7). Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють  $\chi_1$  і  $\chi_2$ , а їх масами можна знехтувати.

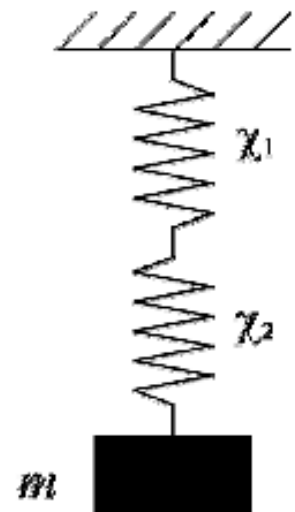


Рисунок 1.7

**1.72** Вздовж осі обертання в Землі зроблена шахта. Вважаючи Землю однорідною кулею і нехтуючи опором повітря, визначити: 1) закон руху тіла, що впаде в шахту; 2) за який час тіло, що впало в шахту, досягне протилежного кінця шахти; 3) швидкість тіла в центрі Землі.

**1.73** Дошка, на якій лежить брусок, виконує горизонтальні гармонічні коливання з амплітудою  $a = 10 \text{ см}$ . Знайти коефіцієнт тертя між дошкою та бруском, якщо брусок починає ковзати по дошці, коли період її коливань менше  $T = 1,0 \text{ с}$ .

**1.74** Як змінюються з часом кут відхилення математичного маятника довжиною  $l = 80 \text{ см}$ , якщо в

початковий момент маятник: 1) відхилили на кут  $3,0^\circ$  і без початкового поштовху відпустили; 2) знаходився у стані рівноваги і його нижньому кінцю надали горизонтальну швидкість  $0,22$  м/с; 3) відхилили на кут  $3,0^\circ$  і його нижньому кінцю надали швидкість  $0,22$  м/с, напрямлену в бік рівноваги.

**1.75** Частинка масою  $m$  рухається під дією сили  $\vec{F} = -\alpha m \vec{r}$ , де  $\alpha$  – стала,  $\vec{r}$  – радіус-вектор частинки відносно початку координат. Знайти траєкторію її руху, якщо в початковий момент  $\vec{r} = r_0 \vec{i}$  і швидкість  $\vec{v} = v_0 \vec{j}$ , де  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  – орти осей  $x$  і  $y$  відповідно.

**1.76** Тіло масою  $m = 0,50$  кг висить на гумовому шнурі, коефіцієнт жорсткості якого  $k = 50$  Н/м. Знайти максимальну відстань, на яку можна відтягнути тіло вниз, щоб коливання були ще гармонічними. Чому при цьому дорівнює енергія коливання?

**1.77** Тіло масою  $m$  впало з висоти  $h$  на чашу пружних терезів (рис. 1.8). Масою чаші та пружини можна знехтувати, коефіцієнт жорсткості пружини  $\chi$ . Прилипнувши до чаші терезів, тіло починає виконувати гармонічні коливання у вертикальному напрямку. Знайти амплітуду коливань та їх енергію.

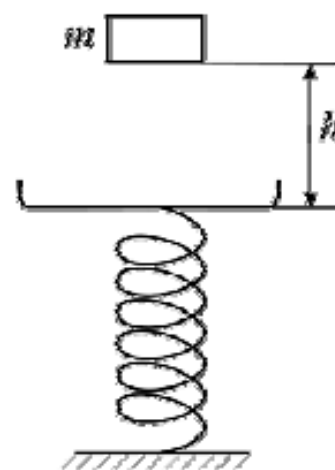


Рисунок 1.8

**1.78** В умові попередньої задачі маса чаші дорівнює  $M$ . Знайти амплітуду коливань.

**1.79** Фізичний маятник встановили так, що його центр мас знаходиться над точкою підвісу. З цього положення маятник почав рухатися до стану стійкої рівноваги, яке він пройшов з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти період малих коливань цього маятника.

**1.80** Фізичний маятник виконує малі коливання навколо горизонтальної осі з частотою  $\omega_1 = 15,0$  рад/с. Якщо до нього прикріпити невелике тіло масою  $m = 50$  г на відстані  $l = 20$  см нижче осі, то частота коливань стане  $\omega_2 = 10,0$  рад/с. Визначити момент інерції цього маятника відносно осі коливання.

**1.81** Два фізичні маятники виконують малі коливання навколо однієї горизонтальної осі з частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Їх моменти інерції відносно даної осі дорівнюють відповідно  $I_1$  і  $I_2$ . Маятники у стані стійкої рівноваги з'єднали жорстко між собою. Визначте, яка буде частота коливань  $\omega$  нового фізичного маятника.

**1.82** Невелика магнітна стрілка виконує малі коливання навколо осі, що розміщена перпендикулярно до вектора індукції магнітного поля. При зміні індукції магнітного поля період коливань магнітної стрілки зменшився у  $\eta = 5,0$  разів. У скільки разів змінилась індукція магнітного поля?

**1.83** Амплітуда загасальних коливань маятника за час  $t_1 = 5$  хв зменшилась удвічі. За який час  $t_2$  амплітуда зменшиться у вісім разів?

**1.84** За час  $t = 8$  хв амплітуда загасальних коливань маятника зменшилась втричі. Визначити коефіцієнт загасання  $\beta$ .

**1.85** Амплітуда коливань маятника довжиною  $l = 1$  м за час  $t = 10$  хв зменшилась удвічі. Визначити логарифмічний декремент загасання  $\lambda$ .

**1.86** Логарифмічний декремент загасання  $\lambda$  коливань маятника дорівнює  $0,003$ . Визначити число  $N$  повних коливань, які повинен зробити маятник, щоб амплітуда зменшилась удвічі.

**1.87** Гиря масою  $m = 500$  г підвішена до спіральної пружини з коефіцієнтом жорсткості  $k = 20$  Н/м і здійснює пружні коливання в деякому середовищі. Логарифмічний декремент загасання коливань  $\lambda = 0,004$ . Визначити число  $N$  повних коливань, які повинна зробити гиря, щоб амплітуда коливань зменшилася в  $n = 2$  рази. За який час  $t$  відбудеться це зменшення?

**1.88** Тіло масою  $m = 5$  г здійснює загасальні коливання. За час  $t = 50$  с тіло втратило 60 % своєї енергії. Визначити коефіцієнт опору  $r$ .

**1.89** Визначити період  $T$  загасальних коливань, якщо період  $T_0$  власних коливань системи дорівнює 1 с і логарифмічний декремент загасання коливань  $\lambda = 0,628$ .

**1.90** Визначити число  $N$  повних коливань системи, за які енергія системи зменшилася в  $n = 2$  рази. Логарифмічний декремент загасання коливань  $\lambda = 0,01$ .

**1.91** Тіло масою  $m = 1$  кг знаходиться у в'язкому середовищі з коефіцієнтом опору  $r = 0,05$  кг/с. За допомогою двох однакових пружин з коефіцієнтом жорсткості

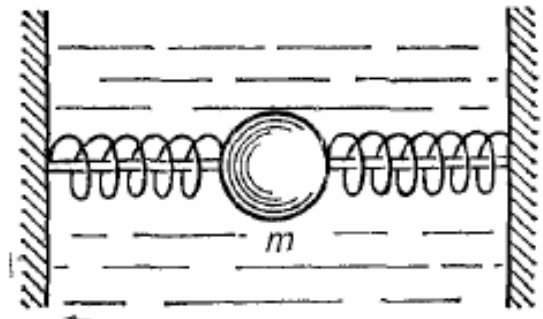


Рисунок 1.9

кожної  $k = 50$  Н/м тіло утримується в стані рівноваги, пружини при цьому не деформовані (рис. 1.9). Тіло змістили від стану рівноваги і відпустили. Визначити: 1) коефіцієнт загасання  $\beta$ ; 2) частоту  $\nu$  коливань; 3) логарифмічний декремент загасання коливань  $\lambda$ ; 4) число  $N$  коливань, по закінченні яких амплітуда зменшиться в  $e$  разів.

**1.92** Амплітуда загасальних коливань за час  $t_1 = 20$  с зменшилась удвічі. У скільки разів вона зменшиться за  $t_2 = \text{хв}$ ?

**1.93** Знайти добротність осцилятора, у якого власна частота коливань  $\nu_0 = 1$  кГц, а час релаксації, протягом якого амплітуда коливань зменшується в  $e$  разів,  $\tau = 60$  с.

**1.94** Вантаж масою  $m = 1$  кг, підвішений на пружині, коефіцієнт жорсткості якої  $k = 0,1$  Н/м, занурений у середовище з коефіцієнтом опору  $r = 0,05$  кг/с. Визначити добротність коливальної системи.

**1.95** Після  $N = 10$  повних коливань точки її амплітуда коливань зменшилася від  $A_0 = 10$  см до  $A = 6$  см. Коефіцієнт загасання коливань  $\beta$  дорівнює  $0,2$ . Записати закон руху точки.

**1.96** Добротність коливальної системи  $Q = 3$ , частота вільних коливань  $\omega = 150$  с<sup>-1</sup>. Визначити власну частоту коливань системи  $\omega_0$ .

**1.97** Загасальні коливання точки описуються законом  $x = a_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$ . Знайти: 1) амплітуду коливань і швидкість у момент часу  $t = 0$ ; 2) моменти часу, коли точка досягає крайніх положень.

**1.98** Тіло виконує крутильні коливання за законом  $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$ . Знайти: 1) кутову швидкість  $\dot{\varphi}$  і кутове прискорення  $\ddot{\varphi}$  тіла в момент часу  $t = 0$ ; 2) моменти часу, коли кутова швидкість має максимальне значення.

**1.99** Деяка точка виконує загасальні коливання з частотою  $\omega = 25$  рад/с. Знайти коефіцієнт загасання  $\beta$ , якщо в початковий момент часу швидкість точки

дорівнювала нулю, а її зміщення від положення рівноваги у  $\eta = 1,020$  рази менше за амплітуду в цей момент.

**1.100** Точка здійснює загасальні коливання. Частота коливань  $\omega$ , коефіцієнт загасання  $\beta$ . Визначити амплітуду швидкості точки як функції часу  $t$ , якщо в момент  $t = 0$ : 1) амплітуда її зміщення дорівнює  $a_0$ ; 2) зміщення точки  $x(0) = 0$  і проекція її швидкості  $v_x(0) = v_0$ .

**1.101** Є два загасальні коливання з відомими періодами  $T$  та коефіцієнтами загасання  $\beta$ :  $T_1 = 0,10$  мс,  $\beta_1 = 100 \text{ с}^{-1}$  і  $T_2 = 10$  мс,  $\beta_2 = 10 \text{ с}^{-1}$ . Яке з коливань загасає швидше?

**1.102** До невагомої пружини прикріпили вантаж, унаслідок чого пружина розтягнулася на  $\Delta x = 9,8$  см. Яким буде період коливання вантажу, якщо йому надати невеликий поштовх у вертикальному напрямку? Логарифмічний декремент загасання  $\lambda = 3,1$ .

**1.103** Визначити добротність математичного маятника, довжина якого  $l = 50$  см, якщо за проміжок часу  $\tau = 5,2$  хв його повна механічна енергія зменшилась у  $\eta = 4,0 \cdot 10^4$  разів.

**1.104** Провідник, який має форму квадратної рамки зі стороною  $a$ , підвішений на пружній нитці, знаходиться в однорідному горизонтальному магнітному полі з індукцією  $B$ . У стані рівноваги площина рамки паралельна вектору  $\vec{B}$  (рис. 1.10). Якщо рамку вивести зі стану рівноваги, вона починає виконувати малі коливання навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. Момент інерції рамки відносно

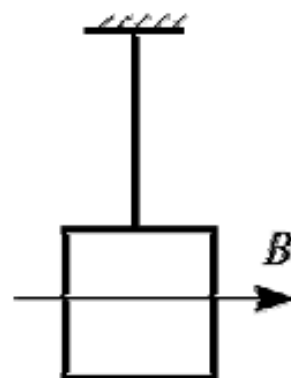


Рисунок 1.10.

цієї осі  $I$ , її електричний опір  $R$ . Нехтуючи індуктивністю рамки, знайти час, через який амплітуда її кутового повороту зменшиться в  $e$  разів.

**1.105** На горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя  $k = 0,10$  лежить брусок масою  $m = 0,50$  кг, який з'єднаний недеформованою пружиною зі стіною. Коефіцієнт жорсткості пружини  $\chi = 2,45$  Н/см, а її маса дуже мала. Брусок змістили в бік так, що пружина розтягнулася на  $x_0 = 3,0$  см, а потім відпустили. Знайти: 1) період коливання бруска; 2) кількість коливань, які виконає брусок до зупинення.

**1.106** Під дією сили тяжіння електродвигуна консольна балка, на якій він установлений, прогнулася на  $h = 1$  мм. При якій частоті обертання  $n$  якоря електродвигуна може виникнути небезпека резонансу?

**1.107** Вагон масою  $m = 80$  т має чотири ресори. Коефіцієнт жорсткості  $k$  пружин кожної ресори дорівнює  $500$  кН/м. При якій швидкості  $v$  вагон почне сильно розгойдуватися внаслідок поштовхів на стиках рейок, якщо довжина  $l$  рейки дорівнює  $12,8$  м?

**1.108** Коливальна система здійснює загасальні коливання з частотою  $\nu = 1000$  Гц. Визначити частоту  $\nu_0$  власних коливань, якщо резонансна частота  $\nu_{рез} = 998$  Гц.

**1.109** Визначити, на скільки резонансна частота відрізняється від частоти  $\nu_0 = 1$  кГц власних коливань системи, якщо система також характеризується коефіцієнтом загасання  $\beta = 400$  с<sup>-1</sup>.

**1.110** Визначити логарифмічний декремент загасання коливань  $\beta$  коливальної системи, для якої резонанс спостерігається при частоті, яка менша за власну частоту  $\nu_0 = 10$  кГц на  $\Delta\nu = 2$  Гц.

**1.111** Період  $T_0$  власних коливань пружинного маятника дорівнює 0,55 с. У в'язкому середовищі період  $T$  того самого маятника став дорівнювати 0,56 с. Визначити резонансну частоту  $\nu_{рез}$  коливань.

**1.112** Пружинний маятник (коефіцієнт жорсткості  $k$  пружини дорівнює 10 Н/м, маса  $m$  вантажу дорівнює 100 г) здійснює вимушені коливання у в'язкому середовищі з коефіцієнтом опору  $r = 2 \cdot 10^{-2}$  кг/с. Визначити коефіцієнт загасання  $\beta$  і резонансну амплітуду  $A_{рез}$ , якщо амплітудне значення зовнішньої сили  $F_0 = 10$  мН.

**1.113** Тіло здійснює вимушені коливання в середовищі з коефіцієнтом опору  $r = 1$  г/с. Вважаючи загасання малим, визначити амплітудне значення зовнішньої сили, якщо резонансна амплітуда  $A_{рез} = 0,5$  см і частота  $\nu_0$  власних коливань дорівнює 10 Гц.

**1.114** Амплітуди вимушених гармонічних коливань при частоті  $\nu_1 = 400$  Гц і  $\nu_2 = 600$  Гц рівні між собою. Визначити резонансну частоту  $\nu_{рез}$ . Загасанням знехтувати.

**1.115** До спіральної пружини, коефіцієнт жорсткості якої  $k = 10$  Н/м, підвісили гирку масою  $m = 10$  г і помістили всю систему у в'язке середовище. Взявши коефіцієнт опору  $r = 0,1$  кг/с, визначити: 1) частоту  $\nu_0$  власних коливань; 2) резонансну частоту  $\nu_{рез}$ ; 3) резонансну амплітуду  $A_{рез}$ , якщо зовнішня сила змінюється за гармонічним законом і її амплітудне

значення  $F_0 = 0,02$  Н; 4) відношення резонансної амплітуди до статичного зміщення під дією сили  $F_0$ .

**1.116** У скільки разів амплітуда вимушених коливань буде менша за резонансну амплітуду, якщо частота зміни зовнішньої сили буде більшою від резонансної частоти: 1) на 10 %? 2) удвічі? Коефіцієнт загасання  $\beta$  в обох випадках взяти рівним  $0,1\omega_0$  ( $\omega_0$  – циклічна частота власних коливань).

**1.117** Кулька масою  $m$  може виконувати незагасаючі гармонічні коливання біля точки  $x=0$  із власною частотою  $\omega_0$ . У момент  $t=0$ , коли кулька перебувала у стані рівноваги, до неї приклали зовнішню силу  $F = F_0 \cos\omega t$ , що збігається за напрямком з віссю  $x$ . Знайти рівняння вимушених коливань кульки  $x(t)$ .

**1.118** При частотах зовнішньої гармонічної сили  $\omega_1$  і  $\omega_2$  амплітуда швидкості частинки дорівнює половині максимального значення. Знайти: 1) частоту, що відповідає резонансній швидкості; 2) коефіцієнт загасання  $\beta$  і частоту загасальних коливань  $\omega$  частинки.

**1.119** Під дією зовнішньої вертикальної сили  $F = F_0 \cos\omega t$  тіло, підвішене на пружині, здійснює вимушені коливання за законом  $x = a \cos(\omega t - \varphi)$ . Знайти роботу сили  $F$  за період коливання.

*Практична робота № 2*  
**ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ**

**1. Мета роботи**

1. Дослідження незгасаючих коливань фізичного маятника.
2. Розрахунок моменту інерції і зведеної довжини фізичного маятника.

**2. Основні поняття**

*Коливаннями* називаються рухи або зміни стану, що мають повторюваність у часі. Коливання називаються *періодичними*, якщо значення фізичних величин, що змінюються в процесі коливань, повторюються через рівні проміжки часу.

Положення системи, в якому вона може знаходитися нескінченно довго, без дії на неї зовнішніх сил називають *станом рівноваги*.

Рух механічної системи біля її положення рівноваги називають *механічними коливаннями*.

*Вільні коливання* (незгасаючі (власні) та згасаючі коливання) це такі коливання, які відбуваються за відсутності зовні прикладеної змінної дії до системи. *Змушені коливання* устанавлюються у системі в результаті дії на неї змінних зовнішніх сил (періодична зовнішня сила в механічних системах або змінна ЕРС генератора в електромагнітних системах).

Найпростішу модель коливальної системи називають *гармонічним осцилятором*.

*Власними або незгасаючими* називаються коливання, за яких коливальна система не віддає енергію в зовнішнє середовище. Такі коливання описуються диференціальним рівнянням другого порядку, яке називають рівнянням гармонічного осцилятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1)$$

*Гармонічними коливаннями* називаються коливання, в яких коливна величина  $x$  змінюється протягом часу за законом синуса або косинуса. Загальне розв'язання диференціального рівняння (1) буде рівнянням власних гармонічних коливань:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{або} \quad x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (2)$$

де  $A$ ,  $\omega_0$  і  $\varphi_0$  – постійні величини, причому  $A > 0$  і  $\omega_0 > 0$ ;  $x(t)$  – зміщення коливної величини відносно положення рівноваги.

Вираз

$$\omega_0 t + \varphi_0 = \Phi \quad (3)$$

визначає значення зміщення  $x$  в даний момент часу і називається *фазою коливання*. У момент початку відліку часу ( $t = 0$ ) фаза дорівнює *початковій фазі коливань*  $\varphi_0$ .

Одиниця вимірювання фази – радіан [рад].

Якщо маятник вперше відхилиться ліворуч, тоді

$$x = x(t = 0) = -A \quad \text{і} \quad \varphi_0 = \pi, \quad (4)$$

при його відхиленні праворуч

$$x = x(t = 0) = +A \quad \text{і} \quad \varphi_0 = 0. \quad (4a)$$

Диференціювання (3) дає:

$$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5)$$

отже, *циклічна (колова) частота*  $\omega$  – похідна фази за часом (швидкість зміни фази), одиниця вимірювання – радіан за секунду [рад/с].

## ПАРАМЕТРИ КОЛИВАНЬ

*Періодом коливання*  $T$  називається той найменший проміжок часу, після закінчення якого повторюються значення всіх величин, що характеризують коливальний рух. За цей час здійснюється одне повне коливання.

*Частотою періодичних коливань*  $\nu$  називається число повних коливань, які здійснюються за одиницю часу:

$$\nu = 1/T. \quad (6)$$

Одиниця вимірювання частоти – Герц [Гц = с<sup>-1</sup>].

Фазовий цикл одного повного коливання відповідає  $2\pi$  радіанам (як період гармонічної функції). Тоді колова частота (5) є числом фазових циклів за проміжок часу:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad (7)$$

а період коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8)$$

Одиниця вимірювання періоду – [с].

### 2.1 Гармонічні коливання фізичного маятника

*Власні гармонічні коливання* – тип вільних коливань, які здійснює система під дією тільки однієї поперечної сили, яка прикладена до центру тяжіння системи і спрямована до положення рівноваги. *Повертну силу*  $F_{\text{пов}}$  також називають *квазіпружною силою*  $F$ . Квазіпружна сила – це сила, яка спрямована до положення рівноваги і пропорційна відстані  $x$  від положення рівноваги до точки прикладення сили.

Назва «квазіпружна сила» пов'язана з тим, що вона аналогічна силі, що виникає за малих деформацій пружних сил (закон Гука), так званої сили пружності

$$F_{\text{пов}} = -kx, \quad (9)$$

де  $x$  – зміщення від положення рівноваги;  $k$  – коефіцієнт пружності. Знак мінус у рівнянні (9) показує, що сила пружності завжди спрямована протилежно зміщенню.

Квазіпружною силою можна вважати поворотну складову сили тяжіння, яка діє на математичний маятник при його малих відхиленнях від вертикалі.

Таким чином, квазіпружні сили – це сили, які не є пружними за своєю природою, але подібні пружним за характером залежності їх від координати.

*Ідеальна система* – це ідеальна фізична модель системи без будь-яких енергетичних втрат. У реальних системах завжди є сили опору, які збільшують період коливань і зменшують їх амплітуду (див. лаб. роботу № 4-3). Якщо коливання у системі відбуваються без дисипації (розсіювання) енергії в зовнішнє середовище, то вони називаються *власними коливаннями*, а їх частота – *власною частотою*. Параметри власних коливань записуються з індексами "0".

Розглянемо власні механічні коливання фізичного маятника (рис. 1). *Фізичний маятник* – тверде тіло, закріплене одним кінцем до нерухомого підвісу в будь-якій точці, що здійснює коливання під дією сили тяжіння навколо нерухомої горизонтальної осі, яка проходить вище центру тяжіння тіла.

Метод опису таких коливань полягає у складанні і розв'язанні диференціальних рівнянь відповідних рухів. Якщо маятник виведений з положення рівноваги, тоді на нього діє обертаючий момент квазіпружної сили (рис. 1):

$$M = F_{\text{пов}} \cdot a = -m \cdot g \cdot a \cdot \sin \alpha, \quad (10)$$

де  $m$  – маса маятника;  $a$  – відстань від точки підвісу  $O$  стрижня (осі обертання) до центру тяжіння маятника (точка  $C$ );  $\alpha$  – малий кут відхилення маятника від положення рівноваги.

Застосуємо основне рівняння динаміки обертового руху

$$M = J \cdot \varepsilon \quad (11)$$

для опису руху маятника. У цьому рівнянні  $\varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$  – кутове прискорення;  $J$  – момент інерції фізичного маятника. З (10) і (11) отримаємо

$$-m \cdot g \cdot a \cdot \sin \alpha = J \cdot \varepsilon.$$

Момент інерції  $J$  є фізичним еквівалентом маси твердого обертового тіла. Наприклад, момент інерції обертаючої точки масою  $m$ , яка знаходиться на відстані  $l$  від осі обертання

$$J = m \cdot l^2. \quad (12)$$

Одиниця вимірювання моменту інерції в одиницях СІ –  $[\text{кг} \cdot \text{м}^2]$ .

*Математичний маятник* – матеріальна точка, закріплена на невагомій, нерозтяжній нитці, що здійснює коливання біля положення рівноваги.

Оскільки кут відхилення  $\alpha$  дуже малий, то  $\sin \alpha \approx \alpha$  (радіан). Отримаємо диференціальне рівняння коливань фізичного маятника:

$$-mga \cdot \alpha = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

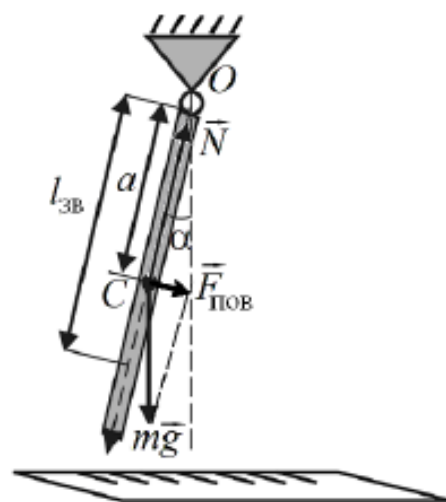


Рисунок 1– Повертна сила фізичного маятника

або

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mga}{J}\alpha = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0, \quad (13)$$

де коефіцієнт при  $\alpha$  у рівнянні (13) є квадрат циклічної частоти власних коливань  $\frac{mga}{J} = \omega_0^2$ . Власна частота і період таких коливань мають вигляд:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}} \quad (14)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (15)$$

Таким чином, коливальний рух фізичного маятника описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку (13). Загальне розв'язання такого рівняння буде рівнянням коливань фізичного маятника і має вигляд

$$\alpha = \alpha_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (16)$$

В окремому випадку (12), якщо маятник математичний,  $J = m \cdot l_{зв}^2$ , а період коливань такого маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_{зв}}{g}}. \quad (17)$$

Порівнюючи періоди (15) і (17), бачимо, що можна підібрати математичний маятник такої довжини

$$l_{зв} = \frac{J}{ma}, \quad (18)$$

за якої він матиме такий самий період, як і даний фізичний.  $l_{зв}$  називають *зведеною довжиною* фізичного маятника.

Використовуючи формулу (15) можна визначити момент інерції фізичного маятника

$$J = \frac{T_0^2 mga}{4\pi^2}, \quad (19)$$

а за формулою (18) – зведену довжину фізичного маятника  $l_{зв}$ .

### 3. Опис установки та методика вимірювання

**Прилади:** фізичний маятник, секундомір, міліметрова лінійка.

У даній роботі ми спостерігаємо власні коливання фізичного маятника, який є металевим стрижнем, здатним вільно обертатися у вертикальній площині (рис. 1). Вісь обертання стрижня проходить через один з його кінців і розташована перпендикулярно стрижню.

**Прямі вимірювання.** Маса маятника задана на металевому стрижні. Довжина маятника вимірюється за допомогою лінійки один раз, але з високою точністю. Приладова точність – 0,001м.

Викликають коливання маятника шляхом відхилення його на невеликі кути  $3^\circ \dots 5^\circ$  від положення рівноваги, тільки в цьому випадку коливання будуть близькими до гармонічних.

За невеликих кутів відхилення  $\alpha$  значення амплітуди обчислюється за допомогою рівняння:

$$A = l \cdot \sin \alpha = l \cdot \alpha = \frac{l \cdot \pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \quad (20)$$

де  $l$  – довжина маятника.

Подальші вимірювання проводяться п'ять разів.

Для визначення періоду коливань маятника  $T_i$ , за допомогою секундоміра вимірюється час 10 або більше повних коливань (це необхідно для збільшення точності його визначення). Секундомір запускають в той момент, коли маятник знаходиться в одному з крайніх положень, після чого ведуть відлік коливань. Розділивши цей час на число коливань, отримуємо період коливання маятника. Період обчислювати з точністю до тисячних часток секунди. Середній період коливань  $\langle T \rangle$  визначається як середнє арифметичне від періодів отриманих в результаті п'яти вимірювань.

Підставляючи в (7) середнє значення періоду коливань, розраховується середня циклічна частота, і записується рівняння коливань маятника з числовими коефіцієнтами  $A$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$ .

**Непряме вимірювання моменту інерції.** Студентам пропонується визначити момент інерції даного маятника, використовуючи отримані дані. Центр тяжіння однорідного стрижня знаходиться посередині його довжини, отже

$$a = l/2. \quad (21)$$

Підставивши (21) в (19), можна отримати рівняння для розрахунку експериментального значення моменту інерції:

$$J_{\text{екс}} = \frac{T_0^2 m g l}{8 \pi^2}. \quad (22)$$

Вважати, що прискорення вільного падіння дорівнює  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

**Теоретичне значення моменту інерції.** З теоретичної механіки відомо, що момент інерції обертаючогося стрижня навколо осі, яка проходить через один з його кінців, визначається виразом:

$$J_{\text{теор}} = \frac{m l^2}{3}. \quad (23)$$

#### 4. Статистична обробка результатів вимірювань

Для отримання результату *прямих вимірювань* величини  $x$  необхідно:

1) Експериментально визначити значення вимірюваної величини  $n$  разів ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ) і записати результат цих вимірювань у другому стовпці таблиці вимірювань. У першому стовпці таблиці вимірювань записується порядкове число вимірювання.

2) Обчислити *середнє значення* вимірюваної величини:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (24)$$

3) Знайти *відхилення*  $\Delta x_i$  отриманих величин від середнього значення вимірюваної величини і записати результати в третьому стовпці таблиці вимірювань:

$$\Delta x_1 = \langle x \rangle - x_1; \quad \Delta x_2 = \langle x \rangle - x_2; \quad \dots; \quad \Delta x_n = \langle x \rangle - x_n. \quad (25)$$

4) Піднести кожне відхилення до квадрата і записати в четвертому стовпці таблиці вимірювань. Потім підсумувати їх:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2. \quad (26)$$

5) Знайти абсолютну *статистичну похибку* результатів вимірювання  $\Delta x_{\text{ст}}$  за допомогою формули Стьюдента:

$$\Delta x_{\text{ст}} = t_{\alpha, n} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (27)$$

де  $\alpha$  – довірна ймовірність;  $n$  – число вимірювань;  $t_{\alpha, n}$  – коефіцієнт Стьюдента.

6) Якщо на приладі не зазначена його *абсолютна похибка*  $\Delta x_{\text{пр}}$ , то її можна визначити, знаючи клас точності приладу  $\beta$  за формулою:

$$\Delta x_{\text{пр}} = \frac{\beta \cdot x_{\text{max}}}{100}, \quad (28)$$

де  $x_{\text{max}}$  – межа шкали.

7) Знайти *повну абсолютну похибку* вимірювань:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{ст}})^2 + (\Delta x_{\text{пр}})^2}. \quad (29)$$

8) Обчислити *відносну похибку* вимірювань:

$$\delta = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}. \quad (30)$$

9) Записати *кінцевий результат* у вигляді *довірчого інтервалу* і *відносної похибки*:

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x)_{\delta} = (\dots \pm \dots)_{0,95}; \quad \delta_x \% = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\% = \dots \%. \quad (31)$$

Для отримання результату *непрямого вимірювання* величини у необхідно:

1) Обчислити *середнє значення* вимірюваної величини  $\langle y \rangle$  за формулою, підставляючи в неї середні значення змінних величин  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$ , наприклад:

$$\langle y \rangle = \frac{8 \langle a \rangle^4 \cdot \sqrt[3]{\langle b \rangle^2}}{7 \langle c \rangle^5}. \quad (32)$$

2) Обчислити *відносну похибку* вимірюваної величини  $\delta_y$  за задалегідь отриманою формулою, підставивши до неї відносні похибки вимірюваних прямих величин  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$ . Для нашого прикладу:

$$\delta_y = \sqrt{(4\delta_a)^2 + \left(\frac{2}{3}\delta_b\right)^2 + (5\delta_c)^2} = \sqrt{\left(4\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2 + \left(5\frac{\Delta c}{\langle c \rangle}\right)^2}, \quad (33)$$

де  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$  – абсолютні похибки виміряних прямих величин;  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$  – їх середні значення.

3) Знайти *абсолютну похибку* вимірюваної величини

$$\Delta y = \langle y \rangle \cdot \delta_y. \quad (34)$$

4) Записати *кінцевий результат* у вигляді *довірчого інтервалу* і *відносної похибки*:

$$y = (\langle y \rangle \pm \Delta y)_{0,95} = (\dots \pm \dots)_{0,95}; \quad \delta_y \% = \delta_y \cdot 100\% = \dots \%. \quad (35)$$

*Всі розраховані значення повинні містити три значущі цифри.*

## 5. Порядок виконання роботи й обробка результатів вимірювання

1. Зміряйте довжину маятника  $l$  з точністю, на яку розрахована лінійка. Запишіть масу маятника з металевого стрижня з точністю 0,001кг.

2. Зробіть прямі вимірювання часу 10-ти повних коливань за допомогою секундоміра і запишіть отримані дані в таблицю вимірювань. Повторіть це вимірювання, п'ять разів.

3. Визначте середнє значення періоду коливань (24), відхилення від середнього значення (25) і суму квадратів відхилень (26), абсолютну (29) і відносну (30) похибки періоду коливань. Запишіть кінцевий результат прямих вимірювань періоду у вигляді, як показано в (31).

4. Визначте амплітуду коливань маятника з допомогою (20) для кутових відхилень від стану рівноваги  $3^\circ \dots 4^\circ$ . Визначте циклічну частоту  $\omega_0$  згідно з (7) (початкову фазу  $\varphi_0$  вважати рівною нулю). Запишіть рівняння коливань маятника (у метрах) з числовими коефіцієнтами  $A$ ,  $\omega_0$  (див. формулу (2)).

5. Обчисліть експериментальне значення моменту інерції маятника  $J_{\text{екс}}$ , використовуючи формулу (22), і порівняйте його з теоретичним значенням  $J_{\text{теор}}$ , розрахованим за формулою (23). Обчисліть відносну (33) і абсолютну (34) похибки моменту інерції. Запишіть кінцевий результат непрямого вимірювання моменту інерції у вигляді, як показано (35).

6. Обчисліть середнє значення зведеної довжини  $l_{\text{зв}}$  фізичного маятника (18).

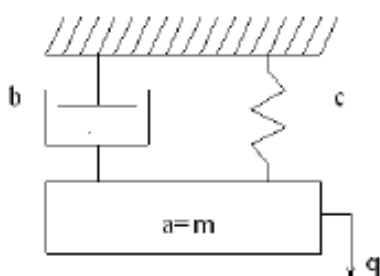
### Практична робота № 3

## ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

### 3.1. Визначення параметрів лінійної коливальної системи

Найменший інтервал часу, через який повторюється будь-яке значення коливної величини, називається періодом  $T$ , с. Величина обернена до періоду називається секундною частотою (число коливань за одну секунду)  $f$ , Гц. Система, положення якої визначається однією координатою, називається системою з однією ступінню вільності. Коливальна система з однією ступінню вільності повністю визначається трьома параметрами: масою  $M$  (або моментом інерції маси  $I_m$  при крутильних коливаннях), коефіцієнтом жорсткості  $C$ , коефіцієнтом тертя  $b$ . Коефіцієнт жорсткості  $C$  дорівнює силі (або моменту пари), що приходить на одиницю лінійного (або кутового) переміщення. Обернена величина називається коефіцієнтом податливості (узагальнене переміщення, що приходить на одиницю узагальненого навантаження). Коефіцієнт еквівалентного в'язкого тертя - це сила, що приходить на одиницю швидкості.

Розрахункова схема (модель) "Коливальна система з однією степеню свободи" (рис. 3.1.1) складається з трьох елементів: інерційного (маса), пружного (пружина), демпфируючого (демпфер), які відповідно позначимо  $a, b, c$  ( $a$  - коефіцієнт інерції,  $b$



Для лінійної коливальної системи три параметри являються сталими, коефіцієнт інерції  $a$  - виражається відповідно через виміряну масу вантажу, коефіцієнт в'язкого тертя  $b$  через експериментальне значення логарифмічного декременту  $\Lambda$  коливань (тут дана формула для коефіцієнту внутрішнього в'язкого тертя).

Рис. 3.1.1

$$a = M; \quad c = \frac{Q}{q_{cmQ}}; \quad b = b_1 c = \frac{\Lambda c}{\pi \omega_0} \quad (3.1.1)$$

У випадку кутового переміщення коливальної системи (рис.3.1.2)

$$c = \frac{M_{kp}}{\varphi_{kp}} = \frac{M_{kp}}{\frac{M_{kp} l}{GI_p}} = \frac{GI_p}{l}; \quad I_p - \text{полярний момент інерції} \quad (3.1.2)$$

$$a = I_M; \quad I_M = \frac{Mr^2}{2}; \quad (\text{момент інерції маси}) \quad (3.1.3)$$

У випадку поздовжніх переміщень (рис.3.1.3)

$$c = \frac{EF}{l}; \quad a = M; \quad q_{cmQ} = \frac{Ql}{EF}; \quad (3.1.4)$$

При коливанні вантажу на пружині (рис.3.1.4)

$$q_{cmQ} = \frac{64QR^3n}{Gd^4} \quad (3.1.5)$$

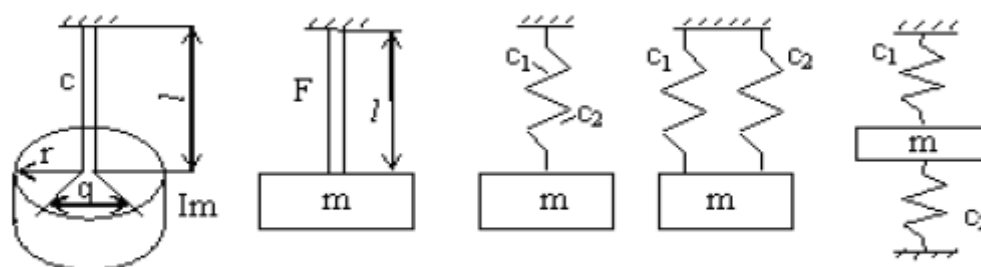


Рис. 3.1.2

Рис. 3.1.3

Рис. 3.1.4

Рис. 3.1.5

Рис. 3.1.6

Позначення тут відповідають прийнятим в курсі опору матеріалів. При паралельному з'єднанні лінійних пружин (рис.3.1.4, 3.1.5) коефіцієнти жорсткості складаються таким чином:  $c = c_1 + c_2$  (3.1.6)

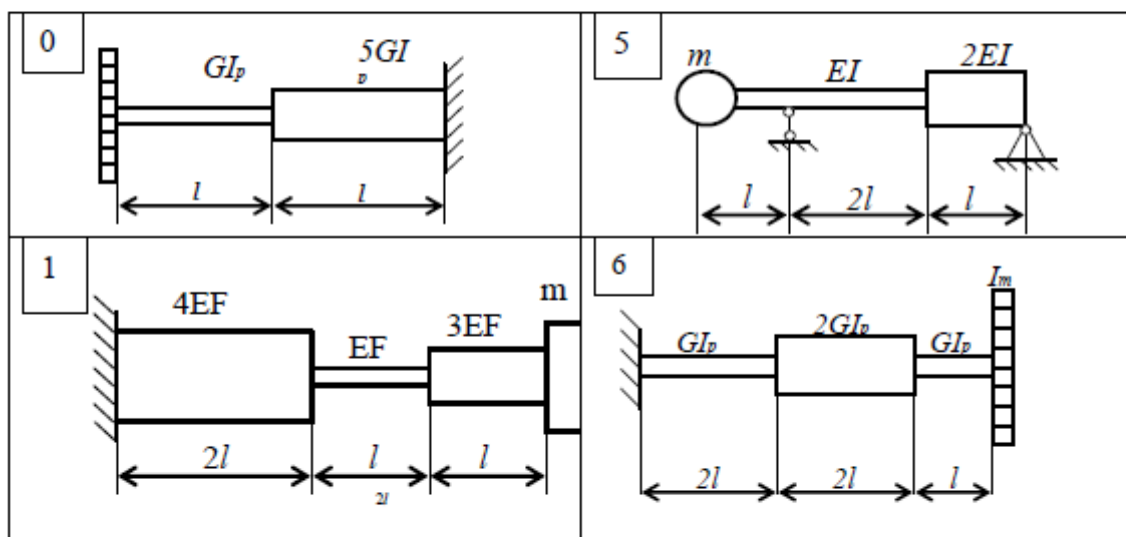
У випадку послідовного з'єднання (рис.3.1.4) складаються податливості:  $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$

(3.1.7)

### Задача 3.1.1

Визначення параметрів лінійної коливальної системи.

Для представлених на рис.3.1.8 розрахункових схем визначити коефіцієнти жорсткості.



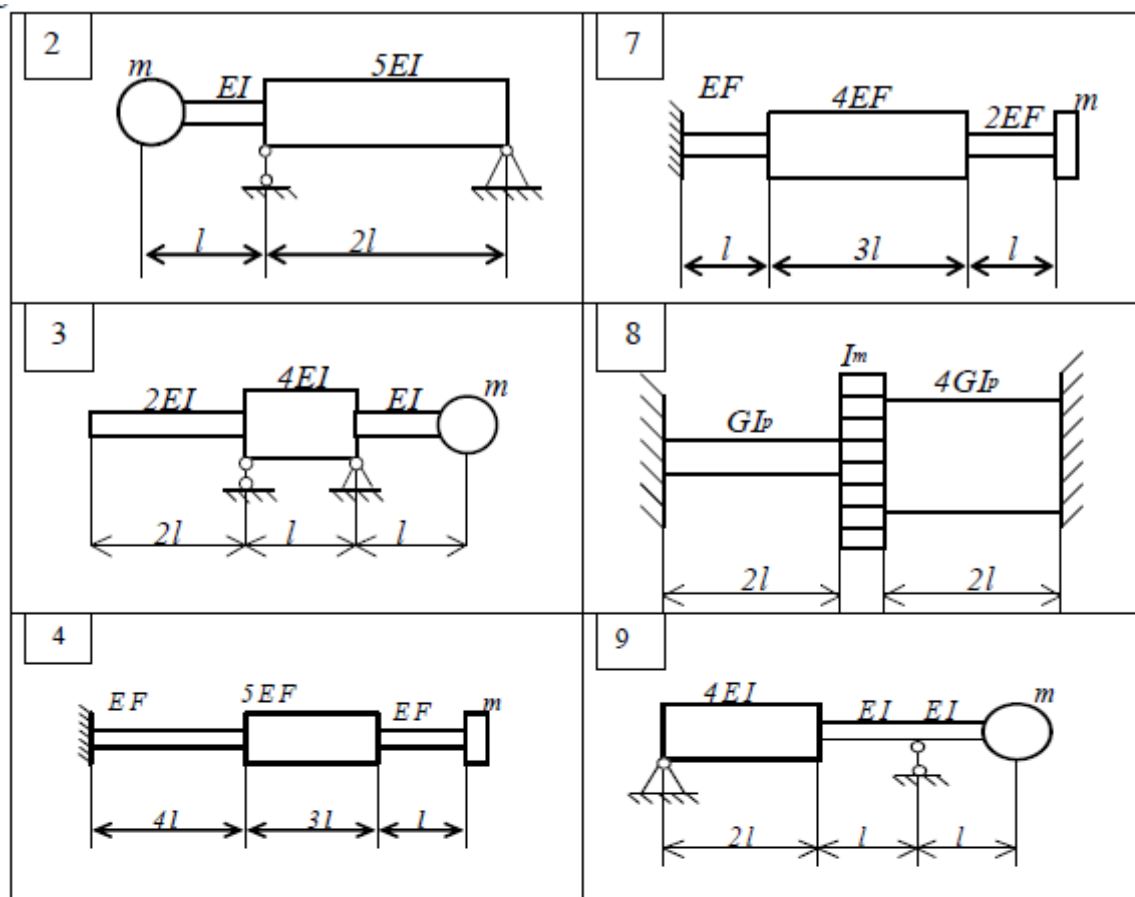


Рис. 3.1.8

### 3.2 Найпростіші способи складання диференціальних рівнянь коливань.

Реальні коливальні системи складаються з нескінченного числа матеріальних точок та мають нескінченне число ступенів вільності. Для спрощення розрахунків виконують схематизацію, таким чином замінюють реальну систему розрахунковою моделлю: системою з однією та системою з багатьма ступенями вільності в залежності від заданої точності.

Положення розрахункової моделі механічної системи з одним ступенем вільності, визначається однією узагальненою координатою  $q$ . За допомогою такої моделі приблизно розраховується тільки найменша (основна) частота власних коливань системи.

Якщо прийнята розрахункова модель являється вільною системою, рівняння її коливань складаються за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду в узагальнених координатах  $q_j$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (3.2.1)$$

Для складання рівнянь коливань застосовується також другий закон Ньютона, принцип Гамільтона-Остроградського, принцип Д'Аламбера, а також принципи аналітичної механіки.

У випадку лінійно-пружних систем для виводу рівнянь малих коливань можна застосувати методи будівельної механіки – метод переміщень, метод сил.

$$Q_j = \sum_{k=1}^n c_{jk} q_k; \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (3.2.2)$$

де  $Q_j$  - узагальнена сила,  $c_{jk}$  - питома реакція в  $j$ -й точці викликані одиничним переміщенням  $k$ -ої точки.

За другим методом, навпаки, переміщення  $j$ -ої точки в  $k$ -му напрямку виражається через узагальнені сили  $Q_k$ .

$$q_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} Q_k; \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (3.2.3)$$

де  $\delta_{jk}$  - питоме переміщення  $j$ -ої точки, під дією одиничної сили прикладеної в  $k$ -й точці.

Враховуючи кількість узагальнених сил за принципом Д'Аламбера сили інерції, отримаємо диференціальне рівняння коливань, підставляючи в рівняння (3.2.2) та (3.2.3) вирази для

$$Q_j = -M_j \ddot{q}_j \quad \text{або} \quad Q_k = -M_k \ddot{q}_k \quad (3.2.4)$$

Тоді рівняння вільних коливань з одним ступенем вільності буде мати вигляд:

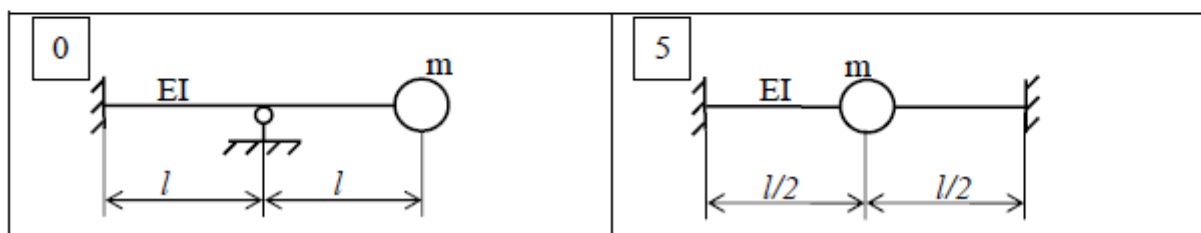
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M}} \quad (3.2.5)$$

$$\text{Або} \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (3.2.6)$$

$$\text{де} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M}} \quad (3.2.7)$$

### Задача 3.2.1

Для один раз статично невизначеної системи (рис.3.2.1) скласти диференціальне рівняння вільних коливань, та визначити першу власну частоту коливань.



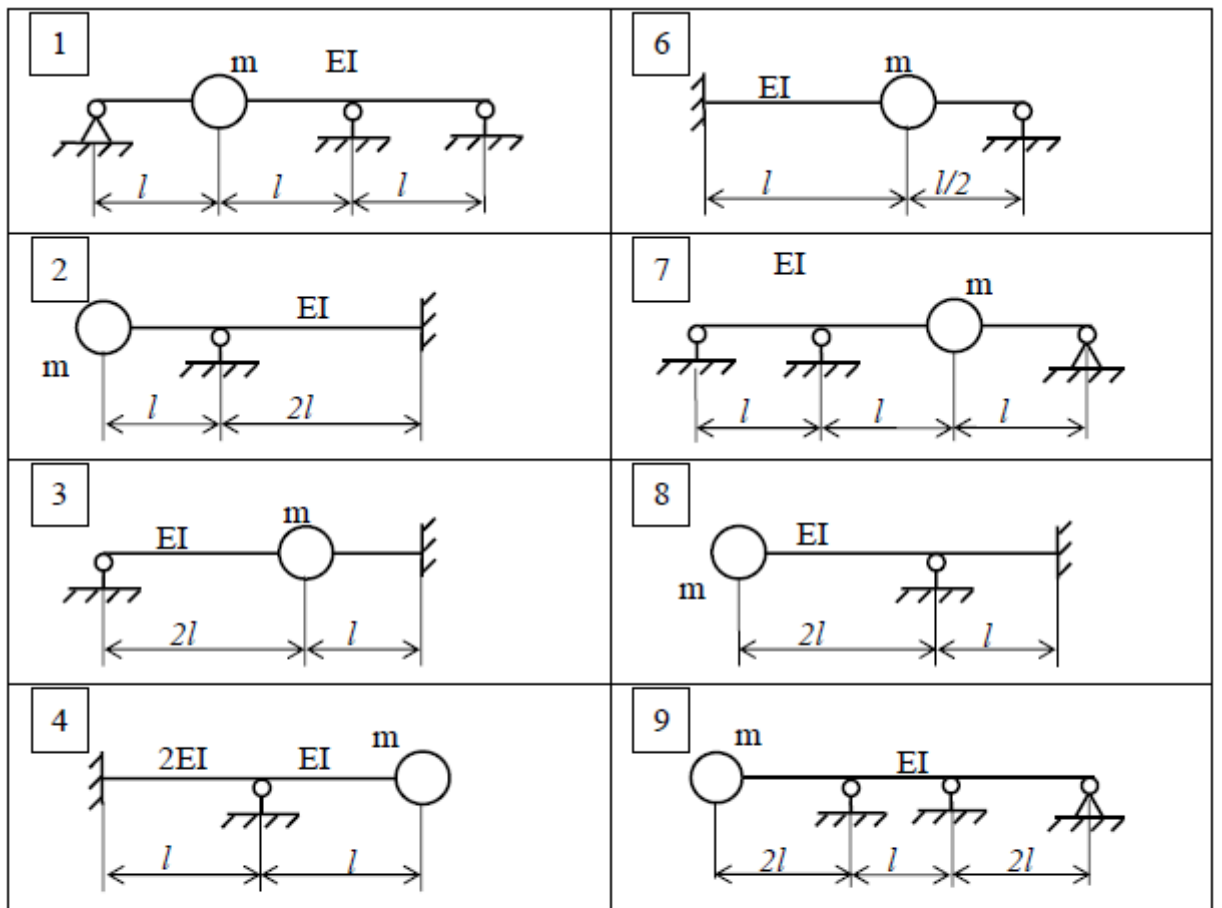
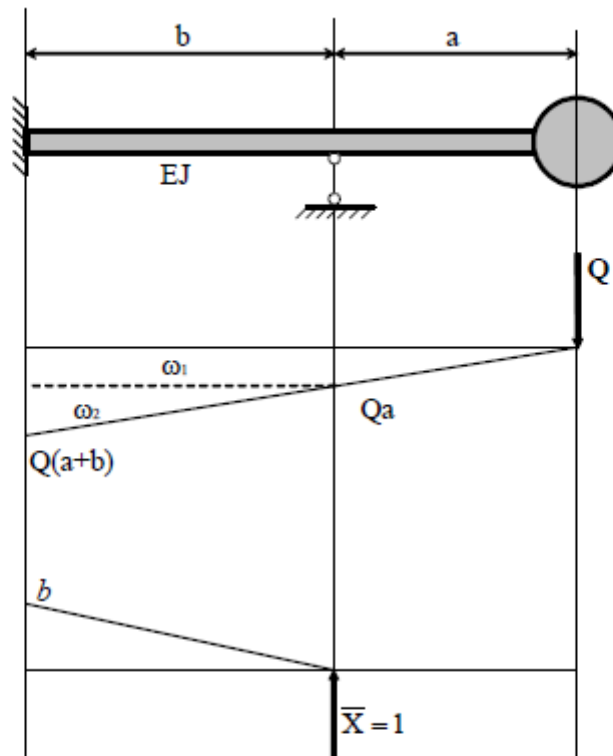


Рис. 3.2.1

### 3.2.2 Приклад розв'язку

Розглянемо один раз статично невизначену лінійну коливальну систему:



План розв'язку:

Розкриємо статичну невизначеність системи із застосуванням методу сил.  
Запишемо канонічне рівняння методу сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

коефіцієнти  $\delta_{11}$  та  $\Delta_{1P}$  знайдемо за допомогою методу Верещагіна

$$\delta_{11}EJ = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot b = \frac{1}{3}b^3$$

$$\Delta_{1P}^1 EJ = \omega_1 \cdot \bar{M}_{C1} = -Qa \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot b = -\frac{1}{2}Qab^2$$

$$\Delta_{1P}^2 EJ = \omega_2 \cdot \bar{M}_{C2} = -\frac{1}{2} \cdot Qb \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot b = -\frac{1}{3}Qab^3$$

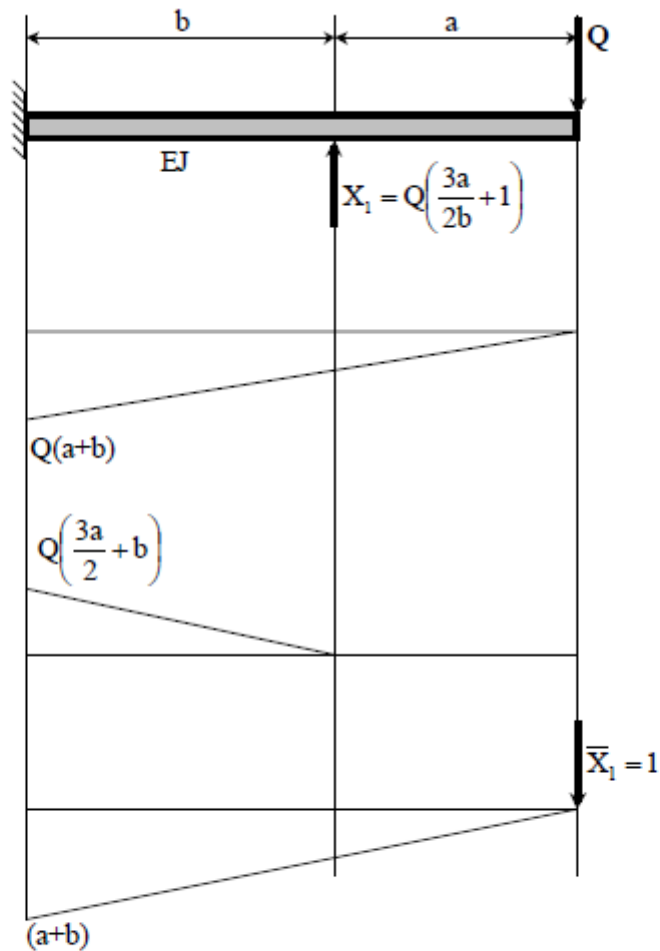
$$\Delta_{1P} EJ = \Delta_{1P}^1 EJ + \Delta_{1P}^2 EJ = -Q \left( \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}b^3 \right)$$

Знаючи  $\delta_{11}$  та  $\Delta_{1P}$  обчислюємо із канонічного рівняння невідому силу

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

;

$$X_1 = Q \left( \frac{3a}{2b} + 1 \right);$$



Знаходимо статичне переміщення точки прикладання сили

$$q_{cm} EJ = \left[ -\frac{1}{2} \cdot Q \left( \frac{3}{2} a + b \right) \cdot b \cdot \left( a + \frac{2}{3} b \right) \right] + \left[ \frac{1}{2} \cdot Q(a+b) \cdot (a+b) \cdot \frac{2}{3} \cdot (a+b) \right] =$$

$$= Q \left( \frac{1}{4} b a^2 + \frac{1}{3} a^3 \right) = Q a^2 \left( \frac{4a + 3b}{12} \right)$$

Обчислюємо жорсткість балки

$$c = \frac{Q}{q_{cm}} = \frac{12QEJ}{a^2(4a+3b)Q} = \frac{12EJ}{a^2(4a+3b)};$$

Знаючи жорсткість визначаємо власну частоту коливань

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{12}{a^2(4a+3b)} \frac{EJ}{m}};$$

Запишемо диференційне рівняння її коливань

$$\ddot{q} + \frac{12EJ}{a^2(4a+3b)m} q = 0$$

### 3.3.1 Розв'язок рівнянь власних коливань систем з одним ступенем вільності.

Часні розв'язки рівняння (3.2.6) шукаємо у вигляді

$$q = Ve^{i\omega t} \quad (3.3.1)$$

за методом Ейлера. Підставляючи (3.3.1) в (3.2.6) отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (3.3.2)$$

Його корені будуть чисто уявними та комплексно спряженими

$$\lambda_1 = i\omega_0; \lambda_2 = -i\omega_0 \quad (3.3.3)$$

В загальному розв'язку:  $q = B_1 e^{i\omega_0 t} + B_2 e^{-i\omega_0 t}$  (3.3.4)

Сталі інтегрування треба взяти комплексно спряженими

$B_1 = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}; B_2 = \frac{A}{2} e^{i\varphi}$  тоді (3.3.4) буде в дійсному вигляді:

$$q = A \frac{e^{i(\omega_0 t - \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t - \varphi)}}{2} = A \cos(\omega_0 t - \varphi); \quad (3.3.5)$$

$$\text{або } q = A \cos \varphi \cos \omega_0 t + A \sin \varphi \sin \omega_0 t = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t; \quad (3.3.6)$$

$$\text{де } A \cos \varphi = c_1; A \sin \varphi = c_2; \operatorname{tg} \varphi = \frac{c_2}{c_1}. \quad (3.3.7)$$

Сталі інтегрування  $c_1$  та  $c_2$  (або  $A, \varphi$ ) знаходимо з початкових умов.

Можливі чотири типи початкових умов (при  $t=0$ )

- 1)  $q = \dot{q}_0; \dot{q} = q_0$  (загальний випадок)
- 2)  $q = 0; \dot{q} = q_0$  (удар з миттєвою початковою швидкістю)
- 3)  $q = q_0; \dot{q} = 0$  (відхилення без початкової швидкості)
- 4)  $q = 0; \dot{q} = 0$  (тривіальні початкові умови)

В загальному випадку  $c_1 = q_0; c_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}$ ,

$$\text{Тоді } A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\right)^2}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0 q_0}; \quad (3.3.8)$$

$$q = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (3.3.9)$$

Аналіз розв'язку лінійного рівняння.

- 1) Власні коливання являються гармонійними та відбуваються навколо положення рівноваги;
- 2) параметр  $\omega_0$  - кутова частота, яка називається власною;
- 3) власна частота  $\omega_0$  залежить від відношення коефіцієнтів жорсткості та інерції, але не залежить від початкових умов та вибору узагальнених координат.

#### Приклад 3.3.1.

На вільно оперту балку довжиною  $l=3,05\text{ м}$  та згинальною жорсткістю  $EI=5,86 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$  з висоти  $h=0,013\text{ м}$  в середньому перерізі прольоту балки падає вантаж вагою  $Q=910\text{ Н}$ . Нехтуючи розподіленою масою балки та вважаючи, що вантаж та балка після першого дотику не відокремлюються одне від одного при коливаннях, обчислити частоту та амплітуду результируючих вільних коливань (рис.3.3.1).

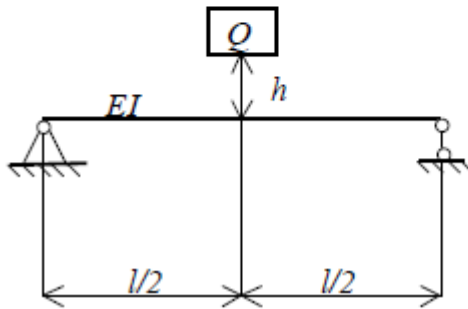


Рис.3.3.1

Розв'язок: початкові умови мають вигляд:

$$q_0 = -\delta_{CT}; \dot{q}_0 = \sqrt{2gh}$$

власна частота визначається за формулою:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

де  $c = \frac{Q}{q_{CTQ}};$

$$q_{CTQ} = \frac{Ql^3}{48EI} = \frac{910 \cdot 3,05^3}{48 \cdot 5,86 \cdot 10^4} = 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}$$

$$\omega_0 = 2F \cdot 5,19c^{-1}; f = 5,19c^{-1}$$

$$A = \sqrt{(-\delta_{CT})^2 + 2\lambda\delta_{CT}} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\right)^2} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}$$

### Задача 3.3.1

Знайти власну частоту та амплітуду коливань коливальної системи зображеної на рис. 3.3.2. Дані взяті згідно свого варіанту з таблиці 3.3.1

Табл.3.3.1

N	Q(Н)	H(м)	L(м)	E(МПа)	I(см)
0	900	0,012	2,06	$2 \cdot 10^5$	350
1	810	0,017	3,04	$2 \cdot 10^5$	572
2	950	0,019	4,02	$2 \cdot 10^5$	198
3	670	0,013	2,08	$2 \cdot 10^5$	873

4	800	0,012	4,05	$2 \cdot 10^5$	350
5	390	0,009	3,05	$2 \cdot 10^5$	198
6	990	0,031	4,06	$2 \cdot 10^5$	572
7	845	0,019	5,08	$2 \cdot 10^5$	1290
8	632	0,021	6,04	$2 \cdot 10^5$	873
9	1000	0,024	3,08	$2 \cdot 10^5$	198

### 3.4 Приведення систем з нескінченним числом ступенів вільності( або з декількома ступенями вільності) до систем з одним ступенем вільності.

#### Метод Релея

Якщо коливальна система має скінченне або нескінченне число ступенів вільності, то методом Релея її можна наближено звести до системи з одним ступенем вільності. Власна частота останньої буде трохи вищою за основну частоту первинної системи.

За методом Релея вибираємо форму коливань, яка задовольняє кінематичні граничні умови. Обчислимо амплітудне значення кінетичної і потенціальної енергій первинної системи і прирівняємо до виразів відповідних енергій моделі системи з одним ступенем вільності.

Наприклад, при згинних коливаннях балки за гармонічним законом

$$y(x,t) = AY(x) \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad ; \quad \dot{y} = -A\omega_0 Y(x) \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

амплітудні значення кінетичної та потенціальної енергій

$$T_{\max} = \frac{(A\omega_0)^2}{2} \int_0^l \rho F Y^2 dx \quad ; \quad \Pi_{\max} = \frac{A^2}{2} \int_0^l EJ (Y'')^2 dx.$$

Ці величини зіставимо з відповідними виразами енергій моделі системи з одним ступенем вільності або першу величину з другою. При цьому знаходимо зведені коефіцієнти інерції та жорсткості для еквівалентної системи

$$a = M_{\text{зв}} \int_0^l \rho F Y^2 dx \quad ; \quad c = c_{\text{зв}} M_{\text{зв}} \int_0^l EJ (Y'')^2 dx,$$

а також формулу Релея для основної власної частоти коливань

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a} = \frac{\int_0^l EJ (Y'')^2 dx}{\int_0^l \rho F Y^2 dx} \quad (3.4.1)$$

Аналогічно дістанемо формули для квадратів основних частот при поздовжніх і крутильних коливаннях стрижня

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a} = \frac{\int_0^l EI(U')^2 dx}{\int_0^l \rho F U^2 dx}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{a} = \frac{\int_0^l GJ_p(\Phi')^2 dx}{\int_0^l \rho J_p \Phi^2 dx}.$$

Формула Релея дає точні значення частоти, якщо  $Y(x)$ - точне рівняння форми коливань.

Якщо крім розподіленої маси в перерізі  $x_i$  прикладено зосереджену масу, то у виразі для кінетичної енергії з'являється доданок  $\frac{1}{2} \sum_i M_i [Y(x_i)A]^2 \omega_0^2$ , а у формулі (3.4.1)- член  $\sum_i M_i Y^2(x_i)$ .

Наближені вирази для форм коливань  $Y(x), U(x), \Phi(x)$  нормують для того, щоб їх значення у точці зведення дорівнювали одиниці.

**Приклад 3.4.1.** Визначити методом Релея основну кутову частоту згинних коливань балки з двома зосередженими масами (рис.3.4.1)  $M_0$  без врахування маси бали, прийняв основну форму коливань  $y(x) = \sin \frac{\pi}{l} x$ . Точка приведення- середина балки.

Визначити власну частоту коливань системи.

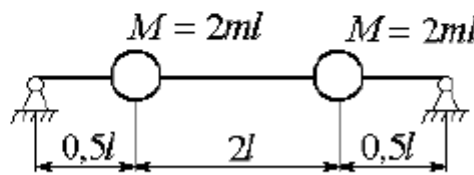


Рис. 3.4.1 Коливальна система

$$y = y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t - \varphi);$$

Перше наближення

$$Y(x) = \sin \frac{\pi x}{3l}.$$

Кінетична енергія системи:

$$T = \frac{1}{2} M \cdot \dot{y}^2(0.5l, t) + \frac{1}{2} M \cdot \dot{y}^2(2.5l, t).$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_0^2 [M \cdot Y^2(0.5l) + \frac{1}{2} M \cdot Y^2(2.5l)] =$$

$$= \frac{1}{2} \omega_0^2 M (\sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2} \omega_0^2 M (0.5^2 + 0.5^2) = \frac{\omega_0^2 M}{4}.$$

Потенціальна енергія системи

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^{3l} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx;$$

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} EI \int_0^{3l} \left( \frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx;$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = - \left( \frac{\pi}{3l} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{3l};$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} &= \frac{1}{2} EI \int_0^{3l} \left[ \left( - \frac{\pi}{3l} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{3l} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3l} \right)^4 EI \int_0^{3l} \sin^2 \frac{\pi x}{3l} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3l} \right)^4 EI \int_0^{3l} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{3l} \right) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3l} \right)^4 EI \left( x - \frac{3l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{3l} \right) \Big|_0^{3l} = \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{\pi}{3l} \right)^4 EI = \frac{\pi^4 EI}{108l^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \Pi_{\max}; \\ \frac{\omega_0^2 M}{4} &= \frac{\pi^4 EI}{108l^3} \Rightarrow \omega = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{27l^3 M}}. \end{aligned}$$

Друге наближення

$$Y(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{3l} + a_3 \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$Y''(x) = - \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \left( \frac{a_1}{9} \sin \frac{\pi x}{3l} + a_3 \sin \frac{\pi x}{l} \right);$$

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \omega_0^2 M [Y^2(0.5l) + Y^2(2.5l)] = \frac{1}{2} \omega_0^2 M \left[ \left( a_1 \sin \frac{\pi}{6} + a_3 \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 = \right. \\ &+ \left. \left( a_1 \sin \frac{5\pi}{6} + a_3 \sin \frac{5\pi}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \omega_0^2 M \left[ \left( \frac{1}{2} a_1 + a_3 \right)^2 + \left( \frac{1}{2} a_1 + a_3 \right)^2 \right] = \\ &= \omega_0^2 M \left( \frac{1}{2} a_1 + a_3 \right)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{1}{2} EI \int_0^{3l} (Y'')^2 dx = \frac{1}{2} EI \int_0^{3l} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \left[ \frac{a_1}{9} \sin \frac{\pi x}{3l} + a_3 \sin \frac{\pi x}{l} \right]^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \int_0^{3l} \left( \frac{a_1^2}{81} \sin^2 \frac{\pi x}{3l} + \frac{2a_1 a_3}{9} \sin \frac{\pi x}{3l} \sin \frac{\pi x}{l} + a_3^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \left( \frac{a_1^2}{81} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3l + \frac{a_3^2}{2} \cdot 3l \right) = \frac{3}{4} EI \frac{\pi^4}{l^3} (a_1^2 + a_3^2); \end{aligned}$$

$$T_0 - \Pi_0 = \omega_0^2 M \left( \frac{1}{2} a_1 + a_3 \right)^2 - \frac{3}{4} EI \frac{\pi^4}{l^3} (a_1^2 + a_3^2);$$

$$\frac{\partial(T_0 - \Pi_0)}{\partial a_1} = 0: \quad \omega_0^2 M \left( \frac{1}{2} a_1 + a_3 \right) - \frac{3}{162} EI \frac{\pi^4}{l^3} a_1 = 0;$$

$$\frac{\partial(T_0 - \Pi_0)}{\partial a_3} = 0: \quad 2\omega_0^2 M \left( \frac{1}{2} a_1 + a_3 \right) - \frac{3}{2} EI \frac{\pi^4}{l^3} a_3 = 0.$$

Отримали систему рівнянь відносно невідомих  $a_1$  та  $a_3$  :

$$\begin{cases} a_1 \left( \frac{1}{2} \omega_0^2 M - \frac{3EI \pi^4}{162 l^3} \right) + \omega_0^2 M a_3 = 0 \\ a_1 \omega_0^2 M + a_3 \left( 2\omega_0^2 M - \frac{3EI \pi^4}{2 l^3} \right) = 0 \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює нулю:

$$\Delta = \omega_0^4 M^2 - \frac{3}{4} EI \frac{\pi^4}{l^3} \omega_0^2 M - \frac{3}{81} EI \frac{\pi^4}{l^3} \omega_0^2 M + \frac{9}{324} E^2 I^2 \left( \frac{\pi^4}{l^3} \right)^2 - \omega_0^4 M^2 = 0$$

Звідки знаходимо значення власної частоти коливань:

$$\begin{aligned} \frac{85}{108} EI \frac{\pi^4}{l^3} \omega_0^2 M &= \frac{9}{324} E^2 I^2 \left( \frac{\pi^4}{l^3} \right)^2; \\ \omega_0 &= \pi^2 \sqrt{\frac{243}{6885} \frac{EI}{l^3 M}} = \pi^2 \sqrt{0.035 \frac{EI}{l^3 M}}. \end{aligned}$$

**Задача 3.4.1** Для систем зображених на рис. 3.4.2 визначити першу власну частоту за методом Релея в першому та другому наближенні ( $k=1$ )

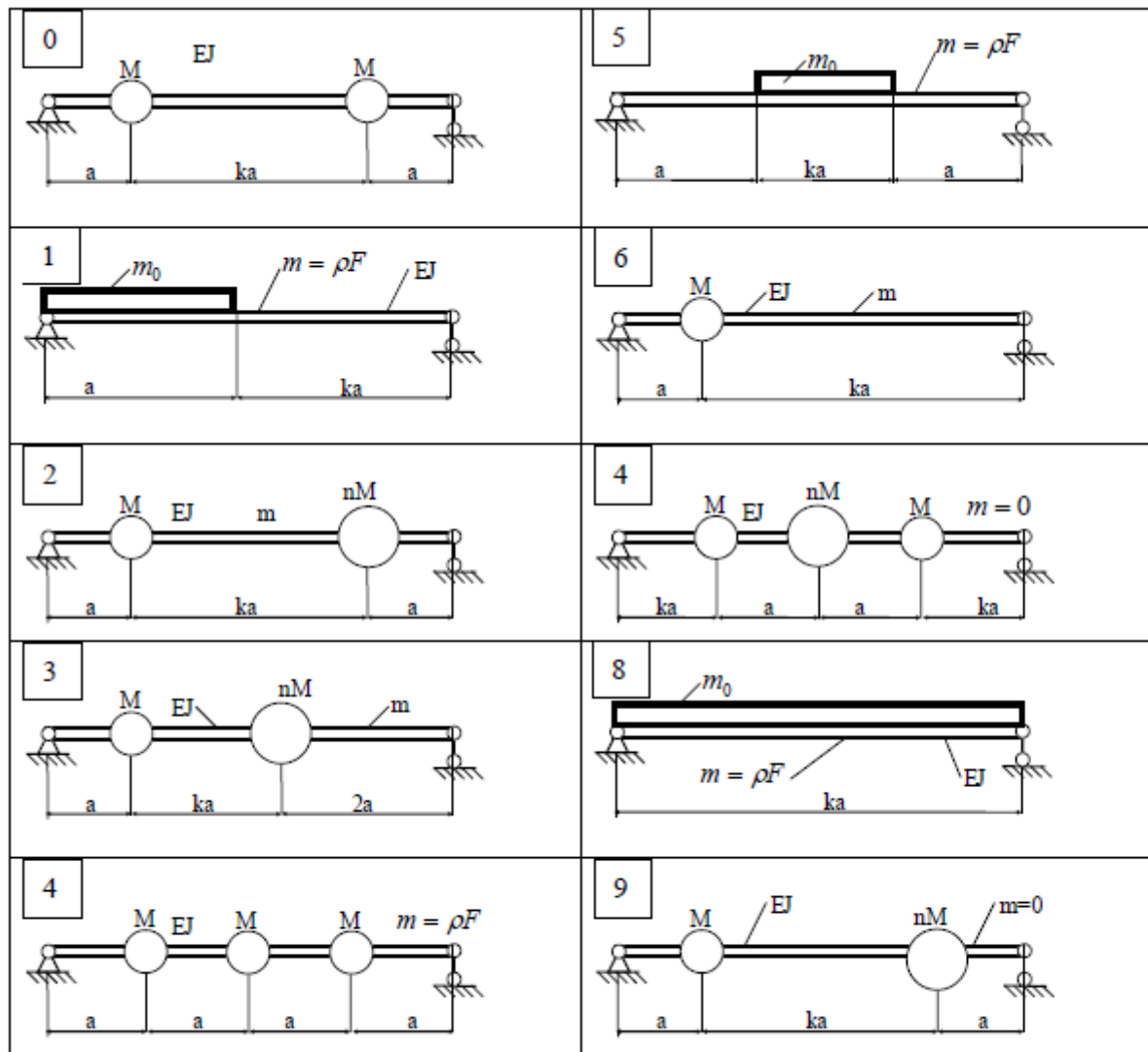


Рис. 3.4.2

### 3.5 Вимушені коливання системи з одним ступенем вільності без урахування тертя

Рівняння малих вимушених коливань відносно положення стійкої рівноваги має вигляд:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F}{a} \cos pt \quad (3.5.1)$$

Тут  $p$  та  $\omega$  амплітуда та частота змушуючої сили. Часний розв'язок (3.5.1) шукаємо в вигляді

$$q = A \cos(pt - \varphi). \quad (3.5.2)$$

де  $A$  та  $\varphi$  амплітуда та кут зсуву фази переміщень відносно фази змушуючої сили підлягають визначенню. Підставивши (3.5.2) в (3.5.1) отримаємо

$$\dot{q} = -A\omega \sin(pt - \varphi); \quad \ddot{q} = -A\omega^2 \cos(pt - \varphi)$$

$$-A\omega^2 \cos(pt - \varphi) + A\omega_0^2 \cos(pt - \varphi) = \frac{F}{a} \cos pt \quad (3.5.3)$$

$$\text{або } A(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos pt \cos \varphi + \sin pt \sin \varphi) = \frac{F}{a} \cos pt \quad (3.5.4)$$

звідси слідує, що (3.5.3) буде задовольняти початковому рівнянню за наступних значень коефіцієнтів:

$$A = \frac{F}{a|\omega_0^2 - p^2|}; \quad \varphi = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \omega_0^2 - p^2 > 0 \\ \pi, \text{ якщо } \omega_0^2 - p^2 < 0 \end{cases} \quad (3.5.5)$$

при  $\omega_0^2 = p^2$  - резонанс.

Загальним розв'язком (3.5.1) поза резонансною зоною буде:

$$q = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{a|\omega_0^2 - p^2|} \cos \omega t \quad (3.5.6)$$

Прийmemo для скорочення викладень тривіальні початкові умови

$$q_0 = 0; \quad \dot{q}_0 = 0 \text{ при } t = 0; \quad c_1 = -\frac{F}{a|\omega_0^2 - p^2|}; \quad c_2 = 0 \quad (3.5.7)$$

Тоді (3.5.6) переписеться так:

$$q = \frac{F}{a|\omega_0^2 - p^2|} (\cos pt - \cos \omega_0 t) \quad (3.5.8)$$

Тут перший доданок описує чисто змушені коливання, які не залежать від початкових умов і які відбуваються з частотою змушуючої сили, другий доданок описує вільні супроводжуючі коливання або інакше вимушені коливання, що відбуваються з власною частотою.

Формула (3.5.4) для амплітуди змушених коливань, що встановилися має вигляд:

$$A = \frac{F}{a|\omega_0^2 - p^2|} = \frac{F}{a\omega_0^2 \left|1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{F}{c \left|1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{q_{стп}}{\left|1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}\right|} \quad (3.5.9)$$

Відношення амплітуди  $A$  - змушених коливань до статичного прогину від амплітудного значення змушуючої сили називається коефіцієнтом динамічного підсилення і позначається  $\chi$  :

$$\chi = \frac{A}{q_{стп}} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (3.5.10)$$

звідки  $A = \chi q_{стп}$

### Приклад 3.5.1

Ротор електромотора має частоту обертання  $n = 900 \text{ об/хв}$ .

Із-за невірноваженості ротора виникає гармонійна сила  $F \cos pt$  (мал.3.5.1)

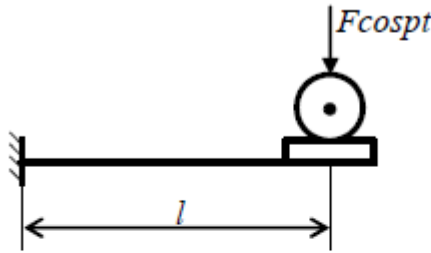


Рис.3.5.1

Необхідно:

1. Визначити при якому значенні довжини  $l$  настане резонанс.
2. На якій відстані  $l$  потрібно встановити двигун, щоб частота  $\omega_0$  власних коливань балки була на 30% більше частоти збурюючої сили  $F$ . Для останнього випадку обчислити амплітуду вимушених коливань і максимальні динамічні напруження в балці. Масу балки не враховувати.

Маса мотора  $M = 100 \text{ кг}$ ;  $F = 0.2 \text{ кН}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $I_z = 254 \text{ см}^4$ ;  $W_z = 37.2 \text{ см}^3$ .

Розв'язок.

1. Частота змушуючої сили визначається за формулою  $p = \frac{\pi n}{30} = 34.25 \text{ с}^{-1}$ .

2. Визначимо довжину балки при резонансі  $p = \omega_0$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}; \quad c = \frac{3EI_z}{l^3}; \quad \frac{3EI_z}{l^3 m} = p^2;$$

отже

$$l = \sqrt[3]{\frac{3EI_z}{mp^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}}{100 \cdot 94.25^2}} = 1.2 \text{ (м)}.$$

3. Довжину балки  $l_1$  вдалині від резонансу визначаємо виходячи зі співвідношення

$$\frac{p}{\omega_0} = \frac{1}{1.3} \quad \text{або} \quad \omega_0 = 1.3p.$$

$$\text{Отже } \frac{c}{m} = (1.3p)^2, \quad \text{тоді } l_1 = \sqrt[3]{\frac{3EI_z}{m(1.3p)^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}}{100 \cdot (1.3 \cdot 94.25)^2}} = 1 \text{ (м)}$$

4. Амплітуда вимушених коливань вдалині від резонансу за відсутності тертя дорівнює:

$$A = \chi q_{\text{стп}}; \quad q_{\text{стп}} = \frac{Fl_1^3}{3EI}; \quad \chi = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}\right|};$$

$$A = \frac{Fl_1^3}{3EI \left|1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}\right|} = \frac{0.2 \cdot 1000 \cdot 1^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{1.3^2 p^2}\right|} = 0.32 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}$$

5. Визначимо статичне відхилення від власної ваги ( $Q = mg$ ).

$$q_{ст\Omega} = \frac{mgl_1^3}{3EI_z} = \frac{10^3 \cdot 9.81 \cdot 1^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}} = 0.644 \cdot 10^{-3} (M)$$

$$6. \text{ Загальний прогин балки } q_{дин} = q_{ст\Omega} + A = q_{ст\Omega} \left( 1 + \frac{A}{q_{ст\Omega}} \right).$$

Відношення  $\frac{q_{дин}}{q_{ст\Omega}}$  - називається динамічним коефіцієнтом  $K_d$ .

$$K_d = 1 + \frac{A}{q_{ст\Omega}} = 1 + \frac{0.32 \cdot 10^{-3}}{0.644 \cdot 10^{-3}} = 1.5$$

7. Максимальні нормальні динамічні напруження дорівнюють:

$$G_d = K_d G_{ст\Omega}$$

$$\text{де } G_{ст\Omega} = \frac{mgl_1}{W_z} = \frac{100 \cdot 9.81 \cdot 1}{37.2 \cdot 10^{-6}} = 26,37 \cdot 10^6 \frac{H}{m^2} = 26,37 \text{ МПа}$$

$$\text{отже } G_{дин} = 26,37 \cdot 1,5 = 39,6 (\text{МПа}).$$

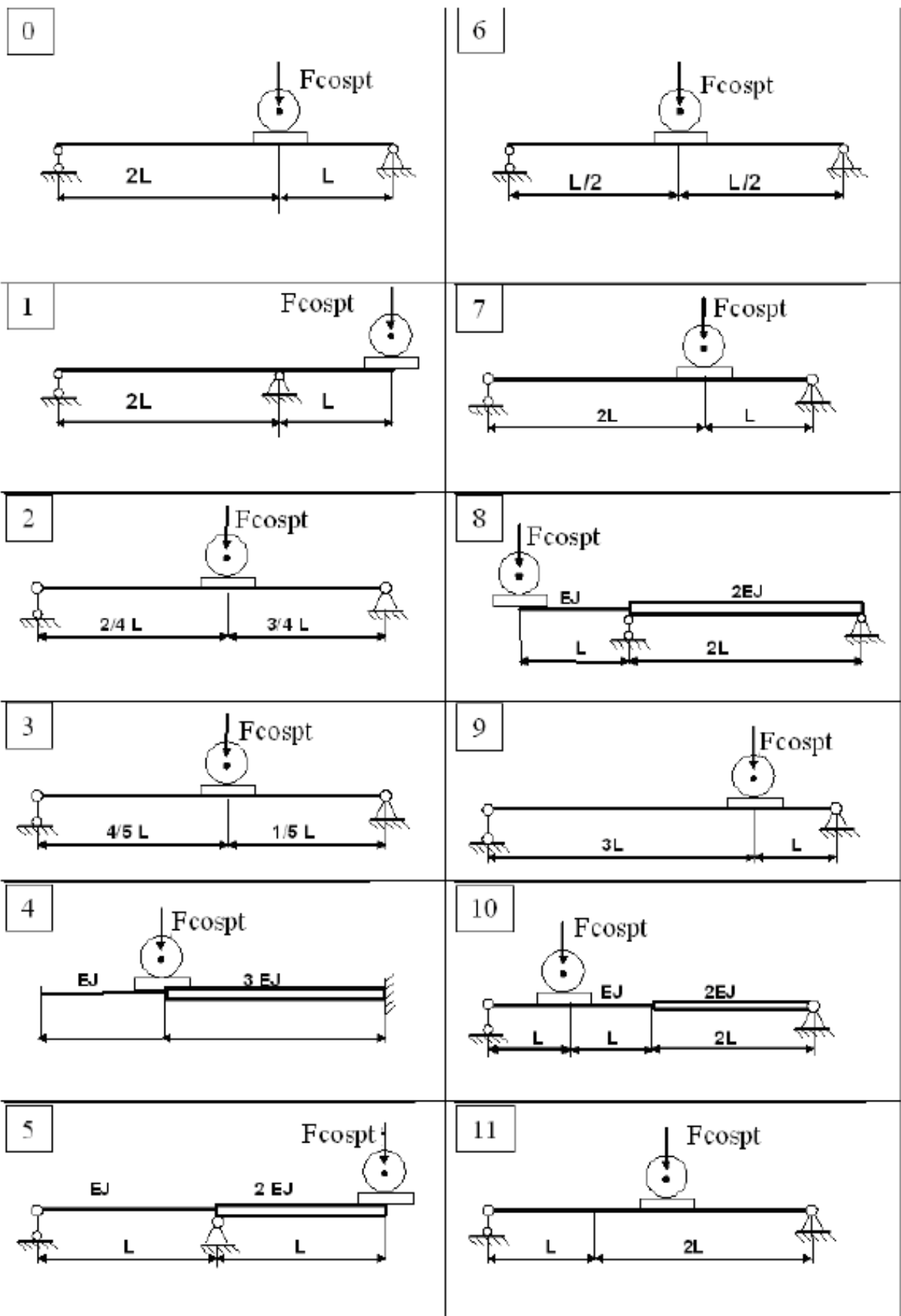
### Задача 3.5.2

Для систем відображених на рис. 3.5.2 визначити при якому значенні довжини  $l$  настає резонанс, на якій відстані від лівої опори, або від вільного краю балки потрібно встановити електродвигун, щоб частота  $\omega_0$  власних коливань балки на 20% більше збурюючої сили  $\omega$ .

Для останнього випадку обчислити амплітуду вимушених коливань системи та визначити максимальні динамічні нормальні напруження та порівняти з  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Масу балки не враховувати. Дані взяті з табл.3.5.2

**Табл. 3.5.2**

Шифр	l, м	№ двугавра, $I_z, \text{см}^4$	E, МПа	m, кг	n, хв. <sup>-1</sup>	F, кН.
0	1,5	12; $I_z=350 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	45	700	2
1	2	14; $I_z=572 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	50	600	3
2	1,8	16; $I_z=873 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	45	800	5
3	2,5	12; $I_z=350 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	39	400	4
4	1,2	18; $I_z=1290 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	100	500	7
5	1,4	18; $I_z=1430 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	120	200	2
6	2,2	12; $I_z=350 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	140	300	1
7	1,7	14; $I_z=572 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	150	1800	4
8	1,9	20; $I_z=1840 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	112	270	3
9	2,3	22; $I_z=2550 \text{ см}^4$	$2 \cdot 10^5$	150	5410	5



### 3.6 Задачі для самостійного розв'язку

#### Вільні коливання пружних систем з одним ступенем вільності

3.6.1 Для систем, відображених нарис.3.6.1, визначити власні частоти коливань, якщо  $m = 10^{-2}$  кг,  $c_1 = 1$  кН/м,  $c_2 = 5$  кН/м.

Відповідь: а)  $\omega = 38,8 \text{ с}^{-1}$ ,

б)  $\omega = 38,8 \text{ с}^{-1}$ , в)  $\omega = 18,2 \text{ с}^{-1}$ .

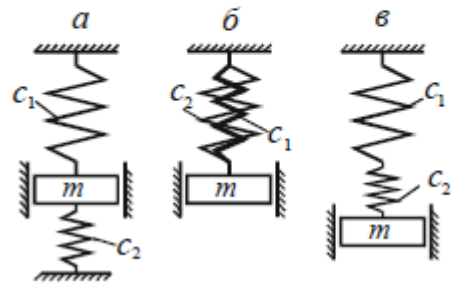


Рис. 3.6.1

3.6.2. Для систем зі сталою згинною жорсткістю  $EI_z$ , використовуючи метод сил, скласти диференційні рівняння малих вільних коливань та визначити власні частоти коливань (рис. 3.6.2). При складанні рівнянь руху вважати, що маса системи по зрівнянню з масою ваги мала, при цьому маса ваги є точковою.

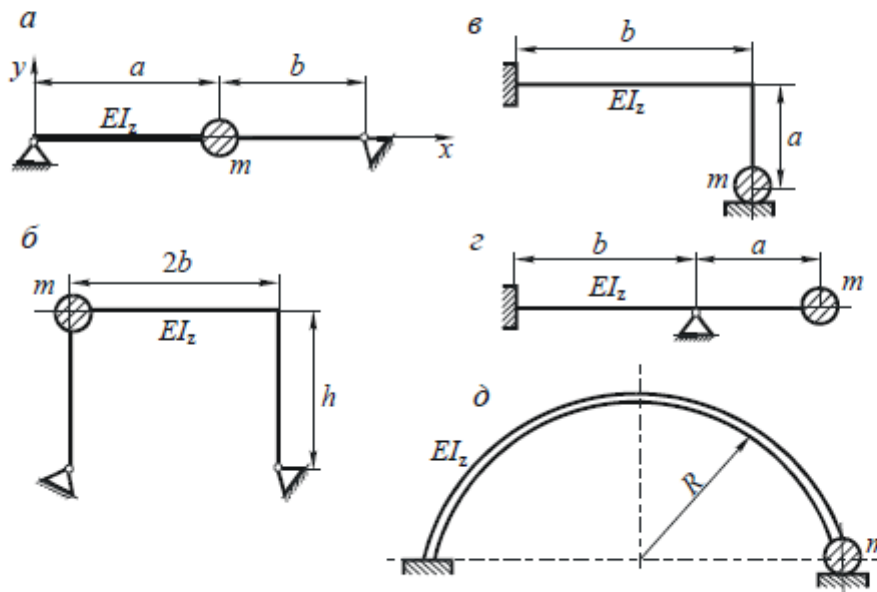


Рис. 3.6.2

Відповідь: а)  $\omega = \sqrt{\frac{3EI_z(a+b)}{ma^2b^2}}$ , б)  $\omega = \sqrt{\frac{6EI_z}{mh^2(h+b)}}$ ,  
 в)  $\omega = \sqrt{\frac{12EI_z}{ma^2(4a+3b)}}$ , г)  $\omega = \sqrt{\frac{12EI_z}{ma^2(4a+3b)}}$ , д)  $\omega = \sqrt{\frac{6\pi EI_z}{mR^3(3\pi^2-16)}}$ .

3.6.3 Для систем скласти диференційні рівняння малих вільних коливань, використовуючи метод сил, та вважаючи маси  $m$  точковими (рис.3.6.3). Визначити власні частоти.

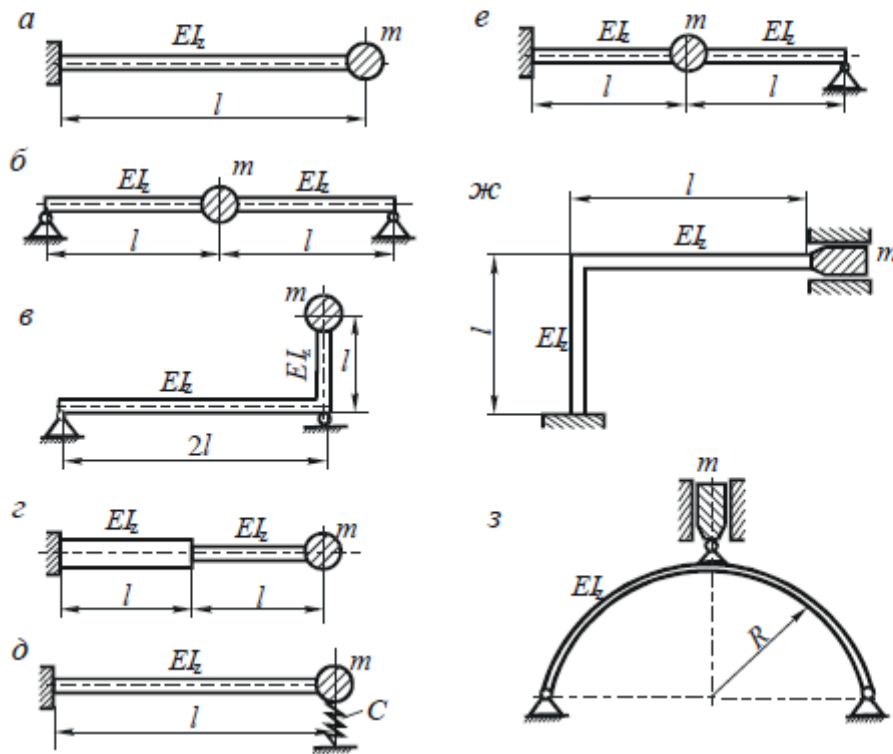


Рис. 3.6.3

Відповідь: а)  $\omega = \sqrt{\frac{3EI_z}{ml^3}}$ , б)  $\omega = \sqrt{\frac{6EI_z}{ml^3}}$ , в)  $\omega = \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}$ , г)  $\omega = \sqrt{\frac{2EI_z}{3ml^3}}$ ,  
 д)  $\omega = \sqrt{\frac{cl^3 + 3EI_z}{ml^3}}$ , е)  $\omega = \sqrt{\frac{96EI_z}{7ml^3}}$ , ж)  $\omega = \sqrt{\frac{48EI_z}{7ml^3}}$ , з)  $\omega = \sqrt{\frac{5,55EI_z}{mR^3}}$ .

3.6.4. Для систем скласти диференціальні рівняння малих вільних кутових коливань маховика, який має момент інерції маси  $I$ , та визначити власні частоти коливань (рис.3.6.4).

Відповідь:  $\ddot{\varphi} + \frac{1}{I\delta_{11}}\varphi = 0$ , а)  $\omega = \sqrt{\frac{GI_k}{I}}$ , б)  $\omega = \sqrt{\frac{2GI_k}{3I}}$ ,

в)  $\omega = \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)GI_k}{l_1 l_2}}$ .

3.6.5 Вага масою  $m$  закріплена на абсолютно жорсткому невагому

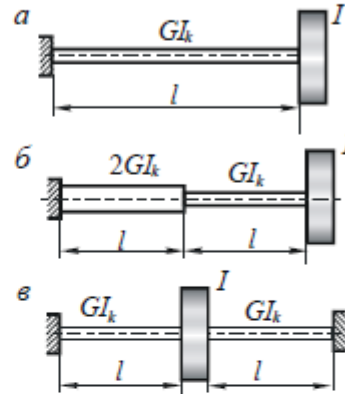


Рис. 3.6.4

стержні довжиною  $3l$ , підкріпленому двома однаковими пружинами жорсткістю  $c$  кожна (рис.3.6.5).

Визначити власну частоту малих коливань маятника.

Відповідь:  $\omega = \sqrt{\frac{5}{9} \cdot \frac{c}{m} + \frac{1}{3} \cdot \frac{g}{l}}$ .

3.6.6. Визначити власну частоту малих вільних коливань вертикально встановленого маятника (стержень рахувати абсолютно жорстким) (рис.3.6.6). Жорсткість пружин дорівнює  $c$ .

Відповідь:  $\omega = \sqrt{\frac{c}{2m} - \frac{g}{2l}}$ .

3.6.7. Тягар масою  $m$  закріплен на тонкій абсолютно гнучкій нитці довжиною

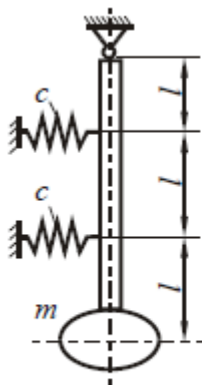


Рис 3.6.5

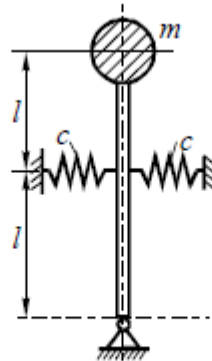


Рис. 3.6.6

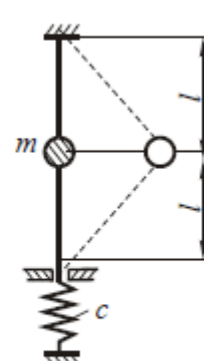


Рис. 3.6.7

2l. За допомогою пружини в нитці виникає натяг  $T_0$  (рис.3.6.7). Вважаючи, що натяги на обох ділянках нитки однакові і постійні, визначити частоту малих власних коливань тягара.

Відповідь:  $\omega = \sqrt{\frac{2T_0}{ml}}$ .

3.6.8 На сталевій балці довжиною  $l=1$  м, що має поперечний переріз  $b \times h = 6 \times 1$  см, закріплена маса  $m = 20$  кг. Балка защемлена одним кінцем та лежить на пружній основі, коефіцієнт постелі якої  $k = 4$  кН/м<sup>2</sup> (рис.3.6.8). Нехтуючи інерцією повороту маси, визначити частоту власних коливань. Масою балки та інерційністю пружної основи знехтувати.

Відповідь:  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 13,8 \text{ с}^{-1}$ .

3.6.9. Використовуючи метод Релея, визначити нижчу власну частоту коливань маси  $m$ , закріпленої посередині балки, яка має згинну жорсткість  $EI_z$  та масу одиниці довжини балки  $m_0$  (рис.3.6.9).

Відповідь:  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m + m_0 l}}$ , де  $c = \frac{6EI_z}{l^3}$ .

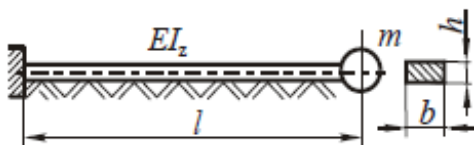


Рис.3.6.8

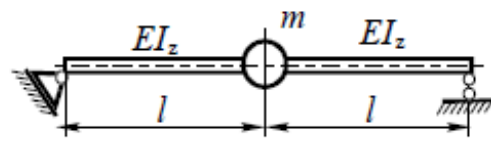
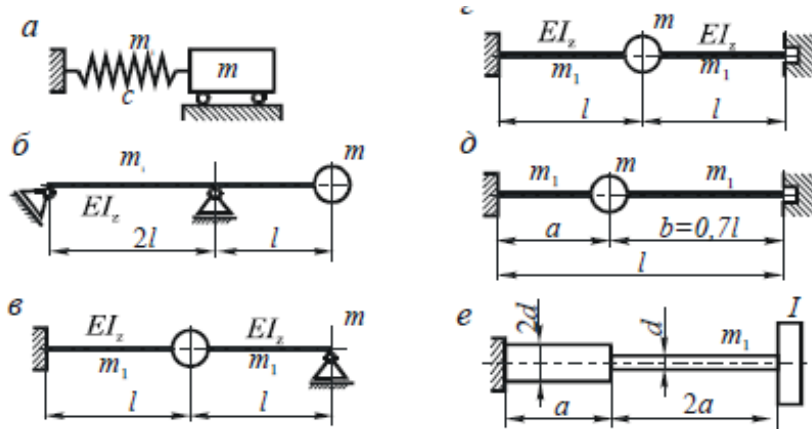


Рис. 3.6.9

3.6.10. Для схем, зображених на рис.3.6.10, визначити по методу Релея власні частоти коливань, рахуючи маси  $m$  точковими, а масу довжини стержнів рівною  $m_1$ .

Відповідь:  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m + m_1 \mu}}$ ,  $c$  – жорсткість,  $\mu$  – коефіцієнт приведення маси;



$$c = \frac{Gd^4}{8D^3n}, \mu = 1/3; \quad \text{б) } c = \frac{EI_z}{l^3}, \mu = 0,121; \quad \text{в) } c = \frac{96EI_z}{7l^3}, \mu = 0,445;$$

$$\text{г) } c = \frac{24EI_z}{l^3}, \mu = 0,371; \quad \text{д) } c = \frac{3EI_z}{a^3b^3}, \mu = 0,522; \quad \text{е) } c = \frac{\pi Gd^4}{66a}, \mu = 0,04.$$

3.6.11. Використовуючи метод Релея, визначити власну частоту коливань системи з урахуванням маси балки (рис.3.6.11). Зосереджену масу  $m$  рахувати точковою. Згинна жорсткість балки  $EI_z$ , маса одиниці довжини балки  $m_0$ .

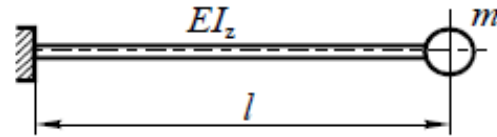


Рис. 3.6.4

Відповідь:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m + \mu m_0 l}} = \sqrt{\frac{c}{m + \frac{33}{140} m_0 l}}.$$

3.6.12. Визначити приведені коефіцієнти інерції та жорсткості, а також основну частоту згинних коливань консольної балки сталого перерізу, вважаючи за точку приведення вільний кінець балки (рис. 3.6.12).

$$\text{Відповідь: } a = \frac{33}{140} \rho A l, \quad c = \frac{3EI}{l^3}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{a} = \frac{12,727 EI}{l^4 \rho A}.$$

3.6.13. Визначити параметри приведеної коливальної системи з однією ступенню вільності, яка моделює балку сталого перерізу при її згинних коливаннях на основній частоті (рис. 3.6.13).



Рис. 3.6.12

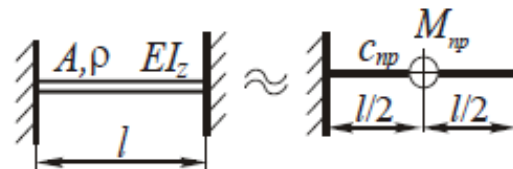


Рис. 3.6.13

$$\text{Відповідь: } a = \frac{13}{35} \rho A l, \quad c = \frac{192EI_z}{l^3}.$$

3.6.14. Визначити параметри приведеної коливальної системи при її поздовжніх коливаннях на основній частоті, а також основну частоту (рис. 3.6.14).

$$\text{Відповідь: } c_{np} = \frac{EI}{l}, \quad a = M_{np} = \frac{\rho A l}{3}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{a} = \frac{3EI}{\rho A l^2}.$$

3.6.15. Визначити основну частоту крутних коливань диска, якщо кінці  $A$  та  $B$  вала жорстко зацімлені (рис.3.6.15). Обидві ділянки вала мають один і той же діаметр, але довжина їх відмінна:  $l_1$  та  $l_2$ . Момент інерції маси диска дорівнює  $I$ .

Відповідь: 
$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^4 G (l_1 + l_2)}{32 I l_1 l_2}}$$

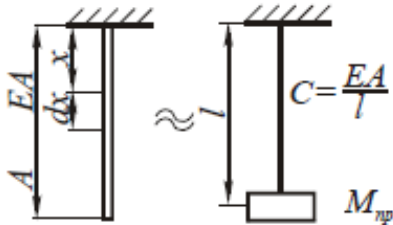


Рис. 3.6.14

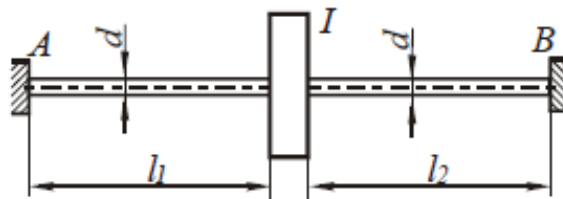


Рис. 3.6.15

### Власні коливання з урахуванням сил опору

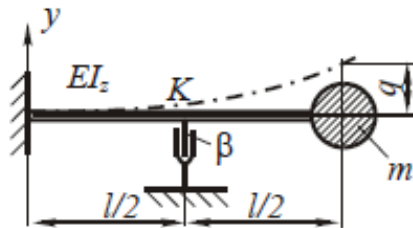


Рис. 3.6.16

3.6.16. Для системи скласти диференціальне рівняння малих вільних коливань маси  $m$ , враховуючи, що сила опору демпфера прямо пропорційна швидкості руху ( $F = \beta \dot{q}$ ) (рис.3.6.16).

3.6.17. На абсолютно жорсткому стержні довжиною  $2l$  підвішено тягар масою  $m$ . Посередині стержня закріплені дві пружні розтяжки – пружини жорсткістю  $c$  кожна (рис.3.6.17). Тягар розташований в посудині, яка наповнена в'язкою

рідиною. В процесі малих вільних коливань тягара рідина здійснює демпфуючий вплив на систему. Визначити коефіцієнт в'язкого тертя системи, якщо період згасаючих коливань системи  $T_0 = 1$  с, при таких параметрах системи: маса тягара  $m = 1$  кг, довжина стержня  $l = 0,3$  м, діаметр пружини  $D = 20$  мм, діаметр проволочки пружини  $d = 2$  мм, модуль пружності при зсуві  $G = 8 \cdot 10^5$  МПа, число витків кожної пружини  $n = 6$ .

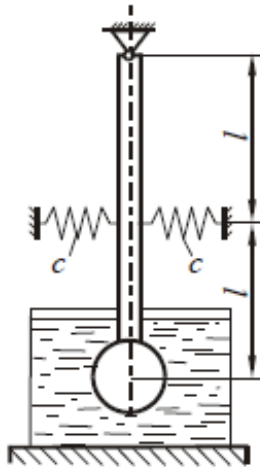


Рис. 3.6.17

Відповідь:  $\beta = 76,5 \text{ Н} \cdot \text{с}$ .

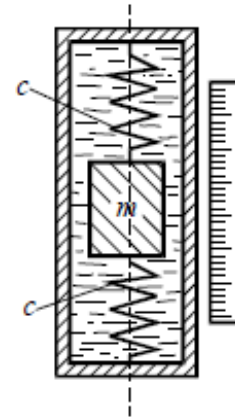


Рис. 3.6.18

3.6.18. Прилад являє собою тягар масою  $m$ , закріплений на двох пружинах жорсткістю  $c$  кожна (рис. 3.6.18). Тягар розташований у трубці, заповненій рідиною. Опір руху тягара може регулюватися в залежності від величини зазору між тягарем та стінками трубки та від в'язкості рідини. Рахуючи, що опір руху тягара прямо пропорційний швидкості руху, необхідно: а) скласти диференціальне рівняння малих вільних коливань тягара, б) визначити час, коли амплітуда вільних коливань зменшиться в 100 разів, прийняти, що при  $t = 0$   $\dot{q} = 0$ ,  $q = q_0$ . При розв'язку задачі рахувати  $m = 50 \text{ кг}$ ,  $c = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ,  $\beta = 500 \text{ Н} \cdot \text{с}$ .

Відповідь:  $t = 0,92 \text{ с}$ .

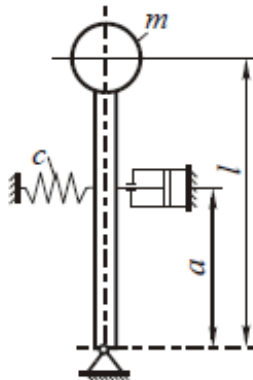


Рис. 3.6.19

3.6.19. Тягар масою  $m$  закріплений на абсолютно жорсткому безінерційному стержні довжиною  $l$ , котрий утримується в рівновазі пружиною та демпфером (рис.3.6.19). Останній має лінійну характеристику тертя  $F = \beta \dot{q}$ . Визначити власну частоту коливань системи та логарифмічний декремент згасання коливань, коли  $m = 1 \text{ кг}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ ,  $a = 0,2 \text{ м}$ , діаметр пружини  $D = 50 \text{ мм}$ , діаметр проволочки пружини  $d = 5 \text{ мм}$ , кількість витків пружини  $n = 5$ , модуль пружності при зсуві  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коефіцієнт опору руху демпфера

$$\beta = 3 \cdot 10^2 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь:  $\bar{\omega} = 11,5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\Lambda = 1,29$ .

3.6.20. В початковий момент

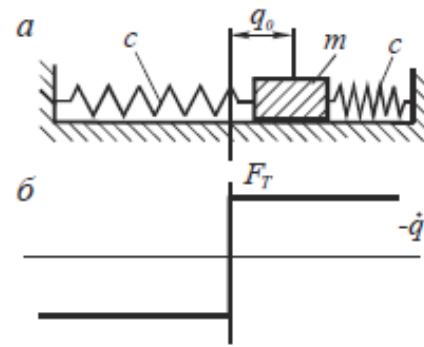


Рис. 3.6.20

часу маса  $m$  відхилена від положення рівноваги на відстань  $q_0$  та відпущена без початкової швидкості (рис. 3.6.20, *a*). При ковзанні по поверхні між масою та поверхнею виникає сила тертя. Залежність сили кулонового тертя  $F_T$  від швидкості руху  $\dot{q}$  маси  $m$  надана на рис.3.6.20, *б*. Встановити закон руху маси  $m$ .

3.6.21. Тіло, виконуючи коливання при наявності в'язкого демпфування, робить 10 повних коливань в секунду, і через 100 циклів амплітуда його коливань зменшується на 10 %. Визначити логарифмічний декремент, параметр демпфування та коефіцієнт демпфування. Як зміниться період коливань, коли б не було демпфування?

Відповідь:  $\lambda = 0,001054$ ,  $\frac{h}{\omega} = 0,000168$ .



Рис. 3.6.21

3.6.22. Тіло вагою  $Q = 45,4 \text{ Н}$  з'єднано з пружиною жорсткістю  $c = 1,79 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$  і з гідравлічним демпфером, відрегульованим таким чином, що він створює силу опору, яка дорівнює  $4,54 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$  при швидкості  $2,54 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$  (рис. 14.21). В якому співвідношенні зменшиться амплітуда коливань після 10 циклів коливань?

Відповідь:  $0,539/1$ .

Задачі на вимушені коливання пружних систем з одним ступенем вільності

3.6.23. Балка, яка виготовлена з стандартного двотавра довжиною  $l = 3,66$  м і з моментом інерції  $I_z = 2,4 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>, вільно оперта на кінцях (рис. 3.6.22). Посередині прольоту балки встановлено електродвигун вагою  $Q = 4,54 \cdot 10^3$  Н, ротор якого обертається з частотою  $1800$  хв<sup>-1</sup>. За рахунок неурівноваженості ротора виникає відцентрова сила  $F = 2,27 \cdot 10^3$  Н. Чому дорівнює амплітуда усталених вимушених коливань, якщо не враховувати масу балки?

Відповідь:  $A = 2,032 \cdot 10^{-4}$  м.

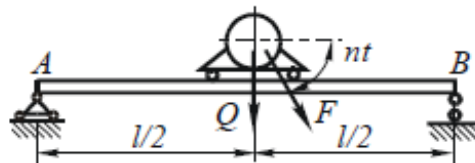


Рис. 3.6.22

3.6.24. Сталева балка, що має момент інерції поперечного перерізу  $I_z = 1,66 \cdot 10^{-6}$  м<sup>4</sup>, оперта, як показано на рис. 3.6.23, несе на незакріпленому кінці

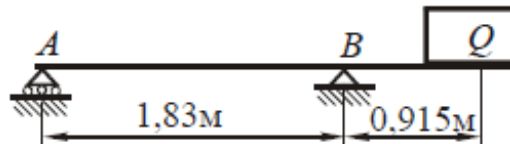


Рис. 3.6.23

тягар вагою  $Q = 2,7 \cdot 10^3$  Н. Визначити амплітуду усталених вимушених коливань тягара  $Q$ , коли опора  $A$  виконує малі вертикальні коливання виду  $w_A = w_0 \sin pt$ , де  $w_0 = 3,05 \cdot 10^{-3}$  м,  $p = 30$  с<sup>-1</sup>. Опора  $B$  нерухома, а впливом маси балки можна знехтувати.

Відповідь:  $A = 3,33 \cdot 10^{-3}$  м.

3.6.25. Для зменшення впливу сил інерції, розвинутих в машині неурівноваженими частинами, на основу (фундамент) використовують віброізоляцію двигуна – підвіску (чи його установку) на підатливих пружних опорах. Для схем, зображених на рис. 3.6.24, визначити динамічний коефіцієнт передачі сили на основу

в місцях прикріплення пружних опор жорсткістю  $c$ . Балки, на яких встановлені двигуни, рахувати абсолютно жорсткими.

Відповідь: а)  $k_{\text{дин}} = \frac{1}{1 - \frac{m\omega^2}{c}}$ , б)  $k_{\text{дин}} = \frac{1}{1 - \frac{4m\omega^2}{c}}$ , в)  $k_{\text{дин}} = \frac{1}{1 - \frac{9m\omega^2}{20c}}$ .

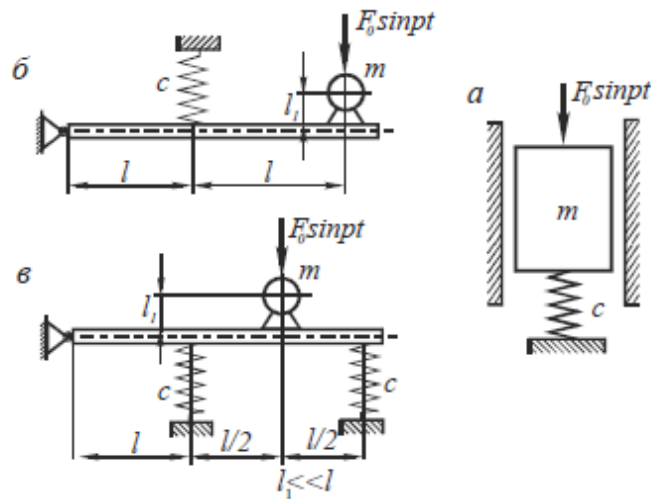


Рис. 3.6.24

3.6.26. На рис. 3.6.25 наведена схема вібрографа – прилада для реєстрації коливань. На жорсткій станині  $l$  приладу закріплена катушка 2, стержнем якої є магніт 3, підвішений на пружині 4. При русі магніту в середині катушки виникає електричний струм, який подається на реєструвальний прилад. Враховуючи, що магніт 3 має масу  $m$ , а пружина 4 – жорсткість  $c$ , скласти диференційне рівняння руху магніту і визначити, при якій умові спотворення запису коливань будуть мінімальними (прилад записує вертикальні коливання основи, які відбуваються за законом  $q = q_0 \sin pt$ ).

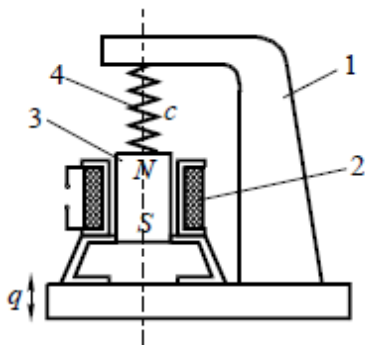


Рис. 3.6.25

Відповідь:  $\omega_0^2 \leq p^2$ .

## Вимушені коливання пружних систем з в'язким демпфуванням

3.6.27. Нехай повна вага незбалансованого електродвигуна  $Q = 4,54 \cdot 10^3$  Н, неврівноважена маса  $m_1 = 1,79 \cdot 10^2$  Н·с<sup>2</sup>/м, а центр її ваги знаходиться на відстані  $r_1 = 2,54 \cdot 10^{-2}$  м від вісі електродвигуна (рис. 3.6.26). Частота обертання ротора електродвигуна дорівнює  $600$  хв<sup>-1</sup>, переміщення пружини при статичному навантаженні  $\delta_{ст} = 2,54 \cdot 10^{-4}$  м, коефіцієнт в'язкого демпфування  $\beta = 1,79 \cdot 10^4$  Н·с. Визначити амплітуду усталених вимушених коливань при вказаній частоті обертання, а також при резонансі (при  $\omega = p$ ).

Відповідь:  $A = 1,12 \cdot 10^{-3}$  м.

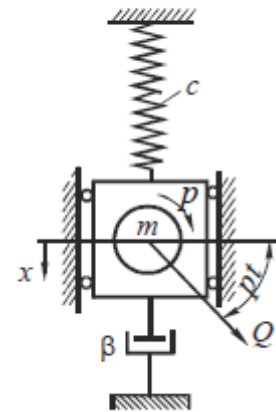


Рис. 3.6.26

3.6.28. Для системи з демпфуванням розглянути випадок переміщення основи, що змінюється за гармонійним законом  $q_{осн} = B \cos pt$ , а

також отримати вираз, який описує усталену поведінку системи при заданій функції збуджуючої сили (рис. 3.6.27).

3.6.29. На масу  $m$ , що зв'язана з пружиною жорсткістю  $c$  та демпфером, коефіцієнт в'язкого тертя котрого  $\beta$ , діє періодично змінювана сила  $F = F_0 \sin pt$  (рис. 3.6.28). Визначити власну частоту коливань маси  $m$  та ті значення частоти збуджуючої сили  $p_1$ , при котрих максимальна сила, яка діє на пружину, дорівнює амплітуді збуджуючої сили.

Відповідь:  $p = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = \sqrt{2(\omega_0^2 - h^2)}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ ,  $h = \frac{\beta}{2m}$ .

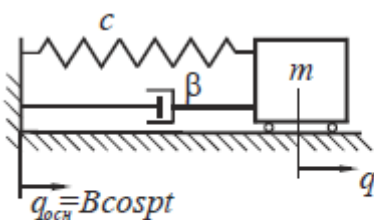


Рис. 3.6.27

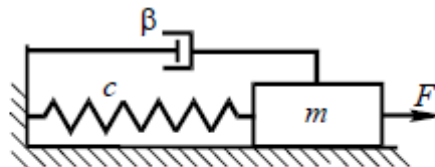


Рис. 3.6.28

3.6.30. Для віброізоляції машин та приладів в пружну підвіску вводять дисипативні елементи – демпфери в'язкого тертя. Визначити динамічний коефіцієнт для схеми, зображеної на рис.3.6.29. Прийняти для розрахунків такі дані:  $m = 100$  кг,  $p = 100$  с<sup>-1</sup>,  $EI_z = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ,  $l = 1$  м,  $\beta = 6$  кН·с.

Відповідь:  $k_{\text{дин}} = 0,316$ .

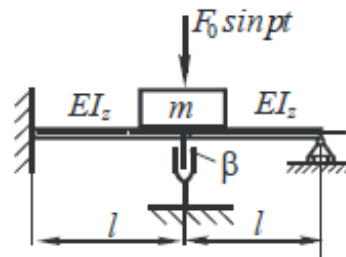


Рис. 3.6.29

### 3.7 ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

Внаслідок зміни в часі фізичних параметрів системи в ній при деяких умовах виникають параметричні коливання.

Приклади: вал, переріз якого має неоднакові головні жорсткості при згині. Причина – зміна згинних жорсткостей відносно нерухомих осей.

Наступний приклад: розгойдування на гойдалках (за рахунок періодичної зміни відстані центра ваги системи від точки підвісу гойдалки). Прикладом параметричного збудження коливань є також явище динамічної нестійкості стержнів

Розглянемо випадок, коли параметр змінюється за гармонійним законом (рис.3.7.1)

$$c(t) = c_0 + c_1 \cos \omega t \quad (3.7.1)$$

$$\text{Рівняння руху } m\ddot{q} + c(t)q = 0 \quad (3.7.2)$$

З урахуванням (3.7.1) набуде вигляду:

$$\ddot{q} + \left( \frac{c_0}{m} + \frac{\cos \omega t c_1}{m} \right) q = 0. \quad (3.7.3)$$

Це рівняння Мат'є добре вивчено. Характер його рішень залежить від двох безрозмірних коефіцієнтів  $a$  та  $b$ . Введемо “безрозмірний” час  $\tau = \frac{\omega t}{2}$  та приведемо

$$\text{рівняння (3.7.3) до вигляду } \frac{d^2 q}{d\tau^2} = \frac{d^2 q}{d\tau^2} \left( \frac{\omega}{2} \right)^2;$$

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + (a + 2b \cos 2\tau)q = 0 \quad (3.7.4)$$

де  $a = \frac{4\omega_0^2}{\omega^2}$ ;  $b = \frac{2c_1}{m\omega^2}$  або  $b = -2\frac{B}{l}$

$\omega_0^2$  - квадрат власної частоти системи,  $\omega^2$  - квадрат частоти параметричного збудження системи; ( $B$  – амплітуда переносного руху,  $l$  - довжина маятника,  $q$  - кут відхилення маятника для випадку показаного на (рис. 3.7.1) Коефіцієнт  $a$ , що характеризує відношення власної частоти при середньому значенні параметра  $c_0$  до частоти зміни параметра, та  $b$ , що характеризує ступінь зміни параметра, цілком визначають стійкість руху. Площина зміни  $a$  та  $b$  може бути поділена на області, що відповідають стійким та нестійким рухам. Ці області чергуються і представляються діаграмою Айнса-Стретта (рис. 3.7.2)

Відповідні положення рівноваги системи будуть нестійкими або стійкими. Кордони між областями відповідають періодичним коливанням системи.

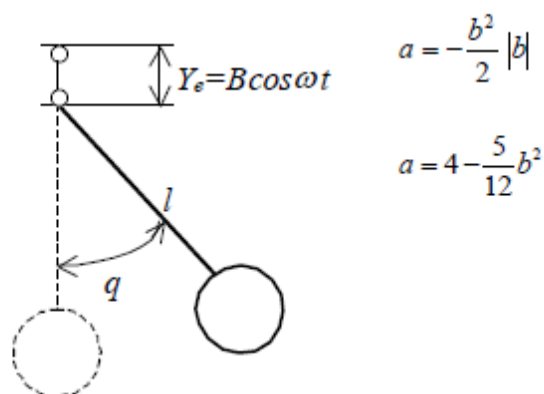


Рис. 3.7.1

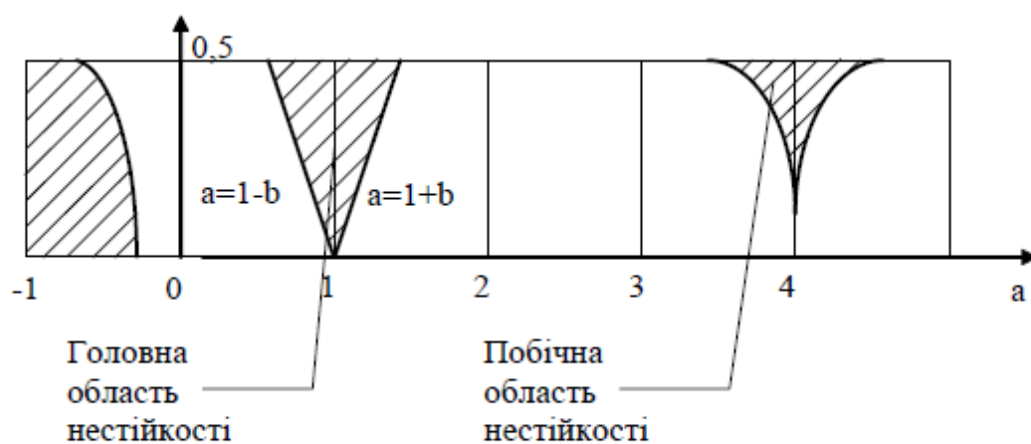


Рис.3.7.2 Діаграма Айнса-Стретта

Області нестійкості на діаграмі заштриховані.

(Примітка: всі задачі будемо розв'язувати з використанням цієї діаграми, наведеної на рис. (3.7.2) В'язкий опір звужує області нестійкості).

### Приклад 3.7.1

Верхня точка підвісу математичного маятника (рис. 3.7.1) здійснює вертикальний рух за законом  $q_e = B \cos \omega t$ .

Дослідити стійкість малих коливань маятника при  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$ ;  $l = 0,5 \text{ м}$ ;

$B = 1 \text{ см}$ ;  $g = 981 \text{ см/с}^2$

Розв'язок. обчислюємо значення параметрів  $a, b$ .

$$a = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 4 \frac{g}{l\omega^2} = \frac{4 \cdot 981}{50 \cdot 10^2} = 0,784; \quad |b| = \frac{2B}{l} = \frac{2 \cdot 1}{50} = 0,04$$

де  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ .

Зображуюча процес коливань точка (0.784, 0.04) лежить на діаграмі Айнса- Стретта в стійкій області. Отже, положення рівноваги усталене, а коливання будуть затухати.

**Приклад 3.7.2.** Визначити власну частоту математичного маятника. Сила тяжіння  $Mg \sin q$  врівноважується дотичною силою інерції-  $M\dot{q}l$  - (Д'Аламберова сила інерції).

$M\dot{q}l + Mg \sin q = 0$  при  $q < 5^\circ$  рівняння лінеаризується

$$l\ddot{q} + gq = 0; \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

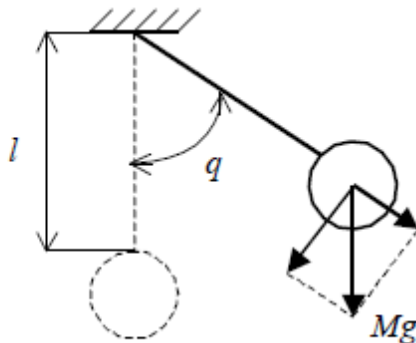


Рис. 3.7.3

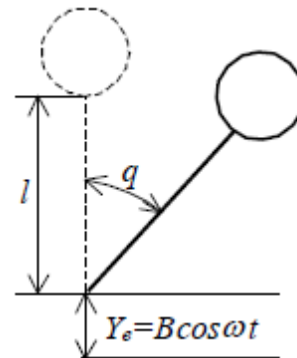


Рис. 3.7.4

**Приклад 3.7.3** На рис. 3.7.4 зображена схема астатичного маятника. При переносному русі точка закріплення 0 маятника за гармонійним законом  $y_e = B \cos \omega t$  верхнє положення вантажу може бути стійким при деяких значеннях частоти  $\omega$ . Знайти найменше значення частоти  $\omega$ , при якій верхнє положення маси буде стійким.

Дано:  $l = 20 \text{ см}$ ;  $B = 0,5 \text{ см}$ ;  $g = 981 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$

Розв'язок. Точка повинна лежати правіше кривої  $a = -\frac{b^2}{2}$  або  $-a = \frac{b^2}{2}$ ; тобто повинна виконуватись умова  $-a \leq \frac{b^2}{2}$  або  $|a| \leq \frac{b^2}{2}$ .

Але в даному випадку рівняння астатичного маятника має вигляд:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \left( -\frac{4\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{4B}{l} \cos 2\tau \right) q = 0$$

тобто  $a = -\frac{4\omega_0^2}{\omega^2}$  має від'ємне значення.

Тут  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ ; умова  $-a \leq \frac{b^2}{2}$  прийме вигляд

$$\frac{4\omega_0^2}{\omega^2} \leq \frac{b^2}{2} \text{ звідки } \omega^2 \geq \frac{8\omega_0^2}{b^2} = \frac{8g}{lb^2}.$$

Це найменше значення частоти, так як в інших областях стійкості будуть більш високі значення частоти  $\omega^2$  параметричного збудження, при якому перевернутий маятник не буде падати. Та й в 1-й області стійкості знайдене значення частоти буде найменшим.

**Приклад 3.7.4** Сталевий жорсткий стержень постійного перерізу довжиною  $l = 12 \text{ см}$ , масою  $0,2 \text{ кг}$  шарнірно закріплений нижнім кінцем на плиті, що вертикально переміщується за гармонійним законом  $y_e = B \cos \omega t$ . При якому значенні частоти  $\omega$  верхнє вертикальне положення його буде стійким, якщо  $B = 1 \text{ см}$  (рис.3.7.5).

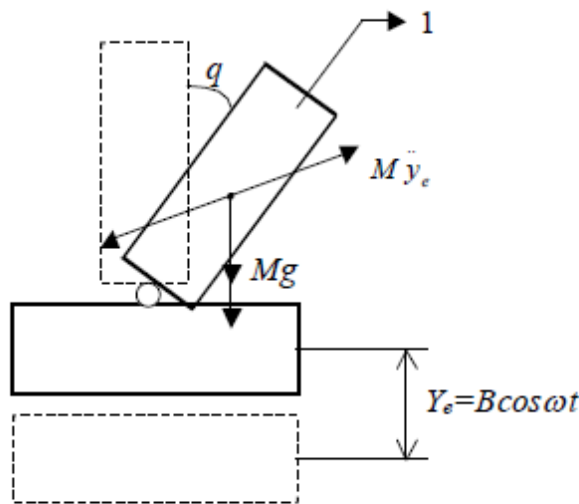


Рис.3.7.5

Розв'язок. 1) Колювання стержня є відносним рухом. А в відносному русі сила інерції переносного руху  $M\ddot{y}_e$  вважається реальною силою поряд з силою тяжіння  $Mg$ .

2) За принципом Д'Аламбера складемо рівняння колювань маятника, додаючи момент фіктивної сили інерції  $I_m \ddot{q}$ .

Маємо  $\sum M_0 = 0$ .

$$I_m \ddot{q} + (Mg + M\ddot{y}_e) \frac{l}{2} \sin q = 0 \quad (3.7.5)$$

Лінеаризуємо  $\sin q \approx q$ ,

враховуємо  $y_e = B \cos \omega t$ ;

$$I_m = \frac{1}{3} M l^2.$$

$$\text{Отримаємо } \ddot{q} + \frac{3g}{2l} q - \frac{3}{2} q \frac{B\omega^2}{l} \cos \omega t = 0 \quad (3.7.6)$$

3) Приведемо рівняння (3.7.6) до стандартного вигляду, переходячи до безрозмірного часу  $\frac{\omega t}{2} = \tau$ ;  $\frac{d^2 q}{d\tau^2} = \frac{d^2 q}{dt^2} \left( \frac{\omega}{2} \right)^2$  маємо:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + 4 \frac{3g}{2l\omega^2} q - 4 \frac{3B}{2l} \cos 2\tau = 0 \quad (3.7.7)$$

$$\text{Позначивши } \omega_0^2 = \frac{3g}{2l}; \quad 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = a; \quad b = -3 \frac{B}{l} \quad (3.7.8)$$

отримаємо рівняння Мат'є.

4) Згідно з розв'язком попередньої задачі, умовою стійкості буде  $|a| \leq \frac{b^2}{2}$ .

$$\text{Враховуючи (3.7.8), маємо } \frac{12}{2} \frac{g}{l\omega^2} \leq \frac{\left(-\frac{3B}{l}\right)^2}{2} \text{ звідки } \omega^2 \geq \frac{4}{3} \frac{gl}{B^2}$$

Підставивши числа:

$$\omega^2 \geq \frac{4 \cdot 981 \cdot 12}{3 \cdot 1^2} = 15696 \text{с}^{-2}; \quad \omega \geq 125 \text{с}^{-1}.$$

**Приклад 3.7.5.** Пружний стержень (рис.3.7.6) знаходиться під дією осрової гармонійної сили. Дослідити стійкість поздовжніх коливань системи, якщо  $2l = 2M$ ;  $I = 10^{-9} \text{м}^4$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа}$ ;  $M = 5 \text{кг}$ ;  $P = 20 \text{Н}$ ;  $\omega = 10 \text{с}^{-1}$ .

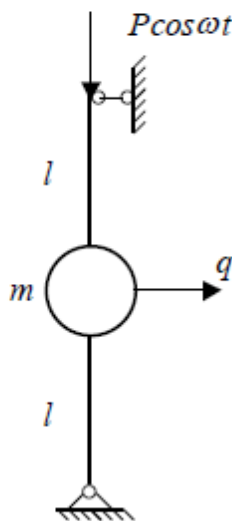


Рис. 3.7.6

1) Поперечні коливання, що виникають описуються рівнянням Мат'є

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + (a + 2b \cos 2\tau)q = 0$$

де в даному випадку:  $b = -\frac{2P}{P_3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ ;  $a = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ ;

$$\omega_0^2 = \frac{48EI}{(2l)^2 M} = \frac{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9}}{2^3 \cdot 5} = 240 \text{с}^{-2}; \quad a = 4 \frac{240}{10^2} = 9,6;$$

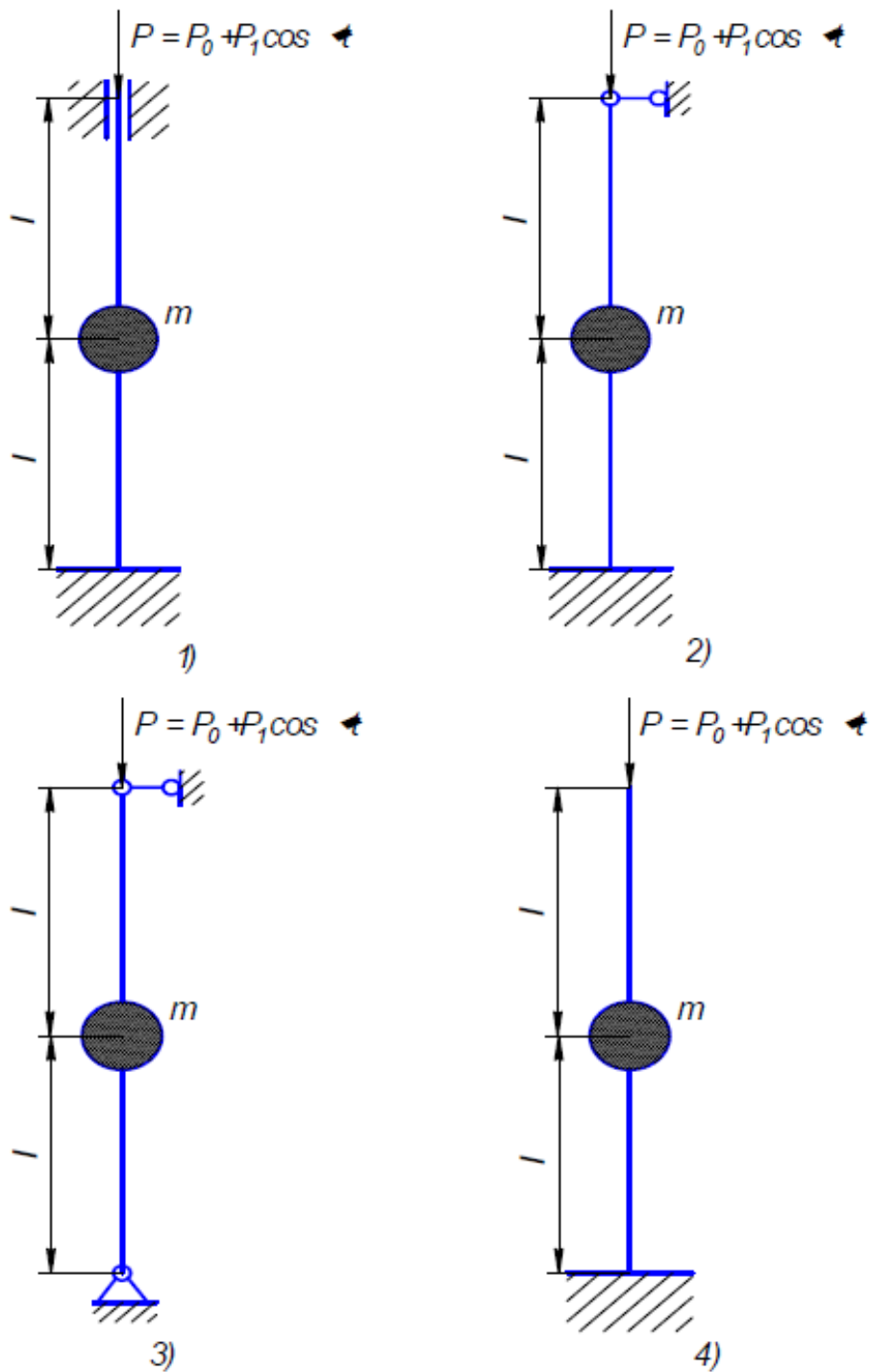
$$b = -2 \frac{P}{P_3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad P_3 = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9}}{2^2} = 493 \text{Н}.$$

$$\text{Тоді } b = -2 \frac{20}{493} \frac{240}{10^2} = -0,195$$

2) Зображуюча точка (9,6; 0,195) знаходиться в області стійкості. Тому параметричні коливання не виникають.

Приклад 3.7.6

Визначити чи стійкою є система з різними випадками закріплення



Вихідні дані:  $m = 5 \text{ кг}$ ;  $l = 1 \text{ м}$ ;  $P_0 = 40 \text{ кН}$ ;  $P_1 = 20 \text{ кН}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  
 $I_x = 1.2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4$ ;  $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$ .

$$U(x, t) = U_1(x) a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1);$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_e} - \frac{P_1}{P_e} \cos t \omega\right) w = 0$$

$$\omega t = 2\tau;$$

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \left(4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{P_0}{P_e}\right) - \frac{P_1}{P_e} \frac{4\omega_0^2}{\omega^2} \cos 2\tau\right) w = 0$$

$$a = \frac{4\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{P_0}{P_e}\right); \quad 2b = -\frac{4\omega_0^2}{\omega^2} \frac{P_1}{P_e}$$

1)  $\nu = 0,5$

$$P_{\text{з.}} = \frac{\pi^2 * EI}{(l)^2} = \frac{3.14^2 * 2 * 10^{11} * 1.2 * 10^{-9}}{(0.5 * 1)^2} = 94.652 \text{ кН}$$

$$c = \frac{24EI_{\text{з}}}{l^3}; \quad \omega_0^2 = \frac{24EI}{m * l^3} = 11520 \text{ с}^{-2};$$

$$a = \frac{4 * 11520}{400} \left(1 - \frac{40000}{94652}\right) = 66.52;$$

$$b = -\frac{2 * 11520}{400} * \frac{20000}{94652} = -12,17.$$

Система стійка.

2)  $\nu = 0,7$

$$P_{\text{з.}} = \frac{\pi^2 * EI}{(l)^2} = \frac{3.14^2 * 2 * 10^{11} * 1.2 * 10^{-9}}{(0.7 * 1)^2} = 48,292 \text{ кН}$$

$$c = \frac{64EI_{\text{з}}}{l^3}; \quad \omega_0^2 = \frac{64EI}{m * l^3} = 30720 \text{ с}^{-2};$$

$$a = \frac{4 * 30720}{400} \left(1 - \frac{40000}{48292}\right) = 52,75;$$

$$b = -\frac{2 * 30720}{400} * \frac{20000}{66500} = -63,6.$$

Система стійка.

3)  $\nu = 1$

$$P_{\text{з.}} = \frac{\pi^2 * EI}{(l)^2} = \frac{3.14^2 * 2 * 10^{11} * 1.2 * 10^{-9}}{(1 * 1)^2} = 23,663 \text{ кН}$$

$$c = \frac{48 EI_{\text{з}}}{l^3}; \quad \omega_0^2 = \frac{48EI}{m * l^3} = 23040 \text{ с}^{-2};$$

$$a = \frac{4 \cdot 23040}{400} \left(1 - \frac{40000}{23663}\right) = -159,069;$$

$$b = -\frac{2 \cdot 23040}{400} * \frac{20000}{23663} = -97,367.$$

Система не стійка.

4)  $\nu = 2$

$$P_3 = \frac{\pi^2 * EI}{(l)^2} = \frac{3.14^2 * 2 * 10^{11} * 1.2 * 10^{-9}}{(2 * 1)^2} = 5.916 \text{кН}$$

$$c = \frac{3EI_z}{l^3}; \quad \omega_0^2 = \frac{3EI}{m * l^3} = 1440 \text{с}^{-2};$$

$$a = \frac{4 * 1440}{400} \left(1 - \frac{40000}{5916}\right) = -82,96;$$

$$b = -\frac{2 * 1440}{400} * \frac{20000}{5916} = -24,34.$$

Система не стійка.

**Задача 3.7.7** Скласти диференційне рівняння малих коливань мас  $m$ , закріпленої на стійці довжиною  $2l$  при дії на стійку періодичної змінної осьової сили

$P = P_0 + P_1 \cos(\omega t)$ . Дослідити стійкість малих коливань. Дані взяті з табл. 3.7.1

Табл. 3.7.1

№	$l(\text{м})$	$I_x(\text{м}^4)$	$m(\text{кг})$	$P_0(\text{кН})$	$P_1(\text{кН})$	$\omega(\text{с}^{-1})$	$E(\text{МПа})$
0	0,8	$1 \cdot 10^{-9}$	5	50	20	30	$2 \cdot 10^5$
1	0,9	$2 \cdot 10^{-8}$	4	20	40	20	$2 \cdot 10^5$
2	1	$1,2 \cdot 10^{-9}$	3,5	30	20	40	$2 \cdot 10^5$
3	1,2	$1,4 \cdot 10^{-9}$	2	10	15	50	$2 \cdot 10^5$
4	1,1	$1,3 \cdot 10^{-9}$	3	40	35	10	$2 \cdot 10^5$
5	1,4	$1,1 \cdot 10^{-9}$	4	25	30	25	$2 \cdot 10^5$
6	1,3	$1,2 \cdot 10^{-9}$	5	27	28	45	$2 \cdot 10^5$
7	1,6	$2,1 \cdot 10^{-9}$	7	35	40	28	$2 \cdot 10^5$
8	1,04	$1,8 \cdot 10^{-9}$	6	38	17	35	$2 \cdot 10^5$
9	1,5	$1,9 \cdot 10^{-9}$	4	42	25	60	$2 \cdot 10^5$

## Практична робота № 4

### НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

#### 4.1 Дослідження усталених резонансних коливань нелінійної системи з одним ступенем вільності при гармонічному збудженні

Вимушені коливання нелінійної системи з зв'язним  $b\dot{x}$  (гіпотеза Кельвіна-Фойхта) та гістерезисним  $\frac{\alpha}{\omega}\dot{x}$  (гіпотеза Бока-Шліппе-Когера) тертям описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{q} + c_1\dot{q} + b_1\dot{q} + \frac{\alpha_1}{\omega}\dot{q} + F(q, \dot{q}) = F \cos pt, \quad (4.1.1)$$

де  $m$  і  $c_1$  - коефіцієнти інерції та жорсткості;  $q$  - узагальнена координата, що відрахована від положення стійкої рівноваги;  $b_1$  і  $\alpha_1$  - коефіцієнти відповідно зв'язкого та гістерезисного тертя;

$F(q, \dot{q})$  - нелінійна частина характеристики відновлюючої сили тертя;

$F$  - амплітуда збуджувальної сили, що віднесена до маси коливальної системи;

$p$  - кутова частота збуджувальної сили.

Варіанти нелінійних елементів показані на рис.4.1.1. Тертя потрібно враховувати тільки при резонансі, коли  $p = \omega$ .

#### 4.2 План розв'язання задачі

1. Визначити амплітуду вільних коливань з початкових умов.
2. Розв'язати задачу вільних коливань з урахуванням зв'язкого тертя (знайти закон коливань).
3. Знайти амплітуду та фазу вимушених коливань лінійної системи з урахуванням тертя.
4. Знайти частоту вільних коливань нелінійної системи без врахування тертя.
5. За допомогою одного з наближених методів (Крилова-Боголюбова, Бубнова-Гальоркіна, гармонічного балансу і т.д.) знайти розв'язок нелінійного рівняння (4.1.1) у першому наближенні.
6. Знайти амплітуди усталених коливань.
7. Побудувати скелетну та енергетичну криві.
8. Дослідити стійкість вимушених коливань, показати точки зриву та стрибків амплітуди; пунктиром позначити нестійкі ділянки амплітудно - частотної кривої; за допомогою рівнянь в варіаціях відібрати стійкі амплітуди.
9. Побудувати амплітудно - частотні криві при наявності непружного опору і при його відсутності.

Варіанти задач вибирають за рис.4.2.1 та табл.4.2.1.

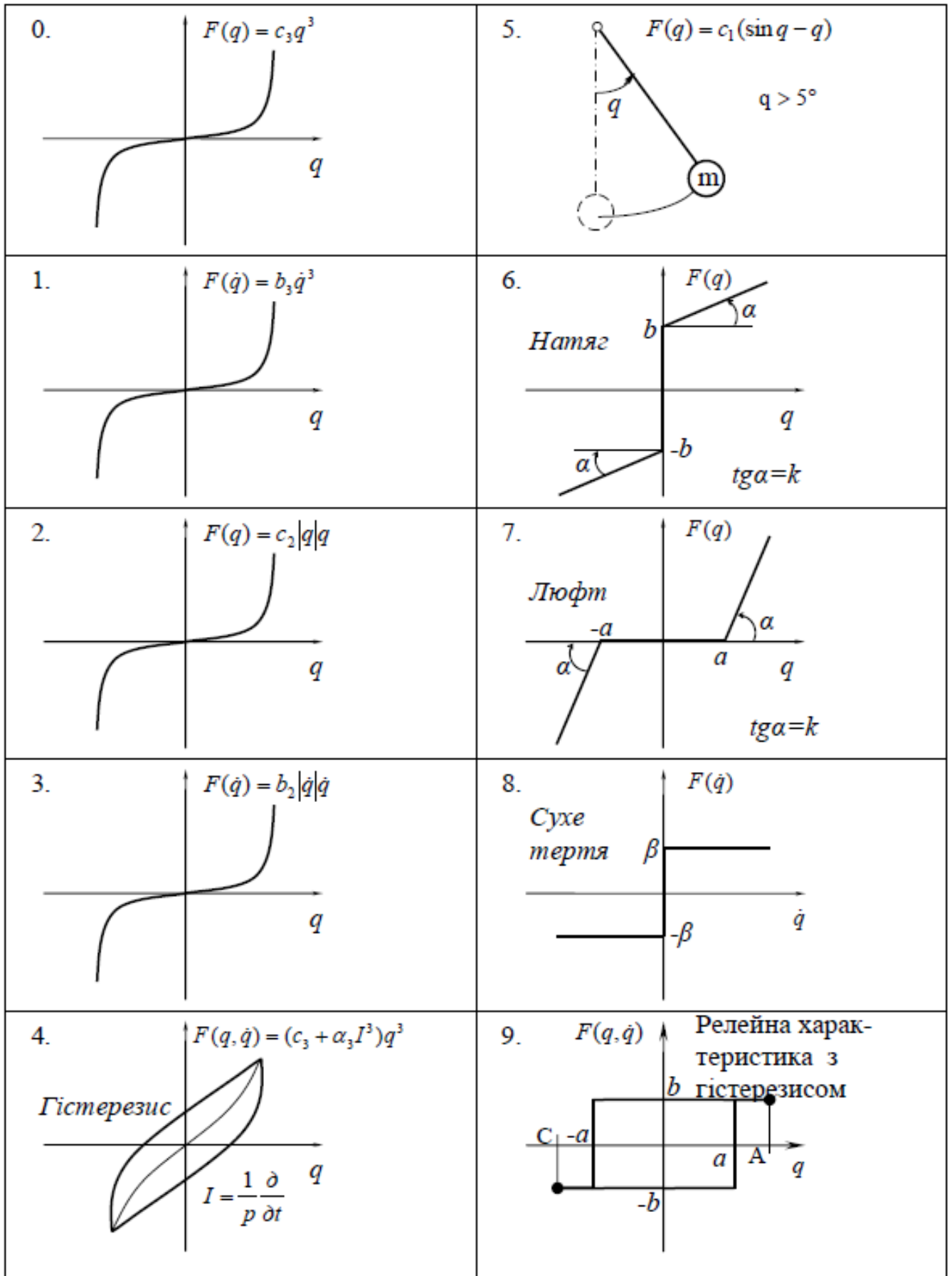


Рис.4.2.1

Таблица 4.2.1

Шифр	$\frac{F}{m}$	$\frac{b_1}{m}$	$\frac{\alpha_1}{m}$	$\frac{c_3}{m}$	$\frac{\alpha_3}{m}$	$\frac{c_1}{m} = \omega^2$	$\frac{b_3}{m}$	$\frac{b_2}{m}$	$\frac{c_2}{m}$	$a, \frac{b}{2}$	$\frac{k}{m}$	$\frac{\beta}{m}$
	$\frac{H}{кг}$	$\frac{H \cdot c}{кг \cdot м}$	$\frac{\tau H}{кг \cdot м}$	$\frac{MH}{кг \cdot м^3}$	$\frac{MH}{кг \cdot м^3}$	$\frac{1}{с^2}$	$\frac{H}{кг \cdot м^2}$	$\frac{H}{м^2}$	$\frac{\tau H}{кг \cdot м^2}$	$a, м$ $b, H$	$\frac{\tau H}{кг \cdot м}$	$\frac{\tau H}{кг \cdot м}$
0	2	2	0	+8	$\frac{4}{3}$	$10^4$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{+4}$	0,4A	0,4	2
1	3	4	0	-8	$\frac{8}{3}$	$1,21 \cdot 10^4$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0,2A	0,3	4
2	4	0	2	$+\frac{40}{3}$	$\frac{4}{3}$	$10^4$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{+4}$	0,3A	0,5	0
3	5	0	1	$-\frac{40}{3}$	$\frac{4}{3}$	$1,44 \cdot 10^4$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	0,4A	0,6	0
4	2	0	2	+8	$\frac{8}{3}$	$1,69 \cdot 10^4$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{+4}$	0,5A	0,7	4
5	3	3	0	-8	$\frac{4}{3}$	$1,96 \cdot 10^4$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0,6A	0,8	2
6	4	5	0	-8	$\frac{8}{3}$	$10^4$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{+4}$	0,3A	1	0
7	5	0	2	$+\frac{40}{3}$	$\frac{4}{3}$	$1,21 \cdot 10^4$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0,4A	0,5	4
8	2	0	1	$-\frac{40}{3}$	$\frac{8}{3}$	$1,44 \cdot 10^4$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{4}$	0,2A	0,6	2
9	3	4	0	+8	$\frac{4}{3}$	$1,69 \cdot 10^4$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{+8}$	0,6A	0,7	0

Таблица 4.2.2

Шифр	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_0(0), (м)$	0,002	0,001	0,04	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,004	0,003
$\dot{q}_0(0), (м/с)$	0,003	0,07	0,08	0,09	0,007	0,008	0,09	0,03	0,07	0,08

## Приклади розв'язку

### Вільні коливання системи з одним ступенем вільності без врахування в'язкого тертя

Визначити параметри лінійної коливальної системи з одним ступенем вільності, без врахування в'язкого тертя.

Вихідні дані:

$$\omega_0^2 = 1,21 \cdot 10^4 \text{ c}^{-2}.$$

Початкові умови:  $q_0 = 0;$   $\dot{q}_0 = 7 \frac{\text{мм}}{\text{с}}.$

Розв'язання

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$q = A \cos(\omega_0 t - \varphi) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Постійні інтегрування знаходимо з початкових умов.

$$C_1 = q_0 = 0;$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} = \frac{7}{1,21 \cdot 10^4} = 5,78 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 5,78 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

### Вільні коливання системи з одним ступенем звільності з врахуванням в'язкого тертя

Визначити параметри лінійної коливальної системи з одним ступенем вільності з врахуванням в'язкого тертя.

Вихідні дані:

$$\omega_0^2 = 1,21 \cdot 10^4 \text{ c}^{-2}; \quad h = \frac{1}{2} \frac{b}{a} = 2 \text{ c}^{-1}.$$

Початкові умови:  $q_0 = 0;$   $\dot{q}_0 = 7 \frac{\text{мм}}{\text{с}}.$

Розв'язання.

Рівняння вільних коливань системи з одним ступенем вільності з врахуванням в'язкого тертя має вигляд:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0;$$

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = 0;$$

З урахуванням вихідних даних

$$\ddot{q} + 4\dot{q} + 1,21 \cdot 10^4 q = 0.$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді  $q = Be^{\lambda t}$ .

Характеристичне рівняння  $\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0$ .

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1,21 \cdot 10^4 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}.$$

Оскільки  $\omega_0 \gg h$ , то  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{1,21 \cdot 10^4 - 4} = 109,98 c^{-1}$ ;

Загальний розв'язок  $q = Ae^{-ht} \cos(\tilde{\omega}t - \varphi) = e^{-ht} (C_1 \cos \tilde{\omega}t + C_2 \sin \tilde{\omega}t)$ ;

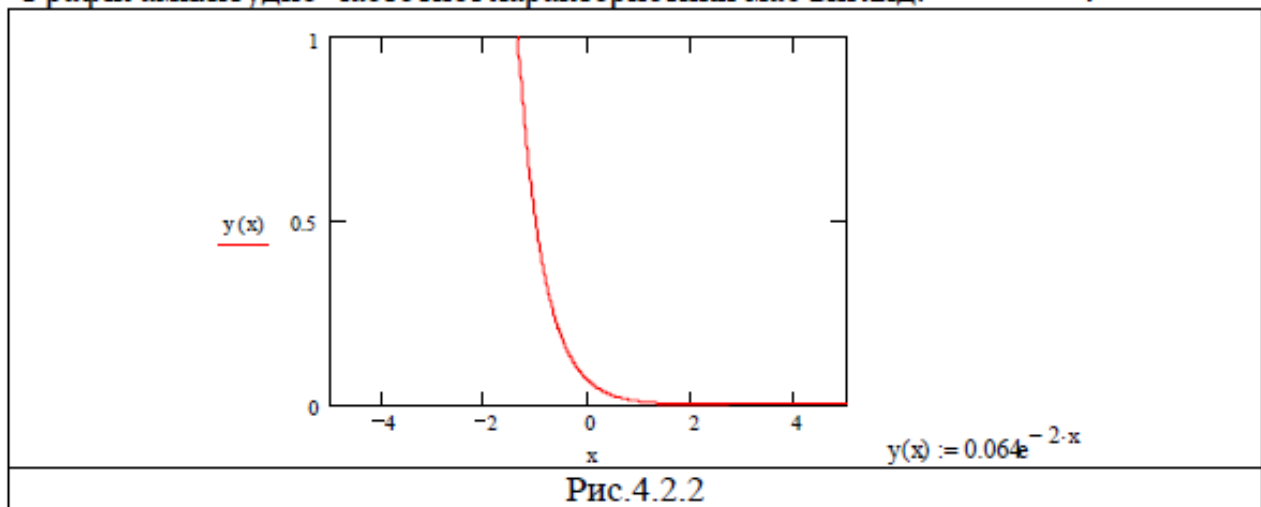
$$\dot{q} = -he^{-ht} (C_1 \cos \tilde{\omega}t + C_2 \sin \tilde{\omega}t) + e^{-ht} (-C_1 \tilde{\omega} \sin \tilde{\omega}t + C_2 \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega}t).$$

Враховуючи початкові умови (1), маємо:

$$C_1 = q_0 = 0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\tilde{\omega}} = \frac{7}{109,98} = 0,064 \text{ мм}.$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,064 \text{ мм}$$

Графік амплітудно-частотної характеристики має вигляд:  $A \cdot e^{-ht}$ .



### Вимушені коливання системи з одним ступенем вільності без врахування в'язкого тертя

Визначити параметри лінійної коливальної системи з однією ступінню вільності під дією гармонічної сили без врахування тертя.

Вихідні дані:

$$\omega_0^2 = 1,21 \cdot 10^4 c^{-2}; \quad h = \frac{1}{2} \frac{b}{a} = 2 c^{-1}; \quad \omega = 99 c^{-1}; \quad \frac{P}{a} = 5H / \kappa z.$$

Початкові умови:  $q_0 = 0$ ;  $\dot{q}_0 = 7 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$ .

Розв'язок:

$$a\ddot{q} + cq = P \cos \omega t;$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{P}{a} \cos \omega t;$$

$$\ddot{q} + 1,21 \cdot 10^4 q = 5 \cos 99t.$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$q = A \cos(\omega t - \varphi);$$

$$\dot{q} = -A \omega \sin(\omega t - \varphi);$$

$$\ddot{q} = -A \omega^2 \cos(\omega t - \varphi).$$

Загальний розв'язок:

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{P}{a(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Сталі інтегрування знаходимо з початкових умов:

$$q(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{P}{a(\omega_0^2 - \omega^2)} = -\frac{5}{1,21 \cdot 10^4 - 99^2} = 0,00217;$$

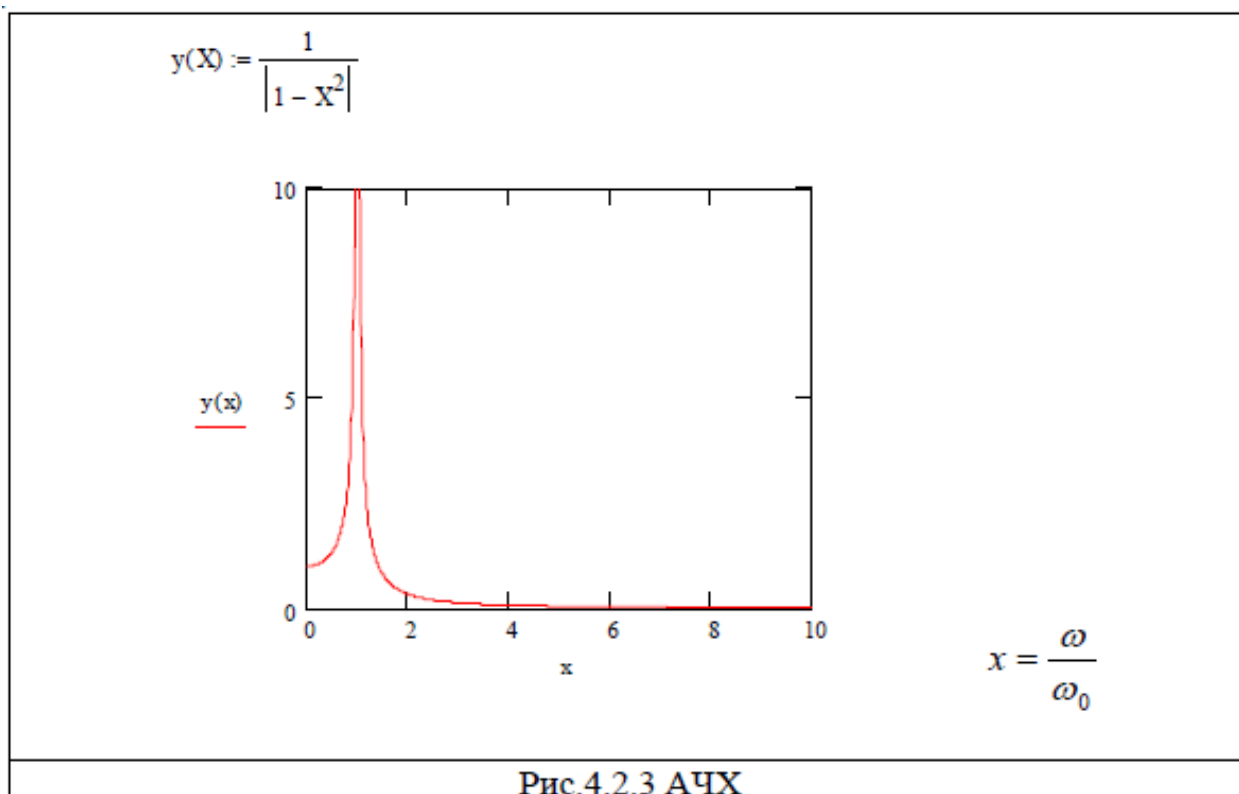
$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0 = 7 \text{ мм} \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} = \frac{7}{1,1 \cdot 10^2} = 0,064.$$

Амплітуда вимушених коливань

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0,00217^2 + 0,064^2} = 0,064.$$

Коефіцієнт динамічності по переміщенням

$$\kappa = 1 / \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| = 1 / \left| 1 - \frac{99^2}{1,21 \cdot 10^4} \right| = 5,26$$



### Вимушені коливання системи з одним ступенем вільності з урахуванням в'язкого тертя

Знайти амплітуду лінійної коливальної системи з одним ступенем вільності під дією гармонічної сили з урахування тертя при резонансі.

Вихідні дані:

$$\omega_0^2 = 1,21 \cdot 10^4 \text{ c}^{-2}; \quad h = \frac{1}{2} \frac{b}{a} = 2 \text{ c}^{-1}; \quad \omega = 99 \text{ c}^{-1}; \quad \frac{P}{a} = 5 \text{ Н / кг}.$$

Розв'язок:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = P \cos \omega t;$$

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{P}{a} \cos \omega t;$$

$$\ddot{q} + 4\dot{q} + 1,21 \cdot 10^4 q = 5 \cos 99t.$$

Використовуючи метод гармонічного балансу знаходимо амплітуду вимушених коливань, яка за умови резонансу  $\omega = \omega_0$  має вид:

$$A = \frac{P}{a\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} = \frac{P}{2ah\omega} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 1,1 \cdot 10^2} = 0,0114 \text{ мм}$$

## Вільні коливання нелінійної системи з одним ступенем вільності без врахування в'язкого тертя

Визначити параметри нелінійної коливальної системи з одним ступенем вільності без врахування в'язкого тертя.

Вихідні дані:

$$\omega_0^2 = \frac{c_1}{m} = 1,21 \cdot 10^4 \text{ c}^{-2}, \quad \gamma = \frac{c_3}{m} = \frac{40}{3} \cdot 10^6 \frac{1}{\text{м}^2 \text{c}^2}.$$

Початкові умови:  $q_0 = 0; \quad \dot{q}_0 = 7 \frac{\text{мм}}{\text{с}}.$

Розв'язок:

$$m\ddot{q} + c_1 q + c_3 q^3 = 0;$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \gamma q^3 = 0.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$q = A \cos \omega t = A \cos \psi.$$

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \cos \psi + \omega_0^2 A \cos \psi + \gamma A^3 \left( \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi \right) &= \\ = P_0 \cos \psi. \end{aligned}$$

Використовуючи метод гармонічного балансу, маємо:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \gamma A^2.$$

Знайдемо амплітуду з початкових умов

$$q(0) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

## Вимушені коливання нелінійної системи з одним ступенем вільності без врахування в'язкого тертя

Визначити параметри нелінійної коливальної системи з одним ступенем вільності під дією гармонічної сили без врахування в'язкого тертя.

Вихідні дані:

$$\omega_0^2 = 1,21 \cdot 10^4 \text{ c}^{-2}, \quad P_0 = \frac{P}{m} = 5 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}, \quad \omega = 99 \text{ c}^{-1}, \quad \gamma = \frac{c_3}{m} = \frac{40}{3} \cdot 10^6 \frac{1}{\text{м}^2 \text{c}^2}$$

Розв'язок:

$$m\ddot{q} + c_1 q + c_3 q^3 = P \cos \omega t$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \gamma q^3 = P_0 \cos \omega t.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$q = A \cos \alpha t = A \cos \psi.$$

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \cos \psi + \omega_0^2 A \cos \psi + \gamma A^3 \left( \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi \right) = \\ = P_0 \cos \psi. \end{aligned}$$

Використовуючи метод гармонічного балансу, маємо:

$$-A\omega^2 \cos \psi + \omega_0^2 A \cos \psi + \gamma A^3 \frac{3}{4} \cos \psi = P_0 \cos \psi;$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4} \gamma A^3 = P_0$$

Враховуючи числові дані, маємо:

$$A(1,21 \cdot 10^4 - 99^2) + \frac{3}{4} \frac{40}{3} \cdot 10^6 A^3 = 5.$$

Розв'язуючи кубічне рівняння, отримаємо три значення амплітуди два з яких є комплексно спряженими і нас не цікавлять, тому величина амплітуди

$$A = 2,133 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

### Вимушені коливання нелінійної системи з одним ступенем вільності з урахуванням в'язкого тертя

Визначити параметри нелінійної коливальної системи з одним ступенем вільності під дією гармонічної сили з урахуванням в'язкого тертя.

Вихідні дані:

$$\omega_0^2 = 1,21 \cdot 10^4 \text{ с}^{-2}, \quad P_0 = \frac{P}{m} = 5 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}, \quad p = 99 \text{ с}^{-1}, \quad \gamma = \frac{c_3}{m} = \frac{40}{3} \frac{1}{\text{м}^2 \text{с}^2}.$$

Розв'язок:

$$m\ddot{q} + c_1 q + c_3 q^3 + b_1 \dot{q} = P \cos pt;$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \gamma q^3 + 2h\dot{q} = P_0 \cos pt.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$q = A \cos(pt - \varphi) = A \cos \psi;$$

$$pt = \psi + \varphi;$$

$$q^3 = A^3 \cos^3 \psi = A^3 \left( \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi \right).$$

Підставляючи розв'язок у рівняння коливань, отримаємо

$$\begin{aligned} -Ap^2 \cos \psi + A\omega_0^2 \cos \psi + \gamma A^3 \left( \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi \right) - 2hAp \sin \psi = \\ = P_0 \cos pt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -Ap^2 \cos \psi + A\omega_0^2 \cos \psi + \gamma A^3 \left( \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi \right) - 2hAp \sin \psi = \\
 & = P_0 (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi);
 \end{aligned}$$

Використовуючи метод гармонічного балансу, маємо

$$\begin{cases}
 A(\omega_0^2 - p^2) + \frac{3}{4} \gamma A^3 = P_0 \cos \varphi \\
 2hAp = P_0 \sin \varphi
 \end{cases}$$

Розділимо обидва рівняння на  $A\omega_0^2$

$$\begin{cases}
 1 - \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2 + \frac{3}{4} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2} = \frac{P_0}{A\omega_0^2} \cos \varphi \\
 2h \frac{p}{\omega_0^2} = \frac{P_0}{A\omega_0^2} \sin \varphi
 \end{cases}$$

Піднесемо обидва рівняння до квадрату, отримаємо:

$$\begin{cases}
 1 - 2 \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2 + \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^4 + \frac{3}{2} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{p^2}{\omega_0^2} \right) + \frac{9}{16} \gamma^2 \left( \frac{A}{\omega_0} \right)^4 = \frac{P_0^2}{A^2 \omega_0^4} \cos^2 \varphi \\
 4h^2 \left( \frac{p}{\omega_0^2} \right)^2 = \frac{P_0^2}{A^2 \omega_0^4} \sin^2 \varphi
 \end{cases}$$

Складемо рівняння отриманої системи:

$$\begin{aligned}
 & 1 - 2 \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2 + \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^4 + \frac{3}{2} \gamma \left( \frac{A}{\omega_0} \right)^2 - \frac{3}{2} \gamma \frac{A^2 p^2}{\omega_0^4} + \frac{9}{16} \gamma^2 \left( \frac{A}{\omega_0} \right)^4 + 4h^2 \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2 = \\
 & = \frac{P_0^2}{A^2 \omega_0^4} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^4 - \left[ 2 + \frac{3}{2} \gamma \left( \frac{A}{\omega_0} \right)^2 - 4h^2 \frac{1}{\omega_0^2} \right] \left( \frac{p}{\omega_0} \right)^2 + 1 + \frac{3}{2} \gamma \left( \frac{A}{\omega_0} \right)^2 + \frac{9}{16} \gamma^2 \left( \frac{A}{\omega_0} \right)^4 - \\
 & - \frac{P_0^2}{A^2 \omega_0^4} = 0.
 \end{aligned}$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно  $\frac{p}{\omega_0}$ , отримаємо:

$$\left(\frac{p}{\omega_0}\right)_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ 2 + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{A}{\omega_0}\right)^2 - 4h^2 \frac{1}{\omega_0^2} \right] \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ 2 + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{A}{\omega_0}\right)^2 - 4h^2 \frac{1}{\omega_0^2} \right]^2 - 4 \left( 1 + \frac{3}{2} \gamma \left(\frac{A}{\omega_0}\right)^2 + \frac{9}{16} \gamma^2 \left(\frac{A}{\omega_0}\right)^4 - \frac{P_0^2}{A^2 \omega_0^4} \right)}$$

$$\left(\frac{p}{\omega_0}\right)_{1,2}^2 = 1 + \frac{3}{4} \gamma \left(\frac{A}{\omega_0}\right)^2 - 2h^2 \frac{1}{\omega_0^2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{P_0^2}{A^2 \omega_0^4} - 16h^2 \frac{1}{\omega_0^2} - 12\gamma h^2 \left(\frac{A}{\omega_0^2}\right)^2 + (2h)^4 \frac{1}{\omega_0^4}}$$

$$\left(\frac{p}{\omega_0}\right)_{1,2}^2 = 1 + \frac{3}{4} \gamma \left(\frac{A}{\omega_0}\right)^2 - 2h^2 \frac{1}{\omega_0^2} \pm \sqrt{\frac{P_0^2}{A^2 \omega_0^4} - 4 \frac{h^2}{\omega_0^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \gamma \left(\frac{A}{\omega_0}\right)^2 \right) + 4 \frac{h^4}{\omega_0^4}}$$

$$\frac{P_0^2}{A^2 \omega_0^4} - 4 \frac{h^2}{\omega_0^2} \left( 1 + \frac{3}{4} \gamma \left(\frac{A}{\omega_0}\right)^2 \right) + 4 \frac{h^4}{\omega_0^4} = 0$$

З урахуванням числових даних, маємо:

$$\frac{5^2}{A^2 (1,21 \cdot 10^4)^2} - 4 \frac{2^2}{1,21 \cdot 10^4} \left[ 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{40}{3} \cdot 10^6 \frac{A^2}{1,21 \cdot 10^4} \right] + 4 \frac{2^4}{(1,21 \cdot 10^4)^2} = 0$$

Розв'язуючи це рівняння відносно А, отримаємо

$$A = \begin{cases} -3.64 \cdot 10^{-2} i \\ 3.64 \cdot 10^{-2} i \\ -1.085 \cdot 10^{-2} \\ 1.085 \cdot 10^{-2} \end{cases}$$

Отже  $A = 1.085 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

## СИСТЕМИ ЗІ СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ

### 5.1. Квадратичні форми і матриці параметрів

Реальну механічну коливальну систему, яка має нескінченне число ступенів вільності, для спрощення моделюють системою із скінченим числом ступенів вільності. Відхилення (переміщення) системи з  $N$  ступенями вільності від положення рівноваги визначають значення  $N$  узагальнених координат  $q_j$ , які утворюють вектор (матрицю-стовпець).

Для складання диференціальних рівнянь коливань найчастіше використовують метод рівнянь Лагранжа другого роду. Застосовують також принцип Д'Аламбера, методи будівельної механіки (методи сил і переміщень) та ін.

Якщо використовується метод рівнянь Лагранжа другого роду, то спочатку складаються вирази для кінетичної та потенціальної енергій, дисипативної функції (в'язкого, частотно-незалежного або сухого тертя), а також вираз для узагальненої сили.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k; & \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_{jk} q_j q_k; & \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k; \\ H &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_{jk} I_{jk} q_j q_k; & K &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \beta_{jk} \operatorname{sgn} \dot{q}_j \operatorname{sgn} \dot{q}_k, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Якщо хоч одна з узагальнених швидкостей не дорівнює нулю, то квадратична форма  $T$  і відповідна їй матриця  $[a]$  будуть додатно визначеними. Квадратична форма  $\Pi$  і матриця  $[c]$  будуть додатно визначеними у випадку стійкого положення рівноваги. З додатної визначеності матриць  $[a]$  і  $[c]$  випливає додатна визначеність усіх головних мінорів (за теоремою Сільвестра), а також існування обернених матриць  $[a]^{-1}$ ,  $[c]^{-1}$ . Остання називається матрицею питомих переміщень (податливостей):

Вирази квадратичних форм в індексній формі можна представити і в матричному вигляді

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \cdot [a] \cdot \{\dot{q}\}; & \Pi &= \frac{1}{2} \{q\}^T \cdot [c] \cdot \{q\}; & \Phi &= \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \cdot [b] \cdot \{\dot{q}\}; \\ H &= \frac{1}{2} \{q\}^T \cdot [\alpha] \cdot \{q\}; & K &= \frac{1}{2} \{\operatorname{sgn} \dot{q}\}^T \cdot [\beta] \cdot \{\operatorname{sgn} \dot{q}\}, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

а також у розгорнутому вигляді.

### 5.2. Форми диференціальних рівнянь вільних коливань системи

Вигляд квадратичних форм, матриць і рівнянь коливань системи з  $N$  ступенями вільності залежить від вдалого вибору узагальнених координат. У довільному

випадку квадратичні форми  $T$  і  $\Pi$  мають добутки швидкостей або координат, матриці  $[a]$  і  $[c]$  відповідно побічні елементи, а диференціальні рівняння — інерційний (через другі похідні за часом) чи пружний зв'язок (через координати).

Дійсно, підставивши в рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$$

вирази (5.1.1) або (5.1.2) для  $T$  і  $\Pi$ , дістанемо загальну форму диференціальних рівнянь, записану в індексному вигляді

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n c_{jk} q_k = 0 \quad (5.2.1)$$

в матричному вигляді

$$[a] \cdot \{\ddot{q}\} + [c] \cdot \{q\} = \{0\} \quad (5.2.2)$$

а також у розгорнутому вигляді (записати самостійно).

Якщо обидві форми  $T$  і  $\Pi$  мають канонічний вигляд, то матриці інерції та жорсткості будуть діагональними. Відповідні узагальнені координати називаються головними (нормальними). Сукупність головних координат для даної коливальної системи єдина. Система диференціальних рівнянь коливань у головних координатах має найпростішу форму — діагональну:

$$M_i \ddot{\eta}_i + K_i \eta_i = 0 \quad (5.2.3)$$

$$[M] \cdot \{\ddot{\eta}\} + [K] \cdot \{\eta\} = 0 \quad (5.2.4)$$

Рівняння коливань пружної лінійної системи можна дістати інакше, застосовуючи методи переміщень або сил. Згідно з першим методом, узагальнені сили виражаються через переміщення  $\{q\}$

$$\{Q\} = [c] \cdot \{q\}, \quad (5.2.5)$$

а згідно з другим, навпаки, переміщення виражаються через сили  $\{Q\}$

$$\{q\} = [\delta] \cdot \{Q\}, \quad (5.2.6)$$

За принципом Д'Аламбера підставимо узагальнені сили інерції  $\{Q\} = -[m] \cdot \{\ddot{q}\}$  в ліву частину (8.11) або в праву (8.12). Дістанемо відповідно пряму

$$[m] \cdot \{\ddot{q}\} + [c] \cdot \{q\} = \{0\} \quad (5.2.7)$$

або обернену несиметричну

$$[\delta] \cdot [m] \cdot \{\ddot{q}\} + \{q\} = \{0\} \quad (5.2.8)$$

форми рівнянь коливань системи.

### 5.3. Розв'язання рівнянь вільних коливань

Розглянемо матричне диференціальне рівняння вільних коливань, записане, наприклад, у загальній формі:

$$[a] \cdot \{\ddot{q}\} + [c] \cdot \{q\} = 0. \quad (5.3.1)$$

Частинний розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді головних (синхронних і синфазних) коливань

$$\{q\} = A\{u\} \cos(\omega t - \varphi) \quad (5.3.2)$$

де  $\{u\}$  - матриця – стовпець (вектор) амплітудних коефіцієнтів (форма коливань, власний вектор);  $A$  – амплітуда головних коливань, яка дорівнює амплітуді коливань першої узагальненої координати, якщо вважати  $u_{11}=1$ .

Підставивши (5.3.2) у (5.3.1), матимемо матричне рівняння для кутової частоти  $\omega$  і вектора  $\{u\}$ :

$$([c] - \omega^2[a])\{u\} = \{0\} \quad (5.3.3)$$

Нетривіальний розв'язок рівняння (8.23) відносно вектора  $\{u\}$  існує тільки в тому випадку, коли

$$\det([c] - \omega^2[a]) = 0 \quad (5.3.4)$$

Арифметичні значення квадратних коренів з  $\omega_1^2$  є власним кутовими частотами коливальної системи. Впорядкована сукупність власних частот

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_r \leq \omega_N \quad (5.3.5)$$

називається *спектром власних частот*.

Підставляючи значення кутової власної частоти  $\omega_1$  у (5.3.3), дістанемо для визначення  $N$  амплітудних коефіцієнтів систему  $(N-1)$  рангу -  $(N-1)$  лінійно незалежних рівнянь, коли  $\omega_1$  – простий корінь, або систему  $(N-r)$  рангу -  $(N-r)$  лінійно незалежних рівнянь, коли  $\omega_1$  – корінь кратності  $r$ . Тому один з амплітудних коефіцієнтів або відповідно  $r$  можна вибирати довільно. Домовилися вибирати перший коефіцієнт кожного вектора таким, що дорівнює одиниці  $u_{11} = 1$ , якщо  $\omega_1$  – простий корінь характеристичного (вікового) рівняння (5.3.4), або  $u_{11} = u_{21} = \dots = u_{r1} = 1$ , якщо  $\omega_1$  має кратність  $r$ . Тоді  $(N-1)$  або  $(N-r)$  лінійно незалежних алгебричних рівнянь (5.3.3) дадуть можливість визначити всі інші амплітудні коефіцієнти – компоненти власного вектора. Для простого кореня маємо

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} u_{11} = 1 \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{N1} \end{Bmatrix} \quad (5.3.6)$$

Сукупність (5.3.6) амплітудних коефіцієнтів, що відповідають власній частоті  $\omega_b$ , визначає 1-й власний вектор, 1-ту власну форму коливань. Таких власних форм коливань буде  $N-1$ , тобто стільки, скільки і власних частот, скільки і ступенів вільності. Власні вектори входять як стовпці в квадратну несиметричну матрицю — матрицю амплітудних коефіцієнтів

$$[u] = [\{u\}_1; \{u\}_2; \dots; \{u\}_N].$$

Ця матриця, якщо всі корені характеристичного рівняння прості, в розгорнутому вигляді запишеться так:

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{N1} & u_{N2} & \dots & u_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.3.7)$$

Перший індекс в амплітудному коефіцієнті  $u_{sl}$  відповідає номеру узагальненої координати, другий — номеру власної частоти і номеру власного вектора.

Загальний розв'язок матричного рівняння (5.3.1) буде суперпозицією головних коливань — частинних розв'язків (5.3.2)

$$\{q\} = \sum_{i=1}^N A_i \{u\}_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = [u] \{A \cdot \cos(\omega t - \varphi)\}. \quad (5.3.8)$$

Результуючі коливання (5.3.8) вже не є гармонічними. Сталі  $A_i, \omega_i$  визначаються з  $2N$  початкових умов. Якщо, наприклад, початкове відхилення коливальної системи пропорційне деякій власній формі коливань  $\{u\}_i$  при тривіальній початковій швидкості, то всі сталі, крім  $A_i, \omega_i$ , дорівнюватимуть нулю.

### Задача 5.3.1

Дослідження власних і вимушених коливань ланцюгової системи з двома ступенями вільності

План розв'язання задачі

1. Скласти рівняння коливань для даної системи (рис. 5.2.1)
2. Знайти власні частоти.
3. Визначити парціальні частоти і побудувати діаграму Віна.
4. Обчислити амплітудні коефіцієнти, зобразити на малюнку власні форми коливань.
5. Перевірити ортогональність власних форм коливань.
6. Скласти рівняння вимушених коливань за допомогою дії сил  $F_1 \cos pt, F_2 \cos pt$  по головних координатах.
7. Знайти двома способами ( безпосередньо і методом головних координат ) розв'язок, що відповідає цілком вимушеним коливанням.
8. Знайти резонансне рішення ( при  $p = \omega_1$  ) з урахуванням в'язкого тертя  $b_{jk} \dot{q}_k$  в припущенні  $b_{jk} = bc_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ).

Варіанти задачі 5.3.1 вибирають по двозначному шифру, рис. 5.3.1 і табл. 5.3.1.

Таблица 5.3.1

Шифр	$M, kH \cdot m$	$F, kH$	$l, m$	$m_1, кг$	$m_2, кг$	$k, \frac{kH}{m}$	$J_1, кг \cdot m^2$	$J_2, кг \cdot m^2$	$k_0, H \cdot m$
0	3	5	1,0	1	1	100	2	2	4000
1	4	6	0,9	2	3	200	3	4	5000
2	2	4	0,8	3	5	300	4	2	6000
3	1	3	0,7	4	6	400	5	1	3000
4	3	2	0,6	5	7	500	1	3	4000
5	7	6	1,0	6	2	400	2	4	5000
6	4	5	1,0	5	3	300	3	2	6000
7	6	6	0,9	4	5	500	4	5	2000
8	8	3	0,7	3	2	200	5	2	3000
9	9	2	0,6	2	4	300	6	3	4000

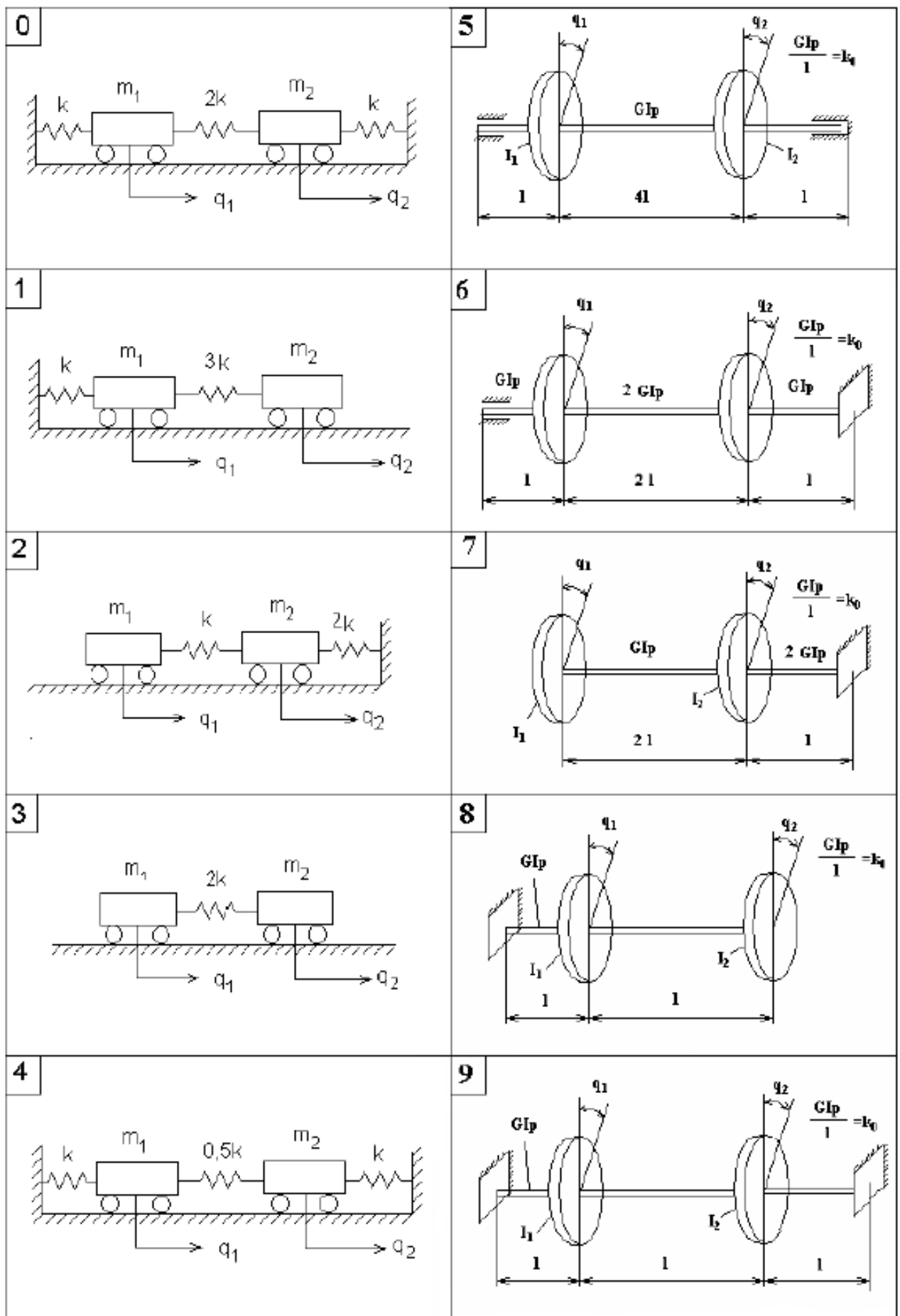


Рис. 5.3.1

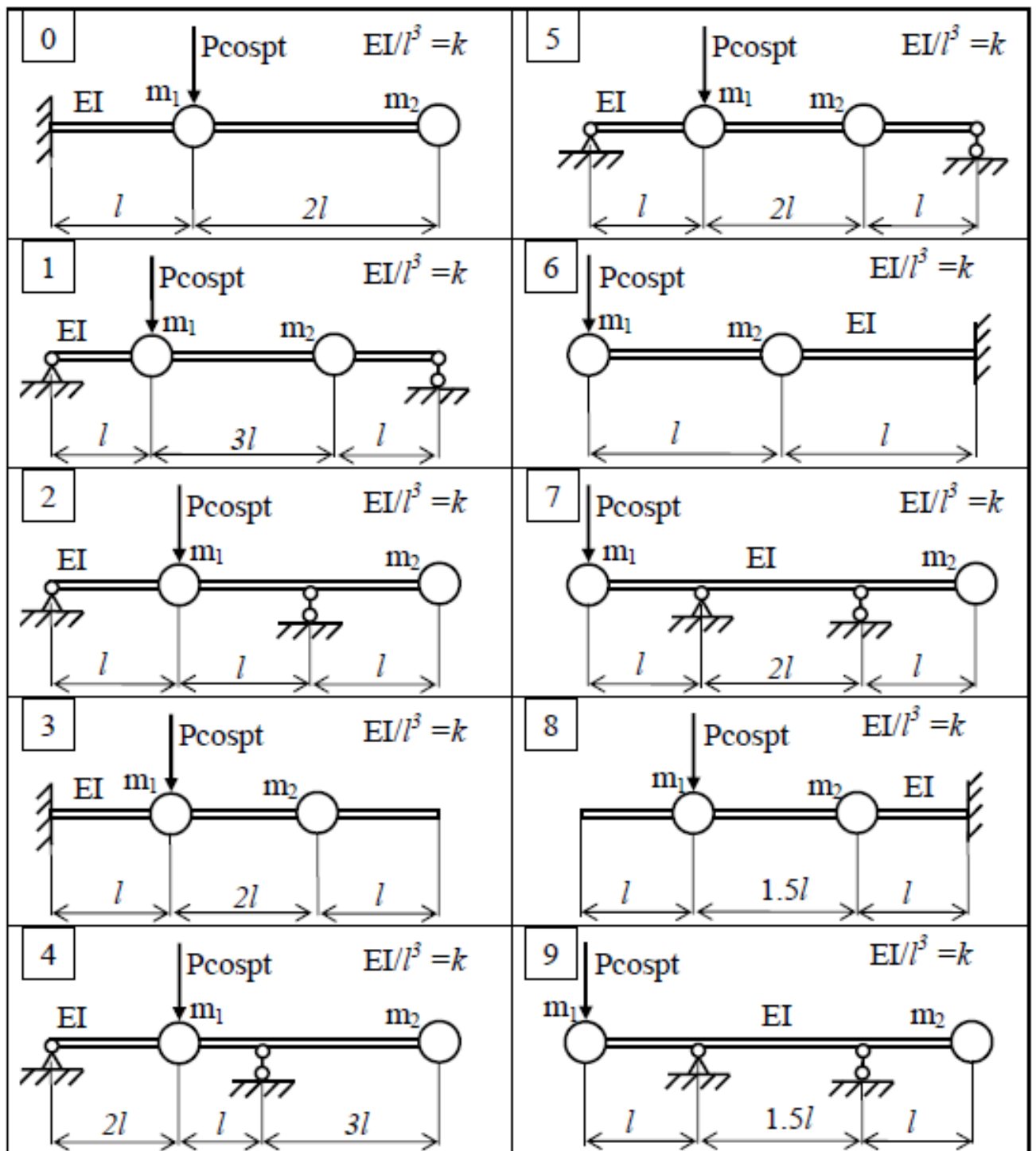


Рис. 5.3.2

**Приклад 5.3.1. Вільні коливання системи з двома ступенями вільності**

Необхідно визначити власні частоти коливань використовуючи метод сил, метод Релея та метод Донкерлі.

$$m_1 = 4m;$$

Вихідні дані:  $m_2 = m;$

$l.$

**Визначення власних частот методом сил**

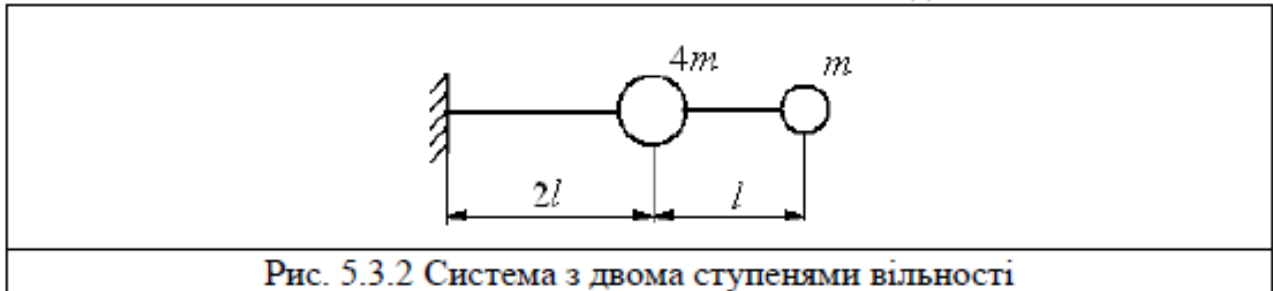


Рис. 5.3.2 Система з двома ступенями вільності

Рівняння методу сил мають вигляд

$$\begin{cases} w_1 = -\delta_{11}m_1\ddot{w}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{w}_2 \\ w_2 = -\delta_{21}m_1\ddot{w}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{w}_2 \end{cases}$$

$$w_1 = W_1 \cos \omega t; \quad w_2 = W_2 \cos \omega t;$$

$$\begin{cases} W_1 = \omega^2 \delta_{11}m_1W_1 + \omega^2 \delta_{12}m_2W_2 \\ W_2 = \omega^2 \delta_{21}m_1W_1 + \omega^2 \delta_{22}m_2W_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_1(\omega^2 \delta_{11}m_1 - 1) + \omega^2 \delta_{12}m_2W_2 = 0 \\ \omega^2 \delta_{21}m_1W_1 + W_2(\omega^2 \delta_{22}m_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Значення  $\delta_{ij}$  знаходимо способом Верещагіна.

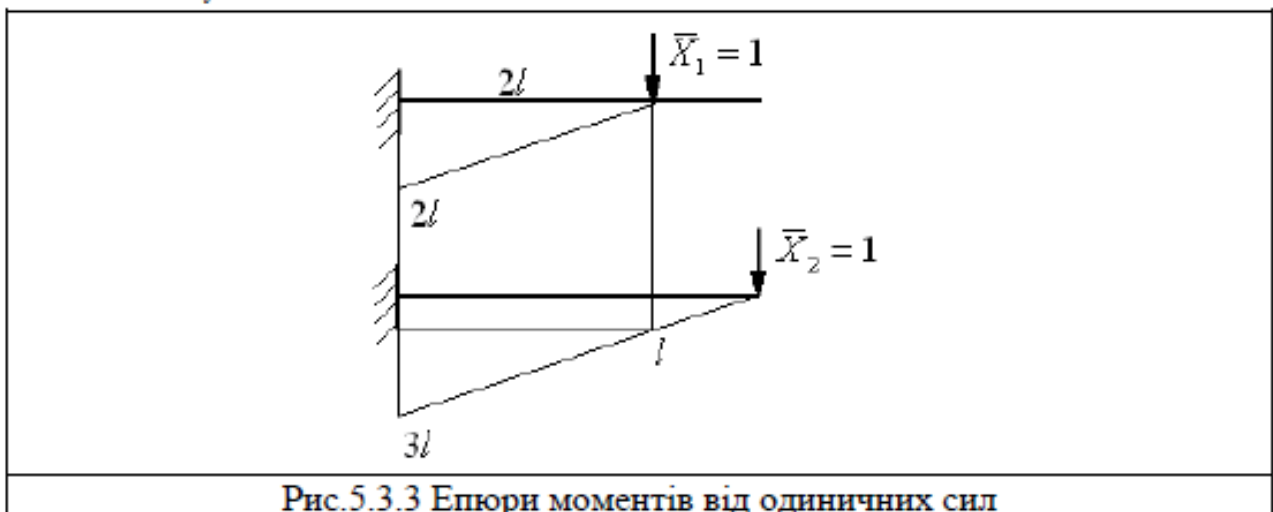


Рис.5.3.3 Епюри моментів від одиничних сил

$$\delta_{11} = \frac{8l^3}{3EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{14l^3}{3EI}; \quad \delta_{22} = \frac{9l^3}{EI}.$$

$$\det \begin{vmatrix} \omega^2 \delta_{11} m_1 - 1 & \omega^2 \delta_{12} m_2 \\ \omega^2 \delta_{21} m_1 & \omega^2 \delta_{22} m_2 - 1 \end{vmatrix} = 0;$$

Розкриваючи визначник, отримуємо характеристичне рівняння відносно  $\omega^2$ :

$$\omega^4 (m_1 m_2 \delta_{11} \delta_{22} - m_1 m_2 \delta_{12}) - \omega^2 (m_2 \delta_{22} + m_1 \delta_{11}) + 1 = 0;$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_2 \delta_{22} + m_1 \delta_{11} \mp \sqrt{(m_2 \delta_{22} + m_1 \delta_{11})^2 - 4(m_1 m_2 \delta_{11} \delta_{22} - m_1 m_2 \delta_{12}^2)}}{2(m_1 m_2 \delta_{11} \delta_{22} - m_1 m_2 \delta_{12}^2)};$$

Підставляючи числові значення (2) у (3), знаходимо першу та другу власні частоти:

$$\omega_1^2 = 0.05 \frac{EI}{ml^3}; \quad \omega_2^2 = 2.16 \frac{EI}{ml^3}.$$

Визначимо форми коливань.

$$\begin{vmatrix} \omega_i^2 \delta_{11} m_1 - 1 & \omega_i^2 \delta_{12} m_2 \\ \omega_i^2 \delta_{21} m_1 & \omega_i^2 \delta_{22} m_2 - 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} W_{i1} \\ W_{i2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$W_{i1} = 1 \Rightarrow W_{i2} = \frac{1 - \omega_i^2 m_1 \delta_{11}}{\omega_i^2 m_2 \delta_{21}};$$

$$1) \omega_1^2 = 0.05 \frac{EI}{ml^3}; \quad W_{11} = 1; \quad W_{21} = 2;$$

$$2) \omega_2^2 = 2.16 \frac{EI}{ml^3}; \quad W_{12} = 1; \quad W_{22} = -2.1;$$

$$\{W\}_{i1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}; \quad \{W\}_{i2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2.1 \end{Bmatrix}.$$



Рис. 5.3.4 Форми коливань

Перевіримо виконання умови ортогональності:

$$W_{11} m_1 W_{21} + W_{21} m_2 W_{12} = 0;$$

$$1 \cdot 4m \cdot 1 - 2m \cdot 2.1 \approx 0.$$

### Визначення першої власної частоти методом Релея

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 Q_i W_i}{\sum_{i=1}^2 m_i W_i^2};$$

$$Q_i = m_i g;$$

Значення  $W_i$  знаходимо за допомогою способу Верещагіна.

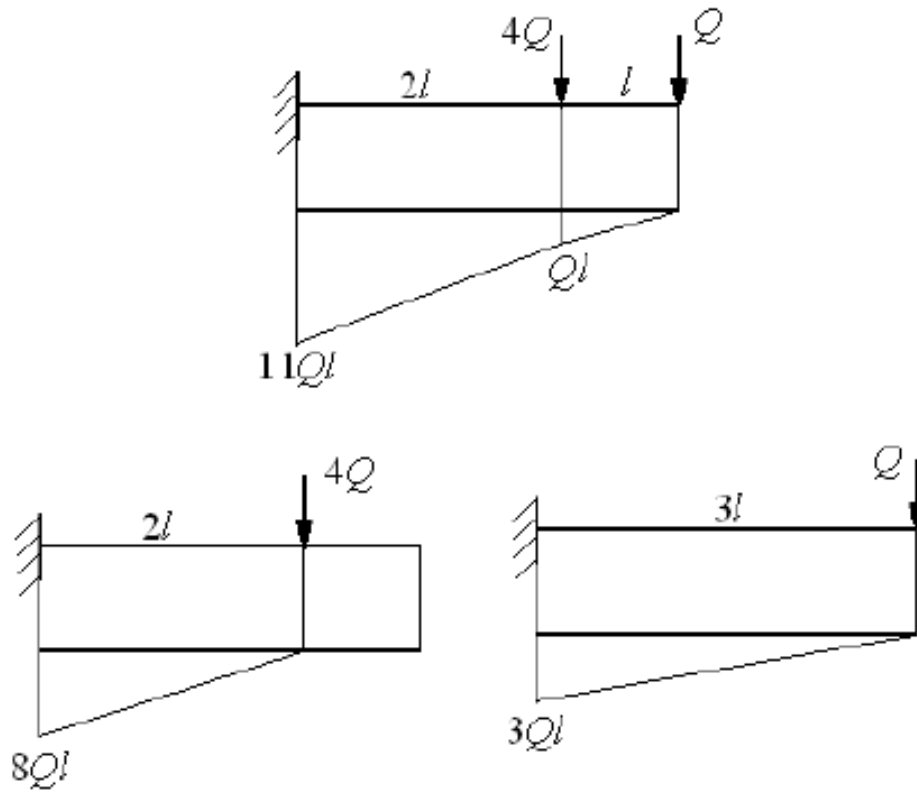


Рис.5.3.5 Епюри моментів

$$EIW_1 = \frac{46}{3} Ql^3; \quad EIW_2 = 27 Ql^3.$$

Підставляючи значення (6) у (5), та зробивши необхідні обчислення, отримаємо:

$$\omega_1^2 = 0.053 \frac{EI}{ml^3}.$$

Як бачимо, метод Релея дає завищене значення власної частоти.

### Визначення першої власної частоти методом Донкерлі

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(\omega_1')^2} + \frac{1}{(\omega_2')^2};$$

$$(\omega_1')^2 = \frac{1}{m_1 \delta_{11}} = \frac{1}{4m \frac{8l^3}{3EI}} = \frac{3EI}{32ml^3};$$

$$(\omega_2')^2 = \frac{1}{m_2 \delta_{22}} = \frac{1}{m \frac{9l^3}{EI}} = \frac{EI}{9ml^3};$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{32ml^3}{3EI} + \frac{9ml^3}{EI} = \frac{59ml^3}{9EI};$$

$$\omega_1^2 = 0.05 \frac{EI}{ml^3}.$$

### Приклад 5.3.2

#### Вимушені коливання системи з двома ступенями вільності

Необхідно визначити амплітуду коливань та максимальні нормальні напруження в балці.

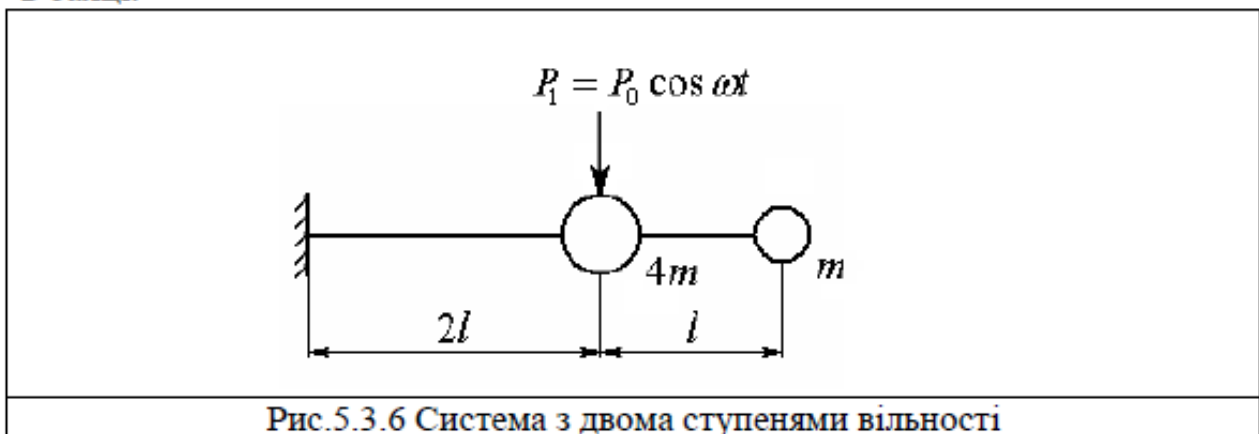


Рис. 5.3.6 Система з двома ступенями вільності

Вихідні дані:

$$m = 100 \text{ кг};$$

$$n = 400 \text{ хс}^{-1};$$

$$P_0 = 40 \text{ Н};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$I_z = 3400 \text{ см}^4;$$

$$W_z = 304 \text{ см}^3.$$

Використовуючи значення власних частот, знайдених при розв'язку попередньої задачі про вільні коливання системи з двома ступенями вільності, необхідно підібрати таку величину довжини  $l$ , щоб виконувалась умова  $\omega > 1.3\omega_2$ .

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3.14 \cdot 400}{30} = 41.867 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2^2 = 2.16 \frac{EI}{Ml^3};$$

$$\omega > 1.3\omega_2 \Rightarrow \omega_2^2 < 0.59\omega^2;$$

$$\frac{EI}{Ml^3} < 478.8;$$

$$l \geq \sqrt[3]{\frac{EI}{478.8M}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3400 \cdot 10^4}{478.8 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}} 5217 \text{ м};$$

Виберемо  $l = 5.217 \text{ м}$ .

Знайдені в попередній задачі значення

$$\delta_{11} = \frac{8l^3}{3EI} = \frac{8 \cdot 5217^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3400 \cdot 10^4} = 0,0556 \text{ мм/Н};$$

$$\delta_{22} = \frac{9l^3}{EI} = \frac{9 \cdot 5217^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3400 \cdot 10^4} = 0,188 \text{ мм/Н};$$

$$\delta_{12} = \frac{14l^3}{3EI} = \frac{14 \cdot 5217^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3400 \cdot 10^4} = 0,097 \text{ мм/Н}.$$

$$\begin{cases} w_1 = -\delta_{11}m_1\ddot{w}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{w}_2 \\ w_2 = -\delta_{21}m_1\ddot{w}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{w}_2 \end{cases};$$

$$w_1 = A_1 \cos \omega t, \quad w_2 = A_2 \cos \omega t; \quad P = P_0 \cos \omega t;$$

$$\begin{cases} (\omega^2 \delta_{11} m_1 - 1)A_1 + \omega^2 \delta_{12} m_2 A_2 + P_0 \delta_{11} = 0 \\ \omega^2 \delta_{21} m_1 A_1 + (\omega^2 \delta_{22} m_2 - 1)A_2 + P_0 \delta_{12} = 0 \end{cases};$$

З урахуванням числових виразів, маємо:

$$\begin{cases} (400 \cdot 10^{-3} \cdot 41.867^2 \cdot 0.0556 - 1)A_1 + 100 \cdot 10^{-3} \cdot 41.867^2 \cdot 0.097 A_2 + 40 \cdot 0.0556 = 0 \\ 400 \cdot 10^{-3} \cdot 41.867^2 \cdot 0.097 A_1 + (100 \cdot 10^{-3} \cdot 41.867^2 \cdot 0.188 - 1)A_2 + 40 \cdot 0.097 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 37.98A_1 + 17A_2 + 2.224 = 0 \\ 68A_1 + 31.95A_2 + 3.88 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} A_1 = -0.0978 \text{ мм} \\ A_2 = 0.087 \text{ мм} \end{cases};$$

$$\begin{cases} P'_\delta \delta_{11} + P''_\delta \delta_{12} = A_1 \\ P'_\delta \delta_{12} + P''_\delta \delta_{22} = A_2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0.0556P'_\delta + 0.097P''_\delta = -0.0978 \\ 0.097P'_\delta + 0.188P''_\delta = 0.087 \end{cases};$$

$$\begin{cases} P'_\delta = 22.19 \text{ Н} \\ P''_\delta = -13.73 \text{ Н} \end{cases};$$

Сумарні зусилля визначаються:

$$\begin{cases} P_{1\Sigma} = P'_\delta + P = 22.19 + 40 = 62.19 \text{ Н} \\ P_{2\Sigma} = P''_\delta + P = -13.73 + 40 = 26.27 \text{ Н} \end{cases}$$

Побудуємо розрахункову схему та епюру згинаючого моменту



Рис.5.3.7 Епюра згинаючого моменту

Максимальний згинаючий момент

$$M_{\max} = 1060.04 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Максимальні нормальні напруження

$$\sigma_\delta = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{1060.04 \cdot 10^3}{304 \cdot 10^4} = 0.35 \text{ МПа}.$$

### Приклад 5.3.3

#### Вимушені коливання системи з двома ступенями вільності

Необхідно знайти амплітуду вимушених коливань системи з двома ступенями вільності, умову антирезонансу та побудувати графіки АЧХ.

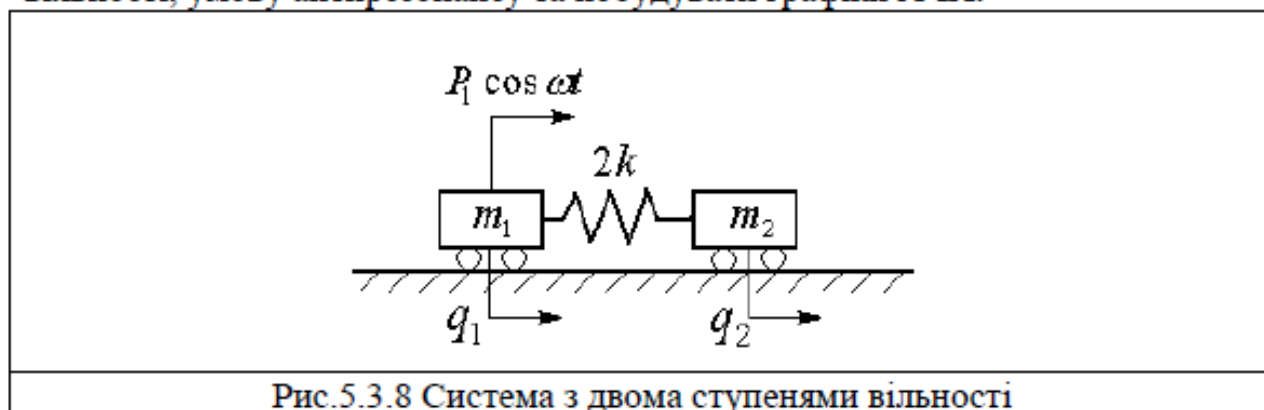


Рис.5.3.8 Система з двома ступенями вільності

Вихідні дані:  $m_1 = 4 \text{ кг}$ ;

$m_2 = 5 \text{ кг}$ ;

$k = 500 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;

$P_1 = 40 \text{ Н}$ ;

$\omega > 1.3\omega_2$ .

Знайдемо значення кінетичної та потенціальної енергій системи.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (q_2 - q_1)^2 2k.$$

Запишемо рівняння вимушених коливань системи, використовуючи рівняння Лагранжа II-го роду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

де  $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ .

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 - 2k(q_2 - q_1) = P_1 \cos \omega t, \\ m_2 \ddot{q}_2 + 2k(q_2 - q_1) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + 2kq_1 - 2kq_2 = P_1 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{q}_2 - 2kq_1 + 2kq_2 = 0 \end{cases}.$$

В матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \omega t.$$

Визначимо власні частоти системи.

Рівняння вільних коливань:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{q\} = A\{U\} \cos(\omega t - \varphi);$$

$$([c] - \omega^2 [a])\{U\} = \{0\};$$

$$\det [c] - \omega^2 [a] = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримуємо характеристичне рівняння, звідки знаходимо значення власних частот.

$$(2k - \omega^2 m_1)(2k - \omega^2 m_2) - 4k^2 = 0;$$

$$\omega^2 (m_1 m_2 \omega^2 - (m_1 + m_2) 2k) = 0;$$

$$\omega_1^2 = 0; \quad \omega_2^2 = \frac{2k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2};$$

З урахуванням числових значень, маємо

$$\omega_2^2 = \frac{(4+5)2 \cdot 500 \cdot 10^3}{4 \cdot 5} = 4.5 \cdot 10^5 \text{ c}^{-2}.$$

З умови  $\omega > 1.3\omega_2$ , знаходимо  $\omega > 872 \text{ c}^{-1}$ .

Прийmemo  $\omega = 900 \text{ c}^{-1}$ .

$$\{q\} = \{A\} \cos \omega t$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$[C] = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix};$$

$$[C^*] = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m_2 & 2k \\ 2k & 2k - \omega^2 m_1 \end{vmatrix};$$

$$[D] = \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [C^*] = \begin{vmatrix} \frac{2k - \omega^2 m_2}{\Delta(\omega^2)} & \frac{2k}{\Delta(\omega^2)} \\ \frac{2k}{\Delta(\omega^2)} & \frac{2k - \omega^2 m_1}{\Delta(\omega^2)} \end{vmatrix};$$

де  $\Delta(\omega^2) = (2k - \omega^2 m_1)(2k - \omega^2 m_2) - 4k^2$ .

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{2k - m_2 \omega^2}{(2k - m_1 \omega^2)(2k - m_2 \omega^2) - 4k^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^3 - 5 \cdot 900^2}{(2 \cdot 500 \cdot 10^3 - 4 \cdot 900^2)(2 \cdot 500 \cdot 10^3 - 5 \cdot 900^2) - 4 \cdot 500^2 \cdot 10^6} = -5.23 \cdot 10^{-7} \text{ м/Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{12} = D_{21} &= \frac{2k}{(2k - m_1 \omega^2)(2k - m_2 \omega^2) - 4k^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^3}{(2 \cdot 500 \cdot 10^3 - 4 \cdot 900^2)(2 \cdot 500 \cdot 10^3 - 5 \cdot 900^2) - 4 \cdot 500^2 \cdot 10^6} = 1.715 \cdot 10^{-7} \text{ м/Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{22} &= \frac{2k - m_1 \omega^2}{(2k - m_1 \omega^2)(2k - m_2 \omega^2) - 4k^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^3 - 4 \cdot 900^2}{(2 \cdot 500 \cdot 10^3 - 4 \cdot 900^2)(2 \cdot 500 \cdot 10^3 - 5 \cdot 900^2) - 4 \cdot 500^2 \cdot 10^6} = -3.841 \cdot 10^{-7} \text{ м/Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.23 \cdot 10^{-7} & 1.715 \cdot 10^{-7} \\ 1.715 \cdot 10^{-7} & -3.841 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 40 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

Звідки знаходимо значення амплітуд

$$A_1 = -2.092 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$A_2 = 6.86 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Визначимо умову антирезонансу

$$q_1 = D_{11} P_1 \cos \omega t;$$

$$D_{11} = 0;$$

$$D_{11} = \frac{2k - m_2 \omega^2}{(2k - m_1 \omega^2)(2k - m_2 \omega^2) - 4k^2} = 0,$$

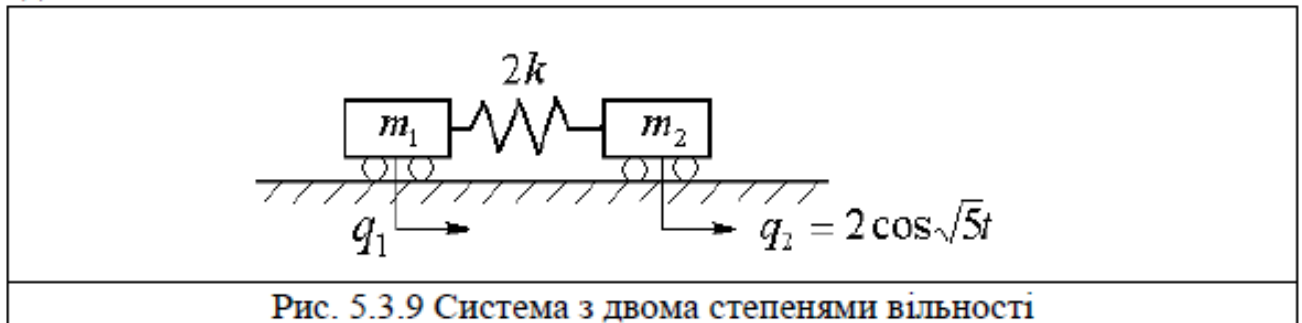
тоді

$$2k - m_2 \omega^2 = 0 \Rightarrow n_2^2 = \frac{2k}{m_2} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^3}{5} = 2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-2}.$$

#### Приклад 5.3.4

**Кінематичне збудження коливань у системі з двома ступенями вільності**

Необхідно знайти амплітуду  $A_1$  та силу  $P_2$  параметричних коливань системи з двома ступенями вільності.



Вихідні дані:  $m_1 = 4 \text{ кг};$

$m_2 = 5 \text{ кг};$

$k = 500 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$

Рівняння вимушених коливань системи в матричному виді має вигляд

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \end{Bmatrix} \cos \sqrt{5}t.$$

$$q_1 = A_1 \cos \sqrt{5}t;$$

$$q_2 = A_2 \cos \sqrt{5}t = 2 \cos \sqrt{5}t.$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\omega^2)} \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m_2 & 2k \\ 2k & 2k - \omega^2 m_1 \end{bmatrix};$$

$$\Delta(\omega^2) = (2k - \omega^2 m_1)(2k - \omega^2 m_2) - 4k^2;$$

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2k - \omega^2 m_2}{\Delta(\omega^2)} & \frac{2k}{\Delta(\omega^2)} \\ \frac{2k}{\Delta(\omega^2)} & \frac{2k - \omega^2 m_1}{\Delta(\omega^2)} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \end{Bmatrix};$$

$$A_1 = \frac{2k}{\Delta(\omega^2)} P_2;$$

$$A_2 = \frac{2k - m_1 \omega^2}{\Delta(\omega^2)} P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{A_2 \Delta(\omega^2)}{2k - m_1 \omega^2} = \frac{A_2 [(2k - m_1 \omega^2)(2k - m_2 \omega^2) - 4k^2]}{2k - m_1 \omega^2} \Big|_3$$

урахуванням числових даних, маємо

$$P_2 = \frac{2[(2 \cdot 500 - 4 \cdot 10^{-3} \cdot 5)(2 \cdot 500 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot 5) - 4 \cdot 500^2]}{2 \cdot 500 - 4 \cdot 10^{-3} \cdot 5} = -0.09 \text{ Н};$$

Тоді

$$A_1 = \frac{2 \cdot 500}{(2 \cdot 500 - 4 \cdot 10^{-3} \cdot 5)(2 \cdot 500 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot 5) - 4 \cdot 500^2} \cdot (-0.09) = 2 \text{ мм}.$$

### Приклад 5.3.5

#### Вимушені коливання системи з двома степенями вільності

Необхідно знайти власні частоти та форми вимушених коливань системи з двома степенями вільності, перевірити умову ортогональності власних форм коливань, знайти умову антирезонансу та побудувати АЧХ.

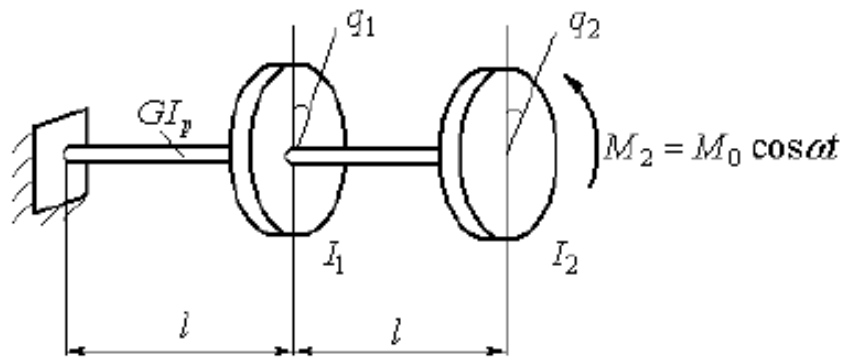


Рис. 5.3.10 Система з двома ступенями вільності

Вихідні дані:

$$l = 0.9 \text{ м};$$

$$I_1 = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_2 = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$\frac{GI_p}{l} = k_0 = 2000 \text{ Нм};$$

$$\omega = 1.3\omega_2.$$

Знайдемо значення кінетичної та потенціальної енергій системи.

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c (\varphi_2 - \varphi_1)^2;$$

Запишемо рівняння вимушених коливань системи, використовуючи рівняння Лагранжа II-го роду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

$$\text{де } Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c \varphi_1 + c \varphi_1 - c \varphi_2 = 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c \varphi_1 + c \varphi_2 = M_0 \cos \omega t \end{cases};$$

В матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_0 \end{Bmatrix} \cos \omega t$$

Визначимо власні частоти системи.

Рівняння вільних коливань:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\det[c] - \omega^2[a] = 0;$$

$$\det \begin{vmatrix} 2c - \omega^2 I_1 & -c \\ -c & c - \omega^2 I_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, отримуємо характеристичне рівняння відносно  $\omega$ :

$$I_1 I_2 \omega^4 - (I_1 + 2I_2)c\omega^2 + c^2 = 0;$$

Підставляючи числові дані, маємо:

$$20\omega^4 - 14 \cdot 2000\omega^2 + 2000^2 = 0;$$

$$\omega^4 - 1400\omega^2 + 200000 = 0;$$

$$\omega_1^2 = 161.5 c^{-2}; \quad \omega_2^2 = 1238.5 c^{-2}.$$

Приймаємо  $\omega_1 = 46 c^{-1}$ .

Розв'язок рівняння вимушених крутих коливань шукаємо у вигляді:  $\{q\} = \{A\} \cos \omega t$ ;

$$\begin{bmatrix} 2c - \omega^2 I_1 & -c \\ -c & c - \omega^2 I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_0 \end{Bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 2c - \omega^2 I_1 & -c \\ -c & c - \omega^2 I_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\omega^2)} \begin{bmatrix} c - \omega^2 I_2 & c \\ c & 2c - \omega^2 I_1 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{c - \omega^2 I_2}{\Delta(\omega^2)} & \frac{c}{\Delta(\omega^2)} \\ \frac{c}{\Delta(\omega^2)} & \frac{2c - \omega^2 I_1}{\Delta(\omega^2)} \end{bmatrix};$$

$$\Delta(\omega^2) = (2c - I_1 \omega^2)(c - I_2 \omega^2) - c^2;$$

Умова антирезонансу:

$$D_{11} = 0 \Rightarrow \frac{c - I_2 \omega^2}{(2c - I_1 \omega^2)(c - I_2 \omega^2) - c^2} = 0;$$

$$c - I_2 n_2^2 = 0; \quad n_2^2 = \frac{c}{I_2} = \frac{2000}{5} = 400 c^{-2}.$$

Форми коливань:

$$\begin{bmatrix} 2c - \omega^2 I_1 & -c \\ -c & c - \omega^2 I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{1i} \\ W_{2i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$W_{1i} = 1; \quad W_{2i} = \frac{2c - I_1 \omega_i^2}{c};$$

$$1). \quad \omega_1^2 = 161.5 \text{ c}^{-2};$$

$$W_{11} = 1; \quad W_{21} = \frac{2 \cdot 2000 - 4 \cdot 161.5}{2000} = 1.677;$$

$$2). \quad \omega_2^2 = 1238.5 \text{ c}^{-2};$$

$$W_{21} = 1; \quad W_{22} = \frac{2 \cdot 2000 - 4 \cdot 1238.5}{2000} = -0.477;$$

Умови ортогональності:

$$\{W\}_2^T [m] \{W\}_1 = 0; \quad \{W\}_2^T [c] \{W\}_1 = 0;$$

$$\{1 \quad -0.477\} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.677 \end{Bmatrix} = 0;$$

$$\{1 \quad -0.477\} \begin{bmatrix} 4000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.677 \end{Bmatrix} = 0;$$

Форми коливань



Рис. 5.3.11 Форми коливань

**Приклад 5.3.6.** Необхідно визначити антирезонансну частоту та підібрати параметри системи, щоб маса  $m_2$  не переміщувалась.

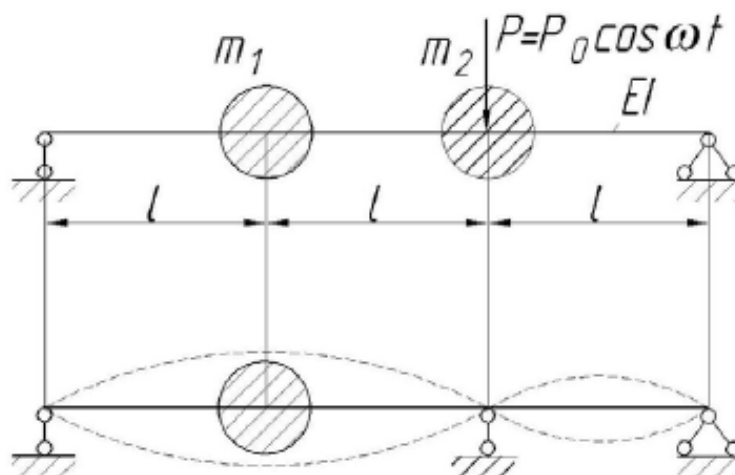


Рис. 5.3.12

Використовуючи метод сил, маємо:

$$\omega_1 = -m_1 \delta_{11} \ddot{\omega}_1 - m_2 \delta_{12} \ddot{\omega}_2 + P \delta_{12};$$

$$\omega_2 = -m_1 \delta_{21} \ddot{\omega}_1 - m_2 \delta_{22} \ddot{\omega}_2 + P \delta_{22}.$$

$$\begin{cases} \omega_1(x, t) = W_1 \cos \omega t \\ \omega_2(x, t) = W_2 \cos \omega t \end{cases}$$

$$W_2 = 0;$$

$$W_1 = \omega^2 m_1 \delta_{11} W_1 + \omega^2 m_2 \delta_{12} W_2 + P_0 \delta_{12};$$

$$W_2 = \omega^2 m_1 \delta_{21} W_1 + \omega^2 m_2 \delta_{22} W_2 + P_0 \delta_{22}.$$

$$W_1 = \frac{P_0 \delta_{12} + W_2 \omega^2 \delta_{12}}{1 - \omega^2 m_1 \delta_{11}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{P_0 \delta_{12} + W_2 \omega^2 \delta_{12}}{1 - \omega^2 m_1 \delta_{11}} \cdot \omega^2 m_1 \delta_{21} + W_2 (1 - \omega^2 m_2 \delta_{22}) = P_0 \delta_{22} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_2 = \frac{P_0 [\delta_{22} (1 - m_1 \omega^2 \delta_{11}) + \omega^2 \delta_{12} m_1 \delta_{21}]}{(1 - \omega^2 m_2 \delta_{22}) (1 - \omega^2 m_1 \delta_{11}) - \omega^4 m_1 m_2 \delta_{12}};$$

$$W_2 = 0 \Rightarrow \delta_{22} (1 - \omega^2 m_1 \delta_{11}) + \omega^2 \delta_{12}^2 m_1 = 0 \Rightarrow \omega^2 (\delta_{12}^2 m_1 - m_1 \delta_{11} \delta_{22}) + \delta_{22} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\delta_{22}}{m_1 (\delta_{22} \delta_{11} - \delta_{12}^2)}}.$$

## 5.4 Задачі для самостійного розв'язку

### Вільні коливання систем з декількома ступенями вільності

5.4.1. Два тягара  $m_1$  та  $m_2$  скріплені пружинами, що мають жорсткість  $c$ . Визначити власні частоти малих коливань системи (рис.5.4.1).

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)c}{m_1 m_2}}.$$

5.4.2. На натягнутій струні закріплені дві маси. Натяг струни  $T_0$  при малих коливаннях має залишатися постійним (рис.5.4.2). Силою ваги, що діє на маси, знехтувати. Визначити власні частоти коливань системи.

$$\text{Відповідь: } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{T_0}{l}} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2}}{m_1 m_2}}.$$

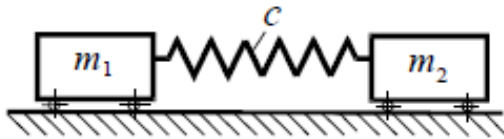


Рис. 5.4.1

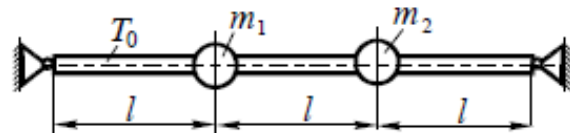


Рис. 5.4.2

5.4.3. На сталевій балці прямокутного перерізу закріплені 2 тягара  $m_1 = m$  та  $m_2 = 2m$  (рис.5.4.3). Визначити власні частоти та форми коливань балки, якщо  $m = 2$  кг,  $l = 0,5$  м,  $b = 20$  мм,  $h = 40$  мм.

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = 0,89 \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}} = 336 \text{ c}^{-1}, \quad \omega_2 = 3,7 \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}} = 1400 \text{ c}^{-1}.$$

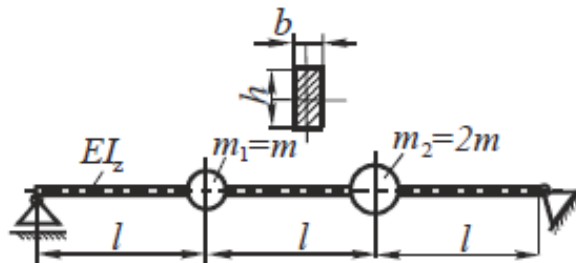


Рис. 5.4.3

5.4.4. На однопролітній балці жорсткістю  $EI_z$  закріплені три однакові точкові маси  $m$  (рис. 5.4.4). Нехтуючи масою балки, визначити власні частоти коливань системи.

Відповідь:  $\omega_1 = 5,65\sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}$ ,  $\omega_2 = 22,05\sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}$ ,  $\omega_3 = 36\sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}$ .

5.4.5. Визначити власні частоти та форми малих коливань системи, враховуючи маси точковими (рис. 5.4.5). Згинна жорсткість всіх ділянок рами однакова та дорівнює  $EI_z$ ,  $m_1 = m_2 = m$ .

Відповідь:  $\omega_1 = 0,97\sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}$ ,  $\omega_2 = 3,2\sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}$ .

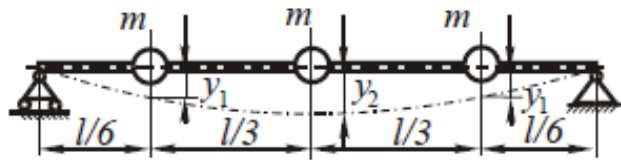


Рис. 5.4.4

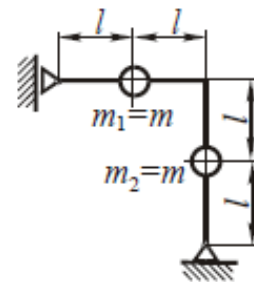


Рис. 5.4.5

5.4.6. Для систем, зображених на рис. 5.4.6, скласти диференціальні рівняння малих вільних кутових коливань, визначити власні частоти коливань.

Відповідь: а)  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{3c}{2I}}$ ; б)  $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{2I}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{2c}{I}}$ ;  
 в)  $\omega_1 = 0,8\sqrt{\frac{c}{I}}$ ,  $\omega_2 = 1,97\sqrt{\frac{c}{I}}$ .

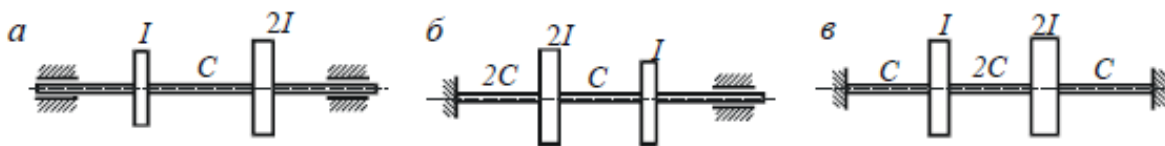


Рис. 5.4.6

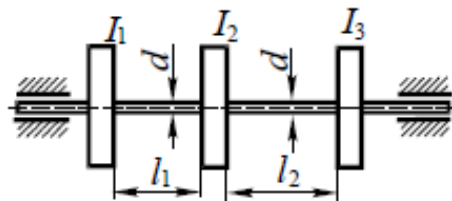


Рис. 5.4.7

5.4.7. Система, що здійснює крутильні коливання, складається з трьох маховиків, моменти інерції котрих відповідно дорівнюють  $I_1 = I$ ,  $I_2 = 2I$ ,  $I_3 = 3I$  (рис. 5.4.7). Маховики з'єднані валами, кожний з яких має крутильну жорсткість  $c$ . Визначити власні частоти та форми коливань системи (масою валів знехтувати). Провести перевірку правильності отриманих форм коливань, використовуючи умови ортогональності.

Відповідь:  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0,755\sqrt{\frac{c}{I}}$ ,  $\omega_3 = 1,33\sqrt{\frac{c}{I}}$ ,  $\{\varphi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ,  $\{\varphi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,435 \\ -0,615 \end{Bmatrix}$ ,

$$\{\varphi\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,77 \\ 0,179 \end{Bmatrix}.$$

5.4.8. Скласти диференційні рівняння малих вільних ( $M_{\text{вп}} = 0$ ) коливань системи дисків, враховуючи жорсткість ділянок вала при крученні  $GI_p$  (рис. 5.4.8). Визначити власні частоти та форми коливань.

Відповідь:  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0,656\sqrt{\frac{c}{I}}$ ,  $\omega_3 = 1,335\sqrt{\frac{c}{I}}$ ,  $\omega_4 = 1,82\sqrt{\frac{c}{I}}$ ,  $\{\varphi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ,

$$\{\varphi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,571 \\ -1,104 \\ -0,732 \end{Bmatrix}, \{\varphi\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,752 \\ -1,178 \\ 0,465 \end{Bmatrix}, \{\varphi\}_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,28 \\ 2 \\ -0,355 \end{Bmatrix}.$$

5.4.9. Визначити власні частоти та форми ( $M_{\text{вп}} = 0$ ) коливальної системи (рис. 5.4.9), враховуючи, що жорсткість вала при крученні дорівнює  $GI_p$ .

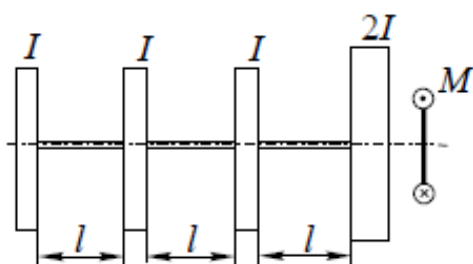


Рис. 5.4.8

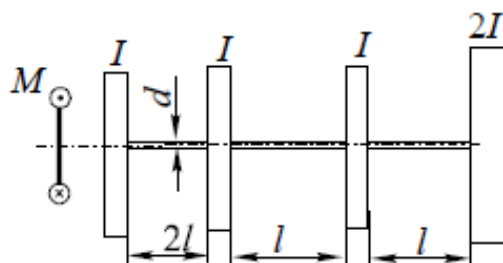


Рис. 5.4.9

Відповідь:  $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,613\sqrt{\frac{c}{I}}, \quad \omega_3 = 2,26\sqrt{\frac{c}{I}}, \quad \omega_4 = 5,8\sqrt{\frac{c}{I}}, \quad \{\varphi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$

$$\{\varphi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,387 \\ -0,0375 \\ -0,455 \end{Bmatrix}, \quad \{\varphi\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,26 \\ -0,966 \\ 0,412 \end{Bmatrix}, \quad \{\varphi\}_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -4,8 \\ 6,22 \\ -0,8 \end{Bmatrix}.$$

5.4.10. Визначити частоти та форми власних згинних коливань стержня з трьома однаковими масами  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ , шарнірно закріпленого на одному кінці (рис. 14.39). Масою стержня знехтувати.

Відповідь:  $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 1,33\sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}, \quad \omega_3 = 4,96\sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}},$

$$w_{11} = 1, \quad w_{12} = 1, \quad w_{13} = 1, \quad w_{21} = \frac{2}{3}, \quad w_{22} = 0,874, \quad w_{23} = -2,94,$$

$$w_{31} = -\frac{1}{3}, \quad w_{32} = 1,24, \quad w_{33} = 2,87.$$

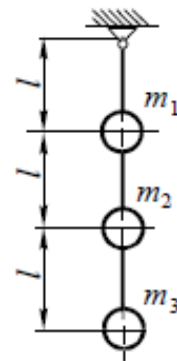


Рис. 5.4.10

5.4.11. Визначити частоти та форми власних коливань ланцюгової системи та перевірити умови ортогональності, коли  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  та  $c_1 = c_2 = c$  (рис. 5.4.11).

Відповідь:  $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = n, \quad \omega_3 = n\sqrt{3},$  де  $n = \frac{c}{m}, \quad u_{11} = 1, \quad u_{12} = 1, \quad u_{13} = 1, \quad u_{21} = 1,$   
 $u_{22} = 0, \quad u_{23} = 1, \quad u_{31} = 1, \quad u_{32} = 2, \quad u_{33} = 1.$

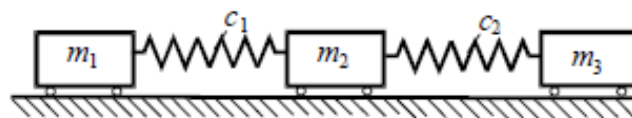


Рис. 5.4.11

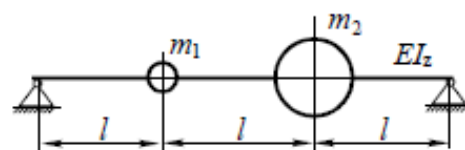


Рис. 5.4.12

5.4.12.

Методом Релея визначити нижчу

власну частоту коливань системи (рис. 5.4.12). Маса  $m_1$  та  $m_2$  ( $m_2 = 2m_1$ ) рахувати точковим, масою балки знехтувати.

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = 0,891 \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}.$$

5.4.13. Методом Релея визначити нижчу частоту згинних коливань системи (рис. 5.4.13). Масою балки знехтувати.

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = 0,71 \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}.$$

5.4.14. Визначити нижчу частоту коливань системи з урахуванням маси балки, якщо маса одиниці довжини балки  $m_0$ , при цьому  $m = 2m_0l$  (рис. 5.4.14).

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = 0,91 \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}.$$

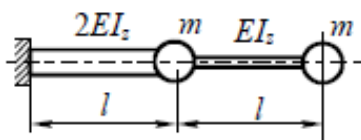


Рис. 5.4.13

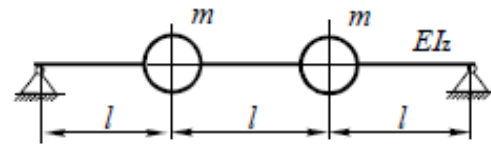


Рис. 5.4.14

5.4.15. Використовуючи метод Релея, визначити нижчу частоту поздовжніх коливань системи, що складається з трьох однакових мас  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ , з'єднаних безінерційними стержнями (рис.5.4.15). Площа поперечного перерізу стержня  $A$ , модуль пружності при розтязі  $E$ .

$$\text{Відповідь: } \omega = 0,45 \sqrt{\frac{EA}{ml}}.$$

5.4.16. Визначити нижчу частоту поздовжніх коливань системи, рахуючи стержні безінерційними (рис. 5.4.16).

$$\text{Відповідь: } \omega = 0,775 \sqrt{\frac{EA}{ml}}.$$

5.4.17. Визначити нижчу частоту поздовжніх коливань системи методом Релея, рахуючи стержні безінерційними (рис. 5.4.17).

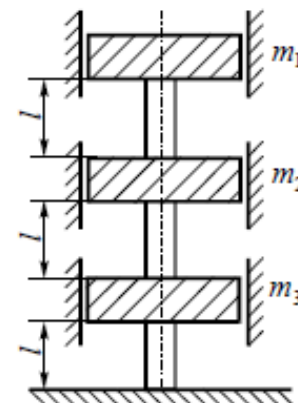


Рис. 5.4.15

Відповідь:  $\omega = 0,65 \sqrt{\frac{EA}{ml}}$ .

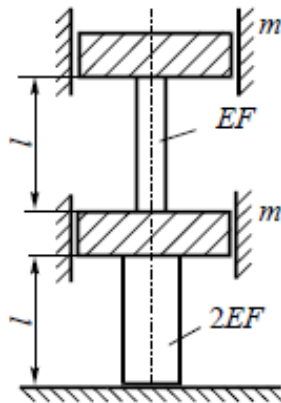


Рис. 5.4.16

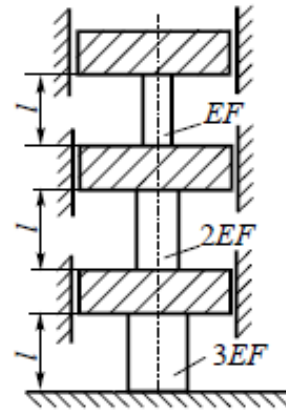


Рис. 5.4.17

5.4.18. Методом Релея визначити нижчу частоту крутильних коливань системи, нехтуючи інерційністю вала (рис. 5.4.18).

Відповідь:  $\omega^2 = \frac{\frac{I_1(I_1 + I_2)}{c_1} + I_2 \left( \frac{I_2}{c_2} + \frac{I_1 + I_2}{c_1} \right)}{\frac{I_1}{c_1^2} (I_1 + I_2)^2 + I_2 \left( \frac{I_2}{c_2} + \frac{I_1 + I_2}{c_2} \right)^2}$ .

5.4.19. Методом Донкерлея визначити нижчу частоту коливань системи (рис. 5.4.19).

Відповідь:  $\omega_1 = 0,865 \sqrt{\frac{EI_z}{ml^3}}$ .

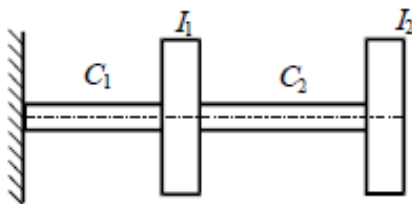


Рис. 5.4.18

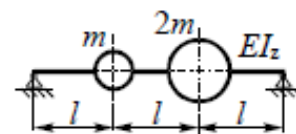


Рис. 5.4.19

5.4.20. По методу Донкерлея визначити нижчу частоту коливань системи в задачах 5.4.17, 5.4.18.

Відповідь:  $\omega_1 = 0,7 \sqrt{\frac{EA}{ml}}$ ,  $\omega_1 = 0,58 \sqrt{\frac{EA}{ml}}$ .

## Вимушені коливання систем з $N$ ступенями вільності

5.4.21. Визначити максимальні нормальні напруження, які виникають в балці (рис. 5.4.3) при дії на масу  $m_1$  періодичної сили

$$F = F_0 \sin pt, \text{ де } p^2 = \frac{1}{m_2 \delta_{22}}, F_0 = 500 \text{ Н.}$$

Відповідь:  $\sigma_{\max} = 103 \text{ МПа.}$

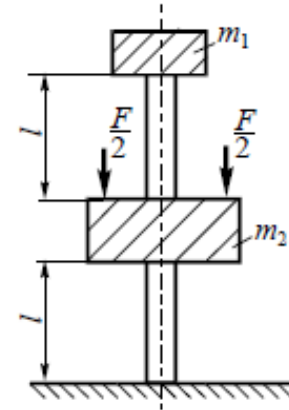


Рис. 5.4.20

5.4.22. На масу  $m_2$  діє періодична збуджуюча сила  $F = F_0 \sin pt$  (рис. 5.4.20). Площа перерізу стержнів, що з'єднують масу, дорівнює  $A$ , а модуль пружності при згині  $E$ . Визначити, при яких значеннях параметрів системи амплітуда вертикальних коливань маси  $m_2$  дорівнює нулю.

Відповідь:  $p^2 = \frac{\delta_{22}}{m_1(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}$ .

5.4.23. Визначити параметри системи, при яких амплітуда коливань маси  $m_2$  дорівнює нулю, враховуючи частоту збуджуючої сили заданою (рис. 5.4.21).

Відповідь:  $p^2 = \frac{48EI_2}{5l^3m_1}$ .

5.4.24. Дві точкові маси  $m_1$  та  $m_2$  знаходяться на шарнірно закріпленій балці (рис. 5.4.22). На систему діє момент, який викликає вимушені коливання,  $M = M_0 \sin pt$ . Визначити параметри системи, при яких амплітуда коливань маси  $m_1$  дорівнює нулю.

Відповідь:  $p^2 = \frac{\delta_{13}}{m_2(\delta_{22}\delta_{13} - \delta_{23}\delta_{12})}$ .

5.4.25. Для гасіння коливань маси  $m_2$ , яка знаходиться на кінці щогли, використовують маятниковий гасник коливань (рис. 5.4.23). На масу  $m_2$  діє періодичне збудження  $F = F_0 \sin pt$ . Середня згінна жорсткість щогли  $EI_2$ . Визначити параметри маятника ( $m_1, l_1$ ), при яких амплітуда коливань маси  $m_2$  дорівнює нулю.

Відповідь:  $p^2 = \frac{g}{l_1}$ .

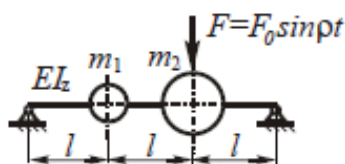


Рис. 5.4.21

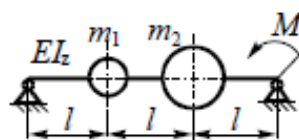


Рис. 5.4.22

5.4.26. Для системи визначити коефіцієнт динамічності, який дорівнює відношенню амплітуди збуджуючої сили  $F_0$  до амплітуди зусилля, що діє на масу  $m_2$  (рис. 5.4.24). Прийняти  $c = \frac{EI_z}{l^3}$ ,  $m_1 = 2m_2$ ,  $p = \sqrt{\frac{c}{m_1}}$ .

Відповідь:  $k_{\text{дин}} = \frac{9}{2}$ .

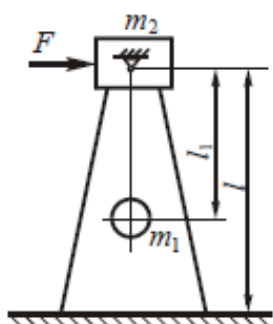


Рис. 5.4.23

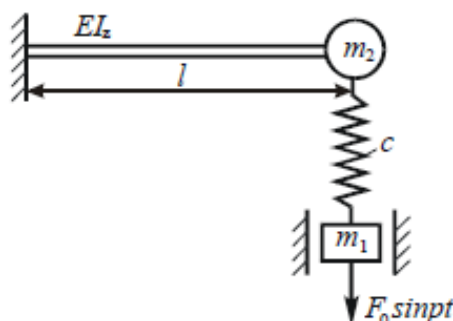


Рис. 5.4.24

5.4.27. На сталевому валу круглого поперечного перерізу, який має крутильну жорсткість  $GI_p$ , закріплені чотири диски (рис. 5.4.25). Визначити найбільший крутильний момент, що виникає у валу в

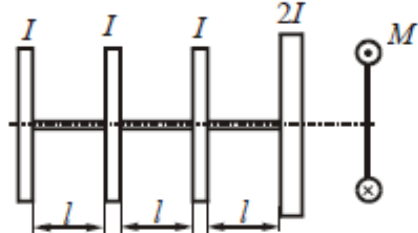


Рис. 5.4.25

усталеному режимі коливань при дії періодичного збуджуючого моменту  $M = M_0 \sin pt$ , де  $p = 0,8 \omega_2$  ( $\omega_2$  – друга власна частота коливань).

Відповідь:  $M_{\text{max}} = -1,193M_0$ .

## КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 6.1 Поздовжні коливання стержнів

Реальні коливальні системи мають неперервне розподілення фізичних параметрів: жорсткості, маси і характеристик демпфірування. Для таких систем закон коливального руху визначається функціями кількох змінних (часу і просторових координат), а диференціальні рівняння коливань є рівняннями з частинними похідними.

Моделі систем з розподіленими параметрами (континуальні системи) поділяють на три групи: одновимірні (один вимір – одна просторова координата і час), двовимірні (дві просторові координати і час), тривимірні (три просторові координати і час).

До одновимірних належать такі розрахункові моделі: стержень, балка, струна; до двовимірних – пластина, оболонка; до тривимірних – пружне тіло, рідина, газ.

### 6.2 Виведення диференціального рівняння поздовжніх коливань стержня змінного перерізу з прямою віссю.

Вважаємо, що при поздовжніх коливаннях справедлива гіпотеза плоских перерізів; задача при малих переміщеннях є фізично і геометрично лінійною, всіма компонентами напружень і деформацій, окрім  $\sigma_{11} = \sigma$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon$ , можна знехтувати. В цьому випадку переміщення і деформація дорівнюють

$u_1 = u(x, t); u_2 = u_3 = 0$  і  $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Цій деформації за законом Гука, за гіпотезами

Кельвіна – Фойхта або Бока – Шліппе – Колара відповідають напруження

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma = E \left( 1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma = E \left( 1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Значення поздовжньої сили в поперечному перерізі (рис. 6.2.1) визначається відповідно до цих фізичних законів формулами

$$N(x) = EF(x) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (6.2.1)$$

$$N(x) = EF(x) \left( 1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (6.2.2)$$

$$N(x) = EF(x) \left( 1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (6.2.3)$$

Додаючи, згідно з принципом Д'аламбера, до зусиль, які діють на елемент стержня  $dx$ , сили інерції -  $\rho F \ddot{u} dx$  і сили в'язкого тертя середовища -  $b_2 F \dot{u} dx$  (або сили частотно-незалежного тертя середовища -  $\alpha_1 [I] \rho F \dot{u} dx$ ) (рис. 6.2.1), дістанемо умову його динамічної рівноваги

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx + q(x, t) dx = N + \rho F \ddot{u} dx + b_2 \rho F \dot{u} dx.$$

врахувавши формули (6.2.1) - (6.2.3), знайдемо наближенні (справедливі для малих частот, коли довжина хвилі деформації більша, ніж розміри поперечного перерізу) рівняння вимушених поздовжніх коливань відповідно пружного стержня, стержнів з в'язким і частотно-незалежним внутрішнім тертям (недосконалою пружністю) та зовнішнім тертям

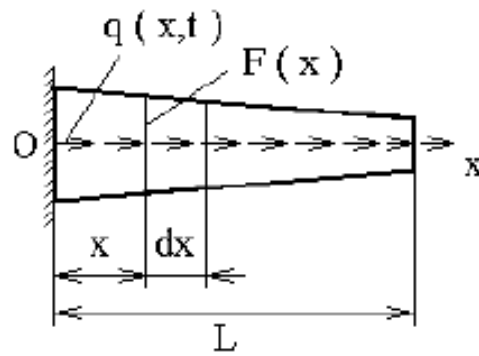


Рис.6.2.1. Розрахункова схема стержня при поздовжніх коливаннях

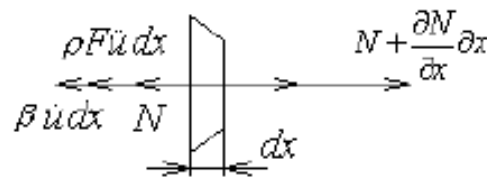


Рис.6.2.2. Схема зусиль

відно пружного стержня, стержнів з в'язким і частотно-незалежним внутрішнім тертям (недосконалою пружністю) та зовнішнім тертям

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t); \quad (6.2.4)$$

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EF \left( 1 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x, t); \quad (6.2.5)$$

$$\rho F \ddot{u} + b_2 \rho F \dot{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ EF \left( 1 + \alpha_1 [I] \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = q(x, t); \quad (6.2.6)$$

де  $\rho$  — густина матеріалу;  $E$  — модуль поздовжньої пружності;  $F$  — площа поперечного перерізу;  $b_1, \alpha_1$  — коефіцієнти гістерезисного відхилення від закону Гука у випадках частотно-залежного і частотно-незалежного розсіяння енергії в матеріалі;  $b_2, \alpha_2$  — коефіцієнти пропорційності оператора  $B$  оператору  $A$ , що відповідають частотно-залежному і частотно-незалежному зовнішньому тертю;  $[I]$  — нескінченна матриця коректувальних множників.

### 6.3. Вільні поздовжні коливання стержня змінного перерізу

Вважаємо, що в (6.2.4)  $b_2 = 0$  і  $q = 0$ , тоді маємо рівняння вільних коливань стержня без урахування тертя

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho F \ddot{u} = 0, \quad (6.3.1)$$

Для повного розв'язку рівняння — розв'язку задачі про вільні коливання стержня потрібно до рівняння (6.3.1) приєднати дві граничні умови і дві початкові умови. Відомі дві однорідні граничні умови: на вільному кінці осьова сила

$N = EF \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , якщо там немає зосередженого навантаження, на закріпленому кінці переміщення  $u = 0$ . Можливі три комбінації однорідних граничних умов: обидва кінці вільні; обидва кінці закріплені; один кінець закріплений, другий вільний.

Частинні розв'язки рівняння (6.3.1) шукаємо у вигляді

$$u_l(x, t) = U_l(x) \eta_l(t) = U_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l), \quad (6.3.2)$$

що відповідає головним коливанням. Підставимо (6.3.2) в (6.3.1), дістанемо рівняння для власних форм коливань

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial U_l}{\partial x} \right) + \rho F \omega_l^2 U_l = 0. \quad (6.3.3)$$

Замкнена форма розв'язку цього рівняння відома тільки при деяких законах зміни перерізу вздовж стержня. Незважаючи на це, відомо, що:

1) існує впорядкований дискретний спектр власних частот і відповідна множина власних форм коливань

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots U_1(x); U_2(x); U_3(x) \dots ;$$

2) усі власні частоти дійсні додатні, якщо оператор  $A > 0$ , а  $C^{-1}$  цілком неперервний;

3) власні форми коливань попарно ортогональні відносно кінетичної і потенціальної енергій

$$(AU_l, U_s) = 0 \quad (CU_l, U_s) = 0; \quad l \neq s; \quad (6.3.4)$$

4) власні форми коливань утворюють повний базис.

Доведемо третє твердження, записавши рівняння (6.3.3) для  $U_l$  і  $U_s$ . Помножимо перше з отриманих рівнянь на  $U_s dx$ , а друге — на  $U_l dx$  і проінтегруємо вздовж стержня

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left( EF \frac{dU_l}{dx} \right) U_s dx = -\omega_l^2 \int_0^L \rho F U_l U_s dx \quad (6.3.5)$$

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left( EF \frac{dU_s}{dx} \right) U_l dx = -\omega_s^2 \int_0^L \rho F U_s U_l dx. \quad (6.3.6)$$

Тут ліві частини проінтегруємо частинами

$$EF \frac{dU_l}{dx} U_s \Big|_0^L - \int_0^L EF \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx = -\omega_l^2 \int_0^L \rho F U_l U_s dx; \quad (6.3.7)$$

$$EF \frac{dU_s}{dx} U_l \Big|_0^L - \int_0^L EF \frac{dU_s}{dx} \frac{dU_l}{dx} dx = -\omega_s^2 \int_0^L \rho F U_s U_l dx \quad (6.3.8)$$

У випадку однорідних граничних умов перші доданки в рівняннях (6.3.7), (6.3.8) дорівнюють нулю. Віднімемо один від одного вирази, що залишилися, враховуючи самоспряженість операторів  $A$  і  $C$ . Дістанемо

$$\int_0^L \rho F U_l U_s dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l & \text{при } s = l \end{cases} \quad (6.3.9)$$

Власні форми коливань визначаються з точністю до сталого множника. Для ліквідування такої довільності їх нормують, підпорядковуючи одній з рівностей  $M_l = 1; \quad K_l = 1; \quad U_l(x_0) = 1. \quad (6.3.10)$

#### 6.4. Вільні поздовжні коливання стрижня постійного перерізу

Якщо коефіцієнти рівняння (6.3.1)  $EF$  і  $\rho F$  сталі, то рівняння спрощується і називається *хвильовим*, набираючи вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (6.4.1)$$

де  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  — фазова швидкість (швидкість поширення поздовжньої хвилі в стержні,

швидкість звуку в стержні),  $mc^{-1}$ .

Три можливі комбінації однорідних граничних умов у випадках, коли обидва кінці вільні, обидва кінці закріплені або один закріплений, другий вільний, мають відповідно такий вигляд:

$$EF \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (6.4.2)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0; \quad (6.4.3)$$

$$u(0, t) = EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (6.4.4)$$

Такий варіант методу Фур'є називають *методом головних коливань* (координат) — МГК. Частинний розв'язок знаходимо у вигляді:

$$U(x, t) = U_1(x) a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad (6.4.5)$$

Підставимо (6.4.5) в (6.4.1) і отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + k_1^2 U_1 = 0, \quad (6.4.6)$$

в якому хвильове число

$$k_l = \frac{\omega_l}{c_0} = \omega_l \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (6.4.7)$$

Дві граничні умови дають змогу визначити в загальному розв'язку рівняння (6.4.6)

$$U_l = A_l \cos k_l x + B_l \sin k_l x \quad (6.4.8)$$

значення тільки однієї сталої та характеристичного числа (хвильового), значення другої сталої вибирається довільно.

Суперпозиція частинних розв'язків (6.4.5) є загальним розв'язком вихідного рівняння (6.4.1):

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l U_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l) = \sum_{l=1}^{\infty} U_l(x) (N_l \cos \omega_l t + Q_l \sin \omega_l t) \quad (6.4.9)$$

Коливання тут уже не будуть гармонічними. Часові сталі  $a_l$  і  $\varphi_l$  (амплітуда і початкова фаза головного коливання) та сталі  $N_l$ ,  $Q_l$  пов'язані між собою

$$N_l = a_l \cos \varphi_l; \quad Q_l = a_l \sin \varphi_l; \quad a_l^2 = N_l^2 + Q_l^2; \quad \operatorname{tg} \varphi_l = \frac{Q_l}{N_l} \quad (6.4.10)$$

і визначаються з двох початкових умов

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) \quad (6.4.11)$$

за допомогою умов ортогональності та формул зведення, які у випадку стержня постійного перерізу мають вигляд

$$\rho F \int_0^L U_l U_s dx = \begin{cases} 0 & \text{нпу} & s \neq l \\ M_l & \text{нпу} & s = l \end{cases} \quad (6.4.12)$$

$$-EF \int_0^L \frac{d^2 U_l}{dx^2} U_s dx = EF \int_0^L \frac{dU_l}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx = \begin{cases} 0 & \text{нпу} & s \neq l \\ K_l & \text{нпу} & s = l \end{cases} \quad (6.4.13)$$

Умови ортогональності тут можна записати в чистому вигляді без математичної ваги, поділивши рівності (6.4.12) відповідно на  $\rho F$  і  $EF$ .

## 6.5. Визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стержня постійного перерізу

Випадо к 1. Стержень з вільними для поздовжніх переміщень кінцями (рис. 6.5.1). Враховуючи форму розв'язку (6.4.8) і умови (6.4.2), запишемо граничні умови для її власної форми коливань (6.4.8) так:

$$\frac{dU_l(0)}{dx} = \frac{dU_l(L)}{dx} = 0 \quad (6.5.1)$$

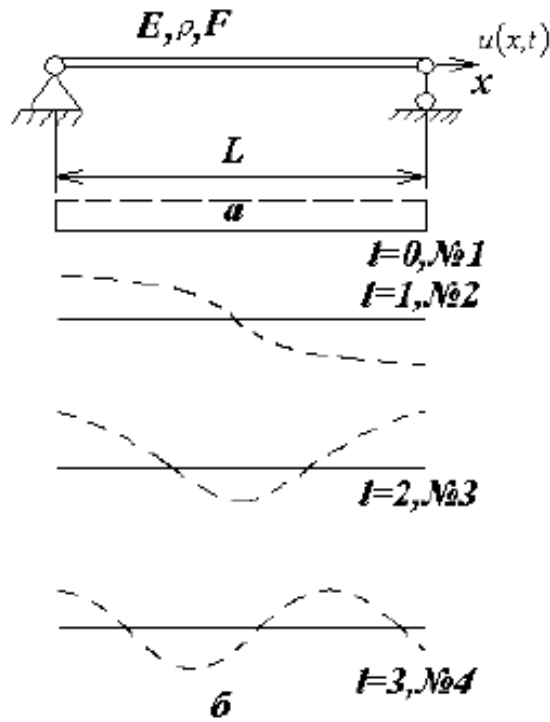


Рис. 6.5.1. Стержень з вільними для поздовжніх переміщень кінцями (а) і його перші власні форми поздовжніх коливань (б)

Підставимо (6.4.8) в (6.5.1): знаходимо  $B_l = 0$   $A_l$ . Оскільки  $A_l \neq 0$ , то

$$\sin k_l L = 0 \quad (6.5.2)$$

Корені частотного рівняння (6.4.6) і хвильові числа відповідно дорівнюють

$$k_l L = 0, \pi, 2\pi, \dots, l\pi, \dots,$$

$$k_l = \frac{l\pi}{L}; \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (6.5.3)$$

Тоді відповідно до (6.4.7) знаходимо власні кутові частоти — частоти повних коливань

$$\omega_l = k_l c_0 = \frac{l\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.5.4)$$

Усі власні частоти кратні основній (найменшій) частоті  $\omega_l = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

З граничних умов було знайдено  $B_l = 0$ . Вважаємо  $A_l = 1$ . Тоді відповідне рівняння власних форм коливань набере конкретного вигляду

$$U_l = \cos \frac{l\pi}{L} x. \quad (6.5.5)$$

Системи з тривіальними значеннями власних частот називаються *напіввизначеними* — незакріпленими у відповідних напрямках.

На рис. 6.5.1, б зображено графіки (діаграми) власних форм коливань, які показують найбільші поздовжні відхилення перерізів стрижня від положення статичної рівноваги. На цих графіках є вузли (нерухомі перерізи) і пучності (перерізи, що мають найбільші переміщення). Число вузлів  $n$ -ї власної форми коливань дорівнює  $N - 1$ , а число пучностей —  $N$ . До числа номерів  $N$  включають і форму коливань  $U_0 = 1$ . До числа вузлів не включають закріпленій граничний переріз. Вузли та їх положення визначають, прирівнюючи до нуля рівняння відповідної форми коливань (6.5.5).

### 6.6. Визначення власних частот і форм поздовжніх коливань стрижня за неоднорідних граничних умов

Гранична умова може бути неоднорідною в чотирьох випадках: а) пружне закріплення кінця; б) зосереджена маса на кінці; в) зосереджена сила на кінці; г) зосереджене на кінці переміщення.

В першому випадку на кінці виникає пружна сила  $\pm cu$ , у другому — сила інерції  $\pm M\ddot{u}$  (верхній знак береться для лівого кінця, тому що сила розтягальна; нижній знак — для правого краю, тому що сила стискальна; рис. 6.6.1). У третьому і четвертому випадках задачу можна звести до вимушених коливань за однорідних граничних умов.

Визначимо власні частоти і власні форми поздовжніх коливань стрижня постійного перерізу з масою на правому кінці (рис. 6.6.2). Алгоритм розв'язку задачі про вільні коливання такий самий, як і у випадку однорідних граничних умов. Граничні умови будуть інші (див. рис. 6.6.1):

$$u(0, t) = 0; \quad EF \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = -M\ddot{u}$$

Перепишемо граничні умови з урахуванням форми розв'язку

$$U_1(0) = 0; \quad EF \frac{dU_1(L)}{dx} = M\omega_1^2 U_1 \quad (6.6.1)$$

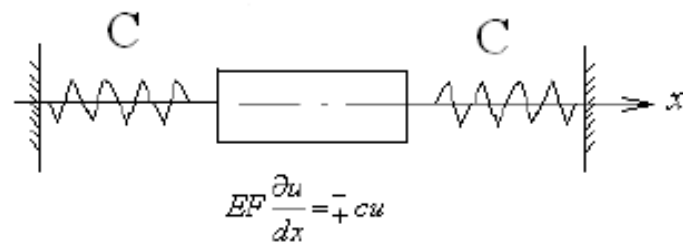
Підставивши (6.4.8) в граничні умови, матимемо

$$A_1 = 0; \quad EFB_1 k_1 \cos k_1 L = M\omega_1^2 B_1 \sin k_1 L \quad (6.6.2)$$

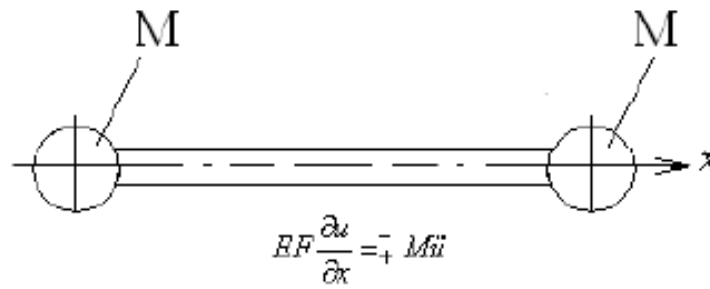
Враховуючи, що  $\omega_1^2 = k_1^2 \frac{E}{\rho}$  — відповідно до (6.4.7), помножимо (6.6.2)

на  $k_1 L$ , в результаті прийдемо до характеристичного (вікового) рівняння

$$k_1 L \operatorname{tg} k_1 L = \frac{\rho FL}{M} = \alpha \quad (6.6.3)$$



а



б

Рис 6.6.1. Стержень з неоднорідними граничними умовами: а-пружне закріплення кінців ,б-зосередження мас на кінцях

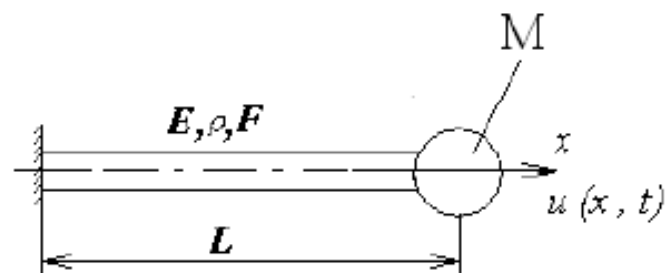


Рис 6.6.2. Закріплений стержень із зосередженою масою на вільному кінці

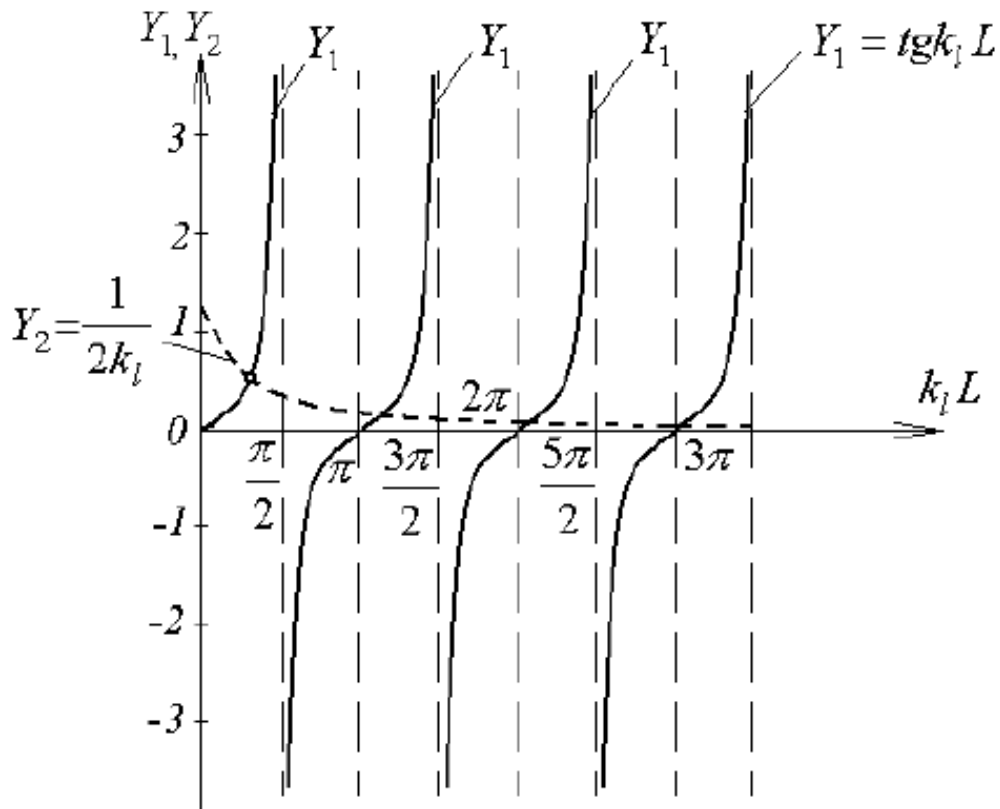


Рис 6.6.3. Графічний розв'язок частотного рівняння (6.6.3)

Графічний розв'язок рівняння (6.6.3), представлений на рис. 6.6.3, для відношення  $\alpha = \frac{\rho FL}{M} = 0.5$  дає корені  $k_1L = 0.629$ ;  $k_2L = 3.24$ ;  $k_3L = 6.34, \dots$  За формулою (6.4.7) визначимо частоти

$$\omega_1 = \frac{0.629}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \omega_2 = \frac{3.24}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \omega_3 = \frac{6.34}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ці частоти вже не кратні основній частоті. Припустимо  $B_I = 1$ , тоді, з урахуванням  $A_I = 0$ , маємо рівняння форм коливань

$$U_I = \sin k_1 x$$

Умови ортогональності і формули зведення за неоднорідних граничних умов теж змінюються. Якщо на кінці стержня ( $x = L$ ) прикладено зосереджену масу  $M$ , то змінюються лише умови відносно кінетичної енергії

$$\int_0^L \rho F U_I U_s ds + M U_I(L) U_s(L) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ M_l \text{ при } s = l \end{cases} \quad (6.6.4)$$

Якщо кінець стержня (наприклад,  $x = L$ ) пружно закріплено (зосереджена пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c$ ), то змінюються лише умови відносно потенціальної енергії

$$\int_0^L EF \frac{dU_I}{dx} \frac{dU_s}{dx} dx + c U_I(L) U_s(L) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq l \\ K_l \text{ при } s = l \end{cases} \quad (6.6.5)$$

Якщо на одному кінці прикладено зосереджену масу, а на другому — пружину  $c$ , то одночасно змінюються умови ортогональності і формули зведення як відносно кінетичної, так і потенціальної енергій, причому в ці умови ввійдуть координати точок прикладення маси і пружини. Співвідношення (6.6.4) і (6.6.5) доводяться за допомогою рівності (6.3.7) чи (6.3.8) з урахуванням неоднорідних граничних умов.

### Задача 6.7. Коливання системи з розподіленими параметрами.

План розв'язку задачі

1. Записати диференціальне рівняння вільних коливань і граничних умов.
2. Знайти власні функції і власні частоти.
3. Знайти розв'язок задачі про вимушені коливання за допомогою дії гармонічної сили, враховуючи розсіяння енергії по гіпотезі Кельвіна-Фойхта, Сорокіна або лінійно-гістерезисній гіпотезі (гіпотезі Бока-Шліппе-Колара).

Варіанти задач вибирають згідно з двозначним шифром одночасно із рис. 6.6.1, а з табл. 6.6.1 – числові дані.

Таблиця 6.6.1

Шифр	$k$	$n$	$\frac{m_0}{m}$	$\frac{a}{l}$	$M$	$M_0$	Гіпотеза врахування розсіяння енергії
0	1	2	2	0,5	$ml$	$\rho ha^2$	Фойхта
1	2	1	3	0,4	$2ml$	$\rho ha^2$	Сорокіна
2	3	2	2	0,3	$ml$	$2\rho ha^2$	Бока- Шліппе
3	4	1	3	0,6	$2ml$	$\rho ha^2$	Фойхта
4	1	2	2	0,7	$ml$	$2\rho ha^2$	Сорокіна
5	2	1	3	0,3	$2ml$	$\rho ha^2$	Бока- Шліппе
6	3	2	2	0,4	$ml$	$2\rho ha^2$	Фойхта
7	4	1	3	0,5	$2ml$	$\rho ha^2$	Сорокіна
8	1	2	2	0,6	$ml$	$2\rho ha^2$	Бока- Шліппе
9	2	1	3	0,4	$2ml$	$\rho ha^2$	Фойхта

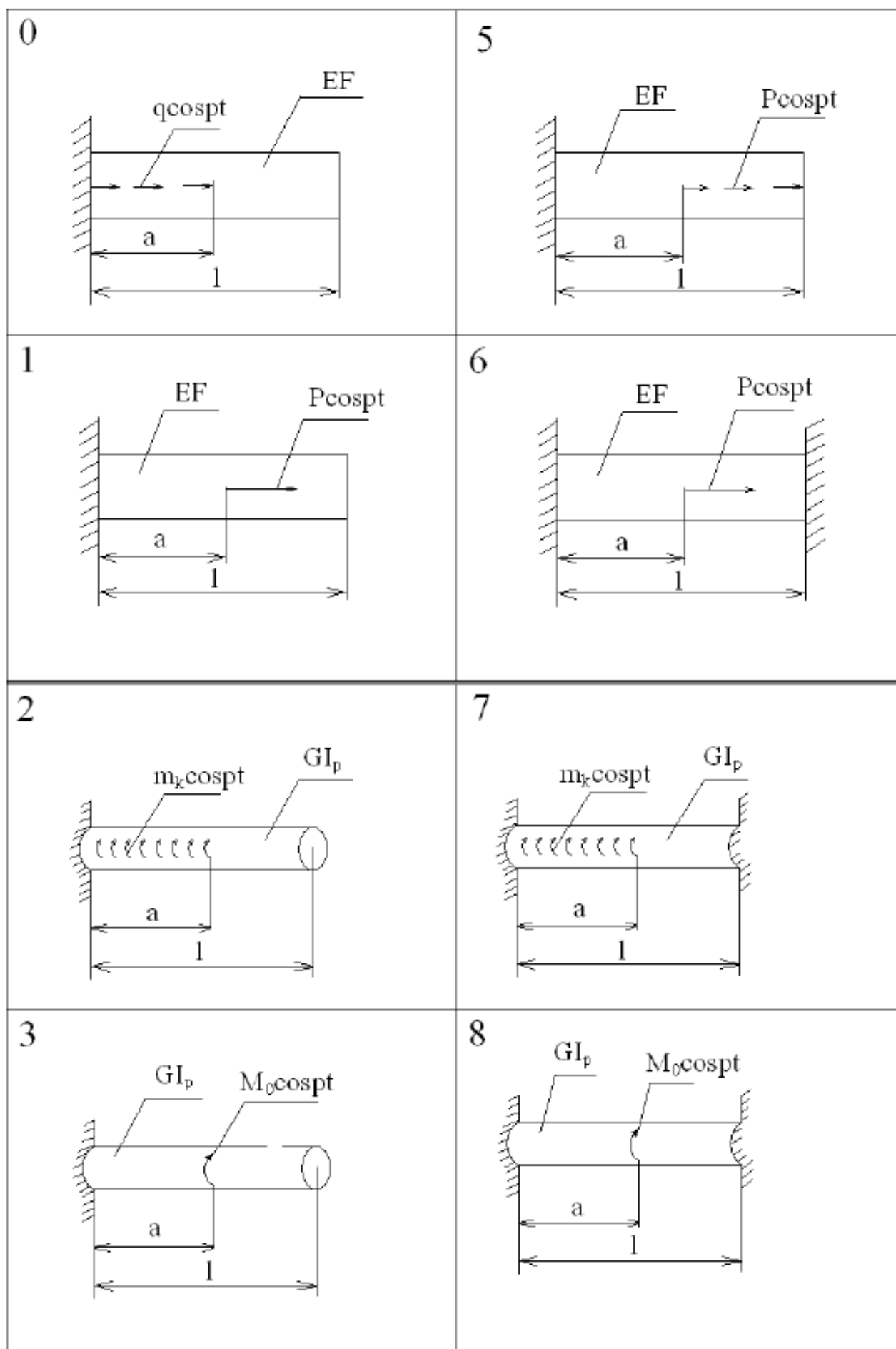


Рис. 6.6.1

**Приклад 6.8.** Крутильні коливання однорідного стрижня постійного поперечного перерізу.

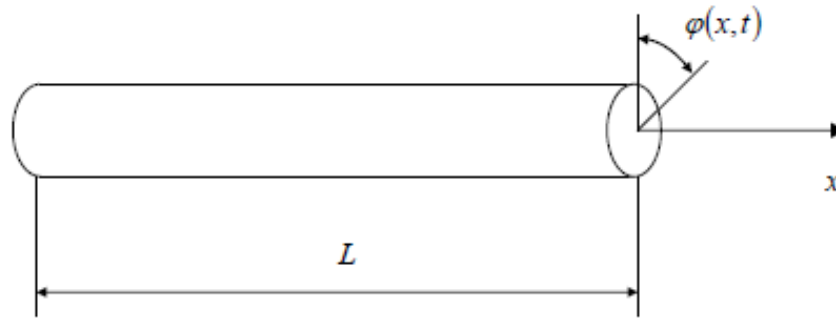


Рис.6.8.1

Круглий стрижень (вал) має вільні краї (рис.6.8.1). Для нього граничні умови мають вигляд

$$\frac{d\Phi(0)}{dx} = \frac{d\Phi(L)}{dx} = 0 \quad (\text{при } x=0; x=L) \quad (6.8.1)$$

Диференціальне рівняння вільних крутильних коливань має вигляд хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (6.8.2)$$

де  $c_0 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  фазова швидкість крутильної біжучої хвилі.

Частинні розв'язки хвильового рівняння шукаємо у вигляді головних коливань

$$\varphi(x, t) = \Phi_l(x) \eta_l(t) = \Phi_l(x) \cos(\omega_l t - \varphi_l). \quad (6.8.3)$$

Підставимо (6.8.3) в (6.8.2), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для власних форм крутильних коливань

$$\frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial x^2} + k_l^2 \Phi_l = 0 \quad (6.8.4)$$

де  $k_l = \frac{\omega_l}{c_0} = \omega_l \sqrt{\frac{\rho}{I_m}}$  – хвильове число;  $I_m = \rho F$  момент інерції маси поперечного перерізу одиничної товщини.

Загальним розв'язком рівняння (6.8.4) для власних форм крутильних коливань буде

$$\Phi_l = A_l \cos k_l x + B_l \sin k_l x \quad (6.8.5)$$

Тут невідоме значення постійних  $A_l$ ,  $B_l$  с хвильового числа. Але є тільки дві граничні умови (6.8.1). Підставимо рівняння (6.8.5) в (6.8.1) будемо мати

$$B_l = 0; A_l \sin k_l x = 0. \quad (6.8.6)$$

Оскільки  $A_l \neq 0$ , тому

$$\sin k_l x = 0. \quad (6.8.7)$$

Це є частинне рівняння, з якого визначаємо безрозмірні характеристичні числа

$$k_l L = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (6.8.8)$$

і хвильові числа

$$k_l = 0, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \dots \quad (6.8.9)$$

Підставимо значення постійної і хвильового числа в (6), маємо вираз для власної форми крутильних коливань

$$\Phi_l = A_l \cos \frac{l\pi}{L} x, \quad (6.8.10)$$

в якому приймаємо  $A_l = 1$ , обидві граничні умови (6.8.1) вже використані, а можна взяти довільним. Таким чином, власна форма коливань описується формулою

$$\Phi_l = \cos \frac{l\pi}{L} x, \quad (6.8.11)$$

якій відповідає власна частота

$$\omega_l = \frac{l\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.8.12)$$

При  $l = 0$  маємо  $\omega_0 = 0$ ;  $\Phi_0 = 1$  - тривіальне значення частоти і постійної величини для власної форми, що характеризує крутильний рух без деформації.

Система з тривіальним значенням власних частот називається навіпіл визначеною (незакріпленою).

При  $l = 1$ ; маємо  $\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ;  $\Phi_1 = \cos \frac{\pi}{L} x$  - форма коливань з півхвилею деформації кручення.

При  $l = 2$ ; маємо  $\omega_2 = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ;  $\Phi_2 = \cos \frac{2\pi}{L} x$  - форма коливань з повною хвилею деформації кручення.

Взагалі - частота буде кратна до частоти . Перші хвилі представлені на рис.6.8.2

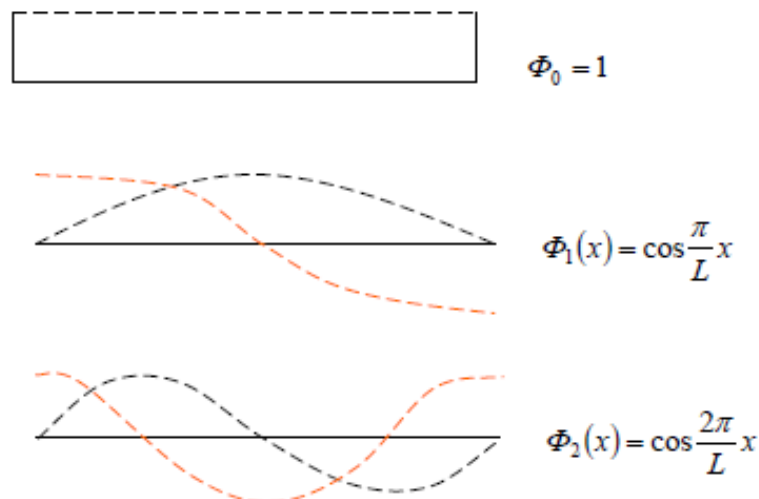


Рис.6.8.2 Форми коливань

6.9 Знайти розв'язок задачі про вимушені коливання, враховуючи розсіяння енергії по гіпотезі Кельвіна-Фойхта.

$$\rho I_P \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left( G I_P \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( G I_P \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \sigma_{-1} m_k \cos pt \quad (6.9.1)$$

Розв'язок рівняння шукаємо по методу головних координат:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \eta_i(t) \quad (6.9.2)$$

Підставляючи (6.9.2) в (6.9.1) та використовуючи умову ортогональності отримаємо зліченне число незалежних рівнянь коливань в головних координатах:

$$M_i (\ddot{\eta}_i + 2h_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i) = \int_0^L \sigma_{-1} m_k \Phi_i(x) dx \cos pt \quad (6.9.3)$$

де  $h_i = \frac{b_1 \omega_i^2}{2}$ .

$$\eta_i = a_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = a_i \cos \psi_i \quad (6.9.4)$$

Враховуючи властивість функції

$$\sigma_{-1} = \begin{cases} 1, & x \leq L/2 \\ 0, & x > L/2 \end{cases}$$

перепишемо рівняння (6.9.3):

$$M_i (\ddot{\eta}_i + 2h_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i) = \int_0^{L/2} m_k \Phi_i(x) dx \cos pt \quad (6.9.5)$$

Враховуючи, що  $\Phi_i(x) = \sin \frac{l\pi}{L} x$ , знаходимо значення інтегралу у правій частині (6.9.5), тоді:

$$\begin{aligned} M_i (\ddot{\eta}_i + 2h_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i) &= \frac{L}{l\pi} m_k \cos pt \\ \ddot{\eta}_i + 2h_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i &= \frac{L}{l\pi} \frac{m_k}{M_i} \cos pt \end{aligned} \quad (6.9.6)$$

Розв'язок (6.9.6) шукаємо у вигляді :

$$\eta_i = a_i \cos(pt - \varphi_i) = a_i \cos \psi_i \quad (6.9.7)$$

Підставляючи (6.9.7) в (6.9.6), маємо:

$$-a_i p^2 \cos \psi_i - a_i p \omega_i^2 b_1 \sin \psi_i + a_i \omega_i^2 \cos \psi_i = \frac{L}{l\pi} \frac{m_k}{M_i} \cos pt \quad (6.9.8)$$

$\cos pt = \cos(\varphi_i + \psi_i) = \cos \varphi_i \cos \psi_i - \sin \varphi_i \sin \psi_i$ ;

$$-a_i p^2 \cos \psi_i - a_i p \omega_i^2 b_1 \sin \psi_i + a_i \omega_i^2 \cos \psi_i = \frac{L}{l\pi} \frac{m_k}{M_i} (\cos \varphi_i \cos \psi_i - \sin \varphi_i \sin \psi_i)$$

Зібравши подібні доданки при  $\cos \psi_i$  та  $\sin \psi_i$  отримаємо:

$$-a_i p^2 + a_i \omega_i^2 = \frac{L}{l\pi} \frac{m_k}{M_i} \cos \varphi_i;$$

$$p \omega_i^2 b_i a_i = \frac{L}{l\pi} \frac{m_k}{M_i} \sin \varphi_i;$$

$$a_i (\omega_i^2 - p^2) = \frac{L}{l\pi} \frac{m_k}{M_i} \cos \varphi_i \quad (6.9.9)$$

$$p \omega_i^2 b_i a_i = \frac{L}{l\pi} \frac{m_k}{M_i} \sin \varphi_i \quad (6.9.10)$$

Звівши (6.9.9) та (6.9.10) до квадрату та додаючи отримані рівняння знайдемо вираз для визначення  $a_i$ :

$$a_i = \frac{L m_k}{l\pi M_i \sqrt{(\omega_i^2 - p^2)^2 + p^2 \omega_i^4 b_i^2}} \quad (6.9.11)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) матиме вигляд:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{l\pi}{L} x \frac{L m_k}{l\pi M_i \sqrt{(\omega_i^2 - p^2)^2 + p^2 \omega_i^4 b_i^2}} \cos(pt - \varphi_i).$$

### 6.9.1 Знайдемо власну частоту методом Релея-Рітца

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^L G I_p (\Phi')^2 dx}{\int_0^L \rho I_p \Phi^2 dx} \quad (6.9.12)$$

Враховуючи, що  $\Phi_i(x) = \sin \frac{l\pi}{L} x$ , маємо:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^L G I_p \left(\frac{L}{l\pi}\right)^2 \cos^2 \frac{L}{l\pi} x dx}{\int_0^L \rho I_p \sin^2 \frac{L}{l\pi} x dx}; \quad (6.9.13)$$

Обчисливши відповідні інтеграли знаходимо значення власної частоти:

$$\omega_0^2 = \frac{G}{\rho} \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{l\pi}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (6.9.4)$$

## 6.10. Задачі на коливання систем з розподіленими параметрами

### Задачі на малі вільні коливання струни

6.10.1 Скласти диференційне рівняння малих коливань струни, що знаходиться під дією розподіленого навантаження ( $q$  – навантаження на одиницю довжини) (рис. 6.10.1). Натяг струни  $T_0$ , маса одиниці її довжини  $m_0$  (при складанні рівняння рахувати, що натягіння  $T_0$  залишається сталим).

$$\text{Відповідь: } \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T_0}{m_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{g}{m_0}.$$

6.10.2 Визначити частоти власних коливань струни та швидкість розповсюдження поперечних переміщень (силою тяжіння струни знехтувати) (рис. 6.10.2). Чисельні дані задачі:  $l = 0,5$  м,  $T_0 = 30$  Н, діаметр проволочки струни  $d = 1$  мм, густина матеріалу (сталь)  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

$$\text{Відповідь: } c = \sqrt{\frac{T_0}{m_0}} = 69 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \omega_i = \frac{\pi i}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m_0}} = 434i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

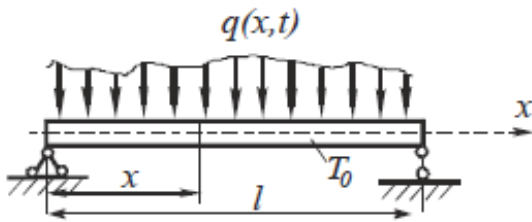


Рис. 6.10.1

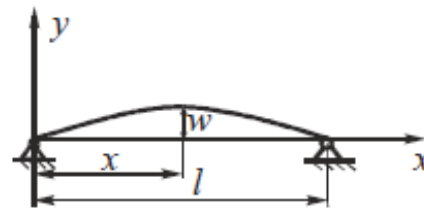


Рис. 6.10.2

6.10.3 Струна в початковий момент часу має відхилення виду  $w = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$  (рис. 6.10.4). Швидкості в початковий момент часу дорівнюють нулю. Натяг струни  $T_0$ . Визначити відхилення струни в наступні моменти часу.

$$\text{Відповідь: } w(x,t) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi \alpha t}{l}, \quad \alpha^2 = \frac{T_0}{m_0}.$$

6.10.4. Визначити перші дві власні частоти поперечних коливань струни, маса якої (маса одиниці довжини струни) змінюється за законом  $m = m_0 + m_1 \sin \frac{\pi x}{l}$  (рис. 6.10.4). Враховуючи, що натяг струни  $T_0$  при коливаннях залишається практично незмінним.

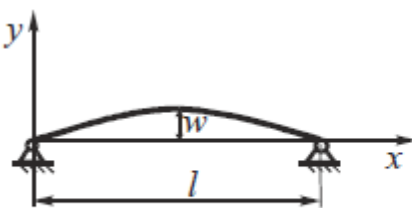


Рис. 6.10.4

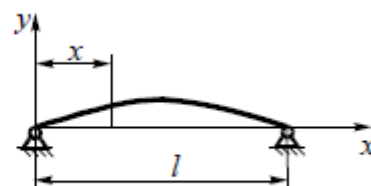


Рис. 6.10.5

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m_0 \left(1 + \frac{8m_1}{3\pi m_0}\right)}}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m_0 \left(1 + \frac{32m_1}{15\pi m_0}\right)}}.$$

### Задачі на крутильні коливання валів

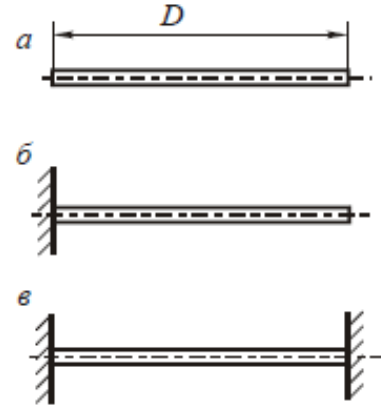


Рис. 6.10.6

#### 6.10.5. Вивести диференційне рівняння

вільних крутильних коливань суцільного валу круглого перерізу та визначити власні частоти коливань вала для випадків закріплення вала, як показано на рис. 6.10.6. Модуль пружності при зсуві матеріалу вала  $G$ , густина матеріалу  $\rho$ .

Відповідь: а)  $\omega_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right) \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ ,

б)  $\omega_n = \left(\frac{2n-1}{2l}\right) \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ , в)  $\omega_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right) \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

6.10.6. Визначити швидкість розповсюдження хвилі кручення (хвиль зсуву) по валу суцільного перерізу, якщо модуль пружності при зсуві  $G = 80 \cdot 10^4$  МПа, густина матеріалу  $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Відповідь:  $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3,2 \text{ км/с}$ .

6.10.7. Визначити швидкість розповсюдження хвилі кручення та власні частоти крутильних коливань пружини, якщо  $l=20$  см,  $D=10$  см,  $d=0,5$  см, число витків  $n=20$ , модуль пружності при розтязі матеріалу дроту, з якого зроблена пружина, дорівнює  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, густина матеріалу  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$  (пружина має малий кут підйому).

Відповідь:  $c = \frac{ld}{2\pi n D^2} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 4,1 \text{ м/с}$ ,  $\omega_i = \left(\frac{2i-1}{2l}\right) \frac{dl}{2\pi n D^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

## Задачі на поздовжні коливання стержнів

6.10.8. Скласти диференційне рівняння поздовжніх коливань стержнів та визначити частоти коливань для випадків закріплення стержнів (рис. 6.10.6). Модуль пружності при розтязі матеріалу стержня  $E$ , його густина  $\rho$ , площа поперечного перерізу  $A$ . При складанні рівняння коливань стержня рахувати, що переріз залишається плоским, частинки стержня не здійснюють поперечних рухів та переміщуються тільки в поздовжньому напрямку.

Відповідь: а)  $\omega_n = (\pi n / l) \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$ , б)  $\omega_n = (2n - 1) / (2l) \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$ ,

в)  $\omega_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right) \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$ ,  $m_0 = \rho A$ .

6.10.9. Визначити швидкість розповсюдження хвиль стиску по стержню, якщо  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Відповідь:  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5 \cdot 10^3$  м/с.

6.10.10. Скласти диференційне рівняння поздовжніх коливань стержня, навантаженого поздовжнім розподіленим навантаженням  $q(x, t)$  (рис. 6.10.7).

Відповідь:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q}{m_0}$ ,  $c = \sqrt{\frac{EA}{m_0}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

6.10.11. Скласти диференційне рівняння вільних поздовжніх коливань стержня в випадку змінної площі поперечного перерізу (рис. 6.10.8).

Відповідь:  $\rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]$ .

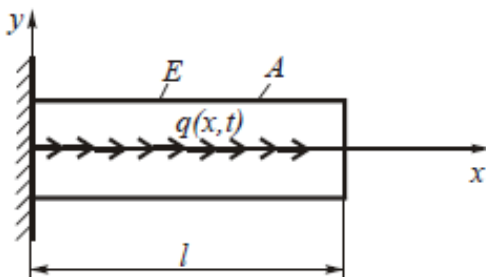


Рис. 6.10.7

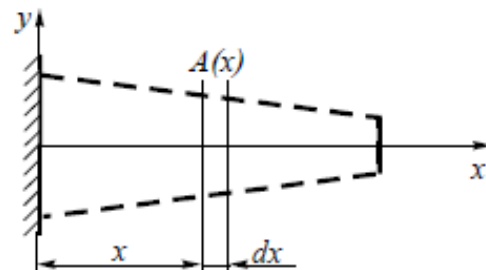


Рис. 6.10.8

6.10.12. Лівий край стержня зв'язаний з пружиною жорсткістю  $c = \frac{EA}{l}$  (рис.

6.10.9). Вивести диференціальне рівняння для визначення власних частот коливань та графічним методом визначити три перші частоти малих вільних коливань стержня. Маса одиниці довжини стержня  $m_0$ .

Відповідь:  $\omega_1 = \frac{3\pi}{8l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$ ,  $\omega_2 = \frac{9\pi}{8l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$ ,  $\omega_3 = \frac{33\pi}{16l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$ , де  $m_0 = \rho A$ .

6.10.13. Для випадку закріплення стержня, показаного на рис. 6.10.11, отримати рівняння частот та визначити перші дві власні частоти, якщо  $c = \frac{EA}{l}$ .

Відповідь:  $\omega_1 = \frac{2\pi}{3l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$ ,  $\omega_2 = \frac{3\pi}{2l} \sqrt{\frac{EA}{m_0}}$ .

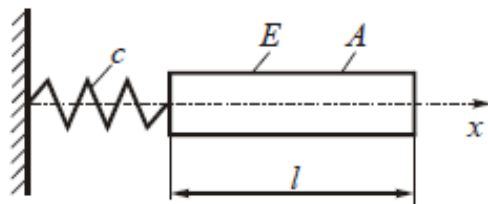


Рис. 6.10.9

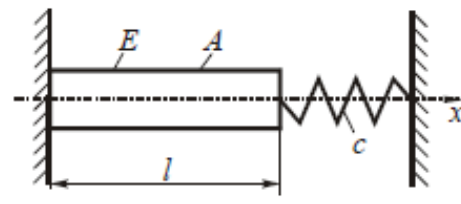


Рис. 6.10.11

6.10.14. Знайти закон коливань від раптово прикладеної до кінця ідеально пружного стержня осьової сили  $F$ , що раптово знімається (рис. 6.10.12).

Відповідь:  $u(x,t) = F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(l)u_n(x)}{M_n \omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$ .

6.10.15. Знайти безпосередній розв'язок задачі вимушених поздовжніх коливань стержня (рис. 6.10.3).

Відповідь:  $u(x,t) = \frac{Fc_0}{EA \cos \frac{p}{c_0} l} \sin \frac{p}{c_0} x \cos pt$ ,

де  $\frac{p}{c_0} l \neq 0$ ,  $p = \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} c_0$ .

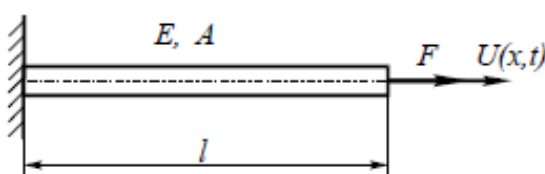


Рис. 6.10.12

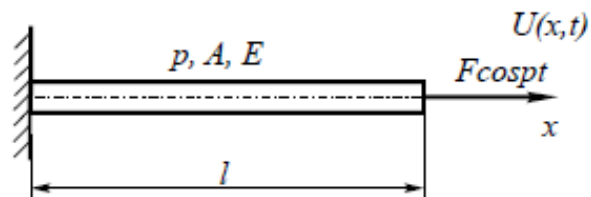


Рис. 6.10.13

### Задачі на поперечні коливання балок

6.10.16. Скласти диференційне рівняння малих поперечних коливань балок та визначити власні частоти для випадків закріплення, показаних на рис. 6.10.14. Маса одиниці довжини стержня  $m_0$ , згинна жорсткість  $EI_z$ .

Відповідь: а)  $\omega_1 = 3,25 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$ ,  $\omega_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$ ;

б)  $\omega_1 = 16,4 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$ ,  $\omega_n = \frac{(4n+1)^2 \pi^2}{16} \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$ .

6.10.17. Визначити власні частоти коливань балок для випадків, показаних на рис. 6.10.15.

Відповідь: а)  $\omega_1 = 22,5 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$ ,  $\omega_n = \left[ \frac{2(n+1)+1}{2} \right]^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$ ;

б)  $\omega_1 = 5,5 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$ ,  $\omega_n = \left( \frac{2n-1}{2} \right)^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}$ .

6.10.18. Показати, що у випадку змінного по довжині момента інерції  $I_z(x)$  диференційне рівняння малих вільних коливань балки має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI_z(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

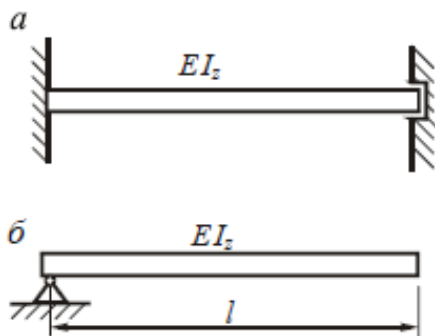


Рис. 6.10.14

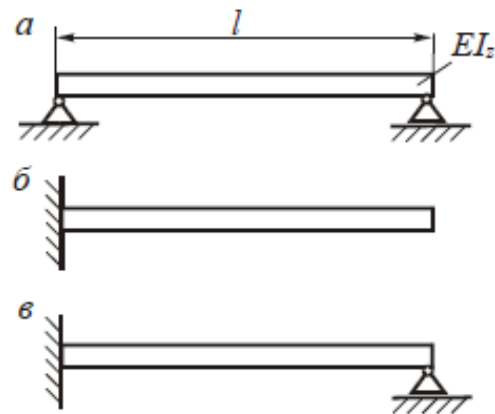


Рис. 6.10.15

6.10.19. Шарнірно закріплена балка має змінну по довжині згинну жорсткість  $EI_z = EI_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{l}\right)^3$  та масу одиниці довжини  $m = m_0 \left(1 + \sin \frac{\pi x}{l}\right)$  (рис. 6.10.16).

Визначити методом Гальоркіна основну власну частоту коливань при одночленному наближенні.

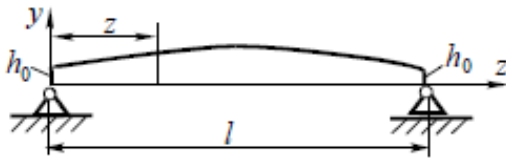


Рис. 6.10.16

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = 2,16 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}.$$

6.10.20. Уточнити першу (основну) частоту, яка одержана в першому наближенні в задачі 6.10.19, розглянувши друге наближення.

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = 1,781 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}, \quad \omega_3 = 1,4 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_0}{m_0}}.$$

6.10.21. Скласти диференціальне рівняння малих вільних коливань балки, що лежить на пружній основі, якщо сила реакції, що діє на одиницю довжини балки зі сторони пружної основи, пропорційна прогину балки  $kw$ , де  $k$  – коефіцієнт жорсткості основи (коефіцієнт постелі). Маса одиниці довжини балки  $m_0$ , згинна жорсткість  $EI_z$ . Вважати, що при малих коливаннях балка не відривається від основи. Масою основи, яка приймає участь в коливаннях, знехтувати, прийняти, що пружна основа еквівалентна рівномірно розподіленим безінерційним пружинам.

$$\text{Відповідь: } \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI_z}{m_0} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{kw}{m_0} = 0.$$

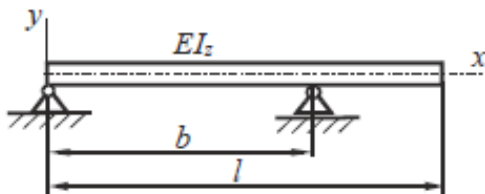


Рис. 6.10.17

6.10.22. Визначити першу власну частоту коливань балки (рис. 6.10.17). Згинна жорсткість балки  $EI_z$ , маса одиниці довжини  $m_0$ , довжина  $l$ , відстань між опорами  $b = \frac{l}{2}$ .

$$\text{Відповідь: } \omega_1 = 9,066 \sqrt{\frac{EI_z}{m_0 l^4}}.$$

6.10.23. Вивести диференціальне рівняння малих згинних коливань балки з урахуванням дії на неї постійної стискуючої сили (рис. 6.10.18). Визначити власні частоти балки.

$$\text{Відповідь: } EI_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 \frac{EI_z}{m_0} - \frac{F}{m_0} \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2}.$$

6.10.24. Балка, що лежить на безінерційній основі, стискується сталою силою  $F$  (рис. 6.10.19). Маса одиниці довжини балки  $m_0$ , згинна жорсткість  $EI_z$ , коефіцієнт жорсткості пружної основи  $k$ . Скласти диференціальне рівняння згинних коливань балки та визначити власні частоти коливань.

$$\text{Відповідь: } EI_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

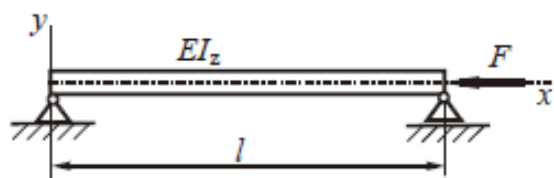


Рис. 6.10.18

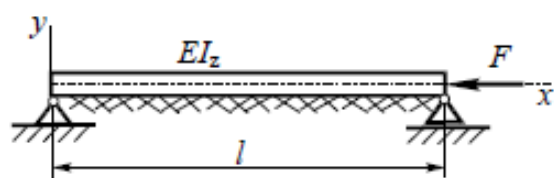


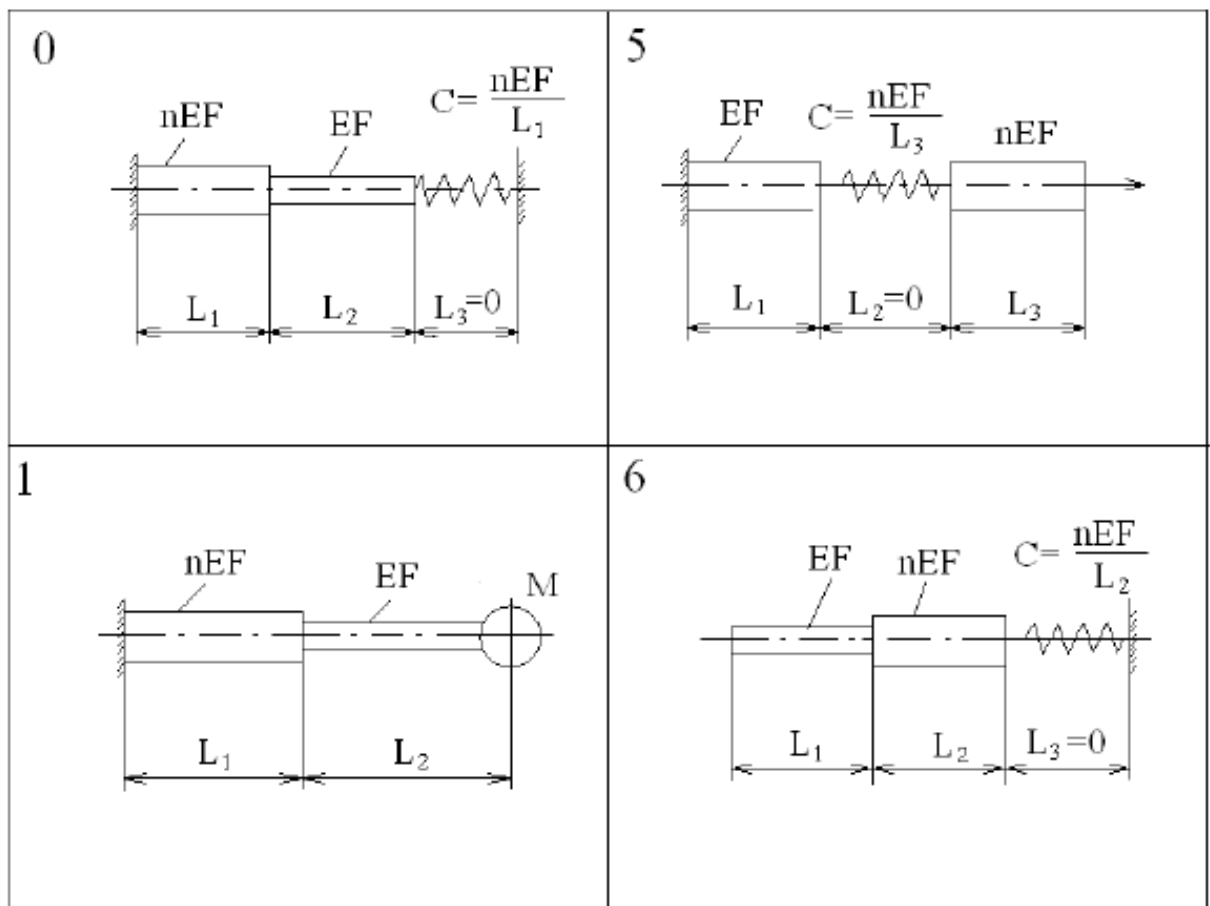
Рис. 6.10.19

Практична робота № 7

**МЕТОД ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ ПРИ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАННЯХ СХІДЧАСТИХ СТЕРЖНІВ**

При поздовжніх коливаннях застосовують метод початкових параметрів, коли стержень східчастого чи постійного перерізу має кілька ділянок, і розглядаються вільні чи вимушені гармонічні коливання далеко від резонансу (якщо тертя не враховується). Алгоритм методу початкових параметрів дає змогу на заданій частоті за відомим вектором стану (переміщення і осьова сила) на початку ділянки визначити вектор стану в кінці ділянки.

Задача 7.1. Для систем відображених на рис. 7.1.1, визначити вектори стану



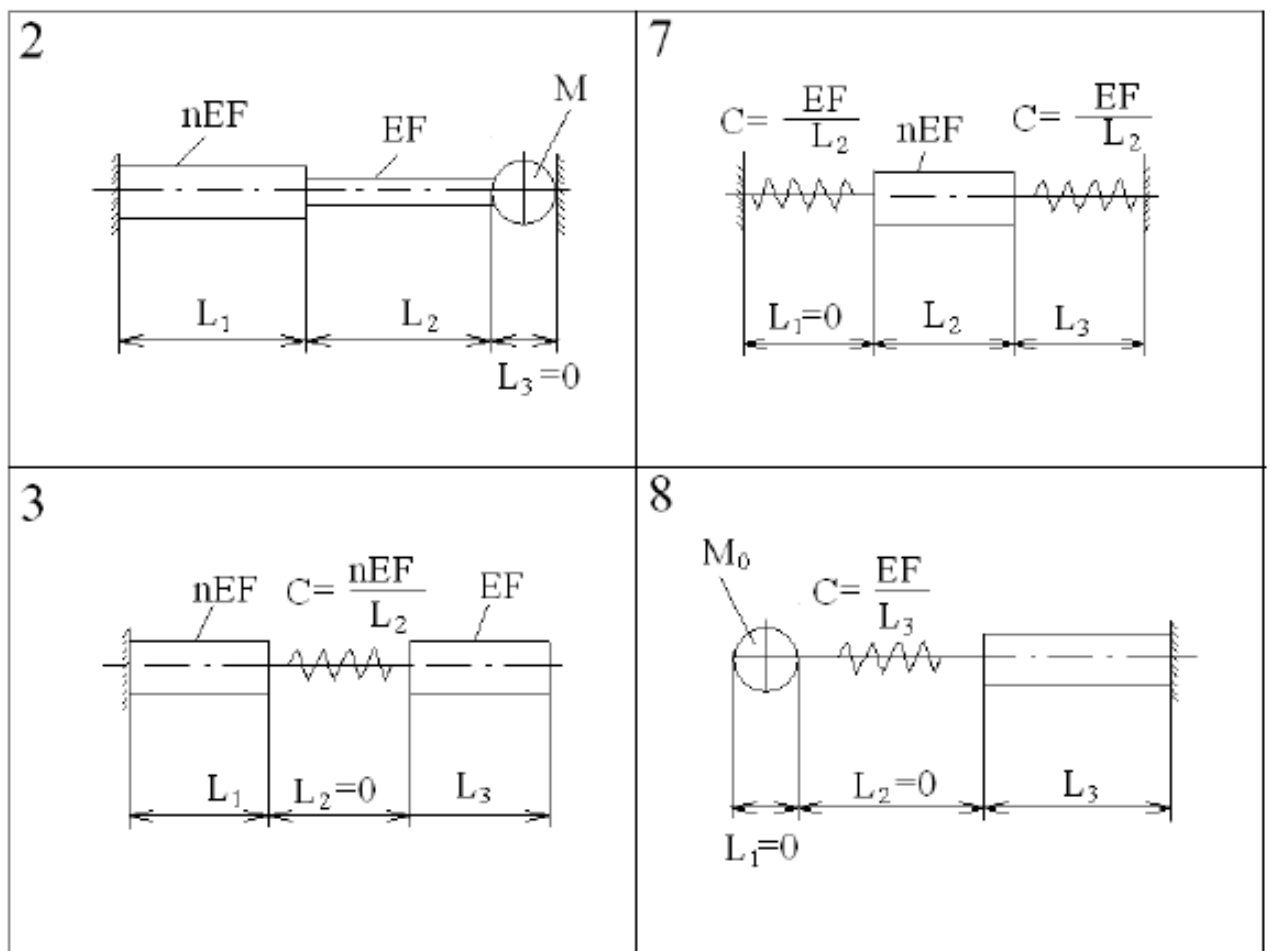


Рис. 7.1.1

**Приклад. 7.1.1.** Розглянемо коливальну систему, яка має чотири ділянки

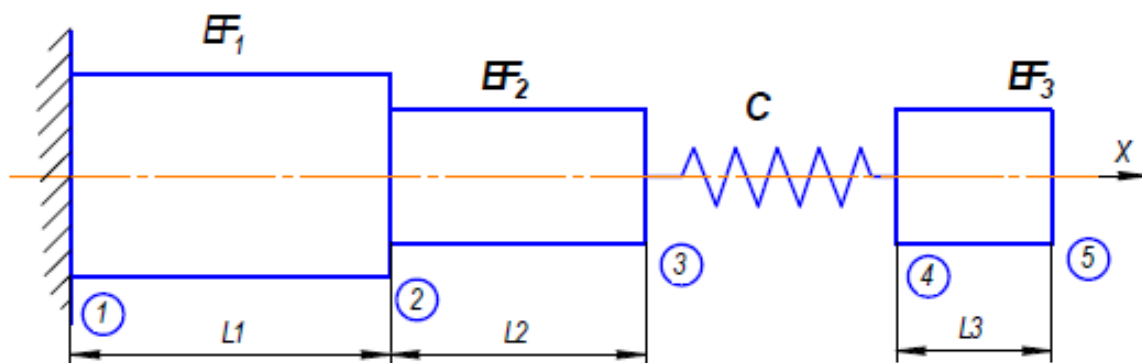


Рис.7.1

Вихідні дані:

$$F_1 = 3F; \quad F_2 = 2F; \quad F_3 = F; \quad c = \frac{EF}{2L}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$L_1 = 0,2M = 4L; \quad L_2 = 0,1M = 2L; \quad L_3 = 0,05M = L.$$

Запишемо матриці переходу

$$M_{54} = \begin{pmatrix} \cos kb & \frac{1}{EF_2 k} \sin kb \\ -EF_2 k \sin kb & \cos kb \end{pmatrix};$$

$$M_{43} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; M_{32} = \begin{pmatrix} \cos kb & \frac{1}{EF_2 k} \sin kb \\ -EF_2 k \sin kb & \cos kb \end{pmatrix};$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \cos kb & \frac{1}{EF_1 k} \sin kb \\ -EF_1 k \sin kb & \cos kb \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} U_1 \\ N_1 \end{pmatrix}; X_5 = \begin{pmatrix} U_5 \\ N_5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} U_1 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_5 = M_{54} M_{43} M_{32} M_{21} X_1$$

Перехід від перерізу до перерізу здійснюється множенням матриці переходу на вектор стану. Весь перехід від лівого до крайнього правого перерізу зображують добутком усіх передатних матриць на початкове значення вектора стану. При вільних коливаннях початковий вектор стану відомий з точністю до множника. Переваги методу початкових параметрів у матричному вигляді виявляються у випадку великої кількості ділянок стержня

$$\begin{pmatrix} U_5 \\ N_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 4kL \cdot \left( \cos 2kL \cdot \left( \frac{\sin kL}{EFk} + \frac{2L \cos kL}{EF} \right) + \frac{\cos kL \cdot \sin 2kL}{2EFk} \right) + \\ \cos 4kL \cdot (\cos 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL)) - \\ \sin 4kL \cdot \left[ \cos kL \cdot \cos 2kL - 2EFk \cdot \sin 2kL \cdot \left( \frac{\sin kL}{EFk} + \frac{2L \cdot \cos kL}{EF} \right) \right] \\ + \frac{\sin 4kL \cdot [2EFk \cdot \sin 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL) + EFk \cdot \cos 2kL \cdot \sin kL]}{3EFk} \end{pmatrix}$$

$$U_5 = \cos 4kL \cdot \left( \cos 2kL \cdot \left( \frac{\sin kL}{EFk} + \frac{2L \cos kL}{EF} \right) + \frac{\cos kL \cdot \sin 2kL}{2EFk} \right) + \\ + \frac{\sin 4kL \cdot \left[ \cos kL \cdot \cos 2kL - 2EFk \cdot \sin 2kL \cdot \left( \frac{\sin kL}{EFk} + \frac{2L \cdot \cos kL}{EF} \right) \right]}{3EFk}$$

$$N_5 = \cos 4kL \cdot (\cos 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL)) - \\ - \frac{\sin 4kL \cdot [2EFk \cdot \sin 2kL \cdot (\cos kL - 2kL \cdot \sin kL) + EFk \cdot \cos 2kL \cdot \sin kL]}{3EFk}$$

$$f(k) = \sin(3Lk) - 3 \sin(Lk) - 5 \sin(5Lk) + 15 \sin(7Lk) + 4Lk \cdot \cos(Lk) + \\ + 4Lk \cdot \cos(3Lk) + 20Lk \cdot \cos(5Lk) + 20Lk \cdot \cos(7Lk)$$

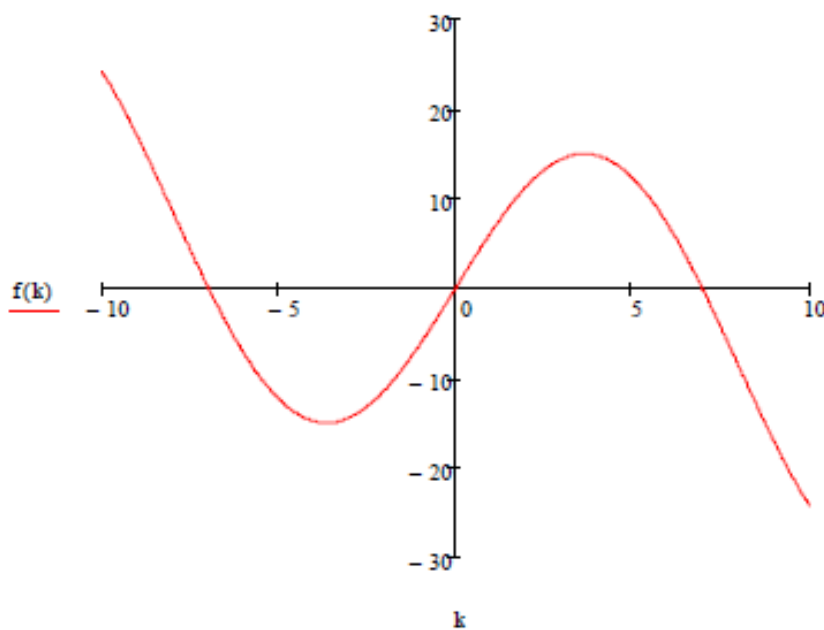


Рис. 7.1.2

З отриманих комплексно-значних матричних співвідношень визначимо комплексні амплітуди сил і переміщень — компоненти вектора стану. З останніх знаходимо дійсні амплітуди коливань і фази коливань.

$$k = 7$$

$$N_5 = -0.31$$

$$\begin{pmatrix} U_5 \\ N_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.31 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = M_{43}M_{32}M_{21}X_1$$

$$\begin{pmatrix} U_4 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 4kL \cdot \left( \cos 2kL \cdot \left( \frac{\sin 2kL}{2EFk} + \frac{2L \cos 2kL}{EF} \right) + \frac{\sin 4Lk \cdot (\cos 2Lk - 4Lk \cdot \sin 2Lk)}{3EFk} \right) \\ \cos 2kL \cdot \cos 4kL - \frac{2 \cdot \sin 2Lk \cdot \sin 4Lk}{3} \end{pmatrix}$$

$$f(k^2) := 5 \cdot \sin(6 \cdot L \cdot k^2) - \sin(2 \cdot L \cdot k^2) + 4 \cdot L \cdot k^2 \cdot \cos(2 \cdot L \cdot k^2) + 20 \cdot L \cdot k^2 \cdot \cos(6 \cdot L \cdot k^2)$$

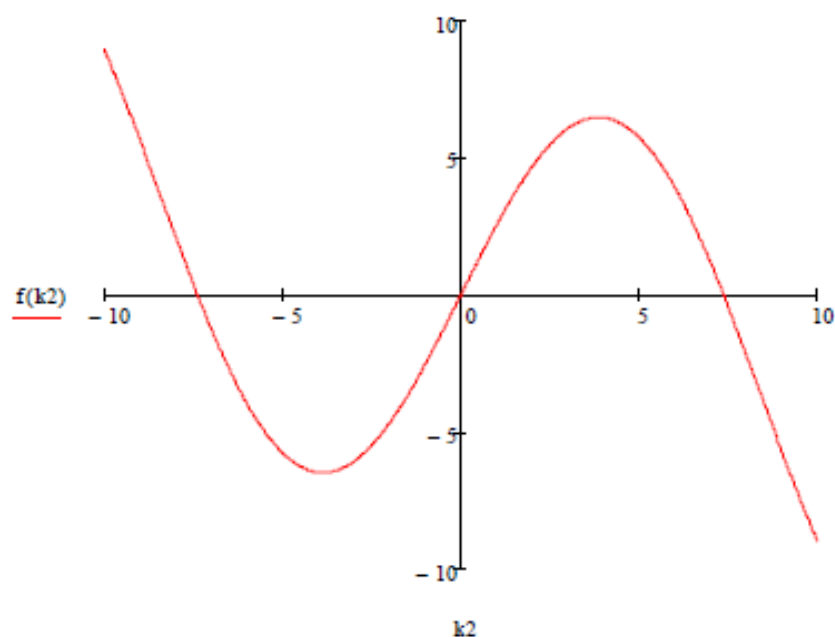


Рис. 7.1.3

$$k = 7.38$$

$$N_4 = -0.376$$

$$\begin{pmatrix} U_4 \\ N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.376 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = M_{32} M_{21} X_1$$

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos 2kL \cdot \sin 4kL}{3EFk} + \frac{\cos 4Lk \cdot \sin 2Lk}{2EFk} \\ \cos 2kL \cdot \cos 4kL - \frac{2 \cdot \sin 2Lk \cdot \sin 4Lk}{3} \end{pmatrix}$$

$$f(k3) := -(\sin(2 \cdot L \cdot k3) - 5 \cdot \sin(6 \cdot L \cdot k3))$$

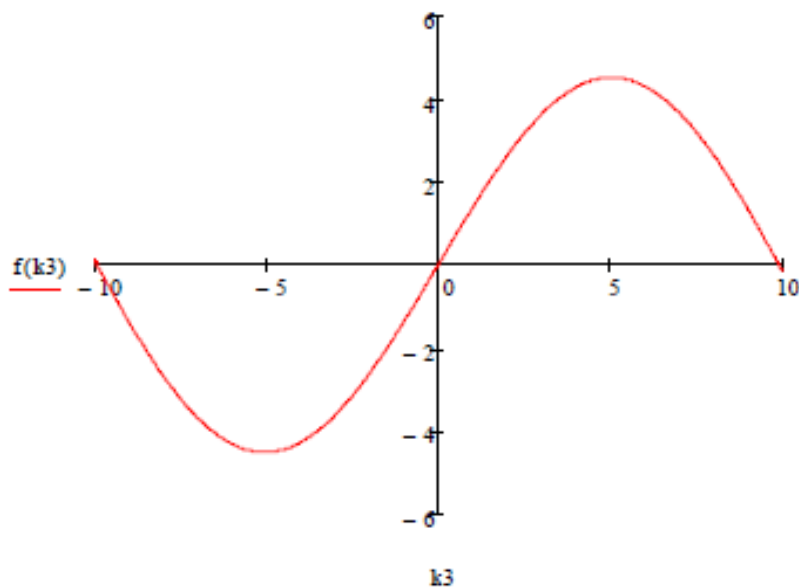


Рис. 7.1.4

$$k = 9.91$$

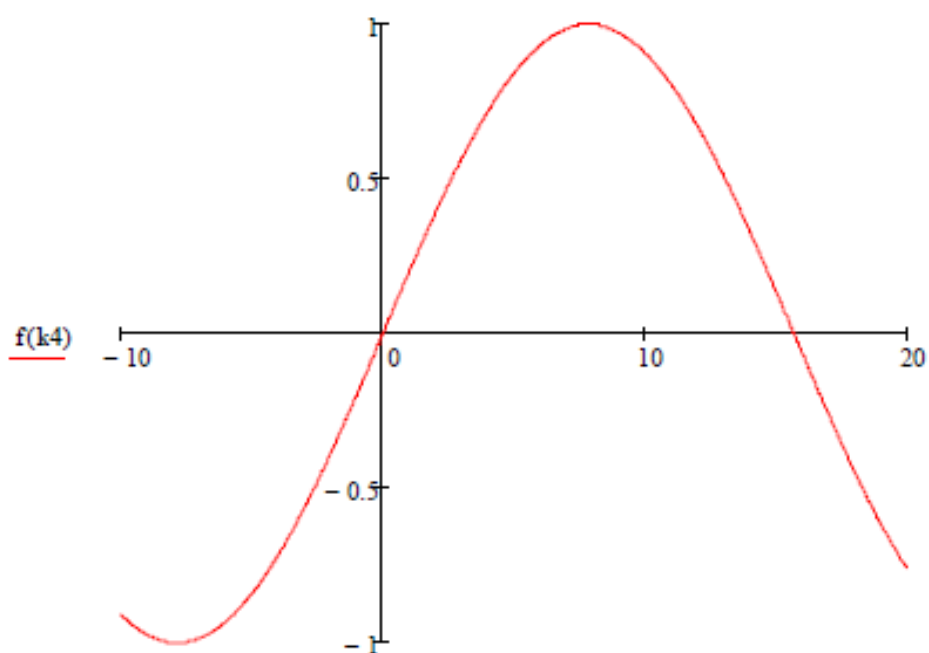
$$N_3 = -0.73$$

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.73 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = M_{21} X_1$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin 4kL}{3EFk} \\ \cos 4kL \end{pmatrix}$$

$$f(k4) := \sin(4Lk4)$$



k4

Рис. 7.1.5

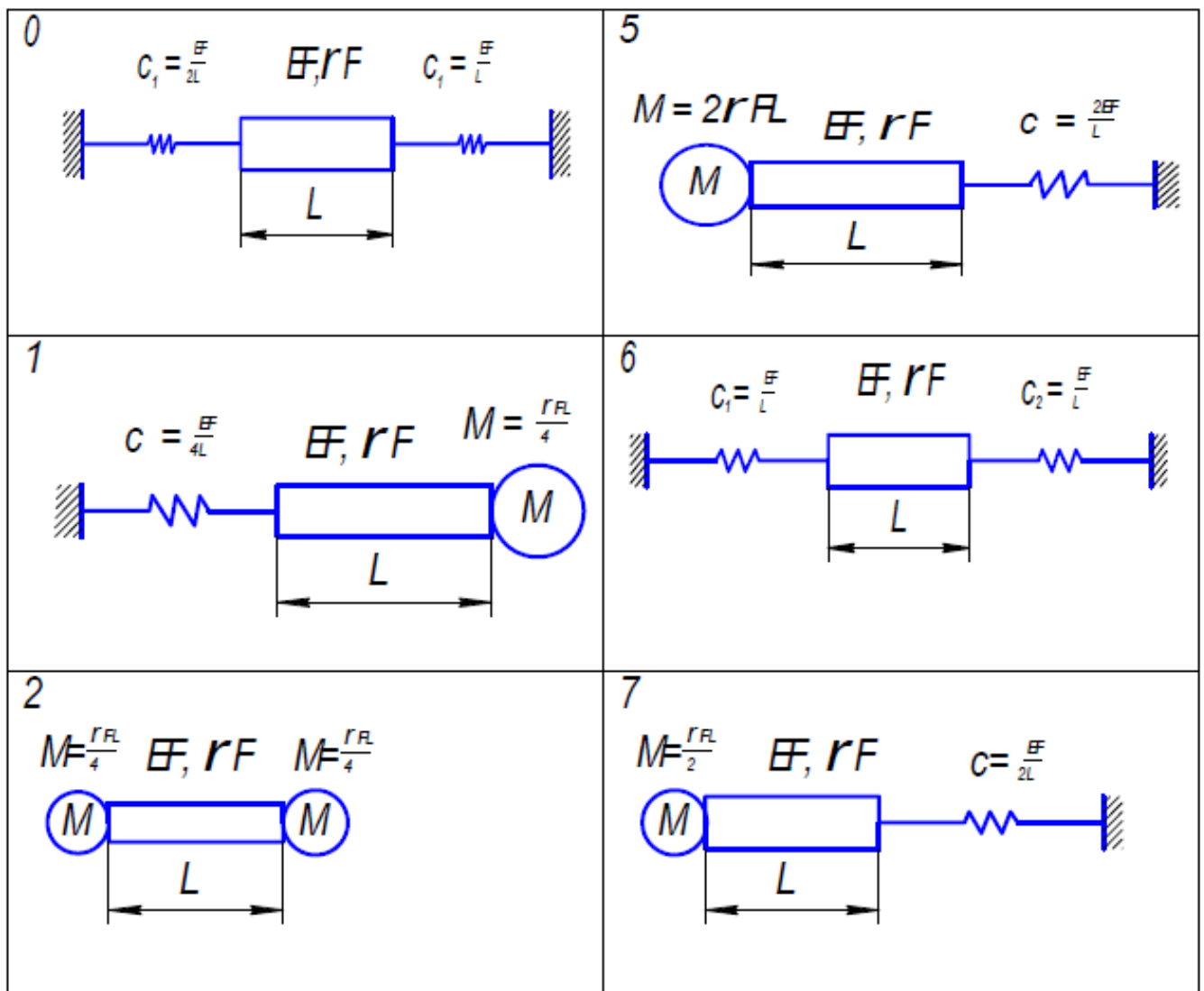
$$k = 15.74$$

$$N_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### Задача 7.2

Для систем зображених на рис. 7.2.1, знайти власні частоти використовуючи метод початкових параметрів та розв'язати задачу на власні коливання стержня за неоднорідних граничних умов.



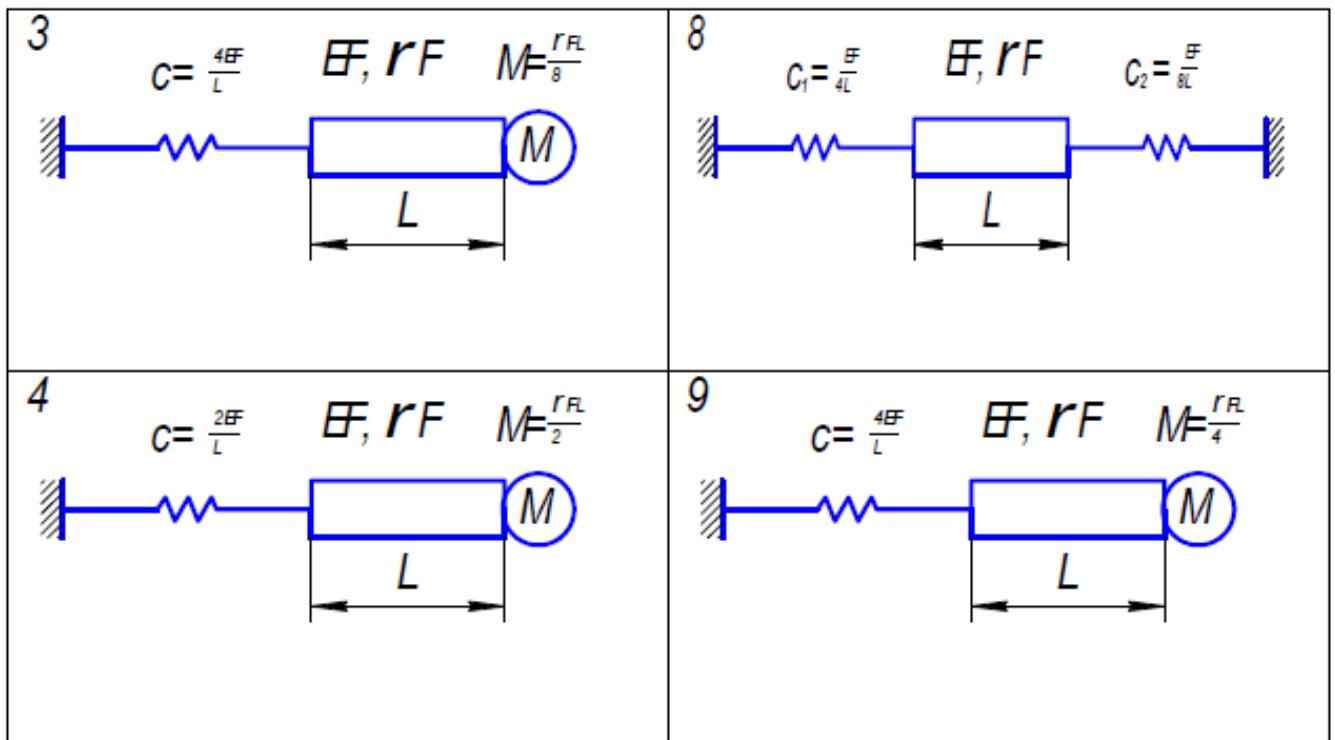


Рис. 7.2.1

**Приклад 7.3. Застосування методу початкових параметрів для розрахунку вільних коливань стержня з декількома ділянками**

Знайдемо власні частоти та вектори стану для системи.

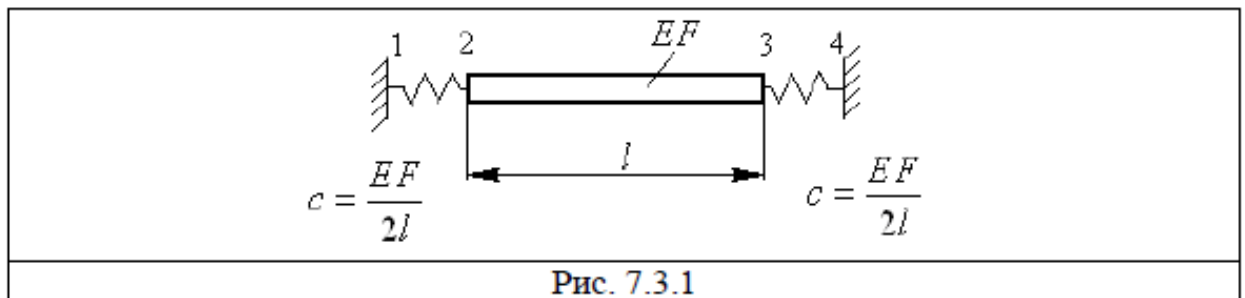


Рис. 7.3.1

Вектор стану

$$X_4 = M_{43} M_{32} M_{21} X_1; \quad (7.3.1)$$

де

$$X_4 = \begin{Bmatrix} U_4 \\ N_4 \end{Bmatrix}; \quad X_1 = \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix}; \quad (7.3.2)$$

$$M_{43} = M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{32} = \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix}; \quad (7.3.3)$$

Підставляючи (7.3.2) та (7.3.3) в (7.3.1), отримаємо:

$$\begin{Bmatrix} U_4 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix};$$

$$U_4 = U_1 = 0; \quad N_1 = 1;$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ N_4 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/c \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L - \frac{1}{c^2} EFk_1 \sin k_1 L + \frac{1}{c} \cos k_1 L \\ -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L - \frac{1}{c^2} EFk_1 \sin k_1 L + \frac{1}{c} \cos k_1 L = 0;$$

$$\frac{2}{c} + \operatorname{tg} k_1 L \left( \frac{1}{EFk_1} - \frac{EFk_1}{c^2} \right) = 0;$$

Враховуючи, що  $c = \frac{EF}{2L}$ , отримаємо:

$$\operatorname{tg} k_1 L = \frac{4k_1 L}{4k_1^2 L^2 - 1} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{L} \operatorname{arctg} \frac{4k_1 L}{4k_1^2 L^2 - 1};$$

$$X_3 = M_{32} M_{21} X_1;$$

$$\begin{Bmatrix} U_3 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_3 \\ N_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$X_2 = M_{21} X_1;$$

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/c \\ 1 \end{bmatrix};$$

Розв'яжемо задачу на власні коливання стержня за неоднорідних граничних умов.

$$EF \frac{dU_1(0)}{dx} = cU_1(0);$$

$$EF \frac{dU_1(L)}{dx} = -cU_1(L);$$

$$U_1(x) = A_1 \cos k_1 x + B_1 \sin k_1 x; \quad (7.3.4)$$

$$\frac{dU_1(x)}{dx} = -A_1 k_1 \sin k_1 x + B_1 k_1 \cos k_1 x; \quad (7.3.5)$$

Підставляючи граничні умови в (7.3.4) та (7.3.5), отримаємо два рівняння:

$$EF B_1 k_1 = c A_1; \quad (7.3.6)$$

$$EF(-A_1 k_1 \sin k_1 L + B_1 k_1 \cos k_1 L) = -c(A_1 \cos k_1 L + B_1 \sin k_1 L);$$

З першого рівняння (7.3.6) маємо:

$$B_1 = \frac{c A_1}{EF k_1} \quad (7.3.7)$$

Підставляючи (7.3.7) в друге рівняння (7.3.6), отримаємо рівняння:

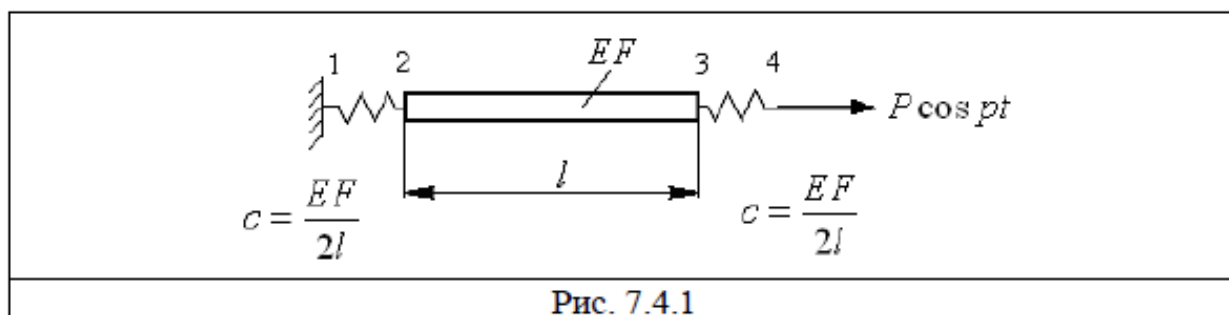
$$EF \left( -A_1 k_1 \sin k_1 L + \frac{c A_1}{EF} \cos k_1 L \right) = -c \left( A_1 \cos k_1 L + \frac{c A_1}{EF k_1} \sin k_1 L \right);$$

Враховуючи, що  $c = \frac{EF}{2L}$ , отримаємо:

$$\operatorname{tg} k_1 L = \frac{4k_1 L}{4k_1^2 L^2 - 1} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{L} \operatorname{arctg} \frac{4k_1 L}{4k_1^2 L^2 - 1}.$$

**Приклад 7.4. Застосування методу початкових параметрів для розрахунку вимушених коливань стержня з декількома ділянками**

Знайдемо вектори стану при дії на стержень гармонічної сили  $P \cos pt$ .



Вектор стану

$$X_4 = M_{43}M_{32}M_{21}X_1; \quad (7.4.1)$$

де

$$X_4 = \begin{Bmatrix} U_4 \\ N_4 \end{Bmatrix}; \quad X_1 = \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix}; \quad (7.4.2)$$

$$M_{43} = M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{32} = \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix}; \quad (7.4.3)$$

Підставляючи (7.4.2) та (7.4.3) в (7.4.1), отримуємо:

$$\begin{Bmatrix} U_4 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix};$$

$$U_1 = 0; \quad N_4 = P;$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_4 \\ P \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ N_1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c} N_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \left( \frac{1}{c} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \right) \\ N_1 \left( -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \right) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} N_1 \left( \frac{1}{c} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L - \frac{1}{c^2} EFk_1 \sin k_1 L + \frac{1}{c} \cos k_1 L \right) \\ N_1 \left( -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \right) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} N_1 \left( \frac{2}{c} \cos k_1 L + \frac{\sin k_1 L}{EFk_1} \left( 1 - \frac{(EFk_1)^2}{c^2} \right) \right) \\ N_1 \left( -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \right) \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

$$N_1 \left( -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \right) = P;$$

$$N_1 = \frac{P}{-\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L};$$

$$U_4 = N_1 \left( \frac{2}{c} \cos k_1 L + \frac{\sin k_1 L}{EFk_1} \left( 1 - \frac{(EFk_1)^2}{c^2} \right) \right);$$

$$U_4 = \frac{P}{-\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L} \cdot \left( \frac{2}{c} \cos k_1 L + \frac{\sin k_1 L}{EFk_1} \left( 1 - \frac{(EFk_1)^2}{c^2} \right) \right);$$

$$\text{Враховуючи, що } c = \frac{EF}{2L}, \quad (7.4.4)$$

отримаємо:

$$N_1 = \frac{P}{-2Lk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L}; \quad (7.4.5)$$

$$U_4 = \frac{P}{-2Lk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L} \cdot \left( 4L \cos k_1 L + \frac{\sin k_1 L}{EFk_1} (1 - 4L^2 k_1^2) \right); \quad (7.4.6)$$

$$X_3 = M_{32} M_{21} X_1;$$

$$\begin{Bmatrix} U_3 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_3 \\ N_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ N_1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos k_1 L & \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \\ -EFk_1 \sin k_1 L & \cos k_1 L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c} N_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \left( \frac{1}{c} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \right) \\ N_1 \left( -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \right) \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$U_3 = N_1 \left( \frac{1}{c} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \right);$$

$$N_3 = N_1 \left( -\frac{1}{c} EFk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L \right);$$

З врахуванням (7.4.4) та (7.4.5), маємо:

$$U_3 = \frac{P}{-2Lk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L} \left( \frac{2L}{EF} \cos k_1 L + \frac{1}{EFk_1} \sin k_1 L \right);$$

$$N_3 = \frac{P}{-2Lk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L} (-2Lk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L);$$

$$X_2 = M_{21} X_1;$$

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ N_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} N_1 \\ N_1 \end{bmatrix};$$

$$U_2 = \frac{1}{c} N_1 = \frac{P}{-2Lk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L} \cdot \frac{2L}{EF};$$

$$N_2 = N_1 = \frac{P}{-2Lk_1 \sin k_1 L + \cos k_1 L}.$$

### Задача 7.5

Для системи зображеної на рис. 7.5.1, згідно свого варіанта, визначити амплітуду вимушених резонансних коливань балки, враховуючи розсієння енергії за гіпотезою Бока – Шліппе – Колара.

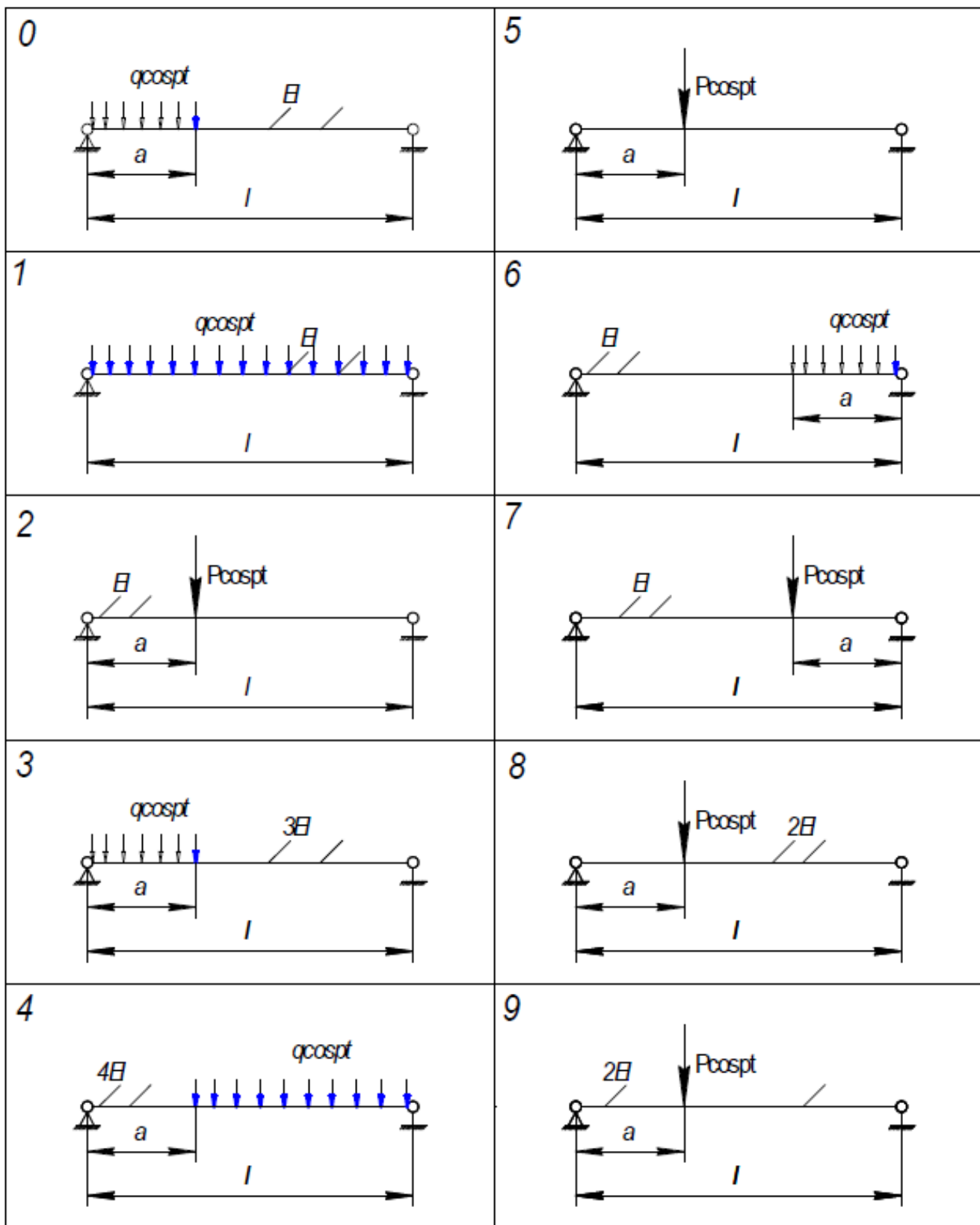


Рис.7.5.1

Задача 7.6. Необхідно за методом Релея – Рітца знайти в першому наближенні основну частоту коливань системи, складається з шарнірно - опертій по контуру пластини, товщиною  $h$  та декількох зосередженої маси  $M_0 = \rho h \frac{ab}{4}$  (рис.7.6.1).

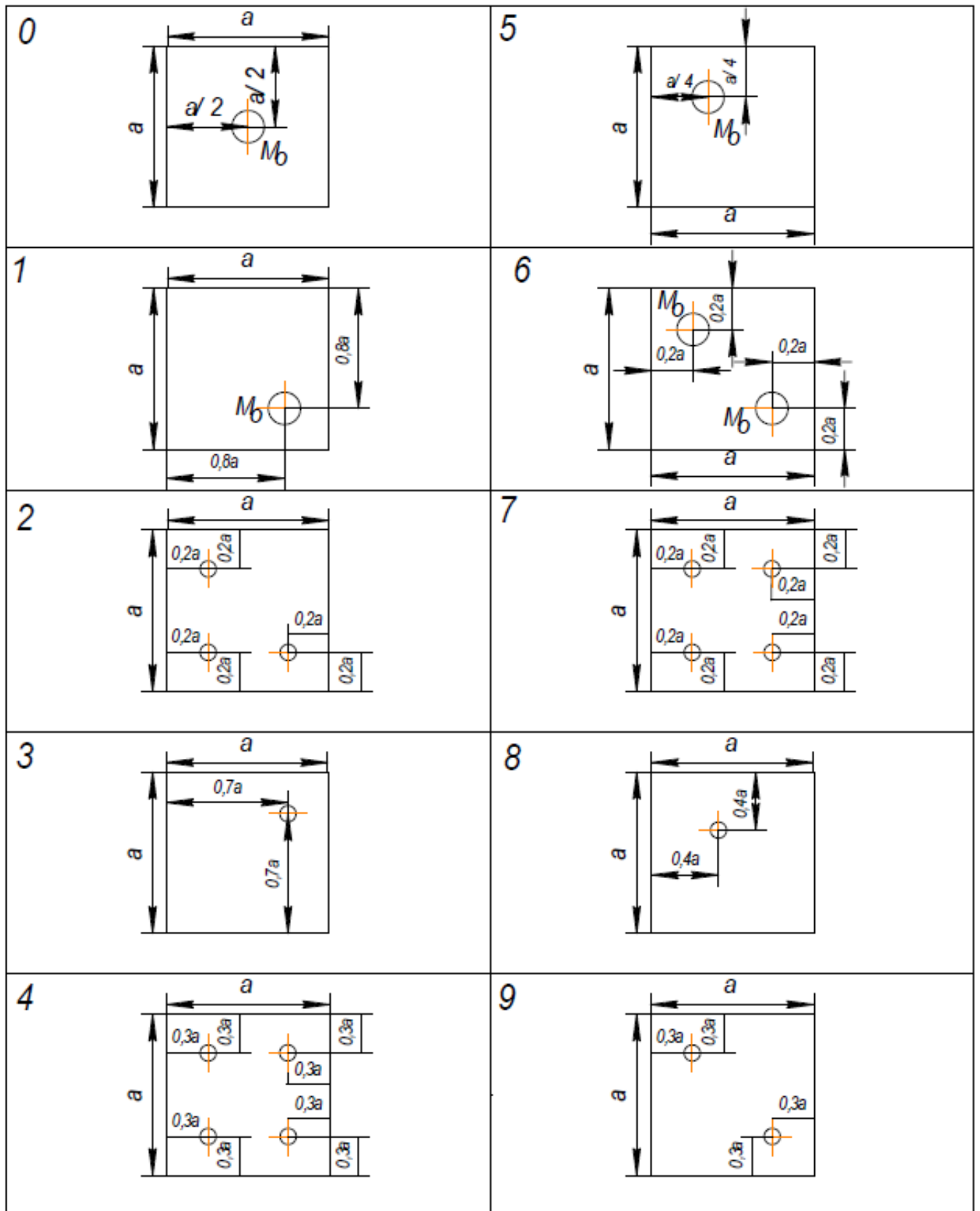


Рис.7.6.1

## Приклад

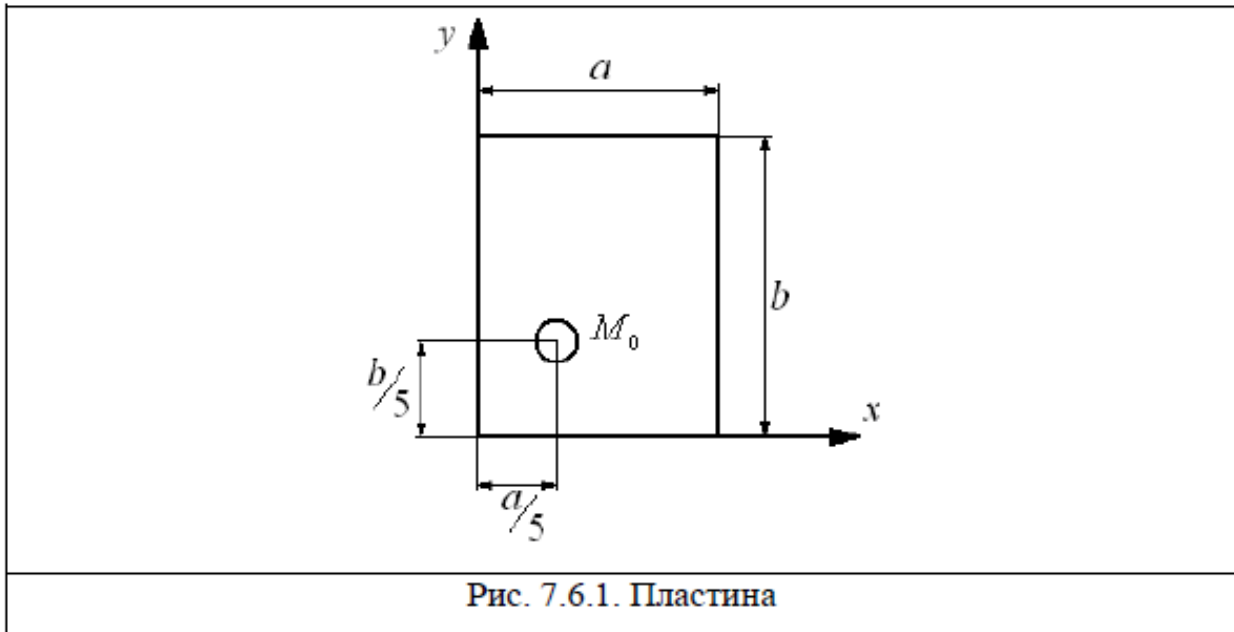


Рис. 7.6.1. Пластина

При поперечних коливаннях пластинки

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos \omega t; \quad \dot{w}(x, y, t) = -W(x, y) \omega \sin \omega t.$$

Амплітудні значення кінетичної та потенціальної енергії відповідно такі:

$$T_0 = \frac{m}{2} \omega^2 \int_0^a \int_0^b W^2 dx dy + \frac{M_0 \omega^2}{2} W^2 \left( \frac{a}{5}, \frac{b}{5} \right);$$

$$\Pi_0 = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (7.6.1)$$

В першому наближенні приймаємо:

$$W = a_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad (7.6.2)$$

Тоді (7.6.1) з урахуванням (7.6.2) прийме вигляд:

$$T_0 = \frac{m}{2} \omega^2 \int_0^a \int_0^b \left( a_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right)^2 dx dy + \frac{M_0 \omega^2}{2} \left( a_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right)^2 =$$

$$= \frac{m a_1}{2} \omega^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + \frac{M_0 \omega^2}{2} a_1^2 \sin^4 \frac{\pi}{5} = \frac{1}{8} a_1^2 \omega^2 ab \left( 1 + \frac{2.76 M_0}{mab} \right); \quad (7.6.3)$$

$$\Pi_0 = \frac{\pi^4 D}{2ab} a_1^2; \quad (7.6.4)$$

Значення власної частоти знаходиться з мінімуму функціонала:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} (T_0 - \Pi_0) = 0. \quad (7.6.5)$$

Підставляючи (16.13) та (16.14) в (16.15), знаходимо:

$$\omega = \frac{2\pi^2}{ab} \sqrt{\frac{D}{m \left(1 + \frac{2.76M_0}{mab}\right)}}. \quad (7.6.6)$$

З урахуванням того, що  $M_0 = \rho h \frac{ab}{4}$  вираз (7.6.6) перепишемо:

$$\omega = \frac{2\pi^2}{ab} \sqrt{\frac{D}{m \left(1 + \frac{2.76\rho h}{2m}\right)}} = \frac{2\pi^2}{ab} \sqrt{\frac{D}{m \left(1 + \frac{1.38\rho h}{m}\right)}}.$$

**Приклад 7.7.** Вимушені згинальні коливання прямокутної пластини під дією зосередженої сили.

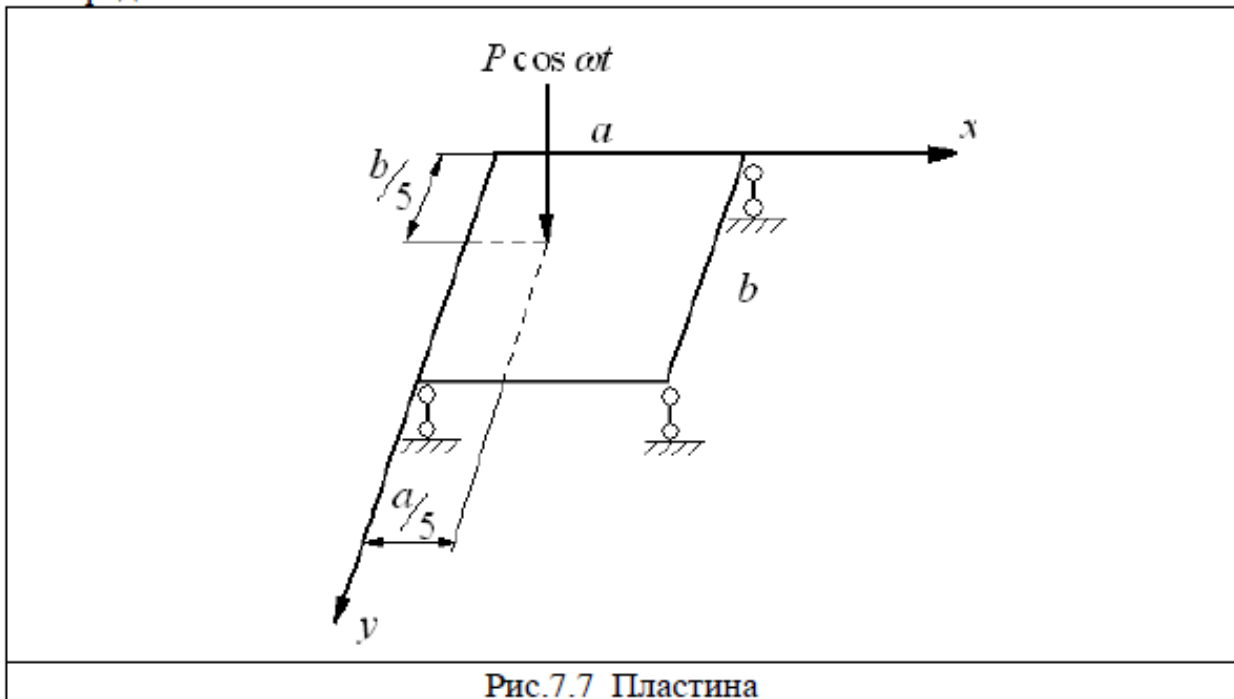


Рис.7.7 Пластина

Рівняння вимушених коливань шарнірно опертої по контуру пластини під дією зосередженої сили:

$$D\Delta\Delta w + \rho h \dot{w} = P \delta\left(x - \frac{a}{5}; y - \frac{b}{5}\right) \cos \omega t; \quad (7.7.1)$$

Розв'язок шукаємо по МГК:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) \eta_{mn}(t); \quad (7.7.2)$$

Власні форми коливань  $W_{mn}$  задовольняють рівнянню вільних коливань пластини:

$$D\Delta\Delta W_{mn} - \omega_{mn}^2 \rho h W_{mn} = 0; \quad (7.7.3)$$

підставляючи (7.7.2) в (7.7.1), отримуємо:

$$D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial y^4} \right] \eta_{mn}(t) + \rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \ddot{\eta}_{mn} = P \delta\left(x - \frac{a}{5}, y - \frac{b}{5}\right) \cos \omega t; \quad (7.7.4)$$

З рівняння (7.7.3) отримуємо:

$$D\Delta\Delta W_{mn} = \omega_{mn}^2 \rho h W_{mn}; \quad (7.7.5)$$

Підставляємо (7.7.5) в (7.7.4), отримуємо:

$$\rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn}^2 W_{mn} \eta_{mn} + \rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \ddot{\eta}_{mn} = P \delta\left(x - \frac{a}{5}, y - \frac{b}{5}\right) \cos \omega t; \quad (7.7.6)$$

Скористаємось умовою ортогональності по кінетичній енергії:

$$\rho h \int_0^a \int_0^b W_{mn} W_{m'n'} dx dy = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ M_n, & m = n \end{cases}; \quad (7.7.8)$$

Тоді рівняння (7.7.6) прийме вигляд:

$$M_n (\ddot{\eta}_{mn} + \omega_{mn}^2 \eta_{mn}) = P \int_0^a \int_0^b \delta\left(x - \frac{a}{5}, y - \frac{b}{5}\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \cos \omega t; \quad (7.7.9)$$

$$\eta_{mn}(t) = \frac{P \cos \omega t \sin \frac{m\pi}{5} \sin \frac{n\pi}{5}}{\rho h \frac{ab}{25} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)}; \quad (7.7.10)$$

Загальний розв'язок:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \frac{P \cos \omega t \sin \frac{m\pi}{5} \sin \frac{n\pi}{5}}{\rho h \frac{ab}{25} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)}.$$

## Література

1. Симоновський В.І. Теорія коливань: навчальний посібник. – Суми: СДУ, 2012. – 71 с.
2. Павловський М. А. Теоретична механіка / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
3. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху : Підручник.- К.: Вища шк., 2004.- 525 с.: іл.
4. Коливання та хвилі: підруч. для студ. вищ. навч. закл. / І. О. Анісімов ; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка. – 2-ге вид., переробл. і доповн. – К. : ВПЦ «Київ. ун-т», 2009. – 399 с.
5. Азаренков М.О., Гірка В.О., Лапшин В.І., Муратов В.І. Теорія коливань та хвиль. –Харків, 2005. – 154 с.
6. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.
7. Малі коливання. І. Лінійні коливання : навч.-метод. посіб. / [О. С. Ковальов, О. В. Єзерська, З. О. Майзеліс, Т. С. Чебанова]. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. – 112 с.
8. Симоновський В. І. Теорія коливань : навчальний посібник / В. І. Симоновський. – Суми : Сумський державний університет, 2012. - 71 с.
9. Долударєв В. М. Методичні вказівки до розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни ”Прикладна теорія коливань” / В. М. Долударєв, А. М. Песєв. – Кременчук : КДПУ, 2006. – 38 с.
10. Теорія коливань та стійкості руху. Коливальні системи з розподіленими параметрами. Курсовий проект [Електронний ресурс] : навч. посіб. / А. Є. Бабенко, О. О. Боронко, А. П. Грабовський, А. М. Бабак. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 67 с.
11. Симоновський В. І. Коливання нелінійних систем / В. І. Симоновський. – Суми : Вид-во СумДУ, 1999. – 131 с.

## ЗМІСТ

Вступ .....	4
Лабораторна робота №1 Механічні коливання .....	5
Лабораторна робота №2 Дослідження гармонічних коливань .....	40
Лабораторна робота №3 Вільні коливання системи з одним ступенем вільності .....	47
Лабораторна робота №4 Нелінійні коливання .....	84
Лабораторна робота №5 Системи зі скінченним числом ступенів вільності .....	95
Лабораторна робота №6 Колівальні системи з розподіленими параметрами .....	124
Лабораторна робота №7 Метод початкових параметрів при поздовжніх коливаннях східчастих стержнів .....	146
Література .....	165

Навчально-методичне видання

Теорія коливальних процесів : Методичні вказівки до виконання практичних робіт  
для студентів спеціальностей 133 - “Галузеве машинобудування” та 208 - “Агроінженерія”

Укладачі І.М. Осипов

Рецензент к.т.н., доц. Яцун В.В.