

УДК 531.36+629.78.001+62-755

Олег О. Горошко, д.ф.-м.н., професор
Ірина І. Філімоніхіна*, асистент

Достатні умови усунення автобалансирами кута нутації незрівноваженого обертового тіла в ізольованій системі*

За допомогою теореми Рауса одержані достатні умови усунення пасивними автобалансирами кута нутації незрівноваженого обертового тіла в ізольованій системі, які із точністю до меж співпадають із необхідними. Умови не залежать від типу автобалансира і тому є узагальненими.

Ключові слова: обертове тіло, кут нутації, демпфер, усталений рух, стійкість.

*E-mail: fii@online.ua

Вступ.

В роботах [1-4] визначалися умови, за яких пасивні автобалансири (АБ) зможуть усунути кут нутації незрівноваженого обертового несучого тіла, що входить до складу ізольованої системи. Ця задача актуальна для штучних супутників Землі, космічних апаратів, положення яких у просторі стабілізується обертанням [5,6]. Слід відзначити, що АБ знайшли застосування у техніці для зрівноваження на ходу швидкообертових роторів – дисків ручних шліфувальних машин, барабанів побутових пральних машин, центрифуг, екстракторів, сепараторів, дисків в CD/DVD приводах тощо [7]. Застосування АБ у якості демпферів кута нутації це – єдиний пасивний метод усунення кута нутації обертових супутників, викликаного як неточним наданням супутнику початкового обертання, так і його незрівноваженістю відносно власної поздовжньої осі. В роботах [1-3] із застосуванням енергетичного підходу і емпіричного методу були знайдені узагальнені необхідні умови усунення АБ кута нутації, придатні для АБ будь-якого типу. В даній роботі, із застосуванням теореми Рауса, одержуються аналогічні достатні умови. При цьому також одержуються узагальнені рівняння усталених рухів вказаних вище систем, зокрема для випадку, коли система має елементи, здатні накопичувати потенціальну енергію,

Oleg O.Goroshko, Dt.Sci (Phys.-Math.), professor
Oleg O.Goroshko, Dt.Sci (Phys.-Math.), professor
I.I. Filimonikhina, assistant professor

Sufficient conditions of removal by the autobalancers of corner of notation of unbalanced rotating body in the isolated system

By means of the Routh theorem are received the sufficient conditions of removal by passive autobalancers of corner of notation of unbalance spinning body in the isolated system, which coincide with necessary conditions within borders. Conditions do not depend on the type of autobalancer and so is generalized.

Key Words: rotating body, cone of nutation, damper, steady-state motion, stability.

обґрунтовується методика оцінки стійкості різних усталених рухів.

§1. Опис системи, основні допущення

Ізольована матеріальна система складається з несучого обертового тіла (рис. 1, а) і приєднаних тіл, які можуть рухатися відносно несучого тіла. Відносному руху тіл, зокрема, перешкоджають сили в'язкого опору. В системі можуть бути елементи, здатні накопичувати потенціальну енергію.

Оскільки система ізольована, то її центр мас – точка G – рухається рівномірно і прямолінійно. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що він нерухомий. Також має місце закон збереження моменту кількості руху системи $\mathbf{K}_G = \text{const}$. Будемо уявляти рух системи як складний [3]. За переносний рух вважатимемо обертання системи навколо центра мас із кутовою швидкістю обертання несучого тіла, а за відносний – рух елементів системи відносно її центра мас. Обертальну складову переміщень будемо задавати за допомогою кутів Ейлера-Крилова [8] (які ще називають кутами Кардана-Брайнта [9]). Введемо в розглядання осі $Gx_Gy_Gz_G$, в яких вісь z_G направлена уздовж вектора $\mathbf{K}_G$. Нехай вони обертаються навколо осі z_G з кутовою швидкістю ω , яка відповідає першому повороту несучого тіла в просторі.

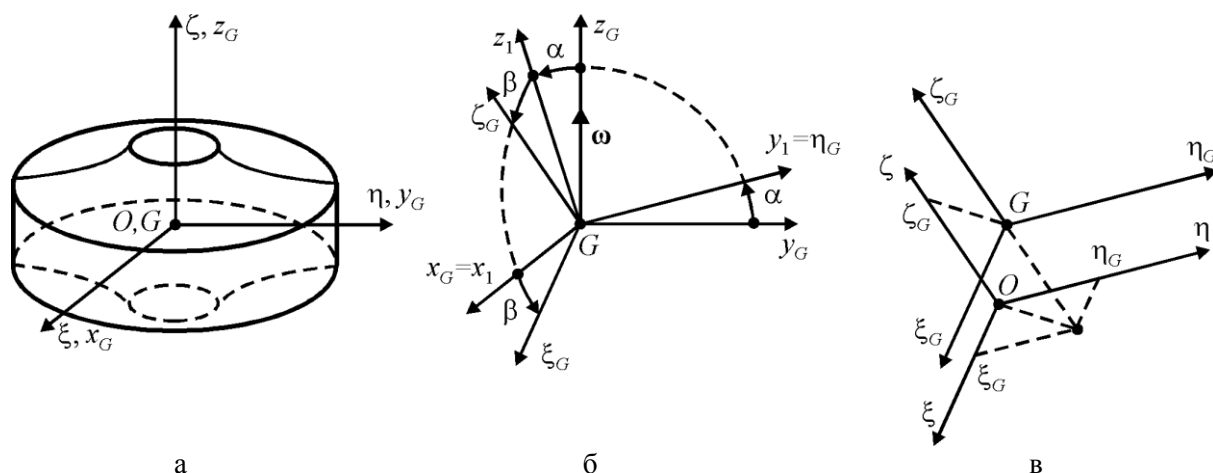


Рис. 1. Визначення руху несучого тіла

В процесі подальшого руху осі $Gx_Gy_Gz_G$ переходять в осі $O\xi\eta\zeta$, які визначають кінцеве положення несучого тіла, таким чином. Спочатку осі $Gx_Gy_Gz_G$ повертаються на кути Ейлера - Кривога α, β , як це показано на рис.1, б, внаслідок чого переходять в осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$. Потім осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ переміщуються поступально на $-\xi_G, -\eta_G, -\zeta_G$, внаслідок чого переходять в осі $O\xi\eta\zeta$, як це показано на рис.1, в. Очевидно, що ξ_G, η_G, ζ_G – координати центра мас системи щодо осей $O\xi\eta\zeta$. Оскільки на систему діють дисипативні сили і під час перехідних процесів до системи не підводиться зовнішня і внутрішня енергія, то з часом система прийде до усталеного руху, у якому відносний рух приєднаних тіл припиниться і система буде обертатися як одне жорстке ціле навколо осі z_G .

Тензор інерції системи утворений несучим тілом і приєднаними тілами. Відносно осей $O\xi\eta\zeta$ його можна представити у вигляді

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

де відцентрові моменти інерції системи $J_{\xi\zeta}, J_{\eta\zeta}$ характеризують моментну незрівноваженість системи.

Тензор інерції системи щодо центральних осей системи $G\xi_G\eta_G\zeta_G$:

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

де M_Σ – маса всієї системи. Зауважимо, що координати ξ_G, η_G характеризують статичну незрівноваженість системи.

Нехай $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – узагальнені координати, які задають відносні положення приєднаних тіл відносно несучого тіла. Тоді

$$\begin{aligned} \xi_G &= \xi_G(\varphi_1, \dots, \varphi_n), & \eta_G &= \eta_G(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ J_{\xi\zeta} &= J_{\xi\zeta}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), & J_{\eta\zeta} &= J_{\eta\zeta}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ \mathbf{J}_G &= \mathbf{J}_G(\varphi_1, \dots, \varphi_n). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рух системи цілком визначають такі незалежні параметри

$$\alpha, \beta, \omega, \varphi_1, \dots, \varphi_n. \quad (1.4)$$

На усталених рухах системи вони – сталі. Параметр ω на цих рухах визначає кутову швидкість обертання системи навколо осі z_G .

§2. Диференціальні рівняння і рівняння усталених рухів системи

Кінетична і потенціальна енергії системи є функціями вигляду

$$\begin{aligned} T &= T(\omega, \alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n), \\ \Pi &= \Pi(\varphi_1, \dots, \varphi_n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тоді рівняння Лагранжа II роду дають такі диференціальні рівняння руху системи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} + Q_j, & j &= \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де Q_j – узагальнена сила в'язкого опору, яка діє на приєднане тіло j . Вона стає рівною нулю, коли відносний рух тіла припиняється ($\dot{\varphi}_j = 0$). Узагальнена координата γ , що відповідає кутовій

швидкості $\omega = \dot{\gamma}$, є циклічною координатою. Тому застосуємо до визначення умов стійкості усталеного руху теорему Рауса [10].

З рис. 1, а визначаємо вектор кутової швидкості обертання системи, знайдений в проекціях на осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta - \omega \cos \alpha \sin \beta \\ \dot{\beta} + \omega \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \omega \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Введемо у розглядання одиничні вектори $\mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G$, направлені по осях x_G, y_G, z_G . В проекціях на осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_G &= (\cos \beta, 0, \sin \beta)^T, \\ \mathbf{y}_G &= (\sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha, -\sin \alpha \cos \beta)^T, \\ \mathbf{z}_G &= (-\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha, \cos \alpha \cos \beta)^T. \end{aligned} \quad (2.4)$$

З (2.3) знаходимо, що

$$\mathbf{\Omega} = \omega \mathbf{z}_G + \dot{\alpha} \mathbf{x}_G + \dot{\beta} (\mathbf{y}_G \cos \alpha + \mathbf{z}_G \sin \alpha). \quad (2.5)$$

Подамо рух системи як складний. За переносний рух приймемо її обертання разом з осями $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ навколо центра мас із кутовою швидкістю $\mathbf{\Omega}$. За відносний рух приймемо рух системи відносно осей $G\xi_G\eta_G\zeta_G$. Тоді кінетичну енергію системи можна подати як суму трьох складових

$$T = T_e + T_r + T_{er}, \quad (2.6)$$

де T_e - кінетична енергія переносного руху, яка не залежить від відносних швидкостей, T_r - кінетична енергія відносного руху, яка залежить від квадратів відносних швидкостей, T_{er} - додаткові складові, які лінійні щодо відносних швидкостей.

Кінетична енергія переносного руху визначається, як

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{J}_G \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} J_{z_G} \omega^2 - \omega [J_{x_G z_G} \dot{\alpha} + \\ &+ \dot{\beta} (J_{y_G z_G} \cos \alpha - J_{z_G} \sin \alpha)] + \frac{1}{2} [J_{x_G} \dot{\alpha}^2 + \\ &+ \dot{\beta}^2 (J_{y_G} \cos^2 \alpha + J_{z_G} \sin^2 \alpha - J_{y_G z_G} \sin 2\alpha) - \\ &- 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} (J_{x_G y_G} \cos \alpha + J_{x_G z_G} \sin \alpha)], \end{aligned} \quad (2.7)$$

де

$$\begin{aligned} J_{x_G} &= \mathbf{x}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{x}_G, \quad J_{y_G} = \mathbf{y}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G, \quad J_{z_G} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G, \\ J_{x_G z_G} &= -\mathbf{x}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G, \quad J_{y_G z_G} = -\mathbf{y}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G, \\ J_{x_G y_G} &= -\mathbf{x}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G \end{aligned} \quad (2.8)$$

- осьові і відцентрові моменти інерції системи відносно осей $Gx_G y_G z_G$.

Перше рівняння в (2.2) дає такий перший інтеграл для визначення ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= J_{z_G} \omega - \\ &- [J_{x_G z_G} \dot{\alpha} + \dot{\beta} (J_{y_G z_G} \cos \alpha - J_{z_G} \sin \alpha)] + \\ &+ \tilde{F}(\dot{\phi}_i) = K, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де $\tilde{F}(\dot{\phi}_i)$ - лінійні щодо відносних узагальнених швидкостей $\dot{\phi}_i$ члени, K - стала величина, що дорівнює модулю момента кількості руху системи $\mathbf{K}_G$.

З рівняння (2.9) знаходимо

$$\begin{aligned} \omega^* &= \frac{J_{x_G z_G} \dot{\alpha} + \dot{\beta} (J_{y_G z_G} \cos \alpha - J_{z_G} \sin \alpha) + K}{J_{z_G}} + \\ &+ F(\dot{\phi}_i). \end{aligned} \quad (2.10)$$

де $F(\dot{\phi}_i) = -\tilde{F}(\dot{\phi}_i) / J_{z_G}$.

Підставляючи (2.10) в (2.6), (2.7) знайдемо кінетичну енергію системи у вигляді

$$T^* = T_0^* + T_1^* + T_2^*, \quad (2.11)$$

де

$$T_0^* = K^2 / (2J_{z_G}) \quad (2.12)$$

- складова, що не залежить від узагальнених швидкостей, T_1^*, T_2^* - складові, що є відповідно лінійними і квадратичними формами щодо узагальнених швидкостей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n$.

Функція Рауса матиме вигляд:

$$R = T^* - K\omega^* = R_0 + R_1 + R_2, \quad (2.13)$$

де

$$R_0 = -K^2 / (2J_{z_G}) \quad (2.14)$$

- складова, що не залежить від узагальнених швидкостей, R_1, R_2 - складові, що є відповідно лінійними і квадратичними формами щодо узагальнених швидкостей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n$.

Рівняння руху Рауса для нециклічних координат приймуть вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial R}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}_j} - \frac{\partial R}{\partial \phi_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_j} + Q_j, \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (2.15)$$

Потенціальна енергія приведеної системи дорівнює

$$W(\alpha, \beta, \phi_1, \dots, \phi_n) = \Pi - R_0 = \Pi + K^2 / (2J_{z_G}). \quad (2.16)$$

Рівняння усталених рухів системи мають вигляд

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \phi_j} = 0 \quad / j = \overline{1, n} /, \quad (2.17)$$

або, після перетворень

$$\frac{\partial R_0}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial R_0}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial R_0}{\partial \phi_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_j} \quad / j = \overline{1, n} /.$$

Як було показано в роботі [3], перші два рівняння цієї системи, з врахуванням рівності (2.14), еквівалентні таким двом рівнянням: $J_{x_G z_G} = 0$, $J_{y_G z_G} = 0$. Тому рівняння усталених рухів для розглядуваних систем приймають такий вигляд:

$$J_{x_G z_G} = 0, \quad J_{y_G z_G} = 0, \quad \frac{\partial R_0}{\partial \phi_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_j} \quad / j = \overline{1, n} /. \quad (2.18)$$

З цих рівнянь випливає, що на будь-якому усталеному русі система обертається навколо головної центральної осі інерції z_G і осьовий момент інерції J_{z_G} є головним центральним.

Система рівнянь (2.18) є системою нелінійних алгебраїчних рівнянь. Така система допускає декілька істотно відмінних розв'язків, а у випадку АБ із багатьма коригувальними вантажами навіть сім'ї усталених рухів, що залежать від одного чи декількох параметрів [7].

§3. Оцінка стійкості усталених рухів

З рівнянь (2.17) випливає, що на усталеному русі приведена потенціальна енергія системи W приймає екстремальне, або критичне значення. Відповідно до теореми Рауса для стійкості усталеного руху достатньо, щоб на ньому приведена потенціальна енергія системи мала мінімум [10].

Введемо позначення

$$a_{ij} = \partial^2 W / \partial q_i \partial q_j,$$

$$q = (\alpha, \beta, \phi_1, \dots, \phi_n), \quad / i, j = \overline{1, n} /. \quad (3.1)$$

Нехай на певному усталеному русі

$$q = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_n), \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad / i, j = \overline{1, n} /. \quad (3.2)$$

Тоді, відповідно до критерію Сильвестра,

умовами мінімуму функції W на цьому усталеному русі будуть [10]:

$$\tilde{a}_{ii} > 0, \quad / i = \overline{1, n} /,$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{j1} & \dots & \tilde{a}_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad / j = \overline{2, n} /. \quad (3.3)$$

Якщо система не має елементів, здатних накопичувати потенціальну енергію, як це у випадку, коли приєднані тіла утворюють АБ, то $\Pi = 0$ і

$$W(\alpha, \beta, \phi_1, \dots, \phi_n) = -R_0 = K^2 / (2J_{z_G}). \quad (3.4)$$

З рівнянь (2.17) з врахуванням (3.4) випливає, що на усталеному русі осьовий момент інерції J_{z_G} приймає екстремальне, або критичне значення. Відповідно до теореми Рауса для стійкості усталеного руху достатньо, щоб на ньому осьовий момент інерції приймав максимальне значення.

В загальному випадку теорема Рауса не оборотна [10]. Але в даному випадку до розглядуваних систем не підводиться енергія, і під час перехідних процесів відбувається відносний рух приєднаних тіл і як наслідок – розсіюється енергія системи. Якщо б розсіювання енергії не було, то мав би місце інтеграл енергії вигляду $R_2 + W = \text{const}$. Якщо на систему діють сили в'язкого опору, лінійні щодо узагальнених швидкостей, то замість інтеграла енергії має місце такий баланс енергій

$$d(R_2 + W)dt = -2\Phi, \quad (3.5)$$

де Φ – дисипативна функція Релея. Тому можна стверджувати (аналог теореми Четаєва про оборотність теореми Лагранжа [10]), що якщо на усталеному русі потенціальна енергія приведеної системи не має мінімуму, то цей рух нестійкий. Твердження ілюструє рис. 2, на якому зображена важка кулька у полі сил ваги.

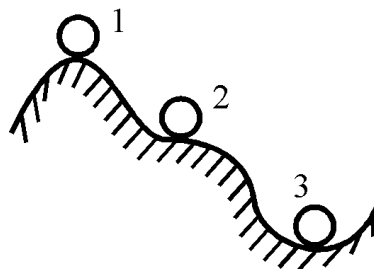


Рис. 2. Важка кулька

Її потенціальна енергія якісно характеризує різні енергетичні рівні потенціальної енергії

приведеної системи W . У точці максимуму – 1, або перегину – 2 поверхні, на якій знаходиться кулька, рівновага нестійка. У точці мінімуму – 3 рівновага – стійка. Умови розсіювання і не підведення енергії обов'язкові, оскільки завдяки ним точка може опускатися з верхніх енергетичних рівнів $(R_2 + W)$ на нижні, і покинувши певний верхній енергетичний рівень, вже не може до нього піднятися.

§4. Застосування теореми Рауса до незрівноваженого обертового тіла з АБ

1. Динамічне зрівноваження несучого тіла.

Нехай тіла АБ можуть усунути динамічну незрівноваженість несучого тіла. Нехай система здійснює основний рух – у якому обертове тіло зрівноважене і система обертається як одне ціле навколо осі z_G . Нехай на основному русі осі $O\xi\eta\zeta$ і $Gx_Gy_Gz_G$ співпадають і відносно них система має головні центральні осьові моменти інерції A, B, C . Нехай тіла АБ дещо відхилилися від положення, в якому зрівноважують несуче тіло. Тоді тензор інерції та координати центра мас системи щодо осей $O\xi\eta\zeta$, можна представити у вигляді

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon \tilde{J}_\xi & -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\eta} & -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\zeta} \\ -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\eta} & B + \varepsilon \tilde{J}_\eta & -\varepsilon \tilde{J}_{\eta\zeta} \\ -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\zeta} & -\varepsilon \tilde{J}_{\eta\zeta} & C \end{pmatrix},$$

$$\xi_G = \varepsilon \tilde{\xi}_G, \quad \eta_G = \varepsilon \tilde{\eta}_G, \quad \zeta_G = \varepsilon \tilde{\zeta}_G, \quad (4.1)$$

де $|\varepsilon| \ll 1$, і врахована властивість тіл АБ не змінювати осьовий момент інерції C [7].

Шукаємо α, β у вигляді

$$\alpha \approx \alpha_1 \varepsilon, \quad \beta \approx \beta_1 \varepsilon. \quad (4.2)$$

Тоді з врахуванням (1.2), (2.4) із (2.8), з точністю до величин другого порядку малості включно, знаходимо

$$J_{z_G} \approx C - \varepsilon^2 \{[(C - B)\alpha_1^2 + (C - A)\beta_1^2 + M_\Sigma(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2) + 2(\alpha_1 \tilde{J}_{\eta\zeta} - \beta_1 \tilde{J}_{\xi\zeta})]\}. \quad (4.3)$$

Розглядатимемо параметри незрівноваженості $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G, \tilde{J}_{\xi\zeta}, \tilde{J}_{\eta\zeta}$ як узагальнені координати, що характеризують рух системи. На основному русі вони дорівнюють нулю. Відмітимо, що вони незалежні (бо АБ може усунути динамічну незрівноваженість несучого тіла) і виражаються через узагальнені координати $\phi_1, \dots, \phi_n$, які задають положення тіл АБ щодо несучого тіла.

Введемо позначення

$$a_{11} = C - B, \quad a_{22} = C - A, \quad a_{33} = a_{44} = M_\Sigma, \\ a_{55} = a_{66} = 0, \quad a_{16} = 1, \quad a_{25} = -1. \quad (4.4)$$

Тоді, відповідно до критерію Сильвестра, з перших умов (3.3) знаходимо, що для того, щоб осьовий момент інерції J_{z_G} мав максимум, необхідно, щоб

$$C > A, B, \quad (4.5)$$

тобто щоб складене тіло, утворене несучим тілом і АБ, було сплюснуте. Нехай умови (4.5) виконуються. Тоді

$$\Delta_2 = (C - B)(C - A) > 0, \quad \Delta_3 = \Delta_2 M_\Sigma > 0, \\ \Delta_4 = \Delta_3 M_\Sigma > 0, \quad \Delta_5 = -M_\Sigma(C - B) < 0, \\ \Delta_6 = M_\Sigma^2 > 0. \quad (4.6)$$

Звідки видно, що достатні умови стійкості не виконуються. Оскільки на основному русі у системи немає мінімуму потенціальної енергії приведеної системи, і під час перехідних процесів в системі відбувається розсіювання енергії, то цей рух – нестійкий.

2. Статичне зрівноваження несучого тіла.

Нехай статичну незрівноваженість несучого тіла усуває один АБ. Нехай площина зрівноваження (і статичної незрівноваженості) паралельна площині $O\xi\eta$ і зміщена на координату b по осі ζ . Тоді

$$\tilde{J}_{\xi\zeta} = M_\Sigma \tilde{\xi}_G b, \quad \tilde{J}_{\eta\zeta} = M_\Sigma \tilde{\eta}_G b. \quad (4.7)$$

Тоді рівняння (4.3) прийме вигляд

$$J_{z_G} \approx C - \varepsilon^2 \{[(C - B)\alpha_1^2 + (C - A)\beta_1^2 + M_\Sigma(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2) + 2M_\Sigma b(\alpha_1 \tilde{\eta}_G - \beta_1 \tilde{\xi}_G)]\}. \quad (4.8)$$

Розглядатимемо параметри незрівноваженості $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G$ як узагальнені координати, що характеризують рух системи. На основному русі вони дорівнюють нулю. Відмітимо, що вони незалежні (бо АБ може усунути статичну незрівноваженість несучого тіла) і виражаються через узагальнені координати $\phi_1, \dots, \phi_n$, які задають положення тіл АБ щодо несучого тіла.

Введемо позначення

$$a_{11} = C - B, \quad a_{22} = C - A, \quad a_{33} = a_{44} = M_\Sigma, \\ a_{14} = bM_\Sigma, \quad a_{23} = -bM_\Sigma. \quad (4.9)$$

Тоді перші умови в (3.3) ($n = 4$) дають необхідні

умови стійкості (4.5). Нехай ці умови виконуються, тоді решта умов приймає вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= (C - B)(C - A) > 0, \\ \Delta_3 &= M_\Sigma (C - A)(C - B - b^2 M_\Sigma) > 0, \\ \Delta_4 &= M_\Sigma^2 (C - A - b^2 M_\Sigma)(C - B - b^2 M_\Sigma) > 0. \quad (4.10)\end{aligned}$$

З врахуванням (4.5) і (4.10), достатніми умовами, що J_{zG} приймає на основному русі максимальне значення, будуть

$$2) C > A + b^2 M_\Sigma, \quad C > B + b^2 M_\Sigma. \quad (4.11)$$

У цьому випадку складене тіло – сплюснуте, і площина зрівноваження знаходиться поблизу центра мас системи.

Зауважимо, що у проведених дослідженнях тип АБ не обумовлювався. Тому одержані умови усунення кута нутації застосовні для АБ будь-якого типу, тобто є узагальненими.

Умови (4.11) є достатніми умовами стійкості основного руху (усунення кута нутації), причому вони із точністю до меж співпадають із необхідними умовами, знайденими в роботах [1-3].

Проведені дослідження дозволяють стверджувати, що повне усунення кута нутації обертового незрівноваженого супутника можливо тільки у випадку сплюснутого (так званого стійкого) статично незрівноваженого супутника за умови, що АБ зрівноважує супутник у площині статичного дисбалансу і ця площина віддалена від центра мас системи так, що виконуються умови (4.11). Ці результати були покладені в розробку способів застосування АБ у якості демпферів кута нутації сплюснутих обертових космічних апаратів [4].

Список використаних джерел

1. *Філімоніхіна І.І.* Умови зменшення автобалансирами кута нутації обертового супутника Землі // Всеукраїнський н.-т. журнал „Вібрації у техніці та технологіях”. – 2007. №1 (46), С. 34-37.

2. *Філімоніхіна І.І., Філімоніхін Г.Б.* Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2007. - №3. - с. 103-109.

3. *Филимоных И.И., Филимоных Г.Б.* Условия уравновешивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе // Прикладная механика, т.43, №11, 2007. – С.113-120.

4. Застосування пасивного автобалансира як демпфера кута нутації сплюснутого обертового космічного апарата: Пат. на корисну модель № 28407 Україна, МПК B64G 1/00 / *І. І. Філімоніхіна, Г.Б. Філімоніхін* (Україна); КНТУ - № 200708020; Заявл. 16.07.2007; Опубл. 10.12.2007, Бюл.№20.

5. *Артюхин Ю.П., Каргу Л.И. Симаев В.Л.* Системы управления космических аппаратов, стабилизируемых вращением. – М.: Наука, 1979. -295 с.

6. *Попов В.И.* Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1986. - 184 с.

7. *Філімоніхін Г.Б.* Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. - Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.

8. *Павловський М.А.* Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

9. *Докучаев Л.В., Рабинович Б.И.* Анализ возмущенного движения вблизи границы устойчивости вращающегося КА типа Авроральный зонд проекта Интербол // Космические исследования, 1999, том. 37, №6, с. 589-597.

10. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

Надійшла до редколегії 23.04.08

***Горошко О.О., Філімоніхіна І.І. Достатні умови усунення автобалансирами кута нутації незрівноваженого обертового тіла в ізольованій системі // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. – 2008. №1. – С. 53–58.**