

Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний
технічний університет
Кафедра деталей машин та прикладної механіки

Лабораторна робота №3.
Дослідження механічних характеристик анізотропних матеріалів
при стиску.

Лабораторна робота №4.
Дослідження геометричних характеристик перерізів

Методичні вказівки і звіти
до лабораторних робіт з опору матеріалів
для студентів будівельних та технічних спеціальностей

Рекомендована засіданням кафедри
деталей машин та прикладної протокол
№ 1 від 30 серпня 2023 р.

ЦНТУ
Кропивницький
2023

Лабораторна робота №3. Дослідження механічних характеристик анізотропних матеріалів при стиску. Лабораторна робота №4. Дослідження геометричних характеристик перерізів. Методичні вказівки і звіти до лабораторних робіт з опору матеріалів для студентів будівельних та технічних спеціальностей / О.Б. Чайковський, Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пукалов, Л.С. Олійніченко – Кропивницький: ЦНТУ, 2023 – 23 с.

Укладачі: Чайковський Олександр Борисович – канд.
техн. наук, доцент;
Філімоніхін Геннадій Борисович – доктор техн.
наук, професор кафедри ДМ та ПМ;
Пукалов Віктор Вікторович – канд.
техн. наук, доцент кафедри ДМ та ПМ;
Олійніченко Любов Сергіївна – канд.
техн. наук, ст. викладач кафедри ДМ та ПМ

Рецензент: В.В.Свяцький, канд. техн. наук,
доцент кафедри обробки металів тиском та спецтехнологій

ЦНТУ, м. Кропивницький,
пр. Університетський, 8

Зміст

Передмова	6
Лабораторна робота №3 Визначення механічних характеристик анізотропних матеріалів при стиску	7
1.1. Основні теоретичні відомості	7
1.2. Попередні дані вимірів та випробовувань	11
1.3. Обробка результатів випробовувань	13
1.4. Визначення основних характеристик міцності деревини	13
1.5. Аналіз результатів випробовувань, висновки	14
Запитання для самоконтролю	15
Лабораторна робота № 4 Визначення геометричних характеристик перерізів	16
2.1. Основні теоретичні відомості	16
2.1.1. Класифікація плоских перерізів	16
2.1.2. Загальні означення	17
2.1.3. Теореми про геометричні характеристики	19
2.1.4. Головні центральні осі та головні моменти інерції	23
2.1.5. Радіуси інерції та моменти опору	25
2.1.6. Еліпс інерції, його побудова та використання	26
2.1.7. Обчислення геометричних характеристик прямокутного перерізу	28
2.1.8. Обчислення відцентрового моменту інерції сортаментного рівнобокого кутика	29
2.1.9. Обчислення відцентрового моменту інерції сортаментного нерівнобокого кутика	31
2.2. Порядок виконання лабораторної роботи	33
2.2.1. Підготовчий етап	33
2.2.2. Визначення геометричних характеристик заданого кутикового перерізу	38
2.2.3. Порівняння результатів обчислень з даними таблиць сортаменту	41
2.2.4. Побудова центрального еліпса інерції	42
2.2.5. Аналіз результатів обчислень	43
Запитання для самоконтролю	43
Використана література	45

Використані позначки

Позначки		Назва	Примітка
вітчизняна література	зарубіжна література		
$F, F_{\text{пот}}$	$A, A_{\text{нес}}$	площа необхідна, потрібна	area – площа necessary – необхідний
W_k	W_t	момент опору при крученні	torsion – кручення
μ	ν	коефіцієнт Пуассона	_____
P	F	сила	force – сила
q	p_e	зовнішнє розподілене навантаження	external – зовнішній
N	N_{cal}	розрахункова повздовжня сила	calculated – розрахунковий
$M_k = M_x$	T	крутний момент	torque – крутний момент
$\varepsilon_{\text{поп}}, \varepsilon'$	ε_t	поперечна деформація	transverse – поперечний
$\varepsilon_{\text{пр}}$	ε_{el}	пружна деформація	elastik – пружний
$\varepsilon_{\text{зал}}, \varepsilon_{\text{пл}}$	ε_r	залишкова, пластична деформація	residual – залишковий
$\varphi_{\text{від}}, \Theta$	ϑ_{rel}	відносний кут повороту чи закручування	relative – відносний
$\sigma_{\text{пц}}$	σ_{pr}	границя пропорційності	proportionality – пропорційність
$\sigma_{\text{пр}}$	σ_{el}	границя пружності	elasticity – пружність
σ_t	σ_y	границя текучості	yield – текучість
$\sigma_{\text{тч}}^p$	σ_{ut}	тимчасовий опір розтягуванню (границя міцності)	ultimate – граничний tension – розтяг
$\sigma_{\text{тч}}^c$	σ_{uc}	тимчасовий опір стисканню (границя міцності)	compression – стиск
$\sigma_{\text{кр}}$	σ_{cr}	критичне напруження	critical – критичний
$[\sigma]$	σ_{adm}	допустиме напруження	admissible – допустимий

Зразки абеток

Грецька	Латинська
A, α – альфа	A, a – а
B, β – бета	B, b – бе
Γ , γ – гама	C, c – це
Δ , δ – дельта	D, d – де
E, ε – епсілон	E, e – е
Z, ζ – дзета	F, f – еф
H, η – ета	G, g – ге
Θ , θ – тета	H, h – аш
I, ι – йота	I, i – і
K, κ – капа	J, j – йот
Λ , λ – ламбда	K, k – ка
M, μ – мі	L, l – ель
N, ν – ні	M, m – ем
Ξ , ξ – ксі	N, n – ен
O, $\omicron$ – омікрон	O, o – о
P, π – пі	P, p – пе
ρ , ρ – ро	Q, q – ку
Σ , σ – сігма	R, r – ер
T, τ – тау	S, s – ес
Υ , υ – епсілон	T, t – те
Φ , ϕ – фі	U, u – у
χ , χ – хі	V, v – ве
Ψ , ψ – псі	W, w – дубль ве
Ω , ω – омега	X, x – ікс
	Y, y – ігрек
	Z, z – зет

Передмова

Запропоновані методичні вказівки з лабораторних робіт з курсу опору матеріалів відносяться до типу вивчення механічних властивостей матеріалів для студентів будівельних та технічних спеціальностей, для підготовки до заняття та самостійного опрацювання результатів випробувань і підготовки до захисту відповідних лабораторних робіт та відповідають програмі курсу «Опір матеріалів» Центральноукраїнського національного технічного університету.

В методичних вказівках надаються теоретичні основи дослідження механічних властивостей матеріалів та методика механічних випробувань матеріалів. Ознайомлення із стандартами, вимірювальними приладами, випробувальними машинами.

Кожна лабораторна робота складається з окремих частин – сторінок які можуть бути з'єднані між собою, як звіт з роботи.

Лабораторна робота №3.

Дослідження механічних характеристик анізотропних матеріалів при стиску.

Мета роботи: дослідження анізотропного матеріалу (деревини) при стиску вздовж та поперек волокон.

1.1. Основні теоретичні відомості

Це випробування, при якому визначають поведінку різних матеріалів при одноосному стиску. Але найбільше практичне значення випробування на стиск, мають для будівельних матеріалів, зокрема деревини, яка до того ж відноситься до **анізотропних матеріалів**. Тобто матеріалів, механічні властивості яких залежать від напрямку навантаження по відношенню до матеріалу (розташування зразка у просторі), так як мають, неоднорідну, направлену структуру (наприклад, волокно).

Для випробувань анізотропних матеріалів (деревини) на стиск використовують зразки, які мають форму куба (рис. 3.1). До того ж волокна у зразку повинні бути спрямовані паралельно одним граням куба, і звичайно, перпендикулярно іншим. При цьому зразки не повинні мати дефектів структури (сучки, кора, тріщини).

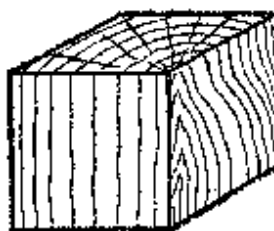


Рис. 3.1

Для випробовувань на стиск можуть застосовуватись ті ж самі машини,

що і при розтягу (наприклад, універсальна машина, зображена на рис. 1.2).

Випробовування дерев'яного зразка проводять вдовж та поперек волокон. На рис. 3.2 показані характерні машинні діаграми (рис. 3.2, а) стиску дерев'яного зразка вдовж волокон (рис. 3.2, б) та поперек них (рис. 3.2, в).

Машинна діаграма стиску деревини вдовж волокон (крива 1) дуже схожа на машинну діаграму стиску чавуну. При досягненні граничного навантаження $P'_{\text{тч}}$ зразок руйнується.

При стиску деревини поперек волокон до деякої точки *A* **машинної діаграми** (крива 2) виконується закон Гука до значення $P_{\text{шц}}$ навантаження. При збільшенні навантаження деревина сильно ущільнюється. Тому за руйнівну силу умовно приймають силу $P''_{\text{тч}}$, при якій деформація (ущільнення) зразка по висоті досягає $\Delta h = h_0/3$.

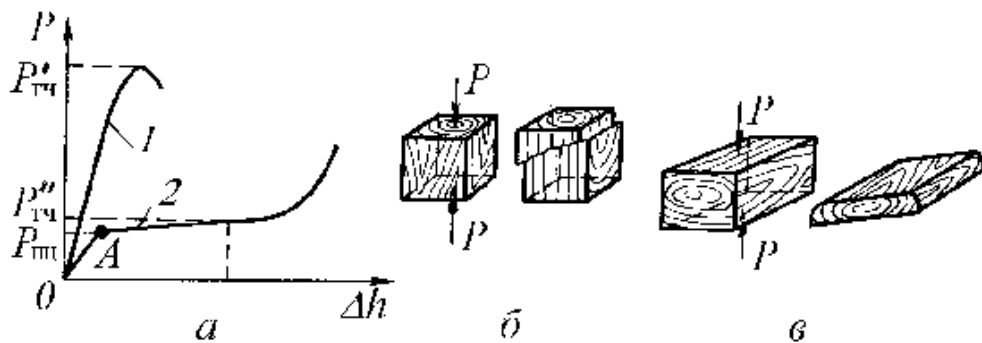


Рис. 3.2

При стиску до руйнування дерев'яного зразка вздовж волокон деформації значно менші ніж при стиску поперек волокон. Міцність зразка при стиску вздовж волокон в 7 ... 10 разів вища.

Випробовуванням на стиск різних матеріалів визначають такі характеристики міцності.

Границя міцності (тимчасовий опір) деревини при стиску вздовж волокон ($\sigma'_{\text{тч}}$) – відношення

$$\sigma'_{\text{тч}} = \frac{P'_{\text{тч}}}{A_0}. \quad (3.1)$$

Границя пропорційності деревини при стиску поперек волокон ($\sigma_{\text{шц}}$) –

відношення

$$\sigma_{\text{шц}} = \frac{P_{\text{шц}}}{A_0}. \quad (3.2)$$

Границя міцності (тимчасовий опір) деревини при стиску поперек волокон ($\sigma''_{\text{тч}}$) – відношення

$$\sigma''_{\text{тч}} = \frac{P''_{\text{тч}}}{A_0}. \quad (3.3)$$

Коефіцієнт анізотропії характеризує відмінність механічних властивостей деревини вздовж і поперек волокон. Визначається співвідношенням

$$K = \frac{\sigma'_{\text{тч}}}{\sigma''_{\text{тч}}} = 7...10. \quad (3.4)$$

Деяким анізотропним матеріалам, які мають волокнисту структуру, зокрема деревині, властиво сприймати при розтягу більші навантаження, ніж при стиску.

Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний
технічний університет
Кафедра деталей машин та прикладної механіки

ЗВІТ
Лабораторна робота №3.
Дослідження механічних характеристик анізотропних матеріалів
при стиску.

Виконав: ст. гр. _____
(група студента)

(П.І.Б. студента)

Перевірив: _____
(П.І.Б. викладача)

Робота №1 виконана _____
(підпис викладача)

(дата)

ЦНТУ
Кропивницький
_____рік

1.2. Попередні дані вимірів та випробовувань

1). Ескізи зразка до випробовувань.

2). Ескізи зразків після випробовувань.

3). Розміри зразків до та після випробовувань.

Матеріал	Форма і розміри, <i>см</i>	Початкова площа поперечного перерізу A_0 , $см^2$
Деревина (вздовж волокон)	Куб $a_0=$ порода –	
Деревина (поперек волокон)	Куб $a_0=$ порода –	

4). Машинні діаграми стиску.

1.3. Обробка результатів випробовувань

Масштаби машинних діаграм по осі P :

– дерева (поперек волокон)

$$\mu_p = \frac{P_{\max}}{h_{\max}} = \frac{\kappa H}{\text{мм}}.$$

Навантаження:

– для дерева, відповідні границі міцності (тимчасовому опору) при стиску вздовж волокон

$$P'_{\text{тч}} = P_{\max} = \kappa H;$$

– для дерева, відповідні границі пропорційності при стиску поперек волокон

$$P_{\text{пц}} = \mu_p \cdot h_{\text{пц}} = \kappa H;$$

– для дерева, відповідні границі міцності (тимчасовому опору) при стиску поперек волокон

$$P''_{\text{тч}} = \mu_p \cdot h'_{\text{тч}} = \kappa H.$$

1.4. Визначення основних характеристик міцності дерева

Границя міцності (тимчасовий опір) дерева при стиску вздовж волокон

$$\sigma'_{\text{тч}} = \frac{P'_{\text{тч}}}{A_0} = \text{МПа}.$$

Границя пропорційності деревини при стиску поперек волокон

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{P_{\text{пц}}}{A_0} = \text{МПа.}$$

Границя міцності (тимчасовий опір) деревини при стиску поперек волокон

$$\sigma''_{\text{тч}} = \frac{P''_{\text{тч}}}{A_0} = \text{МПа.}$$

Коефіцієнт анізотропії деревини

$$K = \frac{\sigma'_{\text{тч}}}{\sigma''_{\text{тч}}} = .$$

1.5. Аналіз результатів випробовувань, висновки

Запитання для самоконтролю

1. Які матеріали називають анізотропними?
2. Які зразки використовуються для випробувань деревини на стиск. В чому полягає їх особливість?
3. Пояснити відмінності діаграм стиску деревини вздовж та поперек волокон.
4. Як руйнується зразок, навантажений вздовж волокон?
5. Як руйнується зразок, навантажений поперек волокон?
6. Як відрізняються характеристики міцності при стиску дерев'яного зразка в різних напрямках?
7. Які характеристики міцності визначаються при стиску дерев'яних зразків?
8. Які характерні особливості руйнування дерев'яного зразка при стиску вздовж та поперек волокон?

Лабораторна робота №4.

Дослідження геометричних характеристик перерізів

Мета роботи: аналітичне визначення основних геометричних характеристик нестандартних кутикових перерізів; порівняння результатів обчислень з даними сортаменту для кутиків зі схожими стандартними розмірами.

2.1. Основні теоретичні відомості

2.1.1. Класифікація плоских перерізів

Розрахункові перерізи – розміри і геометричні характеристики яких необхідно визначити аналітично.

Сортаментні профілі – розміри і геометричні характеристики яких рекомендовані стандартами і зведені до таблиць **сортаменту**.

Розрахункові перерізи і профілі в свою чергу поділяють на: **круглі і не круглі; суцільні і несучільні**. Несучільні можуть бути **товстостінні та тонкостінні; зімкнені та розімкнені (відкриті)**.

Серединна лінія перерізу (профілю) ділить товщину (δ) його стінки порівну (рис.4.1).

Відкритим називають переріз, профіль, серединна лінія якого розімкнена.

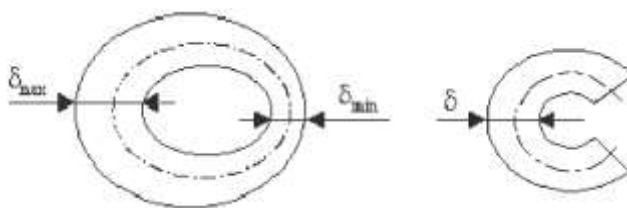


Рис. 4.1

За способом виготовлення профілі розрізняють як **прокатні, гнуті, протяжні, виготовлені механічними способами** і т.д.

2.1.2. Загальні означення

Геометричні характеристики плоских перерізів характеризують їх форму і розміри, а також опірність такого перерізу дії зовнішніх навантажень.

Основними геометричними характеристиками називається інтеграл виду

$$\Omega = \int_A Y^m Z^n dA. \quad (4.1)$$

Тут: $m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Абсолютні характеристики – такі, що не залежать від вибору системи координат.

Відносні характеристики – залежать від вибору системи координат.

Поперечний переріз – утворюється при перетині тіла з площиною, нормальною до його поздовжньої осі (вісь X).

Розглянемо довільний переріз, приведений на рис.4.2. Тут, і в подальшому, використовуємо правосторонню довільну основну систему координат: Y – горизонтальна вісь; Z – вертикальна вісь; полюс P полярної системи координат співпадає з початком O осьової системи.

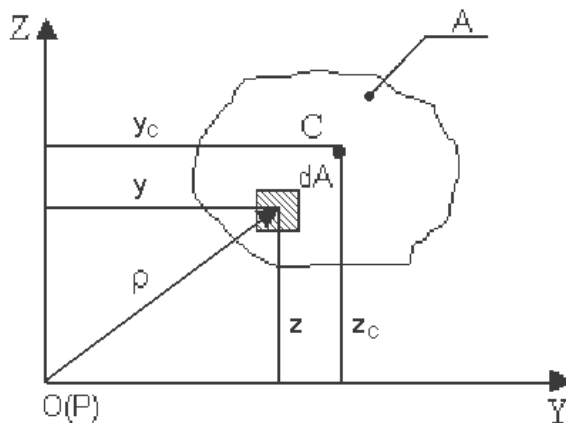


Рис. 4.2

В залежності від значень показників степенів формула (4.1) дає слідуєчи основні геометричні характеристики (табл.4.1).

Таблиця 4.1

Назва характеристики	Значення показників степенів	Позначки, формули	Номер формули	Одиниці виміру	Знак
Площа	$m = 0,$ $n = 0$	$A = \int_A dA$	(4.2)	$см^2, м^2$	>0
Статичний момент площі відносно осі	$m = 0,$ $n = 1$ $m = 1,$ $n = 0$	$S_Y = \int_A z dA$ $S_Z = \int_A y dA$	(4.3)	$см^3, м^3$	$><0$
Осьовий (екваторіальний) момент інерції	$m = 0,$ $n = 2$ $m = 2,$ $n = 0$	$I_Y = \int_A z^2 dA$ $I_Z = \int_A y^2 dA$	(4.4)	$см^4, м^4$	>0
Відцентровий момент інерції	$m = 1,$ $n = 1$	$I_{YZ} = \int_A yz dA$	(4.5)	$см^4, м^4$	$><0$

Полярний момент інерції – інтеграл виду

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, (см^4, м^4) > 0. \quad (4.6)$$

З рис. 4.1 видно, що

$$\rho^2 = y^2 + z^2. \quad (4.7)$$

Головні осі – відносно яких $I_{YZ} = 0$. Рисунок 4.3 показує, що таких осей множина.

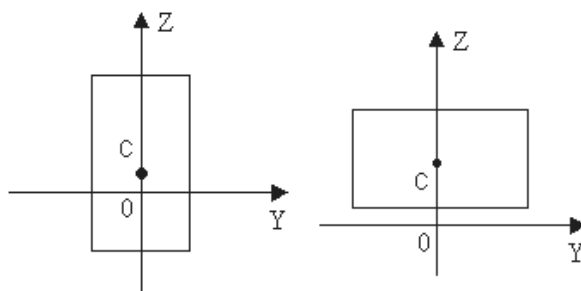


Рис. 4.3

Осі, відносно яких $S_Y = 0$ і $S_Z = 0$, називають **центральними**. Таких осей, також, множина.

Якщо у формулі (4.3) відомі статичні моменти і площі, то координати центру ваги визначаються за формулами:

$$y_c = \frac{S_Z}{A}, \quad z_c = \frac{S_Y}{A} \quad (\text{см, м}). \quad (4.8)$$

Якщо одночасно $S_Y = 0$, $S_Z = 0$ і $I_{YZ} = 0$, то такі осі називаються **головними центральними**.

2.1.3. Теореми про геометричні характеристики

ТЕОРЕМА 1: про зміну осьового моменту інерції при паралельному переносі координатних осей.

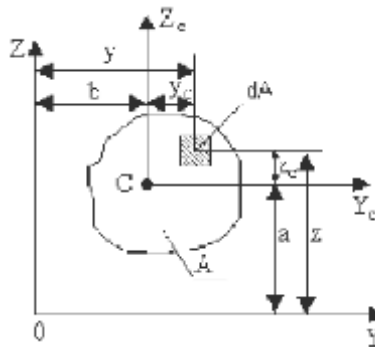


Рис. 4.4

Осі Y_C, Z_C – центральні; $I_{Y_C}, I_{Z_C}, I_{Y_C Z_C}$ відомі; $S_Y = 0, S_Z = 0$.

З рис. 4.4 видно, що

$$z = z_c + a,$$

$$y = y_c + b. \quad (4.9)$$

Тоді відносно осі Y

$$\begin{aligned} I_Y = \int_A z^2 dA &= \int_A (z_c + a)^2 dA = \int_A (z_c^2 + 2az_c + a^2) dA = \int_A z_c^2 dA + \\ &+ 2a \int_A z_c dA + a^2 \int_A dA. \end{aligned}$$

Остаточно, після перетворень і скорочень (для осі Z – аналогічно):

$$\begin{aligned} I_Y &= I_{Y_C} + a^2 A, \\ I_Z &= I_{Z_C} + b^2 A. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким чином: **осьовий момент інерції відносно осі, паралельній центральній, дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі, збільшеному на добуток квадрата міжосьової відстані з площею перерізу.**

ТЕОРЕМА 2: про зміну відцентрового моменту інерції при паралельному переносі координатних осей.

Використовуємо дані, наведені в попередній теоремі та на рис. 4.4:

$$\begin{aligned} I_{YZ} &= \int_A yz dA = \int_A (y_C + b)(z_C + a) dA = \int_A (y_C z_C + b z_C + a y_C + ab) dA = \\ &= \int_A y_C z_C dA + b \int_A z_C dA + a \int_A y_C dA + ab \int_A dA. \end{aligned}$$

Остаточно після перетворень і скорочень

$$I_Y = I_{Y_C Z_C} + abA. \quad (4.11)$$

Тобто: **відцентровий момент інерції відносно осей, паралельних центральним, дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей, збільшеному на добуток міжосьових відстаней (як координат) між осями з площею перерізу.**

ТЕОРЕМА 3: про обчислення геометричних характеристик складного (складеного) перерізу.

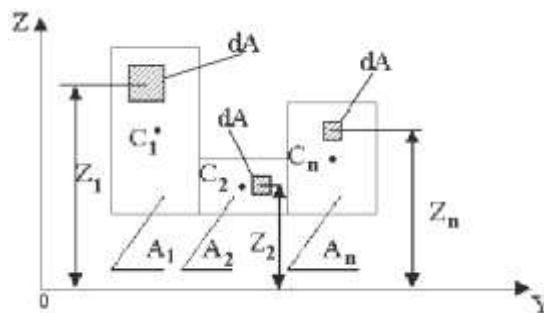


Рис. 4.5

З рис. 4.5 видно, що загальна площа перерізу

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (4.12)$$

Осьовий момент інерції

$$I_Y = \int_A z^2 dA = \int_A z^2 dA = \int_{A_1} z_1^2 dA + \int_{A_2} z_2^2 dA + \dots + \int_{A_n} z_n^2 dA.$$

Остаточно можна записати

$$I_Y = I_Y^{A_1} + I_Y^{A_2} + \dots + I_Y^{A_n} = \sum_{i=1}^n I_Y^{A_i}. \quad (4.13)$$

Аналогічно для деяких інших геометричних характеристик складного (складеного) перерізу:

$$I_Z = I_Z^{A_1} + I_Z^{A_2} + \dots + I_Z^{A_n} = \sum_{i=1}^n I_Z^{A_i};$$

$$I_{YZ} = I_{YZ}^{A_1} + I_{YZ}^{A_2} + \dots + I_{YZ}^{A_n} = \sum_{i=1}^n I_{YZ}^{A_i};$$

$$S_Y = S_Y^{A_1} + S_Y^{A_2} + \dots + S_Y^{A_n} = \sum_{i=1}^n S_Y^{A_i};$$

$$S_Z = S_Z^{A_1} + S_Z^{A_2} + \dots + S_Z^{A_n} = \sum_{i=1}^n S_Z^{A_i};$$

$$I_P = I_P^{A_1} + I_P^{A_2} + \dots + I_P^{A_n} = \sum_{i=1}^n I_P^{A_i}. \quad (4.14)$$

Геометрична характеристика складного (складеного) перерізу відносно осей Y , Z дорівнює сумі геометричних характеристик його складових відносно тих же осей.

ТЕОРЕМА 4: про зміну моментів інерції при повороті координатних осей.

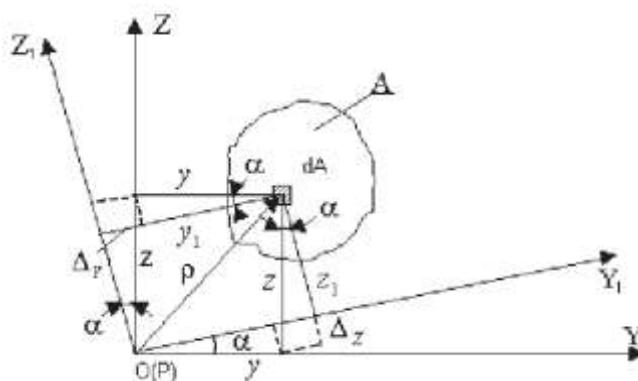


Рис. 4.6

Відносно осей Y, X відомі : $\alpha; I_Y; I_Z; I_{YZ}$ (рис.4.6). Полюс P полярної системи координат співпадає з початком O декартової системи координат.

Координати елементарних площ перерізу відносно нових осей Y_1, Z_1 :

$$\begin{aligned} z_1 &= z \cos \alpha - \Delta z = z \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y_1 &= y \cos \alpha + \Delta y = y \cos \alpha + z \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Осьовий момент інерції відносно осі Y_1 :

$$\begin{aligned} I_{Y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A (z^2 \cos^2 \alpha - 2yz \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \sin^2 \alpha) dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A yz dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA. \end{aligned}$$

Після остаточних перетворень, отримаємо

$$I_{Y_1} = I_Y \cos^2 \alpha + I_Z \sin^2 \alpha - I_{YZ} \sin 2\alpha. \quad (4.16)$$

Аналогічно для осі Z_1

$$I_{Z'} = I_Z \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha + I_{YZ} \sin 2\alpha. \quad (4.17)$$

Для відцентрового моменту інерції :

$$I_{y_1z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(z \cos \alpha - y \sin \alpha) dA =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_A (yz \cos^2 \alpha + z^2 \sin \alpha \cos \alpha - y^2 \sin \alpha \cos \alpha - yz \sin^2 \alpha) dA = \\
&= \cos^2 \alpha \int_A yz dA + \sin \alpha \cos \alpha \int_A z^2 dA - \\
&- \sin \alpha \cos \alpha \int_A y^2 dA - \sin^2 \alpha \int_A yz dA.
\end{aligned}$$

Остаточно після перетворень

$$I_{Y_1 Z_1} = \frac{I_Y - I_Z}{2} \sin 2\alpha + I_{YZ} \cos 2\alpha. \quad (4.18)$$

ТЕОРЕМА 5: теорема про суму осьових моментів інерції.

Використаємо рис. 4.6. Видно, що згідно формули (4.7)

$$\rho^2 = y^2 + z^2 = y_1^2 + z_1^2 = \text{const}, \quad (4.19)$$

тобто, поворот координатних осей не впливає на величину радіуса вектора

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A (y_1^2 + z_1^2) dA = \\
&= \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = \int_A y_1^2 dA + \int_A z_1^2 dA = I_Z + I_Y = I_{Z_1} + I_{Y_1}.
\end{aligned} \quad (4.20)$$

Видно, що

$$I_Y + I_Z = I_{Y_1} + I_{Z_1} = \dots = I_p = \text{const}. \quad (4.21)$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей не залежить від кута повороту і дорівнює полярному моменту інерції.

2.1.4. Головні центральні осі

та головні моменти інерції

Побудуємо графік зміни величини осьового моменту при повороті координатних осей (рис. 4.7), наприклад, для функції (4.16)

$$I_{Y_1} = I_Y \cos^2 \alpha + I_Z \sin^2 \alpha - I_{YZ} \sin 2\alpha.$$

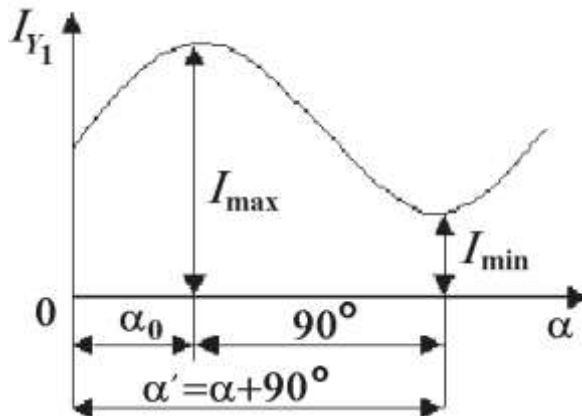


Рис. 4.7

Видно, що при повороті координатних осей на 90° осьові моменти інерції змінюють величини та індекси осей на протилежні.

Дослідимо функцію (4.16) на екстремум (при $\alpha = \alpha_0$):

$$\left(\frac{dI_{Y_1}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{d\alpha} d(I_Y \cos^2 \alpha + I_Z \sin^2 \alpha - I_{YZ} \sin 2\alpha) &= -2I_Y \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ 2I_Z \sin \alpha \cos \alpha - 2I_{YZ} \cos 2\alpha = \\ &= -2 \left(\frac{I_Y - I_Z}{2} \sin 2\alpha + I_{YZ} \cos 2\alpha \right) = -2I_{Y_1Z_1} = 0; \end{aligned}$$

так, як $2 \neq 0$, треба, щоб $I_{Y_1Z_1} = 0$.

Це ознака головних центральних осей.

Осьові моменти інерції досягають екстремальних значень відносно осей, коли відцентровий момент інерції дорівнює нулю.

Визначимо положення головних центральних осей, використавши (4.17)

$$I_{Y_1Z_1} = 0; \quad \frac{I_Y - I_Z}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{YZ} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Звідки, після перетворень, головний кут

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{YZ}}{I_Y - I_Z} = \frac{2I_{YZ}}{I_Z - I_Y}, \quad (4.22)$$

$$\alpha' = \alpha_0 + 90^\circ. \quad (4.23)$$

Це підтверджує, що головні центральні осі взаємоперпендикулярні.

Осьові моменти інерції, обчислені відносно головних центральних осей, називаються **головними моментами інерції**. Головні центральні осі позначають літерами V, U .

Величини таких моментів інерції обчислюють за формулами:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{I_Y + I_Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_Y - I_Z}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2}, \\ I_{\min} &= \frac{I_Y + I_Z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_Y - I_Z}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

2.1.5. Радіуси інерції та моменти опору

Радіуси інерції обчислюються за формулами

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}; \quad i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}}; \quad i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}}. \quad (\text{см}, \text{м}). \quad (4.25)$$

Осьовим моментом опору називають відношення відповідного осьового моменту інерції до відстані між найбільш віддаленою точкою перерізу і даною віссю.

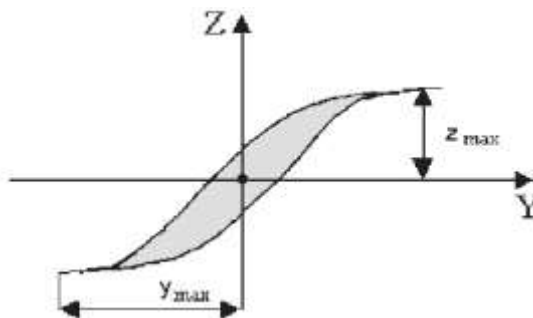


Рис. 4.8

Згідно рис. 4.8 можна записати

$$W_Y = \frac{I_Y}{z_{\max}}; \quad W_Z = \frac{I_Z}{y_{\max}} \quad (см^3, м^3). \quad (4.26)$$

Головні осьові радіуси інерції та моменти опору запишуться в індексах осей:

$$i_V = \sqrt{\frac{I_V}{A}}, \quad i_U = \sqrt{\frac{I_U}{A}}; \quad (4.27)$$

$$W_V = \frac{I_V}{U_{\max}}, \quad W_U = \frac{I_U}{V_{\max}}. \quad (4.28)$$

Полярним моментом інерції називають відношення полярного моменту інерції до найбільшого радіуса-вектора перерізу

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}, \quad (см^3, м^3). \quad (4.29)$$

2.1.6. Еліпс інерції, його побудова та використання

Для того, щоб зробити висновок про жорсткість поперечного перерізу будують **еліпс інерції** після визначення головних радіусів інерції. Це дозволяє виконати аналіз геометричних характеристик перерізу.

Побудуємо на головних центральних осях перерізу (рис. 4.9) еліпс з півосями I_V, I_U , відклавши i_V перпендикулярно осі U; i_U – перпендикулярно осі V. Такий еліпс називається **центральною еліпсом інерції перерізу**, рівняння якого

$$\frac{v^2}{i_U^2} + \frac{u^2}{i_V^2} = 1, \quad (4.30)$$

де: v, u – координати точок еліпса, якщо

$$i_V = i_U = i,$$

то еліпс інерції перетворюється на круг інерції з рівнянням

$$v^2 + u^2 = i^2. \quad (4.31)$$

За допомогою еліпса інерції можна графічно знайти радіус інерції для довільної осі X , що складає кут β з головною центральною віссю V . На рис. 4.9 наведені необхідні для цього побудови. Для визначення радіуса інерції i_x треба провести дотичну до еліпса, паралельну осі X . Відстань від центра еліпса (центра ваги) до дотичної – перпендикуляр BC , і буде радіус інерції i_x .

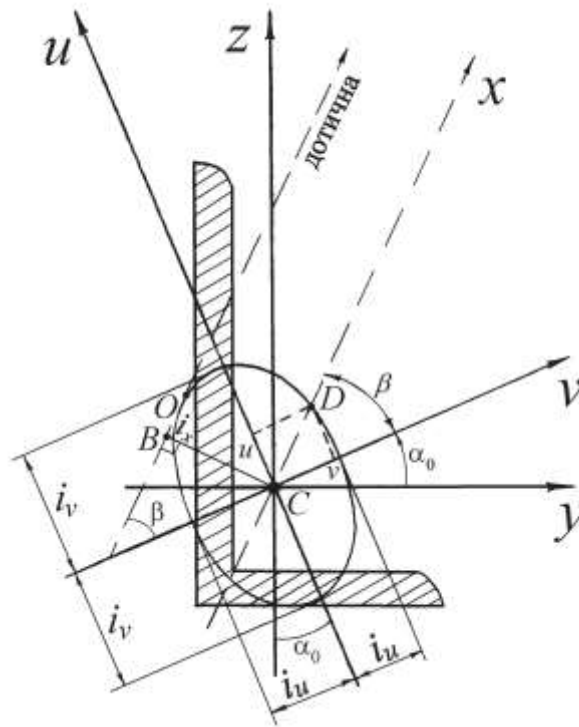


Рис. 4.9

Виконаємо ряд перетворень:

$$I_x = I_v \cos^2 \beta + I_u \sin^2 \beta, \quad (4.32)$$

розділивши на A , отримаємо

$$i_x^2 = i_v^2 \cos^2 \beta + i_u^2 \sin^2 \beta, \quad (4.33)$$

що можна порівняти з даними виміру. Шуканий момент інерції

$$I_x = i_x^2 A. \quad (4.34)$$

2.1.7. Обчислення геометричних характеристик прямокутного перерізу

Розглянемо прямокутний переріз заданих розмірів (рис.4.10)

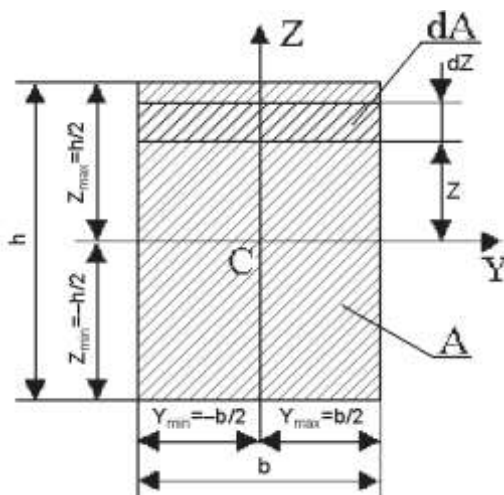


Рис. 4.10

Співвідношення розмірів перерізу

$$k = \frac{h}{b}. \quad (4.35)$$

Площа поперечного перерізу

$$A = bh. \quad (4.36)$$

Осі Y, Z – головні центральні (як осі симетрії перерізу).

Визначимо осьовий момент інерції прямокутника:

$$dA = b dz, \quad 0 \leq z \leq \pm \frac{h}{2},$$

тоді

$$I_Y = \int_A z^2 dA = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 dz = 2b \frac{z^3}{3} \Big|_0^{\frac{h}{2}} = 2b \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3}.$$

Остаточно

$$I_Y = \frac{bh^3}{12}. \quad (4.37)$$

Аналогічно для осі Z

$$I_z = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.38)$$

Осьові моменти опору:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6};$$
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{hb^3}{12}. \quad (4.39)$$

Осьові радіуси інерції:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}};$$
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}. \quad (4.40)$$

2.1.8. Обчислення відцентрового моменту інерції сортаментного рівнобокого кутика

Розглянемо рівнобокий кутик, так як це подано у таблицях сортаменту (рис. 4.11).

Охарактеризуємо осі кутика:

Y_1, Z_1 – додаткові периферійні осі;

Y, Z – довільні власні центральні осі;

Y_0, Z_0 – власні головні центральні осі.

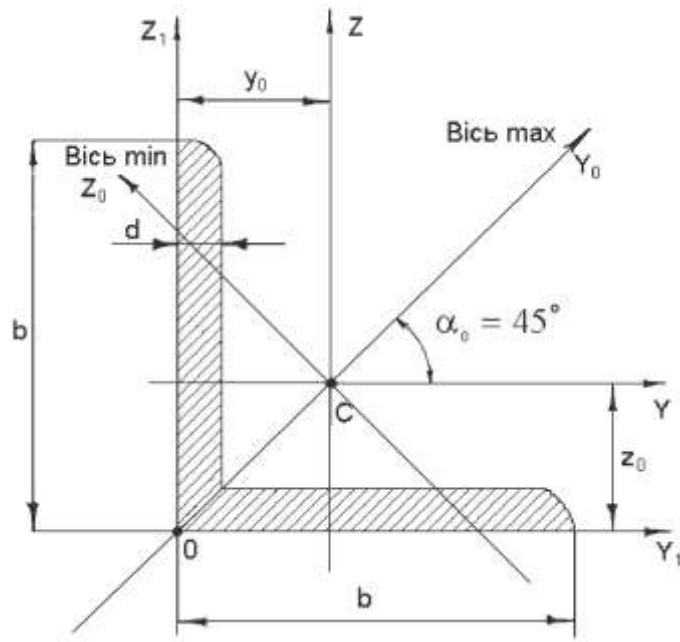


Рис. 4.11

Величина відцентрового моменту інерції кутика відносно осей Y, Z :

$$I_{Y_0 Z_0} = 0;$$

згідно формули (4.18) (перехід від осей Y_0, Z_0)

$$\begin{aligned} I_{YZ} &= \frac{I_{Y_0 \max} - I_{Z_0 \min}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{Y_0 Z_0} \cos 2\alpha_0 = \\ &= \frac{I_{Y_0 \max} - I_{Z_0 \min}}{2} \sin(2 \cdot 45^\circ). \end{aligned}$$

Залежно від розташування кутика кут α_0 має різні знаки. Тому остаточно

$$I_{YZ} = \pm \frac{I_{Y_0 \max} - I_{Z_0 \min}}{2}. \quad (4.41)$$

Знаки для формули (4.41) можна визначати за схемами розташування кутика (рис. 4.12).

$I_{YZ} < 0$	$I_{YZ} > 0$	$I_{YZ} < 0$	$I_{YZ} > 0$

Рис. 4.12

2.1.9. Обчислення відцентрового моменту інерції сортаментного нерівнобокого кутика

Розглянемо нерівнобокий кутик, так як це подано у таблицях сортаменту (рис. 4.13).

Охарактеризуємо осі кутика:

Y_1, Z_1 – додаткові периферійні осі;

Y, Z – випадкові власні центральні осі;

V, U – власні головні центральні осі.

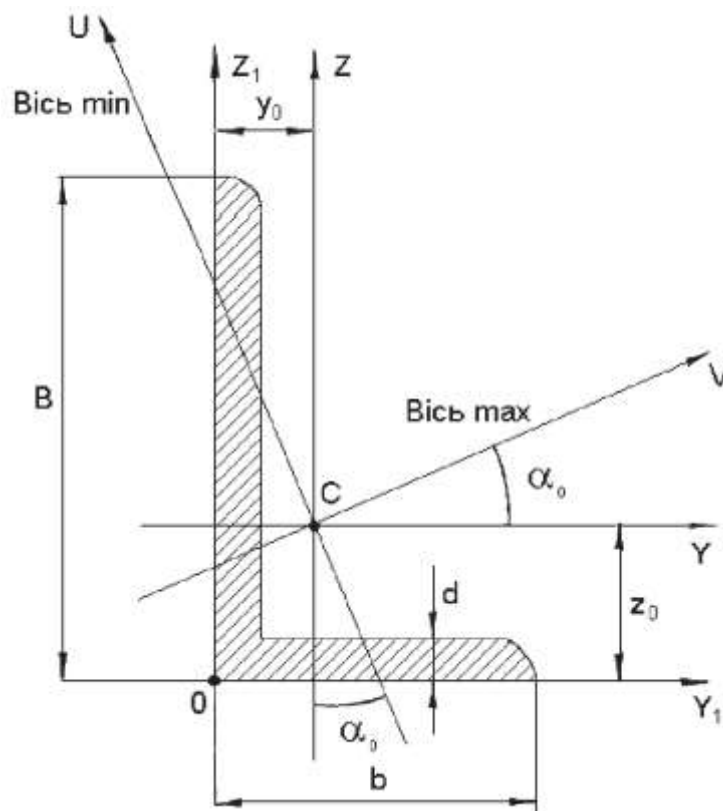


Рис. 4.13

Величина відцентрового моменту інерції кутика відносно головних центральних осей V, U

$$I_{VU} = 0.$$

Тоді, згідно формули (4.13), (перехід від осей V, U до осей Y, Z), знаючи, що $I_{VU} = 0$:

$$I_{YZ} = \frac{I_{V\max} - I_{U\min}}{2} \sin 2\alpha_0. \quad (4.42)$$

Величина $I_{V\max}$ не задана у таблиці сортаменту, тому необхідно її визначити, використавши властивість (4.21)

$$I_Y + I_Z = I_{V\max} + I_{U\min} = \text{const},$$

звідки

$$I_{V\max} = I_Y + I_Z - I_{U\min}. \quad (4.43)$$

Підставивши (4.43) в (4.42), отримаємо:

$$I_{YZ} = \frac{I_Y + I_Z - I_{U\min} - I_{U\min}}{2} \sin 2\alpha_0.$$

В залежності від розташування кутика кут α_0 має різні знаки. Тому остаточно після перетворень можна записати

$$I_{YZ} = \pm \frac{I_Y + I_Z - 2I_{U\min}}{2} |\sin 2\alpha_0|. \quad (4.44)$$

Знаки для формули можна визначати, користуючись схемами розташування кутика (рис. 4.14).

			
$I_{YZ} < 0$	$I_{YZ} > 0$	$I_{YZ} < 0$	$I_{YZ} > 0$

			
$I_{YZ} < 0$	$I_{YZ} > 0$	$I_{YZ} < 0$	$I_{YZ} > 0$

Рис. 4.14

Міністерство освіти і науки України
Центральноукраїнський національний
технічний університет
Кафедра деталей машин та прикладної механіки

ЗВІТ
Лабораторна робота №4.
Дослідження геометричних характеристик перерізів

Виконав: ст. гр. _____
(група студента)

(П.І.Б. студента)

Перевірив: _____
(П.І.Б. викладача)

Робота №1 виконана _____
(підпис викладача)

(дата)

ЦНТУ
Кропивницький
_____рік

2.2. Порядок виконання лабораторної роботи

2.2.1. Підготовчий етап

1). Накреслити на рис. 4.15 у необхідному масштабі заданий нестандартний кутик. Розрахункові дані взяти за варіантом з табл. 4.2 і рис. 4.16:

– номер залікової книжки _____

– номер схеми _____

– група перерізу _____

рівнобокий _____

– кутик

нерівнобокий _____

2). Поділити заданий кутиковий переріз на два прямокутника.

3). Встановити центри ваги C_1 , C_2 прямокутників та провести їх власні головні центральні осі Y_1 , Z_1 і Y_2 , Z_2 .

4). Вибрати допоміжну правосторонню систему координат, осі Y і Z якої паралельні власним головним центральним осям і проходять по зовнішнім лініям полиць кутика.

5). Встановити координати центрів ваги C_1 і C_2 в системі осей Y, Z :

$$y_1 =$$

см,

$$z_1 =$$

см;

$$y_2 =$$

см,

$$z_2 =$$

см.

Вказати $y_1 \dots z_2$ на рис.4.15.

Рис. 4.15. Заданий нестандартний кутик.

Масштаб _____.

Таблица 4.2

Номер рядка	Номер схеми	Група перерізу	Розміри рівнобокого кутика: b/d , см			
			Група перерізу			
			1	2	3	4
1	1	1	2/0,3	7/0,8	20/3	10/0,7
2	2	2	2,5/0,4	7,5/0,9	22/1,6	12,5/0,8
3	3	3	2,8/0,3	8/0,8	25/3	14/0,9
4	4	4	3,2/0,4	9/0,9	4,5/0,3	16/1,0
5	5	1	3,6/0,4	10/1,6	5/0,3	18/1,1
6	6	2	4/0,4	11/0,8	5,6/0,4	20/1,2
7	7	3	4,5/0,5	12,5/1,6	7/0,5	22/1,4
8	8	4	5/0,5	14/1,2	7,5/0,5	25/1,6
9	9	1	5,6/0,5	16/2	8/0,6	20/2
0	10	2	6,3/0,6	18/1,2	9/0,6	25/2
Номер рядка	е	е	д	е	д	е
	Варіант колонки					

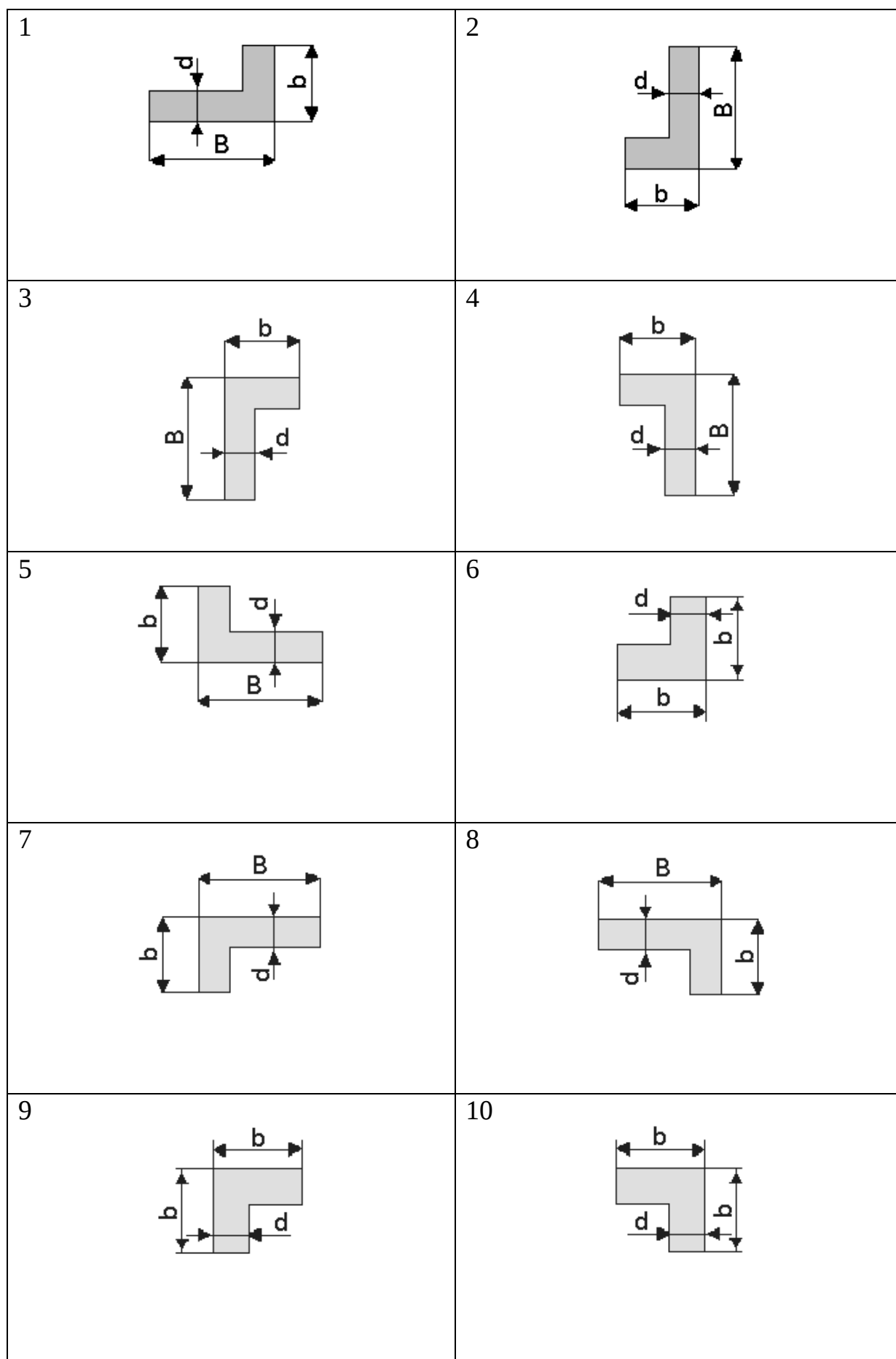


Рис. 4.16

2.2.2. Визначення геометричних характеристик заданого кутикового перерізу

1). Площа перерізу, згідно (4.12):

$$A = A_1 + A_2 = \quad \quad \quad m^2.$$

2). Статичний момент площі перерізу, згідно (4.14):

$$S_Y = S_Y^{A_1} + S_Y^{A_2} = z_1 A_1 + z_2 A_2 =$$

$$m^3;$$

$$S_Z = S_Z^{A_1} + S_Z^{A_2} = y_1 A_1 + y_2 A_2 =$$

$$m^3.$$

3). Координати спільного центру ваги C перерізу (в допоміжній системі координат Y, Z), згідно (4.8):

$$y_c = \frac{S_Z}{A} = \frac{\quad}{\quad} = \quad \quad \quad m;$$

$$z_c = \frac{S_Y}{A} = \frac{\quad}{\quad} = \quad \quad \quad m.$$

Примітка. Координати відкладаються на осях Y, Z (рис.4.15) з урахуванням масштабу. Спільний центр ваги C повинен лежати на прямій $C_1 C_2$. Проводяться спільні центральні осі $Y_c Z_c$ паралельні осям $Y Z$.

4). Відстані (як координати) між паралельними осями $Y_c Z_c$ та $Y_1 Z_1, Y_2 Z_2$:

$$a_1 = \quad \quad \quad m,$$

$$a_2 = \quad \quad \quad m;$$

$$b_1 = \dots \text{ м,}$$

$$b_2 = \dots \text{ м.}$$

5). Головні моменти інерції прямокутників відносно власних осей Y_1Z_1 та Y_2Z_2 , згідно (4.37), (4.38):

$$I_{Y_1} = \dots \text{ м}^4,$$

$$I_{Z_1} = \dots \text{ м}^4;$$

$$I_{Y_2} = \dots \text{ м}^4,$$

$$I_{Z_2} = \dots \text{ м}^4.$$

6). Осеві моменти інерції кутика відносно осей Y_cZ_c :

$$I_{Y_c} = I_{Y_c}^{A_1} + I_{Y_c}^{A_2} = I_{Y_1} + a_1^2 A_1 + I_{Y_2} + a_2^2 A_2 =$$

$$\dots \text{ м}^4,$$

$$I_{Z_c} = I_{Z_c}^{A_1} + I_{Z_c}^{A_2} = I_{Z_1} + b_1^2 A_1 + I_{Z_2} + b_2^2 A_2 =$$

$$\dots \text{ м}^4.$$

7). Відцентровий момент інерції кутика відносно осей Y_cZ_c (прийняти до уваги, що для прямокутників $I_{Y_1Z_1} = 0$, $I_{Y_2Z_2} = 0$):

$$I_{Y_cZ_c} = I_{Y_cZ_c}^{A_1} + I_{Y_cZ_c}^{A_2} = I_{Y_1Z_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{Y_2Z_2} + a_2 b_2 A_2 =$$

$$\dots \text{ м}^4.$$

8). Головні центральні осі

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{Y_c Z_c}}{I_{Z_c} - I_{Y_c}} = \frac{\quad}{\quad} =$$

$$2\alpha_0 =$$

$$\alpha_0 =$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 =$$

Провести головні центральні осі VU .

9). Головні моменти інерції відносно осей VU .

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_{Y_c} + I_{Z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{Y_c} - I_{Z_c}}{2}\right)^2 + I_{Y_c Z_c}^2} =$$

$$= \frac{\quad}{\quad} \pm \sqrt{\left(\frac{\quad}{\quad}\right)^2 + \quad} =$$

$\mathcal{M}^4$.

$$I_{\max} = I_{\quad} =$$

$$I_{\min} = I_{\quad} =$$

$\mathcal{M}^4$.

10). Осьові радіуси інерції, згідно (4.25):

$$i_{Y_c} = \sqrt{\frac{I_{Y_c}}{A}} = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}} = \quad \mathcal{M}.$$

$$i_{Z_c} = \sqrt{\frac{I_{Z_c}}{A}} = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}} = \quad \mathcal{M}.$$

$$i_V = \sqrt{\frac{I_V}{A}} = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}} = \quad \mathcal{M}.$$

$$i_U = \sqrt{\frac{I_U}{A}} = \sqrt{\frac{\quad}{\quad}} = \quad \mathcal{M}.$$

2.2.3. Порівняння результатів обчислень з даними таблиць сортаменту

Величини розбіжностей розрахункових і табличних значень на схожі кутики оцінити по модулю (у %) за формулою

$$\eta = \frac{D_c - D_p}{D_c} \times 100\%,$$

де: D_c – дані сортаменту; D_p – дані розрахунку.

Результати порівняння звести у таблицю 4.3.

Таблиця 4.3

№ п.п.	Порівнювана характеристика	Дані розрахунків	Дані сортаменту	Неспівпадання даних, %
1	Площа перерізу, $см^2$			
2	Координати центра ваги, $см$: $ y_c $			
	$ z_c $			
3	Моменти інерції, $см^4$: I_{y_c}			
	I_{z_c}			
	$I_{y_c z_c}$			
	I_v			
	I_u			
4	Радіуси інерції, $см$: i_{y_c}			
	i_{z_c}			
	i_v			
	i_u			
5	Головний кут, $ \operatorname{tg} \alpha_0 $			

2.2.4. Побудова центрального еліпса інерції

Використати рівняння центрального еліпса інерції перерізу (4.30)

$$\frac{v^2}{i_U^2} + \frac{u^2}{i_V^2} = 1,$$

де: v, u – координати точок еліпса;

i_V, i_U – головні радіуси інерції.

Обчислити координати точок однієї чверті еліпса, дані занести в таблицю 4.4. З врахуванням масштабу побудувати еліпс інерції на кутиковому перерізі (рис. 4.15).

Таблиця 4.4

№ точ ки	v , см	$\frac{i_V}{i_U}$	i_V^2 , см ²	$\left(\frac{i_V}{i_U} \cdot v\right)^2$, см ²	$u = \sqrt{i_V^2 - \left(\frac{i_V}{i_U} \cdot v\right)^2}$, см
1					
2					
3					
4					
5					

2.2.5.Аналіз результатів обчислень

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте мету лабораторної роботи.
2. Як класифікують плоскі перерізи?
3. Що таке основні геометричні характеристики?
4. Чим відрізняються абсолютні від відносних геометричних характеристик? Що таке поперечний переріз?
5. Що таке полярний момент інерції?
6. Що таке головні осі, центральні осі та головні центральні осі? Яка між ними різниця?
7. Які теореми про геометричні характеристики ви знаєте? Сформулюйте їх.
8. Сформулюйте та доведіть теорему про зміну осьового моменту інерції при паралельному переносі координатних осей.
9. Сформулюйте та доведіть теорему про зміну відцентрового моменту інерції при паралельному переносі координатних осей.
10. Сформулюйте та доведіть теорему про обчислення геометричних характеристик складного (складеного) перерізу.
11. Сформулюйте та доведіть теорему про зміну моментів інерції при повороті координатних осей.

12. Сформулюйте та доведіть теорему про суму осьових моментів інерції.
13. Сформулюйте та доведіть ознаки головних центральних осей.
14. За якими формулами визначається положення головних центральних осей? Який кут між цими осями?
15. Як визначаються величини головних центральних осей?
16. За якими формулами обчислюються головні осьові радіуси інерції та моменти опору?
17. Що таке еліпс інерції? Коли він може бути центральним? Як його побудувати?
18. Як обчислюються геометричні характеристики прямокутного перерізу?
19. Як обчислюється відцентровий момент інерції сортаментного рівнобокого кутика?
20. Як обчислюється відцентровий момент інерції сортаментного нерівнобокого кутика?

Використана література

1. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів: – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
2. Опір матеріалів: Підручник/ Г.С.Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський: За ред. Г.С.Писаренко – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
3. Методичні вказівки і журнали до лабораторних робіт з опору матеріалів (частина 1) для студентів технічних та будівельних спеціальностей /О.Б. Чайковський, Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пукалов. – Кіровоград: КДТУ, 2002. – 65 с.