7. *Ишлинский А. Ю., Василенко В. П., Стороженко В. А. и др.* О плоскопараллельных колебаниях произвольного твердого тела с одной закрепленной точкой // Препринт/ Ин-т математики АН УССР, 1982; № 82.— С. 27—54.
8. *Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Темченко М. Е.* О разветвлении устойчивых положений динамического равновесия одной механической системы // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук.—1958.—8.— С. 53—61.
9. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов.— М.: Наука, 1985.—286 с.
10. *Лурье А. И.* Аналитическая механика.— М.: Физматгиз, 1961.—824 с.
11. *Малашенко С. В.* Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел // Прикл. математика и теорет. физика.—1960.— № 3.— С. 76—80.
12. *Маркеев А. П.* Об устойчивости вращения твердого тела вокруг вертикали при наличии его соударений с горизонтальной плоскостью // Прикл. математика и механика.—1984.—48, вып. 3.— С. 363—369.
13. *Млодзеевский Б. К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук об-ва любителей естеств., антропол. и этнографии.—1894.—7, вып. 1.— С. 46—48.
14. *Морозова Е. П.* Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне // Прикл. математика и механика.—1956.—20, № 5.— С. 621—626.
15. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикл. математика и механика.—1956.—20, вып. I.— С. 51—65.
16. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений // Там же.—1966.—30, вып. 5.— С. 922—933.
17. *Сарычев В. А., Мирер С. А., Исаков А. В.* Положения относительного равновесия осесимметричного твердого тела, подвешенного на стержне // Препринт / Ин-т прикл. математики АН СССР, 1987, № 94—36 с.
18. *Скимель В. Н.* К задачам устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикл. математика и механика.—1956.—20, вып. I.— С. 130—132.
19. *Скимель В. Н.* О движении гиростата, подвешенного на струне // Тр. межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналитической механике.— М., 1964.— С. 118—122.
20. *Стороженко В. А., Темченко М. Е.* Полная картина стационарных движений осесимметричного твердого тела // Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 110—136.
21. *Темченко М. Е.* О стационарных движениях двух связанных тел // Динамика и устойчивость сложных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 95—105.

Ин-т математики АН Украины, Киев
(Украина)

Поступила 12.11.91

УДК 539.376

И. К. Сенченков, В. И. Козлов, С. Н. Якименко

РАСЧЕТ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ВИБРОРАЗОГРЕВ БЕСКОНЕЧНОГО НЕОДНОРОДНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА МКЭ

При моделировании динамических и тепловых процессов в элементе конструкции большой протяженности замена его бесконечным телом может оказаться адекватным приемом. К подобным объектам относятся трубопроводы, кабели и др. При анализе термомеханических полей в таких телах численными методами, в частности МКЭ, возникает проблема определения решения в бесконечной области. В [7] для описания низкочастотного волнового поля в полубесконечном цилиндре применялся бесконечный элемент, в котором в качестве аппроксимирующей функции использовалась низшая (стержневая) распространяющаяся мода.

В настоящей работе в рамках аналогичного подхода исследованы низкочастотные осесимметричные колебания и виброразогрев полубесконечного двухслойного цилиндра, кинематически возбуждаемого на части боковой поверхности. Изучен эффект локализации колебаний вблизи зоны возбуждения.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный цилиндр, состоящий из двух слоев V_1 и V_2. Конфигурация тела и схема нагружения с учетом симметрии показаны на рис. 1. Предположим, что материалы наружного (индекс *1*) и внутреннего (индекс *2*) цилиндров являются соответственно изотропными линейно-вязкоупругим и линейно-упругим.

Постановка задачи, описывающая колебания и виброразогрев частей рассматриваемого тела, включает уравнения колебаний и тепло-

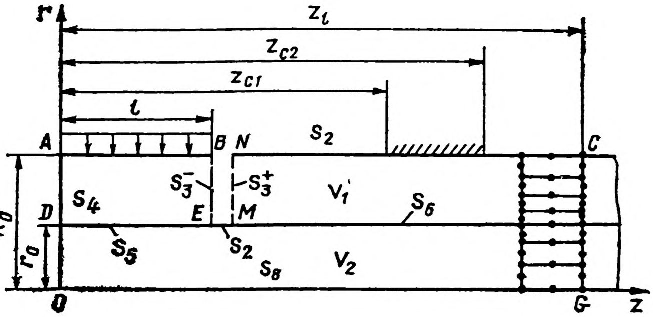

Рис. 1

проводности

$$\operatorname{div}\tilde{\sigma}^{(m)} + \rho^{(m)}\omega^2\tilde{\vec{u}}^{(m)} = 0; \qquad (1.1)$$

$$c^{(m)}\dot{\theta}^{(m)} = \operatorname{div}\left(k^{(m)}\operatorname{grad}\theta^{(m)}\right) + D^{(m)} \qquad m = 1, 2;$$

соотношения Коши

$$\tilde{\varepsilon}^{(m)} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad}\tilde{\vec{u}}^{(m)} + \left(\operatorname{grad}\tilde{\vec{u}}^{(m)}\right)^T\right]; \qquad (1.2)$$

определяющие уравнения для напряжений

$$\tilde{\sigma}^{(m)} = 2\tilde{G}^{(m)}\left(\tilde{\varepsilon}^{(m)} + \frac{\tilde{\nu}^{(m)}}{1 - 2\tilde{\nu}^{(m)}} I \operatorname{tr}\tilde{\varepsilon}^{(m)}\right) \qquad (1.3)$$

и диссипативной функции

$$D^{(m)} = \frac{\omega}{2}\left(\sigma_{00}^{''(m)}\varepsilon^{'(m)} - \sigma_{00}^{'(m)}\varepsilon^{''(m)}\right). \qquad (1.4)$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}^{(m)}$, $\tilde{\sigma}^{(m)}$ — тензоры комплексных амплитуд деформации и напряжения; $\tilde{\vec{u}}^{(m)}$ — вектор амплитуд перемещения; $\theta^{(m)}$ — температура; $\rho^{(m)}$ — плотность; $c^{(m)}$ — объемная теплоемкость; $k^{(m)}$ — теплопроводность; $\tilde{G}^{(m)}$ — модуль сдвига; $\tilde{\nu}^{(m)}$ — коэффициент Пуассона; ω — частота возбуждения; I — единичный тензор; T — индекс транспонирования; $\tilde{(\cdot)} = (\cdot)' + i(\cdot)''$, $\dot{(\cdot)} = \partial(\cdot)/\partial t$.

Поскольку материал внутреннего цилиндра упругий, то

$$\tilde{\nu}^{(2)} = \nu^{(2)}, \quad \tilde{G}^{(2)} = G^{(2)}, \quad D^{(2)} \equiv 0. \qquad (1.5)$$

На внутренних и наружных поверхностях тела (рис. 1) принимаем следующие механические и тепловые граничные условия:

$$\tilde{u}_{\nu z}^{(1)} = u_0, \quad \tilde{\sigma}_{\nu z}^{(1)} = 0, \quad k^{(1)}\theta_{,r}^{(1)} = -\alpha_1\left(\theta^{(1)} - \theta_c\right) \text{ на } S_1; \qquad (1.6)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rz}^{(1)} = 0, \quad k^{(1)}\theta_{,r}^{(1)} = -\alpha_2(\theta^{(1)} - \theta_c) \text{ на } S_2; \tag{1.7}$$

$$\tilde{u}_z^{(1,2)} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(1,2)} = 0, \quad \theta_{,z}^{(1,2)} = 0 \text{ на } S_4; \tag{1.8}$$

$$\tilde{u}_r^{(2)} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(2)} = 0, \quad \theta_{,r}^{(1,2)} = 0 \text{ на } S_8; \tag{1.9}$$

$$\tilde{\sigma}_{r\alpha}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{r\alpha}^{(2)}, \quad \tilde{u}_\alpha^{(1)} = \tilde{u}_\alpha^{(2)};$$

$$k^{(1)}\theta_{,r}^{(1)} = k^{(2)}\theta_{,r}^{(2)}, \quad \theta^{(1)} = \theta^{(2)} \text{ на } S_6, \qquad \alpha = r, z. \tag{1.10}$$

На границе S_5 рассмотрены два типа граничных условий идеального механического контакта

$$\tilde{\sigma}_{r\alpha}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{r\alpha}^{(2)}, \quad \tilde{u}_\alpha^{(1)} = \tilde{u}_\alpha^{(2)} \qquad \alpha = r, z, \tag{1.11}$$

гладкого контакта

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} = \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(1,2)} = 0, \quad \tilde{u}_r^{(1)} = \tilde{u}_r^{(2)}, \tag{1.12}$$

и тепловые условия

$$k^{(1)}\theta_{,r}^{(1)} = k^{(2)}\theta_{,r}^{(2)}, \quad \theta^{(1)} = \theta^{(2)}. \tag{1.13}$$

На границе $S_3^{\pm}$ также рассмотрены два типа граничных условий

$$\tilde{\sigma}_{\alpha z}^{+} = \tilde{\sigma}_{\alpha z}^{-}, \quad \tilde{u}_\alpha^{+} = \tilde{u}_\alpha^{-}, \quad \theta_{,z}^{+} = \theta_{,z}^{-}, \quad \theta^{+} = \theta^{-}; \quad \theta^{\pm} = \theta^{(1)}(S_3^{\pm}), \tag{1.14}$$

и

$$\tilde{\sigma}_{\alpha z}^{(1)} = 0, \quad k^{(1)}\theta_{,z}^{(1)} = \pm\alpha_3(\theta^{(1)} - \theta_c). \tag{1.15}$$

В приведенных выше соотношениях α_i — коэффициенты теплоотдачи; θ_c — температура окружающей среды; $i=1, 2, 3$; $(\cdot)_{,z} = \partial(\cdot)/\partial z$.

Условия сплошности оболочки (1.14) при $z=l$ позволяют рассматривать ее как единое целое. Условия (1.15) отвечают наличию зазора $BNME$, отделяющего элемент $ABED$ от остальной части оболочки. Очевидно, решение задачи должно удовлетворять соответствующим условиям на бесконечности.

Начальная температура тела предполагается равной температуре окружающей среды

$$\theta_0 = \theta_c = 20\ °C, \tag{1.16}$$

а коэффициенты теплоотдачи, частота нагружения и конфигурационные параметры принимаются равными

$$\alpha_1 = 1153\ \text{Вт/м}^2\cdot°\text{C}; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 8{,}8\ \text{Вт/м}^2\cdot°\text{C}; \quad f = 20\ \text{кГц}; \tag{1.17}$$

$$r_0 = 0{,}225\cdot 10^{-2}\ \text{м}; \quad R_0 = 0{,}475\cdot 10^{-2}\ \text{м}; \quad l = 3\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

§ 2. Характеристики материалов. Предполагается, что материалами наружного и внутреннего цилиндров являются соответственно полиэтилен высокой плотности и медь. Температурные зависимости модулей аппроксимировались по данным работы [9] соотношениями

$$G'^{(1)}\,[\text{Па}] = \begin{cases} 10^{9,1}\exp(-0{,}023\theta) & 0\ °C < \theta < 117\ °C; \\ 10^{14,37}\exp(-0{,}127\theta) & \theta \geqslant 117\ °C; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\delta_G^{(1)} = G''^{(1)}/G'^{(1)} = 0{,}085 + 6{,}25\cdot 10^{-4}(\theta - 20) \quad \theta \geqslant 0\ °C. \tag{2.2}$$

Зависимости $k^{(1)}(\theta)$, $c^{(1)}(\theta)$ и $\rho^{(1)}(\theta)$ аппроксимировались кусочно-линейными функциями по данным работы [5].

Согласно результатам работы [10] для дилатационных (объемных) характеристик полиэтилена принимается

$$K^{\prime(1)} = 3{,}29 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad \delta_k^{(1)} = K^{\prime\prime(1)}/K^{\prime(1)} = 0{,}2\delta_G^{(1)} \tag{2.3}$$

Материал жилы (медь) предполагается линейно-упругим с независящими от температуры параметрами

$$c^{(2)} = 3{,}44 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3 \cdot {}^\circ\text{C}; \quad \rho^{(2)} = 8{,}9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \nu^{(2)} = 0{,}35;$$
$$k^{(2)} = 381 \text{ Дж/м} \cdot \text{с} \cdot {}^\circ\text{C}; \quad E^{(2)} = 1{,}226 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \tag{2.4}$$

где E — модуль Юнга.

§ 3. Метод решения задачи. Задача решается МКЭ, причем используется изопараметрический четырехугольный восьмиузловой элемент [3] и бесконечный элемент [7]. Анализ показывает, что условиям задачи отвечает «стержневой» участок первой распространяющейся моды [2]. Это позволяет принять для дальнего поля «стержневые» соотношения

$$\tilde{u}_z^{(1,2)} = u_{zl} e^{-i\tilde{k}(z-z_l)}, \quad \tilde{\sigma}_{rr}^{(1,2)} = \tilde{\sigma}_{r_z}^{(1,2)} = \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(1,2)} = 0, \quad z \geqslant z_l, \tag{3.1}$$

где $\tilde{u}_{zl}$ — осевое перемещение в сечении $z = z_l$, $\tilde{k}$ — волновое число, определяемое из дисперсионного соотношения для заданного значения ω.

Рассмотрены две приближенные схемы стыковки МКЭ-решений для конечной и решения типа (3.1) для бесконечной областей на границе $z = z_l$. В первой из них волновое число определялось выражением $\tilde{k} = \omega(\bar{\rho}/\tilde{\bar{E}})^{1/2}$, в котором $\bar{\rho}$ и $\tilde{\bar{E}}$ — средне взвешенные по сечению характеристики. Во второй схеме скорости продольных волн в наружном и внутреннем слоях цилиндра $z > z_l$ считались различными. При этом волновое число в (3.1) определялось так:

$$\tilde{k} = \begin{cases} \omega(\rho^{(1)}/\tilde{E}^{(1)})^{1/2} & r_0 < r < R_0; \\ \omega(\rho^{(2)}/E^{(2)})^{1/2} & 0 < r < r_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Очевидно, это соотношение будет хорошей аппроксимацией в случае либо слабого механического взаимодействия наружного и внутреннего цилиндров, либо доминирования одного из тел в волновом процессе. Оба подхода дают очень близкие значения таких интегральных параметров как средняя и максимальная по объему области $ABED$ температуры и могут быть использованы для оценки виброразогрева. В дальнейшем используется второй несколько более эффективный подход.

§ 4. Потоки мощности в цилиндре. Анализ потоков мощности [2] в направлении оси $0z$

$$P_z = P_z^{(1)} + P_z^{(2)} = \pi\omega \int_{r_0}^{R_0} (\sigma_{\alpha z}^{\prime(1)} u_\alpha^{\prime\prime(1)} - \sigma_{\alpha z}^{\prime\prime(1)} u_\alpha^{\prime(1)})\, r dr +$$
$$+ \pi\omega \int_0^{r_0} (\sigma_{\alpha z}^{\prime(2)} u_\alpha^{\prime\prime(2)} - \sigma_{\alpha z}^{\prime\prime(2)} u_\alpha^{\prime(2)})\, r dr \tag{4.1}$$

показывает, что для рассматриваемого тела вдали от области приложения нагрузки основная часть энергии переносится вдоль внутреннего цилиндра. Для более детального изучения этого вопроса рассмотрена задача о полубесконечном ($z \geqslant 0$) цилиндре, нагружаемом осевым перемещением только на торце AD оболочки

$$\tilde{u}_z^{(1)} = u_{z0}, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(1)} = 0 \qquad z = 0, \ r_0 < r < R_0;$$
$$\tilde{\sigma}_{zz}^{(2)} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}^{(2)} = 0 \qquad z = 0, \ 0 < r < r_0. \tag{4.2}$$

Для амплитуды заданного перемещения $u_{z0}=44\cdot10^{-6}$ м и частоты $f=20$ кГц получены следующие значения потоков мощности для внутреннего и внешнего цилиндров для трех сечений $z=0$, 0,03 и 0,12 м:

$$P^{(1)}_{z|z=0} = 333{,}8 \text{ Вт}; \qquad P^{(2)}_{z|z=0} = 0, \quad P^{(1)}_{z|z=0,03} = 4{,}12 \text{ Вт}; \tag{4.3}$$

$$P^{(2)}_{z|z=0,03} = 58{,}94 \text{ Вт}, \quad P^{(1)}_{z|z=0,12} = 4{,}12 \text{ Вт}, \quad P^{(2)}_{z|z=0,12} = 58{,}25 \text{ Вт}.$$

Эти данные показывают, что, во-первых, основная часть энергии ($\sim$80 %) рассеивается вблизи нагружаемого торца и, во-вторых, энергия из оболочки достаточно быстро перекачивается во внутренний цилиндр и далее свыше 90 % энергии распространяется вдоль него. Погонное затухание при этом уже невелико.

Для условий нагружения (1.6) при $u_0=22\cdot10^{-6}$ м соотношение между входным и выходным для области $0<z<0{,}03$, $0<r<R_0$ потоками P_{s_1} и $P_z|_z=0{,}03$ (зазор $BNME$ отсутствует) существенно иное

$$P_{s_1} = 4853 \text{ Вт}, \qquad P_z|_{z=0,03} = 3503 \text{ Вт}, \tag{4.4}$$

т. е. лишь около 28 % подводимой мощности рассеивается в контрольной области $0<z<0{,}03$. Остальная ее часть уносится через поверхность $z=0{,}03$, причем в этом сечении по наружному и внутреннему цилиндрам переносится соответственно 23 и 77 % энергии. Вблизи границы конечной области $z=z_e$ (величина z_e варьировалась в пределах $0{,}12<z_e<0{,}30$), как и в рассмотренном выше примере, преобладающая часть ($\sim$90 %) энергии переносится внутренним цилиндром.

Следовательно, использование для рассматриваемой системы приближенных соотношений (3.2)—(3.3) является вполне обоснованным.

§ 5. Локализация энергии. Изучим вопрос о возможности локализации энергии колебаний вблизи области приложения нагрузки. Этот эффект представляет интерес с точки зрения повышения эффективности ряда термовибрационных технологий, в частности ультразвуковой сварки пластмасс. Некоторые аспекты проблемы локализации колебаний изложены в [1].

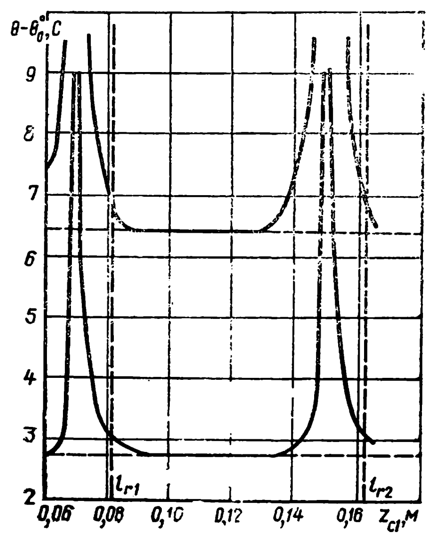

Рис. 2

Рассмотрим случай локализации, обусловленной сменой типа граничных условий. Предположим, что цилиндр нагружается согласно условиям (1.5) и часть боковой поверхности наружного цилиндра жестко защемлена (рис. 1)

$$\tilde{u}^{(1)}_z = \tilde{u}^{(1)}_r = 0 \qquad r = R_0, \quad z_{c1} < z < z_{c2}. \tag{5.1}$$

В процессе вычислений фиксировались следующие значения параметров:

$$u_0 = 22\cdot10^{-6} \text{ м}, \quad f = 20 \text{ кГц}, \quad z_l = 0{,}021 \text{ м}, \quad z_{c2} = 0{,}02 \text{ м}, \tag{5.2}$$

а кордината z_{c1} начала области закрепления изменялась от $z_{c1}=0{,}06$ м до $z_{c1}=0{,}17$ м.

На рис. 2 представлены графики изменения максимальной и средней по области $ABED$ температур виброразогрева в момент времени $t=0{,}01$ с в зависимости от параметра z_{c1}.

Горизонтальные штриховые линии соответствуют максимальной и средней по объему температурам в случае отсутствия защемления. Вертикальными штриховыми линиями показаны резонансные длины l_{rn} конечного однородного стержня с усредненными согласно (3.1) характеристиками и закрепленными концами. Они хорошо согласуются с полученными по формуле $l_{rn}=n(2f)^{-1}(\bar{E}/\bar{\rho})^{1/2}$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ значениями $l_{r1}=0{,}0814$ м и $l_{r2}=0{,}163$ м.

Расчеты показывают, что поток мощности в сечениях $z=z_0$, $z_0>z_{c2}$ практически равен нулю. Таким образом, в цилиндре при определенных

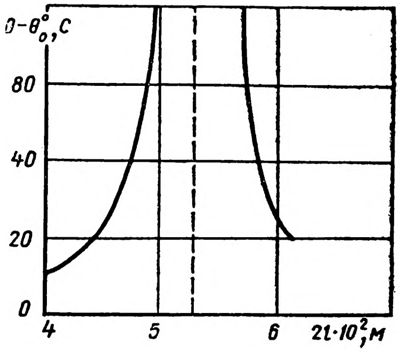

Рис. 3

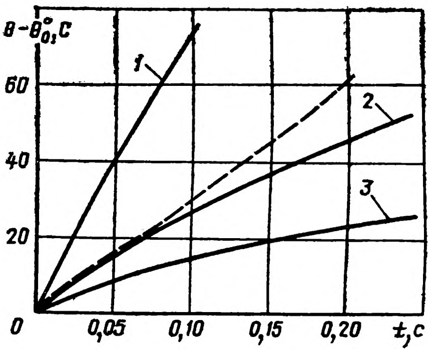

Рис. 4

расстояниях L между началами защемленных областей, $L=2z_{c1}\sim 2l_{rn}$, $n=1,\ 2,\ldots$, имеет место локализованный в этой области резонанс. Он обусловлен эффектом отражения волн, возбуждаемых внешней нагрузкой, от защемленных участков боковой поверхности. При этом кинематические и динамические характеристики волнового поля очень близки резонансным характеристикам стержня $0<z<z_{c1}$ с защемленными торцами.

Условие $P_z\simeq 0$ при $z>z_{c2}$ свидетельствует об очень слабом демпфировании резонанса за счет излучения энергии в области $z>z_{c2}$. Область $|z|\leqslant l_{rn}$ при заданных значениях длин защемленного участка Δz_c, $\Delta z_c=z_{c2}-z_{c1}$, является как бы «волновой ловушкой», в которой практически вся подведенная внешней нагрузкой мощность рассеивается за счет внутренней диссипации энергии.

§ 6. Эффект условий контакта на границе S_5. В предыдущих расчетах на границе S_5 принимались условия идеального термомеханического контакта (1.11) и (1.13). Рассмотрим теперь случай гладкого контакта (1.12). Тепловые условия остаются прежними. Для моделирования гладкого контакта воспользуемся подходом [8], в соответствии с которым между контактирующими телами вводится тонкий дополнительный слой из ортотропного материала. Специальным подбором его характеристик можно добиться достаточно точного удовлетворения условий (1.12). Теплофизические свойства принимались равными свойствам меди.

Расчеты проводились для условий нагружения (1.5), в предположении, что поверхность S_2 свободна, а область $ABED$ отделена зазором $BEMN$, $|BN|=0{,}003$ м.

На рис. 3 сплошной линией показана зависимость средней по области $ABED$ температуры на момент времени $t=0{,}01$ с в зависимости от длины AB трубчатого оболочечного элемента. Анализ показывает, что при некоторых длинах элемента имеет место резонанс на продольной моде колебаний. Для приближенного расчета резонансных длин элемента используем задачу на собственные значения

$$\sigma_{zz,z}+\rho^{(1)}\omega^2 u_z=0,\qquad u_z(0)=u_{z,z}(l)=0, \tag{6.1}$$

причем с учетом кинематических гипотез $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z)$

$$\sigma_{zz} = \hat{E}\varepsilon_{zz}, \quad \hat{E} = 2G'^{(1)}(1 - \nu'^{(1)})/(1 - 2\nu'^{(1)}). \tag{6.2}$$

Для резонансных длин получаем $l_{rn} = \dfrac{2n-1}{2f}(\hat{E}/\rho^{(1)})^{1/2}$, $n = 1, 2$,

Для свойств полиэтилена при 20 °С и $f=20$ кГц первому резонансу отвечает значение $2l_{r1}=0{,}0534$ м, хорошо согласующееся с представленными на рис. 3 результатами. Для данной системы этот резонанс также является локальным. Поток мощности в сечении $z=0{,}04$ м составляет примерно 10 % от входного, что существенно больше, чем в резонансном случае, рассмотренном в § 5, но меньше, чем в случае идеального механического контакта на границе S_5 (§ 4).

Таким образом, при гладком механическом контакте большая часть энергии рассеивается в элементе оболочки и лишь незначительная часть переходит во внутренний цилиндр. Резонанс будет проявляться лишь в начальной стадии процесса, поскольку обусловленное виброразогревом изменение характеристик материала выведет систему из этого состояния.

§ 7. Влияние дилатационных потерь. Поскольку материал деформируется в степенном объеме (область $ABED$), модель чувствительна к дилатационным потерям [6]. Этот эффект показан на рис. 4, где отражена эволюция средней по объему $ABED$ температуры при условиях нагружения (1.6) и параметрах $u_0=22\cdot10^{-6}$ м, $f=20$ кГц, $l=0{,}03$ м. Сплошные кривые соответствуют значениям $\varkappa=1$ ($\nu^{(1)''}=0$), $\varkappa=0{,}2$ и $\varkappa=0$ ($K^{(1)''}=0$), $\varkappa=\delta_k^{(1)}/\delta_G^{(1)}$. Штриховая линия отвечает наличию зазора $BEMN$ при $\varkappa=0{,}2$. Видно, что для этой конфигурации характерен более высокий уровень разогрева, обусловленный возможностью описанного в § 6 резонанса.

Таким образом, разработана методика, позволяющая с достаточной для практических целей точностью описать низкочастотные колебания и виброразогрев кусочно-неоднородных бесконечно протяженных цилиндрических тел. Показано, что управление условиями контакта и закрепления элементов рассматриваемой системы можно локализовать колебания и разогрев тела в области приложения нагрузки.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто коливання та вібророзігрів нескінченного двошарового в'язкопружного циліндра, збуджуваного прикладенним в обмеженій області навантаженням.

При реалізації задачі методом кінцевих елементів область розбивається на кінцеву, в якій розв'язок будується стандартним чином, і нескінчену, для побудови розв'язку в якій використовуються моди, що розповсюджуються, конкретизовані відповідним дисперсійним співвідношенням. Для дослідження низькочастотних коливань використовується стержньова хвильова мода. Для різних випадків навантаження досліджено розподіл потоків потужності по зовнішньому і внутрішньому циліндрах. Показана можливість локалізації резонансних коливань і вібророзігріву поблизу області прикладання навантаження.

SUMMARY. Oscillations and vibroheating of an infinite bilayer elastoplactis cylinder excited by the load applied in the limited regions are considered.

For realization of the problem by the finite element method the region is broken into finite one where the solution is constructed conventionally and infinite where the solution is constructed by using propagating modes concretized by corresponding dispersion correlation. A rod wave mode is used for considered low-frequency oscillations. Distribution of power flows by outer and inner cylinders is studied for different lloading. cases. It is shown possible to localize onance oscillations and vibroheating near the region of the load applications.

1. *Бабешко В. А., Ворович И. И., Образцов И. Ф.* Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР.— Механика твердого тела.—1987.— № 3.— С. 101—106.
2. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев : Наук. думка, 1981.—284 с.
3. *Козлов В. И., Якименко С. Н.* Термомеханическое поведение вязкоупругих тел вращения при осесимметричном гармоническом деформировании // Прикл. механика.—1989.—**25**, № 5.— С. 22—28.
4. *Мирсаидов М. М., Трояновский И. Е.* Динамика неоднородных систем с учетом внутренней диссипации и волнового уноса энергии.— Ташкент : Фан, 1990.—108 с.
5. *Пивень А. Н., Гречаная Н. А., Чернобыльский И. И.* Теплофизические свойства полимерных материалов.— Киев : Вищ. школа, 1976.—180 с.
6. *Сенченков И. К.* Влияние дилатационных потерь на виброразогрев вязкоупругого полого цилиндра // Прикл. механика.—1988.—**24**, № 8.— С. 68—73.
7. *Сенченков И. К., Козлов В. И., Якименко С. Н.* К расчету низкочастотных колебаний и виброразогрева полубесконечного вязкоупругого цилиндра МКЭ // Там же.—1991.—**27**, № 3.— С. 27—34.
8. *Якименко С. Н.* Моделирование условий гладкого механического контакта на границе раздела двух слоев в МКЭ // Тр. XIV науч. конф. молод. ученых Ин-та механики АН УССР (Киев, 1989).— Ч. 1.— С. 207—211.— Деп. в ВИНИТИ 2.08.89, № 5164—В89.
9. *Яновский Ю. П., Виноградов Г. В.* Динамические свойства полимеров в текучем состоянии // Механика полимеров.—1962.— № 4.— С. 106—116.
10. *Lifshitz I. M., Kolsky H.* The propagation of spherically divergent stress pulses in linear viscoelastic solids // J. Mech. Phys. Solids.—1965.—**13**, N 6.— P. 361—376.

Ин-т механики АН Украины, Киев (Украина)
Ин-т сельхоз. машиностроения, Кировоград (Украина)
Поступила 19.03.91

УДК 593.3

В. Ф. Ткаченко

О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ

Широкое применение в качестве конструктивных элементов пластин и оболочек сложной формы при различных видах закрепления их контуров и приложенных нагрузок приводит к необходимости разработки эффективных методов расчета подобных элементов. К таким объектам относятся, в частности, призматические оболочки (в том числе пластины постоянной толщины), ослабленные системой отверстий малых и средних размеров. Определение поля напряжений возле отверстий в упругом теле сложной формы требует привлечения численных методов к решению соответствующих краевых задач теории упругости.

В настоящей работе использован численный подход к решению пространственных задач теории упругости для изотропного тела, отнесенного к произвольной криволинейной системе координат, предложенный в [3] и позволивший в общем виде разработать численные алгоритмы для расчета напряженно-деформированного состояния упругих тел постоянной толщины, боковые грани которых являются поверхностями первого или второго рода. Решение задачи в трехмерной постановке сведено к решению двумерных граничных задач. Метод редукции трехмерных задач теории упругости к двумерным с использованием с