УДК 631.356.02

В.М. Булгаков, д.-р. техн. наук, чл.-кор. УААН, І.В. Головач, канд. ф.-м. наук, Д.Г. Войтюк, канд. техн. наук, чл.-кор. УААН
Національний аграрний університет, м. Київ

Теоретичні дослідження поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті

Створена теорія поперечних коливань закріпленого у ґрунті коренеплоду, що відбуваються під дією гармонійної збурювальної сили, яка напрямлена перпендикулярно до осі коренеплоду вздовж поступального руху копача. На базі застосування варіаційного принципу Остроградського – Гамільтона отримане рівняння власних частот вільних поперечних коливань та аналітичний вираз для визначення амплітуди вимушених поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті.
поперечні коливання, грунт, коренеплід, збурювальна сила, копач, принцип Остроградського–Гамільтона

Серед викопуючих робочих органів коренезбиральних машин вібраційні копачі достатньо широко використовуються, оскільки мають значно менший, в порівнянні з іншими типами, тяговий опір і можуть вилучати коренеплоди цукрових буряків з ґрунту фактично без втрат і пошкоджень. Крім цього, прикладання до коренеплодів буряків при їх викопуванні вібраційних зусиль вилучення також створює умови для інтенсивного оббивання налиплого ґрунту з їх бокових поверхонь, що сприяє підвищенню якісних показників збирання.

Однак, як показали результати чисельних експериментальних досліджень та показники тривалої експлуатації цих викопуючих робочих органів в Україні, переваги даного типу копачів можуть бути отримані при дуже сприятливих умовах збирання: при середній вологості (16...24%) і твердості (0,5...1,5 *МПа*) ґрунту, рівномірному розташуванні коренеплодів у рядку, відсутності у ґрунті каміння, врожайності коренеплодів, що не перевищує 400 (*ц/га*) [1, 2]. Тому зараз тривають інтенсивні пошуки теоретичного і експериментального обґрунтування оптимальних конструктивних, кінематичних та динамічних параметрів і створення таких конструкцій вібраційних викопуючих органів, які б ефективно працювали в умовах, що відрізняються від сприятливих.

Розробка нових теоретичних основ виконання технологічних процесів в галузі механізації сільськогосподарського виробництва надає величезного поштовху для подальшого проектування, виготовлення і використання принципово нових типів робочих органів. Так, сформульовані в кінці 70-х років минулого століття основні принципи теорії вібраційного викопування коренеплодів сприяли широкому розповсюдженню у світі саме цих викопуючих робочих органів коренезбиральних машин. Однак, більш ніж за 30 років були відпрацьовані різні типи вібраційних викопуючих робочих органів, що здійснюють поперечні, повздовжні та комбіновані коливальні рухи викопуючих лемешів. Пошуки найбільш оптимальних за принципом дії вібраційних викопуючих органів тривають і донині.

При наявності широкого спектру відомих суттєвих переваг вібраційний спосіб викопування коренеплодів (незалежно від напрямків коливальних рухів) має і деякі недоліки. Так, найголовнішими є не дуже висока надійність (це стосується насамперед вібраційного приводу викопуючих лемешів), що має місце при роботі особливо на важких і твердих ґрунтах, підвищена металомісткість і енергомісткість в цілому даного процесу. Наявність у конструкції складної сільськогосподарської машини робочих органів вібраційного типу, що мають значну масу і виконують коливальні рухи з частотою не меншою ніж 20 (*Гц*), сприяє зниженню надійності її роботи.

Таким чином, подальша розробка нових положень теорії вібраційного викопування коренеплодів (уточнення вже існуючих теоретичних досліджень та їх практичне використання) є актуальною задачею землеробської механіки.

До перших спроб аналітично описати процес вібраційного викопування коренеплодів цукрових буряків слід віднести роботу [1], у якій насамперед наведено аналіз існуючих на той час конструкторських розробок цього процесу і результати чисельних експериментальних досліджень перших дослідних зразків вібраційних копачів. Тут також наведені спрощені вирази для визначення сили опору ґрунту при вібраційному викопуванні коренеплодів і сили інерції вібраційного викопуючого лемеша. Отримані показники якості вібраційного вилучення цукрових буряків з ґрунту при наданні викопуючим лемешам коливальних рухів частотою до 50 (*Гц*) і амплітудою до 5 (*мм*) показують безсумнівну перевагу даного способу викопування коренеплодів цукрових буряків з ґрунту перед іншими типами копачів (96,7% – кількість зібраних коренеплодів; 94,6% – чистота коренеплодів). Ніяких рівнянь руху і моделі вилучення коренеплоду з ґрунту тут не наведено. Коренеплід цукрового буряку і грунт, який його оточує, як пружна коливальна система, що знаходиться під дією збурювальної сили, яка передається від вібраційного викопуючого робочого органу, тут також ще не розглядається.

Більш ґрунтовні аналітичні дослідження поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті, було здійснено і вперше опубліковано в праці [2]. Тут коренеплід цукрового буряку моделюється як тіло конусоподібної форми з однією закріпленою точкою в нижній частині, яке має пружні властивості. При цьому поперечні коливання тіла коренеплоду описані за допомогою диференціального рівняння з частинними похідними четвертого порядку. Розв'язок зазначеного рівняння дав можливість визначити власні частоти вільних поперечних коливань тіла коренеплоду. Процес вилучення цукрових буряків з ґрунту досліджується, як сказано в роботі, по додатково складених рівняннях кінетостатики, які тут безпосередньо не наведені.

В роботі [3], яка є повним викладенням праці [2], побудовано функціонал Остроградського – Гамільтона, що описує вільні поперечні коливання тіла коренеплоду, закріпленого нижнім кінцем у ґрунті, в разі, коли збурювальні сили прикладені до нього у поперечно-горизонтальній площині, у напрямку, перпендикулярному поступальному переміщенню копача. Тут, за допомогою методу Рітца, з умов стаціонарності даного функціоналу знайдене рівняння частот Рітца для знаходження першої, другої та третьої власних частот вільних поперечних коливань тіла коренеплоду.

У праці [4] прийняті основні положення і допущення, що наведені у попередніх роботах [2, 3]. Однак, моделі вібраційного викопування коренеплоду цукрового буряку з ґрунту тут не наведено. Були розроблені спочатку дослідні, а потім і промислові зразки вібраційних викопуючих робочих органів, що працюють за вказаним вище принципом, були проведені чисельні експериментальні дослідження і випробування (і навіть державні випробування) цих викопуючих робочих органів.

Однак, незважаючи на зазначені фундаментальні аналітичні дослідження процесу вібраційного викопування коренеплодів цукрових буряків (при наданні їм збурювальних зусиль у поперечно-горизонтальній площині), потужні конструкторські розробки, виготовлення на заводському рівні декількох зразків і проведення ретельних експериментальних досліджень і державних випробувань, такі вібраційні викопуючі робочі органи розповсюдження не отримали. Основною причиною цього була встановлена нездатність цих вібраційних викопуючих робочих органів забезпечити достатньо високу швидкість пересування (а відповідно й продуктивності праці) при збереженні необхідних якісних показників збирання через те, що надання коренеплодам буряків збурювальних зусиль у площині, яка перпендикулярна напрямку поступального руху копача, призводить до постійного періодичного забивання його робочого русла тілами коренеплодів і ґрунтом, обламуванню хвостових частин коренеплодів, повної втрати здатності до очищення. Енергомісткість даного процесу була також занадто високою.

Потім було встановлено, що повністю позбутися цього негативного явища можливо при зміні напрямків дії збурювальних сил з поперечно - горизонтальної площини і перпендикулярності напрямку до поступального руху копача на повздовжньо-вертикальну площину. Ця зміна давала дуже гарні показники збирання коренеплодів цукрових буряків при високій швидкості руху. Практично усі всесвітньовідомі фірми-виробники бурякозбиральної техніки почали випускати коренезбиральні машини з вібраційними викопуючими робочими органами, що працюють за принципом надання коренеплодам збурювальних зусиль у повздовжньо-вертикальній площині.

Нажаль, подальших ґрунтовних аналітичних досліджень коливань тіла коренеплоду, що знаходиться у ґрунті, і процесу його вібраційного викопування при повздовжньо-вертикальному збурювальному навантаженні довгий час не було. Очевидно вважалось, що дослідження, наведені у працях [2, 3 і 4], повністю можуть бути застосовані і для даного коливального процесу. Однак, цілком очевидно, що зміна напрямку збурювальних сил викликає суттєві зміни і у теоретичних дослідженнях, а особливо у кінцевому їх результаті.

Подальший розвиток теорія вібраційного викопування коренеплодів при наданні їм збурювальних зусиль саме у повздовжньо-вертикальній площині отримала завдяки працям [5, 6, 7, 8]. Однак, випадок поперечних вільних і вимушених коливань тіла коренеплоду при співпаданні напрямків збурювальних зусиль з напрямком поступального руху вібраційного викопуючого робочого органу ще не досліджений і представляє значний інтерес як з теоретичної так і з практичної точок зору. Так, при такому напрямку збурювальних зусиль більш ефективно порушуються зв'язки коренеплодів з ґрунтом (проявляється так званий ефект розхитування), і в подальшому тіла коренеплодів при остаточному вилученні з ґрунту не будуть знаходитись під дією розтягуючих зусиль. У даному випадку згруженість коренеплодів і ґрунту у робочому руслі вібраційного копача вже не відбуватиметься. Крім цього, конструкція вібраційного копача, що буде працювати за вказаним принципом, буде менш енергомісткою, металомісткою тощо.

Розробити основні положення теорії поперечних коливань (вільних і вимушених) тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті, під дією горизонтальної збурювальної сили, напрямок якої співпадає з напрямком поступального руху вібраційного викопуючого робочого органу.

При побудові теорії поперечних коливань тіла коренеплоду приймемо допущення, аналогічні наведеним у [9]. Так, насамперед будемо вважати, що в недеформованому стані вісь коренеплоду строго прямолінійна і співпадає з лінією центрів ваги поперечних перерізів коренеплоду, причому відхилення окремих точок осі коренеплоду відбувається перпендикулярно до прямолінійного недеформованого її напрямку. Далі вважаємо, що відхилення точок осі коренеплоду при поперечних коливаннях відбуваються в одній площині і є малими відхиленнями в тому розумінні, що відновлювальні сили, які при цьому виникають, залишаються в межах пропорціональності.

Складемо насамперед еквівалентну схему, на якій покажемо коренеплід з однією закріпленою внизу точкою (рис. 1). Коренеплід має конусоподібне тіло (кут при вершині якого дорівнює 2γ, а верхня частина знаходиться вище рівня поверхні ґрунту), моделюється як стержень змінного поперечного перерізу з закріпленим нижнім кінцем (точка O). В центрі ваги, що позначений точкою C, прикладена сила ваги $\overline{G}$ коренеплоду. Загальна довжина коренеплоду - h. Через вісь симетрії коренеплоду проведена вертикальна вісь Oz, початок якої співпадає з точкою умовного закріплення O. Зв'язок коренеплоду з ґрунтом визначається загальною реакцією грунту $\overline{R}$. Зазначена вище збурювальна сила прикладається до коренеплоду відразу від двох викопуючих лемешів з двох його боків, а тому на схемі вона представлена двома складовими $Q_{зб.1}$ та $Q_{зб.2}$. Дані сили прикладені на відстані z_1 від початку координат (точки O) і саме вони викликають поперечні коливання коренеплоду, які руйнують зв'язки коренеплоду з ґрунтом і створюють для останнього умови вилучення з ґрунту.

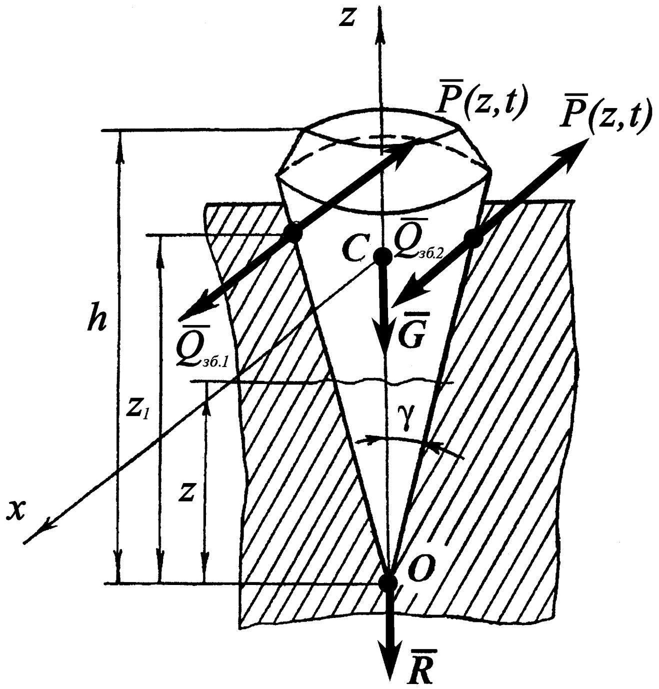

Рисунок 1 – Еквівалентна схема поперечних коливань тіла коренеплоду в момент захвату вібраційним викопуючим робочим органом

При побудві теорії поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті, застосовуємо принцип Остроградського – Гамільтона. Вважаємо при цьому, що поперечні коливання коренеплоду відбуваються під дією горизонтальної збурювальної сили, яка змінюється за гармонійним законом такого вигляду:

$$Q_{зб.} = H \sin \omega t\,, \tag{1}$$

де H - амплітуда збурювальної сили; ω - частота збурювальної сили.

Складемо функціонал Остроградського – Гамільтона, що описує поперечні коливання коренеплоду.

За вище наведених допущень відхилення точок осі коренеплоду при поперечних коливаннях однозначно визначаються функцією двох змінних:

$$y = y(z,t), \tag{2}$$

де z - відстань точки на осі Oz, через яку проходить поперечний переріз коренеплоду, від умовної точки O закріплення коренеплоду в ґрунті;

t - поточний час.

Введемо такі необхідні позначення:

$\mu(z)$ - погонна маса (маса одиниці довжини) коренеплоду, $\left(\frac{кг}{м}\right)$;

E - модуль Юнга матеріалу коренеплоду, $\left(\frac{Н}{м^2}\right)$;

$J(z)$ - момент інерції поперечного перерізу коренеплоду відносно нейтральної осі перерізу, перпендикулярної до площини коливань, $\left(м^4\right)$;

$Q(z,t)$ - інтенсивність поперечного зовнішнього навантаження, напрямленого перпендикулярно до осі коренеплоду (осі Oz) вздовж осі Ox, $\left(\frac{Н}{м}\right)$.

Згідно [9] функціонал Остроградського – Гамільтона для стержня змінного поперечного перерізу, що здійснює поперечні коливання під дією зовнішнього поперечного навантаження, має наступний вигляд:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^h \left[\mu(z)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - EJ(z)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)^2 - Q(z,t)y\right]dzdt\,. \tag{3}$$

Враховуючи, що коренеплід моделюється тілом конусоподібної форми, виразимо величини, що входять у функціонал (3), через основні параметри конічної поверхні.

Очевидно, що погонну масу коренеплоду можна визначити за допомогою такого виразу:

$$\mu(z) = \rho\pi z^2 tg^2\gamma\,, \tag{4}$$

де ρ - густина матеріалу коренеплоду, $\left(\frac{кг}{м^3}\right)$.

Момент інерції $J(z)$ визначається наступним чином:

$$J(z) = \frac{\pi z^4 tg^4\gamma}{4}\,. \tag{5}$$

Оскільки величина $Q(z,t)$, що входить у функціонал (3), є інтенсивністю розподіленого навантаження, яке вимірюється у $\left(\frac{Н}{м}\right)$, то збурювальна сила $\overline{Q}_{зб.}$, яка є зосередженим навантаженням і вимірюється у ньютонах, теж повинна мати розмірність $\left(\frac{Н}{м}\right)$. З цією метою вводиться імпульсивна функція першого порядку $\sigma_1(z)$ [9], яка визначається наступним чином:

$$\sigma_1(z) = \begin{cases} \infty \text{ при } z = 0, \\ 0 \text{ при } z \neq 0, \end{cases}$$

причому

$$\int_0^z \sigma_1(z)dz = \sigma_o(z),$$

де $\sigma_o(z)$ - одинична функція, яка визначається так:

$$\sigma_o(z) = \begin{cases} 0 & при\ z < 0, \\ 1 & при\ z \geq 0. \end{cases}$$

Отже, якщо $Q_{зб.}(t)$ - зосереджена збурювальна сила, яка прикладена в точці z_1 і вимірюється у ньютонах, то функція

$$Q_{зб.}(z,t) = Q_{зб.}(t) \cdot \sigma_1(z - z_1) \tag{6}$$

має розмірність $\left(\frac{H}{м}\right)$ і виражає інтенсивність зосередженого навантаження в точці z_1. Функція $\sigma_1(z - z_1)$ дорівнює нулю для всіх z, окрім $z = z_1$, де вона перетворюється у нескінченність.

Тоді, враховуючи вираз (1), можна написати:

$$Q_{зб.}(z,t) = H \sin \omega t \cdot \sigma_1(z - z_1). \tag{7}$$

Оскільки коренеплід на початку коливального процесу міцно зв'язаний з ґрунтом, який є пружним середовищем, то при дії на коренеплід збурювальної сили (1) виникає сила опору грунту поперечним коливанням коренеплоду. Очевидно, що сила опору грунту (для усього тіла коренеплоду) є розподіленим навантаженням по площі контакту коренеплоду з ґрунтом, причому вона є зовнішньою силою по відношенню до тіла коренеплоду і виступає у ролі збурювальної сили з боку грунту, що діє на коренеплід. У першому наближенні будемо вважати, що оточуючий коренеплід грунт, під дією збурювальної сили $H \sin \omega t$, яка передається грунту через коренеплід і частково безпосередньо від робочого органу, здійснює вимушені коливання за тим же само гармонійним законом з амплітудою, яка визначається пружними властивостями грунту.

Нехай c - коефіцієнт пружної деформації грунту, віднесений до площі контакту коренеплоду з ґрунтом, який вимірюється у $\left(\frac{H}{м^2}\right)$. Будемо вважати, що при поперечних коливаннях коренеплід спирається на грунт половиною своєї бічної поверхні по всій глибині знаходження коренеплоду у нерозпушеному ґрунті. З боку грунту, що контактує з цією половиною бічної поверхні, виникає розподілене навантаження, яке напрямлене протилежно дії збурювальної сили. Таким чином, при поперечних коливаннях коренеплоду і безпосередньо самого робочого органу, то з одного боку коренеплоду, то з другого виникає розподілене навантаження, яке діє на коренеплід з боку оточуючого грунту і напрямлене протилежно дії збурювальної сили.

Отже, враховуючи вище сказане, у деякому наближенні можна стверджувати, що інтенсивність $P(z,t)$ розподіленого навантаження опору грунту буде дорівнювати:

$$P(z,t) = \pi c\, z\, tg\gamma \sin \omega t, \left(\frac{H}{м}\right). \tag{8}$$

Оскільки збурювальні сили від вібраційного робочого органу і опору грунту мають протилежний напрямок, то результативна збурювальна сила, що діє на коренеплід, буде дорівнювати:

$$Q(z,t) = Q_{зб.}(z,t) - P(z,t),$$

або, з врахуванням виразів (7) і (8), отримаємо наступний вираз:

$$Q(z,t) = H \sin \omega t \cdot \sigma_1(z - z_1) - \pi c\, z\, tg\gamma \sin \omega t. \tag{9}$$

Таким чином, враховуючи вирази (4), (5) та (9), функціонал (3) набуде вигляду:

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left\{\rho\pi z^2\cdot tg^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-E\frac{\pi z^4 tg^4\gamma}{4}\cdot\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left[H\sin\omega t\cdot\sigma_1(z-z_1)-\pi c z\, tg\gamma\cdot\sin\omega t\right]\cdot y(z,t)\right\}dz\,dt\,. \tag{10}$$

Розглянемо спочатку вільні поперечні коливання закріпленого у ґрунті коренеплоду.

З цією метою необхідно у функціоналі (10) виділити ту частину, яка описує саме вільні коливання системи.

Очевидно, що це буде функціонал такого вигляду:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left[\rho\pi z^2\cdot tg^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-\frac{E\pi z^4\cdot tg^4\gamma}{4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)^2\right]dz\,dt\,. \tag{11}$$

При знаходженні власних форм і власних частот вільних поперечних коливань коренеплоду в ґрунті ми будемо спиратися на загальний принцип лінійної теорії коливань – принцип суперпозиції малих коливань, тобто ми будемо вважати, що малі коливання системи з нескінченним числом степенів вільності являють собою лінійне накладання головних гармонійних коливань. Керуючись згаданим принципом, ми будемо шукати гармонійні поперечні коливання у такому вигляді:

$$y(z,t)=\varphi(z)\sin(pt+\alpha), \tag{12}$$

де $\varphi(z)$ - власна форма головних коливань, тобто функція, яка визначає неперервну сукупність амплітудних поперечних відхилень осі коренеплоду від її положення рівноваги;

p - власна частота поперечних коливань.

Підставимо вираз (12) у функціонал (11), попередньо обчисливши необхідні похідні від виразу (12):

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\varphi(z)\cdot p\cdot\cos(pt+\alpha),$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=\varphi''(z)\cdot\sin(pt+\alpha). \tag{13}$$

Підставивши вираз (13) у функціонал (11) отримаємо:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left\{\rho\pi z^2 tg^2\gamma\cdot\varphi^2(z)\cdot p^2\cos^2(pt+\alpha)-\right.$$
$$\left.-\frac{E\pi z^4 tg^4\gamma}{4}\cdot[\varphi''(z)]^2\sin^2\left(pt+\alpha\right)\right\}dz\,dt\,. \tag{14}$$

Проінтегруємо вираз (14) по t в межах одного періоду $T=\frac{2\pi}{p}$, отримаємо:

$$S_1=\frac{\pi}{2p}\int_{o}^{h}\left\{\rho\pi z^2 tg^2\gamma\cdot\varphi^2(z)\cdot p^2-\frac{E\pi z^4 tg^4\gamma}{4}\cdot[\varphi''(z)]^2\right\}dz\,. \tag{15}$$

Для знаходження власних форм і частот поперечних коливань коренеплоду у ґрунті застосуємо метод Рітца.

Суть методу Рітца полягає у зведенні варіаційної задачі до задачі на пошук екстремуму функції багатьох незалежних змінних. Таке зведення здійснюється шляхом відбору із усіх можливих допустимих функцій, на яких розглядаються значення функціоналу, деякого спеціального класу функцій, що залежать від скінченного числа спочатку невизначених параметрів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Підстановка таких функцій у вираз функціоналу перетворює його на функцію від цих параметрів, екстремум якої може бути знайдений відомими елементарними методами. Згідно методу Рітца значення функціоналу (15) розглядаються на сукупності лінійних комбінацій функцій, що мають наступний вигляд:

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \psi_i(z), \tag{16}$$

де α_i - параметри, варіаціями яких ми отримуємо потрібний клас допустимих функцій;

$\psi_i(z)$ - базисні функції, які спеціально вибираються і є відомими функціями, що задовольняють геометричним умовам задачі.

Таким чином, підставляючи вираз (16) у функціонал (15), отримаємо:

$$S_1 = \frac{\pi}{2p} \int_o^h \left\{ \rho\pi\, z^2 tg^2\gamma \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i(z) \right]^2 p^2 - \frac{E\pi\, z^4 tg^4\gamma}{4} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i''(z) \right]^2 \right\} dz. \tag{17}$$

Оскільки

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \psi_i(z) \right]^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \psi_i(z) \cdot \psi_k(z) \alpha_i \alpha_k, \tag{18}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \psi_i''(z) \right]^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \psi_i''(z) \cdot \psi_k''(z) \alpha_i \alpha_k, \tag{19}$$

то підставляючи вирази (18), (19) у функціонал (17), отримаємо вираз для функціоналу у вигляді квадратичної форми:

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{\pi}{2p} \int_0^h \Bigg[& \rho\pi\, z^2 tg^2\gamma \cdot p^2 \sum_{i,k=1}^{n} \psi_i(z) \cdot \psi_k(z) \alpha_i \alpha_k - \frac{E\pi\, z^4 tg^4\gamma}{4} \times \\ & \times \sum_{i,k=1}^{n} \psi_i''(z) \cdot \psi_k''(z) \alpha_i \alpha_k \Bigg] dz. \end{aligned} \tag{20}$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{gathered} \int_o^h \rho\pi z^2 tg^2\gamma \cdot \psi_i(z) \cdot \psi_k(z) dz = T_{ik}, \\ \int_o^h \frac{E\pi z^4 tg^4\gamma}{4} \psi_i''(z) \cdot \psi_k''(z) dz = U_{ik}, \\ (i, k = 1,2,...,n). \end{gathered} \tag{21}$$

Підставимо (21) у (20), отримаємо функціонал у вигляді функції від параметрів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$$S_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{\pi}{2p} \cdot p^2 \cdot \sum_{i,k=1}^{n} T_{ik} \alpha_i \alpha_k - \frac{\pi}{2p} \cdot \sum_{i,k=1}^{n} U_{ik} \alpha_i \alpha_k. \tag{22}$$

Визначимо сукупність параметрів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, при якій функціонал (22) приймає стаціонарне значення. Для цього продиференціюємо вираз (22) по параметрах $\alpha_i(1,2,...,n)$ і прирівняємо до нуля отримані частинні похідні.

В результаті отримуємо наступну систему лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (типу [9]):

$$\left.\begin{array}{l}\left(p^2T_{11}-U_{11}\right)\alpha_1+\left(p^2T_{12}-U_{12}\right)\alpha_2+...+\left(p^2T_{1n}-U_{1n}\right)\alpha_n=0,\\ \left(p^2T_{21}-U_{21}\right)\alpha_1+\left(p^2T_{22}-U_{22}\right)\alpha_2+...+\left(p^2T_{2n}-U_{2n}\right)\alpha_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left(p^2T_{n1}-U_{n1}\right)\alpha_1+\left(p^2T_{n2}-U_{n2}\right)\alpha_2+...+\left(p^2T_{nn}-U_{nn}\right)\alpha_n=0.\end{array}\right\} \tag{23}$$

Система рівнянь (23) відрізняється від [9] тим, що в ній коефіцієнти U_{ik}, T_{ik} $\left(i,k=1,2,...,n\right)$ визначаються згідно (21).

Для існування відмінного від нуля розв’язку лінійної однорідної системи рівнянь необхідно і достатньо, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} p^2T_{11}-U_{11} & p^2T_{12}-U_{12} & \ldots & p^2T_{1n}-U_{1n}\\ p^2T_{21}-U_{21} & p^2T_{22}-U_{22} & \ldots & p^2T_{2n}-U_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ p^2T_{n1}-U_{n1} & p^2T_{n2}-U_{n2} & \ldots & p^2T_{nn}-U_{nn}\end{vmatrix}=0. \tag{24}$$

Рівняння (24), в якому коефіцієнти U_{ik}, T_{ik} $\left(i,k=1,2,...,n\right)$ визначаються згідно (21), є рівнянням частот Рітца для поперечних коливань коренеплоду, закріпленого у ґрунті. Оскільки рівняння (24) є рівнянням n-го степеня відносно p^2, то його розв’язок визначає наступну послідовність власних частот:

$$p_1^2 < p_2^2 < ... < p_n^2,$$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ - відповідно перша, друга, n-а власна частота.

На практиці, як правило, визначають нижчі частоти, які найбільш істотно впливають на технологічний процес, що розглядається. Тому визначимо перші три частоти власних поперечних коливань коренеплоду.

З цією метою необхідно вибрати базисні функції, що входять у вираз (16).

Як зазначено в [9], в багатьох випадках необхідні результати отримують, якщо за базисні функції приймають власні форми поперечних коливань однорідного стержня постійної жорсткості EJ з тими ж умовами закріплення, що і в даній задачі. Такі базисні функції дозволяють знаходити форми, які задовольняють не лише геометричним умовам, як це вимагає метод Рітца, але і динамічним граничним умовам задачі.

Тому приймемо за базисні функції власні форми поперечних коливань однорідного стержня з постійними жорсткістю EJ і погонною масою μ.

Згідно [9] такі форми мають вигляд:

$$\psi_i(z)=\left[U(k_iz)-\frac{S(k_ih)}{T(k_ih)}\cdot V(k_iz)\right], \tag{25}$$

де $U(z), S(z), T(z), V(z)$ - функції Крилова, причому:

$$\begin{array}{l} U(z)=\frac{1}{2}(chkz-\cos kz),\quad S(z)=\frac{1}{2}(chkz+\cos kz),\\ T(z)=\frac{1}{2}(shkz+\sin kz),\quad V(z)=\frac{1}{2}(shkz-\sin kz),\end{array} \tag{26}$$

k_ih - корені рівняння

$$chkh\cdot\cos kh+1=0, \tag{27}$$

причому перші три корені зазначеного рівняння згідно [9] дорівнюють:

$$k_1h=1,875;\qquad k_2h=4,694;\qquad k_3h=7,855.$$

Слід відмітити, що таким чином вибрані базисні функції задовольняють геометричним і динамічним граничним умовам задачі:

$$\begin{aligned} y(0) = y'(0) = 0, \\ y''(h) = y'''(h) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Тоді, підставляючи вираз (25) у вирази (21), отримуємо:

$$T_{ik} = \rho\pi tg^2\gamma \int_0^h \left[U(k_i z) - \frac{S(k_i h)}{T(k_i h)} V(k_i z) \right] \left[U(k_k z) - \frac{S(k_k h)}{T(k_k h)} V(k_k z) \right] z^2 dz, \tag{29}$$

$$U_{ik} = \frac{\pi E tg^4\gamma}{4} \int_0^h k_i^2 k_k^2 \left[S(k_i z) - \frac{S(k_i h)}{T(k_i h)} T(k_i z) \right] \left[S(k_k z) - \frac{S(k_k h)}{T(k_k h)} T(k_k z) \right] z^4 dz, \tag{30}$$

$i, k = 1,2,...,n$.

Як видно з виразів (29), (30), $T_{ik} = T_{ki}$, $U_{ik} = U_{ki}$.

Таким чином, для визначення перших трьох частот необхідно обчислити значення коефіцієнтів $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{22}, T_{23}, T_{33}$, $U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{22}, U_{23}, U_{33}$ згідно виразів (29), (30), причому функції Крилова $S(k_i h), T(k_i h)$ обчислюються при значеннях $k_i h$, приведених вище.

Для визначення перших двох частот необхідно обчислити лише T_{11}, T_{12}, T_{22}, U_{11}, U_{12}, U_{22}.

Як бачимо, з ростом n число обчислень швидко зростає. Звичайно, обчислення значень коефіцієнтів T_{ik}, U_{ik} необхідно проводити з допомогою ПЕОМ. Отримані значення коефіцієнтів T_{ik}, U_{ik} підставляються в рівняння частот Рітца (24) при $n = 3$ (визначник третього порядку), з якого визначаються власні частоти p_1, p_2, p_3 поперечних коливань коренеплоду. Розрахунки в подальших дослідженнях проведемо для коренеплоду цукрового буряку з наступними параметрами [4]: $h = 250$ *мм*, $E = 18{,}4 \cdot 10^6 \ \frac{H}{м^2}$, $\rho = 1300 \ \frac{кг}{м^3}$, $\gamma = 14^o$.

Перейдемо далі до дослідження вимушених поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті. Оскільки збурювальна сила діє на коренеплід з частотою ω, то чисто вимушені коливання будуть відбуватися згідно закону [9]:

$$y(z,t) = \varphi(z) \sin \omega t, \tag{31}$$

де $\varphi(z)$ - форма вимушених коливань.

Обчислимо необхідні частинні похідні від виразу (31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} = \omega \cdot \varphi(z) \cos \omega t, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \varphi''(z) \sin \omega t. \end{aligned} \tag{32}$$

Підставляючи вирази (31), (32) у функціонал (10), отримаємо:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_o^h \Big\{ \rho\pi\, z^2 tg^2\gamma \cdot \omega^2 \varphi^2(z) \cos^2 \omega t - \frac{E\pi\, z^4 tg^4\gamma}{4} \cdot [\varphi''(z)]^2 \sin^2 \omega t - \\ - [H \cdot \sigma_1 (z - z_1) - \pi c z \cdot tg\gamma] \cdot \varphi(z) \sin^2 \omega t \Big\} dz\, dt. \end{aligned} \tag{33}$$

Проінтегруємо вираз (33) по z в межах одного періоду $T = \frac{2\pi}{\omega}$, отримаємо:

$$S = \frac{\pi}{2\omega}\int_{o}^{h}\left\{\rho\pi z^2 tg^2\gamma \cdot \varphi^2(z)\omega^2 - \frac{E\pi z^4 tg^4\gamma}{4}\cdot[\varphi''(z)]^2 - \right.$$
$$\left. -\left[H\cdot\sigma_1(z-z_1) - \pi cz\cdot tg\gamma\right]\cdot\varphi(z)\right\}dz. \tag{34}$$

Згідно методу Рітца розглянемо значення функціоналу (33) на сукупності лінійних комбінацій наступного вигляду:

$$\varphi(z) = \alpha\psi(z), \tag{35}$$

де α - параметр, варіюванням якого ми отримуємо клас допустимих функцій; $\psi(z)$ - базисна функція.

Підставивши вираз (35) у функціонал (34), отримаємо:

$$S = \frac{\pi}{2\omega}\int_{o}^{h}\left\{\rho\pi z^2 tg^2\gamma \cdot \alpha^2\psi^2(z)\omega^2 - \frac{E\pi z^4 tg^4\gamma}{4}\cdot\alpha^2[\psi''(z)]^2 - \right.$$
$$\left. -\left[H\cdot\sigma_1(z-z_1) - \pi cz\cdot tg\gamma\right]\alpha\psi(z)\right\}dz. \tag{36}$$

Введемо наступні позначення:

$$\int_0^h \rho\pi z^2 tg^2\gamma\cdot\psi^2(z)dz = M, \tag{37}$$

$$\int_0^h \frac{E\pi z^4 tg^4\gamma}{4}[\psi''(z)]^2 dz = N, \tag{38}$$

$$\int_o^h \left[H\cdot\sigma_1(z-z_1) - \pi cz\cdot tg\gamma\right]\cdot\psi(z)dz = L. \tag{39}$$

Підставивши вирази (37) – (39) у (36), матимемо:

$$S = \frac{\pi}{2\omega}\left(\omega^2 M\alpha^2 - N\alpha^2 - L\alpha\right). \tag{40}$$

Отже, на сукупності функцій (35) функціонал (36) перетворюється на функцію від незалежної змінної α. Необхідною умовою екстремуму функції (40) є рівність нулю її першої похідної по α.

Отже, продиференціювавши вираз (40) по α та прирівнявши отриману похідну до нуля, матимемо наступне рівняння:

$$2\omega^2 M\alpha - 2N\alpha - L = 0, \tag{41}$$

звідки визначаємо параметр α, який буде дорівнювати:

$$\alpha = \frac{L}{2\left(\omega^2 M - N\right)}. \tag{42}$$

Приймемо за базисну функцію $\psi(z)$ форму вимушених поперечних коливань однорідного стержня постійної жорсткості EJ з одним жорстко закріпленим кінцем, які виникають під дією поперечної одиничної гармонійної сили частоти ω, прикладеної у точці $z = z_1$. Згідно [9] дана форма має вигляд:

$$\psi(z) = CU(kz) + DV(kz), \qquad 0 \le z < z_1, \tag{43}$$

$$\psi(z) = CU(kz) + DV(kz) + \frac{1}{k^3 EJ}V\left[k(z-z_1)\right], \qquad z_1 \le z \le h, \tag{44}$$

де $U(kz), V(kz)$ - функції Крилова;

$k = \sqrt[4]{\dfrac{\mu\omega^2}{EJ}}$; μ - погонна маса стержня;

C, D - довільні сталі, які визначаються з граничних умов (28).

Слід відмітити, що в точці $z = z_1$ значення функції $\psi(z)$, обчислене за виразами (43) і (44) співпадає і дорівнює:

$$\psi(z_1) = CU(kz_1) + DV(kz_1).$$

Оскільки на вільному кінці стержня $z = h$ маємо граничні умови:

$$y''(h) = 0, \qquad y'''(h) = 0,$$

то обчислимо другу і третю похідну по z від виразу (44):

$$\psi''(z) = Ck^2 S(kz) + Dk^2 T(kz) + \frac{1}{k^3 EJ} k^2 T[k(z - z_1)], \quad z_1 \le z \le h,$$

$$\psi'''(z) = Ck^3 V(kz) + Dk^3 S(kz) + \frac{1}{k^3 EJ} k^3 S[k(z - z_1)], \quad z_1 \le z \le h.$$

Враховуючи граничні умови на вільному кінці стержня $(z = h)$, отримаємо наступну систему рівнянь відносно невідомих $\psi(z), C, D$:

$$\left.\begin{array}{l} -\psi(z) + CU(kz) + DV(kz) = \begin{cases} 0, & 0 \le z \le z_1, \\ -\dfrac{1}{k^3 EJ} V[k(z - z_1)], & z_1 \le z \le h, \end{cases} \\ CS(kh) + DT(kh) = -\dfrac{1}{k^3 EJ} T[k(h - z_1)], \\ CV(kh) + DS(kh) = -\dfrac{1}{k^3 EJ} S[k(h - z_1)]. \end{array}\right\} \tag{45}$$

Визначник цієї системи має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & U(kz) & V(kz) \\ 0 & S(kh) & T(kh) \\ 0 & V(kh) & S(kh) \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи даний визначник по першому стовпцю, матимемо:

$$\Delta = T(kh)V(kh) - S^2(kh). \tag{46}$$

або, після переходу до елементарних функцій, отримаємо вираз:

$$\Delta = -\frac{1}{2}(1 + ch\, kh \cos kh).$$

З системи (45) визначаємо $\psi(z)$:

$$\psi(z) = -\frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} 0 & U(kz) & V(kz) \\ T[k(h - z_1)] & S(kh) & T(kh) \\ S[k(h - z_1)] & V(kh) & S(kh) \end{vmatrix}, \qquad 0 \le z \le z_1,$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{\Delta k^3 EJ} \begin{vmatrix} V[k(z - z_1)] & U(kz) & V(kz) \\ T[k(h - z_1)] & S(kh) & T(kh) \\ S[k(h - z_1)] & V(kh) & S(kh) \end{vmatrix}, \qquad z_1 \le z \le h.$$

Розкриваючи отримані визначники, знаходимо:

$$\psi(z)=\frac{U(kz)}{\Delta k^3 EJ}\left\{T[k(h-z_1)]S(kh)-T(kh)S[k(h-z_1)]\right\}-$$
$$-\frac{V(kz)}{\Delta k^3 EJ}\left\{T[k(h-z_1)]V(kh)-S[k(h-z_1)]S(kh)\right\},\qquad 0\le z\le z_1, \tag{47}$$

$$\psi(z)=-\frac{V[k(z-z_1)]}{\Delta k^3 EJ}\left\{S^2(kh)-T(kh)V(kh)\right\}+$$
$$+\frac{U(kz)}{\Delta k^3 EJ}\left\{T[k(h-z_1)]S(kh)-T(kh)S[k(h-z_1)]\right\}- \tag{48}$$
$$-\frac{V(kz)}{\Delta k^3 EJ}\left\{T[k(h-z_1)]V(kh)-S[k(h-z_1)]S(kh)\right\},\qquad z_1\le z\le h.$$

Введемо позначення:

$$\frac{T[k(h-z_1)]\,S(kh)-T(kh)S\,[k(h-z_1)]}{\Delta k^3 EJ}=B, \tag{49}$$

$$\frac{T\,[k(h-z_1)]V(kh)-S\,[k(h-z_1)]S(kh)}{\Delta k^3 EJ}=G, \tag{50}$$

$$\frac{S^2(kh)-T(kh)V(kh)}{\Delta k^3 EJ}=K. \tag{51}$$

Підставляючи вирази (49), (50), (51) у вирази (47), (48), отримаємо:

$$\psi(z)=BU(kz)-GV(kz),\qquad 0\le z\le z_1, \tag{52}$$

$$\psi(z)=-KV[k(z-z_1)]+BU(kz)-GV(kz),\qquad z_1\le z\le h. \tag{53}$$

Визначаємо далі коефіцієнти M,N,L, що входять до виразу (42).

Підставляючи вирази (52), (53) у вираз (37), знаходимо значення коефіцієнта M :

$$M=\rho\pi tg^2\gamma\int_0^{z_1}[BU(kz)-GV(kz)]^2 z^2 dz+$$
$$+\rho\pi tg^2\gamma\int_{z_1}^{h}\left\{-KV[k(z-z_1)]+BU(kz)-GV(kz)\right\}^2 z^2 dz. \tag{54}$$

Для визначення коефіцієнта N знаходимо другі похідні від виразів (52), (53).

$$\psi''(z)=Bk^2S(kz)-Gk^2T(kz),\qquad 0\le z\le z_1, \tag{55}$$

$$\psi''(z)=-Kk^2T[k(z-z_1)]+Bk^2S(kz)-Gk^2T(kz),\qquad z_1<z\le h. \tag{56}$$

Підставляючи вирази (55), (56) у вираз (38), знаходимо значення коефіцієнта N :

$$N=\frac{E\pi tg^4\gamma}{4}\int_0^{z_1}k^4[BS(kz)-GT(kz)]^2 z^4 dz+$$
$$+\frac{E\pi tg^4\gamma}{4}\int_{z_1}^{h}k^4\left\{-KT[k(z-z_1)]+BS(kz)-GT(kz)\right\}^2 z^4 dz. \tag{57}$$

Значення коефіцієнта L знаходимо підстановкою виразів (52), (53) у вираз (39):

$$L=\int_0^{z_1}\left[H\sigma_1(z-z_1)-\pi c\,z\,tg\gamma\right]\cdot\left[BU(kz)-GV(kz)\right]dz+$$
$$+\int_{z_1}^{h}\left[H\sigma_1(z-z_1)-\pi c\,z\,tg\gamma\right]\left\{-KV\left[k(z-z_1)\right]+BU(kz)-GV(kz)\right\}dz. \qquad (58)$$

Обчислення коефіцієнтів M і N можна здійснити за допомогою ПЕОМ, або безпосередньо інтегруючи функції Крилова, або після переходу до елементарних функцій згідно виразів (26).

Оскільки у вираз (58) для знаходження коефіцієнта L входить імпульсивна функція $\sigma_1(z-z_1)$, яка не відноситься до класичних функцій, то обчислимо інтеграли, що входять до зазначеного виразу, аналітичним способом.

Розглянемо спочатку наступний інтеграл:

$$\int_0^{z_1}H\sigma_1(z-z_1)\cdot\left[BU(kz)-GV(kz)\right]dz.$$

Враховуючи означення і властивості функції $\sigma_1(z-z_1)$, можемо написати:

$$\int_0^{z_1}H\sigma_1(z-z_1)\left[BU(kz)-GV(kz)\right]dz=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_0^{z_1-\varepsilon}H\sigma_1(z-z_1)\left[BU(kz)-GV(kz)\right]dz+$$

$$+\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_{z_1-\varepsilon}^{z_1+\varepsilon}H\sigma_1(z-z_1)\left[BU(kz)-GV(kz)\right]dz=$$

$$=0+H\left[BU(kz_1)-GV(kz_1)\right]\cdot\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_{z_1-\varepsilon}^{z_1+\varepsilon}\sigma_1(z-z_1)dz.$$

Оскільки

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_{z_1-\varepsilon}^{z_1+\varepsilon}\sigma_1(z-z_1)dz=1,$$

то отримуємо:

$$\int_0^{z_1}H\sigma_1(z-z_1)\left[BU(kz)-GV(kz)\right]dz=H\left[BU(kz_1)-GV(kz_1)\right]. \qquad (59)$$

Слід відмітити, що на інтервалах і $[z_1+\varepsilon)$ функція $\psi(z)$ має різні аналітичні вирази ((52) і (53) відповідно), проте при $\varepsilon\to0$ границі цих виразів співпадають і дорівнюють

$$\psi(z_1)=BU(kz_1)-GV(kz_1).$$

Тому при інтегруванні виразу

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_{z_1-\varepsilon}^{z_1+\varepsilon}H\sigma_1(z-z_1)\cdot\psi(z)\,dz$$

можна вибрати будь-який із зазначених виразів для функції $\psi(z)$, наприклад (52).

Обчислимо далі наступний інтеграл виразу (58):

$$\int_{z_1}^{h}H\sigma_1(z-z_1)\left\{-KV\left[k(z-z_1)\right]+BU(kz)-GV(kz)\right\}dz=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_{z_1+\varepsilon}^{h}H\sigma_1(z-z_1)\left\{-KV\left[k(z-z_1)\right]+BU(kz)-GV(kz)\right\}dz=0, \qquad (60)$$

оскільки на інтервалі $(z_1+\varepsilon, h]$

$$\sigma_1(z-z_1)=0.$$

Знайдемо далі значення інтегралу

$$\int_0^{z_1} \pi c\, z\, tg\gamma\left[BU(kz)-GV(kz)\right]dz\,.$$

Застосувавши метод інтегрування за частинами отримаємо:

$$\int_0^{z_1} \pi c\, z\, tg\gamma[BU(kz)-GV(kz)]dz=\frac{c\pi z_1}{k}tg\gamma\cdot[BV(kz_1)-GS(kz_1)]- \\ -\frac{c\pi}{k^2}tg\gamma[BS(kz_1)-GT(kz_1)-1]. \tag{61}$$

Аналогічно обчислюємо наступний інтеграл:

$$\int_{z_1}^{h} \pi c\, z\, tg\gamma\cdot\left\{-KV[k(z-z_1)]+BU(kz)-GV(kz)\right\}dz= \\ =\frac{c\pi h}{k}\cdot tg\gamma\left\{-KS[k(h-z_1)]+BV(kh)-GS(kh)\right\}- \\ -\frac{c\pi z_1}{k}tg\gamma\cdot[-K+BV(kz_1)-GS(kz_1)]- \\ -\frac{c\pi}{k^2}tg\gamma\cdot\left\{-KT[k(h-z_1)]+BS(kh)-GT(kh)\right\}+\frac{c\pi}{k^2}tg\gamma[BS(kz_1)-GT(kz_1)]. \tag{62}$$

Підставивши значення інтегралів (59)-(62) у вираз (58), отримаємо:

$$L=H[BU(kz_1)-GV(kz_1)]-\frac{c\pi z_1 tg\gamma}{k}\cdot[BV(kz_1)-GS(kz_1)]+ \\ +\frac{c\pi tg\gamma}{k^2}\cdot[BS(kz_1)-GT(kz_1)-1]- \\ -\frac{c\pi h tg\gamma}{k}\cdot\left\{-KS[k(h-z_1)]+BV(kh)-GS(kh)\right\}+ \\ +\frac{c\pi z_1 tg\gamma}{k}\cdot[-K+BV(kz_1)-GS(kz_1)]+ \\ +\frac{c\pi tg\gamma}{k^2}\cdot\left\{-KT[k(h-z_1)]+BS(kh)-GT(kh)\right\}- \\ -\frac{c\pi tg\gamma}{k^2}\cdot[BS(kz_1)-GT(kz_1)]\,. \tag{63}$$

Підставляючи вирази (54), (57) та (63) у вираз (42), отримаємо необхідне значення параметра α, при якому функціонал (34) матиме стаціонарне значення. Отже, враховуючи вирази (35), (52) і (53), отримаємо вираз для форми вимушених поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті.

Зазначені вирази мають наступний вигляд:

$$\varphi(z)=\alpha\cdot[BU(kz)-GV(kz)], \qquad 0\le z\le z_1, \\ \varphi(z)=\alpha\cdot\left\{-KV[k(z-z_1)]+BU(kz)-GV(kz)\right\}, \qquad z_1\le z\le h, \tag{64}$$

де α визначається згідно виразу (42).

Підставивши вираз (64) у вираз (31), остаточно отримаємо закон вимушених поперечних коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті:

$$y(z,t)=\alpha\left[BU(kz)-GV(kz)\right]\sin\omega t, \qquad 0\le z\le z_1,$$

$$y(z,t)=\alpha\left\{-KV\left[k(z-z_1)\right]+BU(kz)-GV(kz)\right\}\sin\omega t,\ z_1\le z\le h. \qquad (65)$$

Зупинимось далі на визначенні деяких величин, що входять у отримані вище вирази.

Оскільки за базисні функції взяті форми вимушених поперечних коливань стержня постійної жорсткості EJ, то необхідно визначити зазначену величину. Очевидно, що стержнем постійної жорсткості при $E=const$ є, наприклад, стержень циліндричної форми. Тому будемо вважати, що згаданий стержень має форму прямого кругового циліндра для якого осьовий момент інерції його поперечного перерізу дорівнює:

$$J=\frac{\pi r_{ст.}^4}{4}, \qquad (66)$$

де $r_{ст.}$ - радіус стержня.

Будемо також вважати, що маса стержня дорівнює масі коренеплоду, а отже стержень і коренеплід матимуть однакові інерційні властивості. Якщо до того ж припустити, що густина матеріалу стержня дорівнює густині коренеплоду ρ, то при однакових масах стержень і коренеплід повинні мати однаковий об'єм. Припустимо також, що стержень і коренеплід мають одну і ту ж саму довжину h. Оскільки коренеплід уявлено у вигляді прямого кругового конуса, а стержень – прямого кругового циліндра, то має місце наступне співвідношення для їхніх об'ємів:

$$\frac{1}{3}\pi r_к^2\cdot h=\pi r_{ст.}^2 h, \qquad (67)$$

де $r_{к.}$ - радіус коренеплоду (основи конуса).

З останнього співвідношення знаходимо:

$$r_{ст.}=\frac{r_к}{\sqrt{3}}.$$

Тоді, враховуючи (66), отримаємо:

$$J=\frac{\pi r_к^4}{36}.$$

Будемо також вважати, що модуль Юнга для матеріалу стержня дорівнює модулю Юнга для коренеплоду і дорівнює E.

Таким чином, жорсткість стержня буде дорівнювати:

$$EJ=\frac{\pi r_к^4\cdot E}{36}, \qquad (68)$$

або, враховуючи, що $r_k=h\cdot tg\gamma$, остаточно матимемо:

$$EJ=\frac{\pi h^4\cdot tg^4\gamma\cdot E}{36}. \qquad (69)$$

Погонну масу μ стержня визначаємо наступним чином. В силу припущення, що маси стержня і коренеплоду рівні, знаходимо масу m стержня:

$$m=\frac{1}{3}\pi r_{к.}^2\cdot h\rho,$$

тоді

$$\mu=\frac{m}{h}=\frac{1}{3}\pi r_к^2\rho,$$

або

$$\mu = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot tg^2\gamma \cdot \rho .$$

Після цього можливо визначити величину k, що дорівнює:

$$k = \sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EJ}} . \tag{70}$$

За результатами приведених вище теоретичних досліджень вимушених поперечних коливань тіла коренеплоду можна побудувати алгоритм розрахунку зазначених коливань на ПЕОМ.

Даний алгоритм складається з наступних етапів:

1. Задаємо вихідні дані, необхідні для розрахунку, а саме: довжину коренеплоду h, кут його конусності γ, модуль Юнга E, густину ρ, амплітуду H збурювальної сили, частоту ω збурювальної сили, коефіцієнт c пружної деформації грунту, координату точки захвату z_1.
2. Обчислюємо величину EJ згідно виразу (68).
3. Обчислюємо величину k згідно виразу (70).
4. Знаходимо визначник Δ згідно виразу (46).
5. Обчислюємо коефіцієнти B, G, K згідно виразів (49), (50), (51) відповідно.
6. Визначаємо коефіцієнти M, N, L згідно виразів (54), (57), (63) відповідно.
7. Обчислюємо параметр α згідно виразу (42).
8. Обчислюємо форму (амплітуду) вимушених поперечних коливань згідно виразів (64) для ряду поперечних перерізів тіла коренеплоду (для ряду значень z).

Результатом розрахунку буде графік, що покаже залежність амплітуди вимушених поперечних коливань тіла коренеплоду від величини амплітуди H збурювальної сили.

Висновки:

1. Розроблені основні положення теорії поперечних коливань тіла коренеплоду при вібраційному його викопуванні для випадку, коли збурювальні сили співпадають з напрямком поступального переміщення викопуючого робочого органу.
2. Використовуючи варіаційний принцип Остроградського – Гамільтона, отримані аналітичні вирази для обчислення власних частот вільних поперечних коливань та амплітуди вимушених поперечних коливань тіла коренеплоду для будь-якого його поперечного перерізу.
3. Розроблено алгоритм розрахунку, згідно якого, підставляючи в отримані аналітичні вирази значення конкретних параметрів коренеплодів (наприклад, цукрового буряку), можна визначити форму (амплітуду) вимушених поперечних коливань для ряду поперечних перерізів тіла коренеплоду в залежності від величини амплітуди збурювальної сили.
4. Результати проведених аналітичних досліджень використані при розробці нових конструкцій вібраційних виконуючих робочих органів.

Список літератури

1 Дубровский А.А. Вибрационная техника в сельском хозяйстве. – М.: Машиностроение, 1968. – 204 с.

2 Василенко П.М., Погорелый Л.В., Брей В.В. Вибрационный способ уборки корнеплодов // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства, 1970, №2. – С. 9-13.

3 Брей В.В. Исследование и разработка механизированного процесса извлечения из почвы корней сахарной свеклы. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – К.: УСХА, 1972. – 196 с.

4 Свеклоуборочные машины (конструирование и расчёт) // Л.В. Погорелый, Н.В. Татьянко, В.В. Брей и др.; Под общ. ред. Л.В. Погорелого.– К.: Техніка, 1983. –168 с.
5 Булгаков В.М., Головач І.В., Войтюк Д.Г. Теорія вібраційного викопування коренеплодів. – Механізація сільськогосподарського виробництва: Збірник наукових праць національного аграрного університету. Том XV, К.: НАУ. – 2003. – С. 45-85.
6 Булгаков В.М., Головач І.В., Войтюк Д.Г. Теорія повздовжніх коливань коренеплоду при вібраційному вилучені з ґрунту. – Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства: Механізація сільськогосподарського виробництва: Збірник наукових праць, Випуск 20. Харків: ХДТУСГ, 2003. – С. 216-240.
7 Булгаков В.М., Головач І.В. Використання вібраційних робочих органів при викопуванні коренеплодів цукрових буряків // Вісник аграрної науки, 2004, №2. –С.40-45.
8 Булгаков В.М., Головач І.В., Войтюк Д.Г. Теорія поперечних коливань коренеплоду при вібраційному викопуванні. – Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Випуск 18. Мелітополь, 2004.– С. 8-24.
9 Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.

Создана теория поперечных колебаний закрепленного в почве корнеплода, которые происходят под действием гармонической возмущающей силы, направленной перпендикулярно к оси корнеплода вдоль поступательного движения выкапывающего рабочего органа. На основании использования вариационного принципа Остроградского-Гамильтона получено уравнение собственных частот свободных поперечных колебаний и аналитическое выражение для определения амплитуды вынужденных поперечных колебаний тела корнеплода, закрепленного в почве.

The theory of lateral oscillations of a root crop, fixed in soil which occur under act of the harmonic disturbing force directed perpendicularly to a root crop axis along a translational motion of the digging out tool is created. Based on the Ostrogradskii - Hamilton variational principle the equation of fundamental frequencies of free lateral oscillations and an analytical form for definition of forced lateral oscillations amplitude of a root crop body, fixed in soil is received.

Одержано 10.07.05