

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**КАФЕДРА АВТОМАТИЗАЦІЇ ВИРОБНИЧИХ  
ПРОЦЕСІВ**

**ОСНОВИ СУЧАСНОЇ ТЕОРІЇ УПРАВЛІННЯ.  
ПРАКТИКУМ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТРИЧНОЇ  
ЛАБОРАТОРІЇ MATLAB**

**для здобувачів спеціальності G7«Автоматизація,  
комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»  
всіх форм навчання**

**“Затверджено”  
на засіданні кафедри автоматизації  
виробничих процесів,  
протокол № 10 від 27 травня 2026 р.**

**КРОПИВНИЦЬКИЙ  
2026**

Основи сучасної теорії управління. Практикум з використанням матричної лабораторії Matlab для здобувачів спеціальності G7«Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх форм навчання /Укладачі: А.М. Мацуй, М.О. Федотова. – Кропивницький: ЦНТУ, 2026. – 62 с.

Укладачі : Мацуй А.М., доктор технічних наук, професор  
Федотова М.О., кандидат технічних наук, асистент.

Рецензент: Сербул О.М., кандидат технічних наук, доцент.

## Зміст

### Вступ

1 Вивчення математичного забезпечення для вирішення задач дослідження систем керування

1.1 Ознайомлення з пакетом прикладних програм MATLAB

2 Дослідження цифрових систем автоматичного керування

2.1 Отримання передаточних функцій цифрових систем автоматичного керування

2.2 Аналіз стійкості цифрових систем автоматичного керування

2.3 Аналіз якості цифрових систем автоматичного керування

3 Змінні стану динамічної системи

3.1 Опис систем в просторі станів

3.2 Зв'язок між передаточною функцією та рівняннями стану

3.3 Опис з'єднань систем у просторі станів

3.4 Керованість та спостережуваність

4 Випадкові процеси в системах автоматичного керування

4.1 Уявлення про випадкові процеси

4.2 Спектральна густина випадкового процесу

4.3 Типові кореляційні функції та спектральні густини

4.4 Проходження стаціонарного випадкового сигналу через лінійну стему автоматичного керування

4.5 Спектральний аналіз та статистична обробка сигналів

4.5.1 Спектр дискретного випадкового процесу

4.5.2 Вагові функції (вікна)

Перелік рекомендованої літератури

# 1 ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

## 1.1 Ознайомлення з пакетом прикладних програм MATLAB

Система **MATLAB** (матрична лабораторія) представляє собою мову програмування високого рівня для виконання математичних обчислень.

Розглянута нижче система **MATLAB** (Matrix Laboratory) є інтерактивною системою для виконання інженерних і наукових розрахунків, орієнтована на *роботу з масивами* даних. Вона допускає написання спеціальною мовою програм, які мають назву *М-файлів*, підтримує роботу в програмному й інтерактивному режимі з векторами і матрицями, дозволяє вирішувати системи рівнянь, виконувати чисельне інтегрування, будувати графіки й ін. Система допускає використання пакетів прикладних програм (ППП) символічної математики, статистики, оптимізації, аналізу і синтезу систем керування, обробки сигналів і зображень та ін. Система дозволяє виконувати обмін інформацією з текстовим редактором Microsoft Word, зокрема переносити будь-які тексти і малюнки в буфер або зчитувати текстові рядки з буфера як команди, що будуть виконуватись.

Після запуску з'являється основне вікно системи **MATLAB**, яке показано на рисунку 1.1. Воно має звичайні органи керування для зміни розмірів, переміщення та закриття.

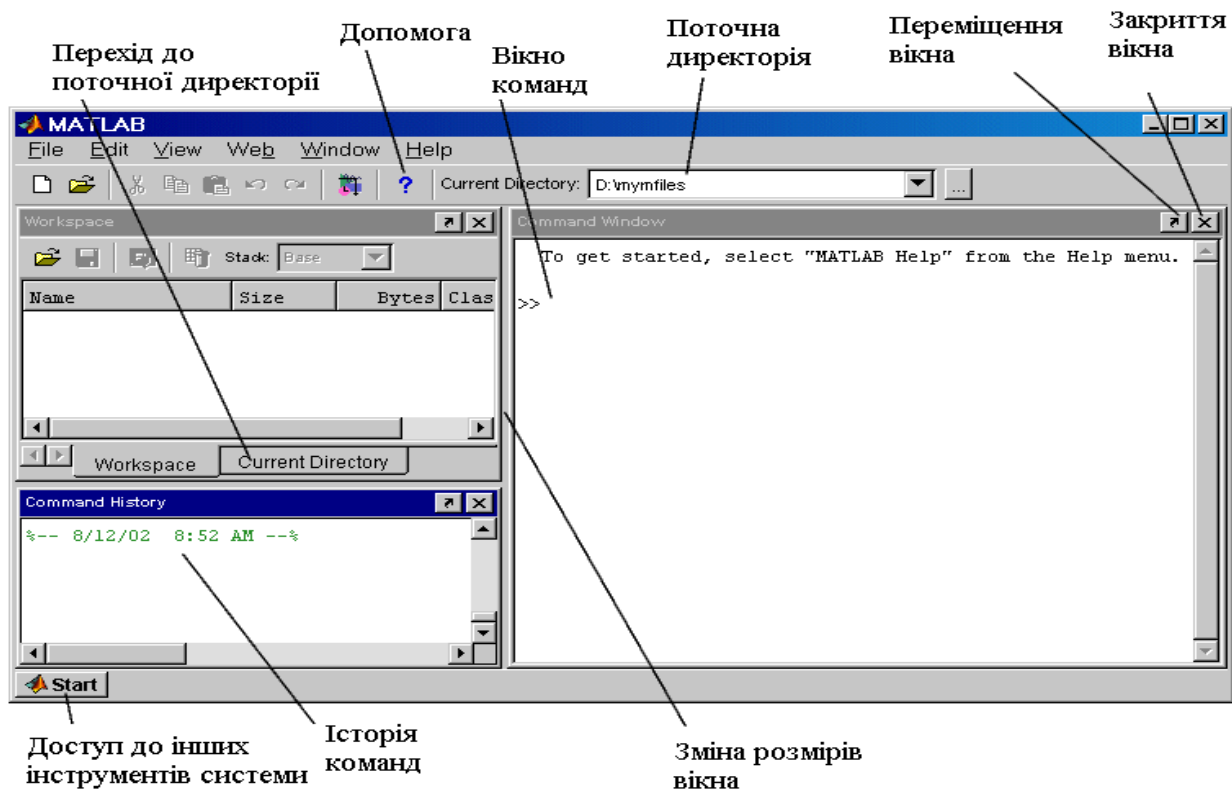


Рисунок 1.1 – Основне вікно системи **MATLAB**

Як правило, всі обчислення виконуються в *командному режимі* в Командному Вікні (**Command Window**) системи, вигляд якого зображено на рисунку 1.2.

Робочий простір (**Workspace**) містить інформацію про змінні, які використовуються (рисунок 1.3).

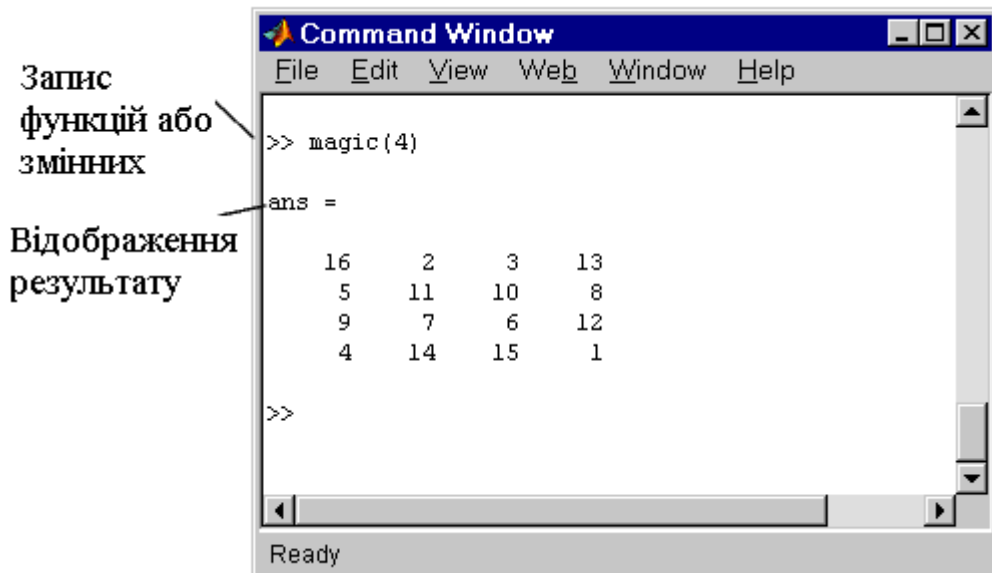


Рисунок 1.2 – Вікно команд

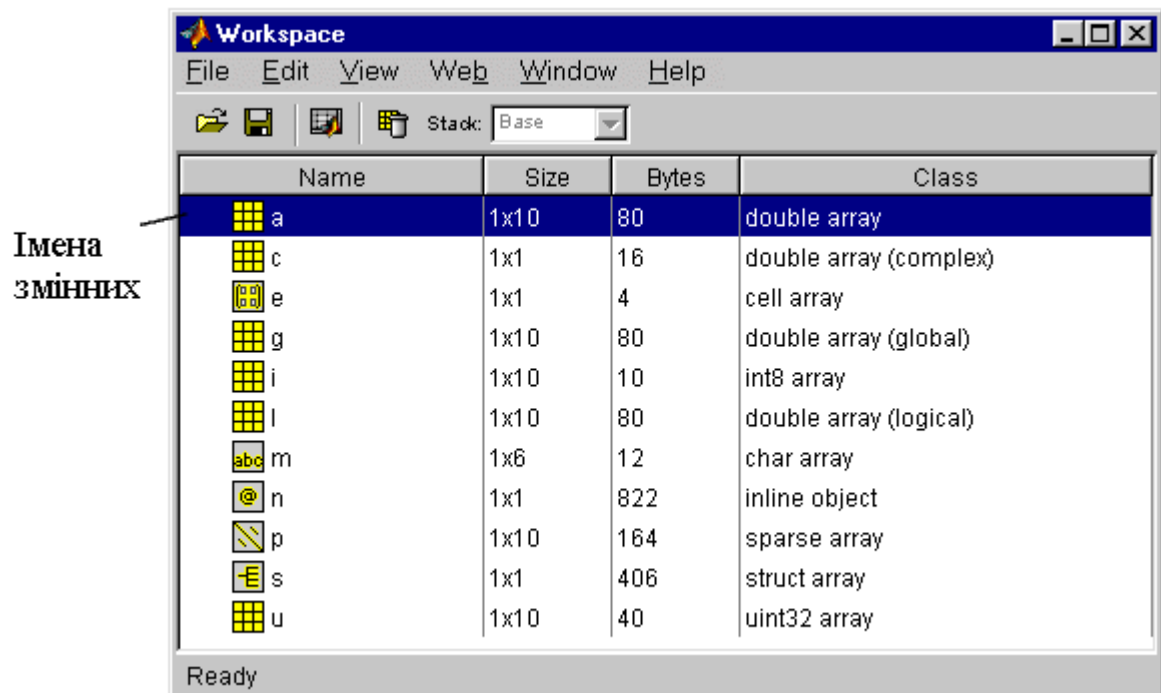


Рисунок 1.3 – Робочий простір

При роботі з **MATLAB** діє найпростіший редактор, команди якого перераховано нижче :

- → або **Ctrl+b** – переміщення курсору вправо на один символ;
- ← або **Ctrl+f** – переміщення курсору вліво на один символ;
- **Ctrl+→** або **Ctrl+r** – переміщення курсору вправо на одне слово;
- **Ctrl+←** або **Ctrl+l** – переміщення курсору вліво на одне слово;
- **Home** або **Ctrl+a** – переміщення курсору на початок рядку;
- **End** або **Ctrl+e** – переміщення курсору в кінець рядку;
- ↑ або ↓ або **Ctrl+p** і **Ctrl+n** – перегортання попередніх команд вгору або вниз для підстановки в рядок вводу;
- **Del** або **Ctrl+d** – видалення символу справа від курсору;
- **Backspace** або **Ctrl+h** – видалення символу зліва від курсору;
- **Ctrl+k** – видалення до кінця рядку;
- **Ins** – включення або виключення режиму вставки;
- **PgUp** – перегортання сторінок сесії вгору;
- **PgDn** – перегортання сторінок сесії вниз;
- **Esc** – очищення рядку вводу.

На рисунку 4 приведено частину вікна системи **MATLAB** , яке містить головне меню та панель інструментів :

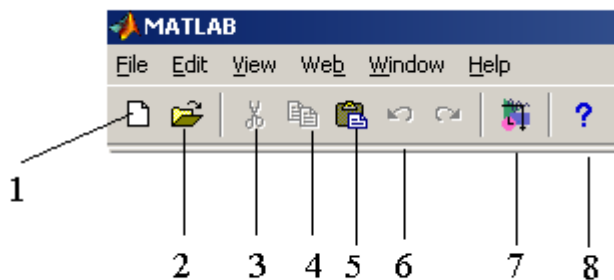


Рисунок 1.4 – Частина вікна **MATLAB** з головним меню та панеллю інструментів

1. **New File** – вивід порожнього вікна редактору m – файлів ;
2. **Open File** – відкриває вікно для завантаження m – файлу;
3. **Cut** – видалення об'єкту ;
4. **Copy** – копіювати виділений фрагмент;
5. **Paste** – перенесення фрагменту із буферу обміну в поточний рядок вводу;
6. **Undo** – відмінити попередню операцію;
7. **New Simulink Model** – відкриття вікна **Simulink** ;
8. **Help Window** – відкриття вікна довідки по системі.

Набір кнопок панелі інструментів забезпечує виконання потрібних команд. Про призначення команд говорять і впливаючі підказки, які з'являються при наведенні миші на відповідну кнопку.

**Типи змінних.** Змінні – це об’єкти, які мають імена, і які здатні зберігати деякі дані, звичайно різні за значенням. В залежності від цих даних розрізняють числові, символічні, векторні або матричні змінні.

В системі **MATLAB** можна задавати змінним визначені значення. Для цього використовується операція присвоєння, яка вводиться знаком рівності :

### **Ім’я змінної=Вираз**

Типи змінних наперед не декларуються. Вони визначаються виразом, значення якого присвоюється змінній. Так, якщо це вираз або матриця, то змінна буде матричною або векторною.

Ім’я змінної (ідентифікатор) може містити не більше 31 символу. Ім’я будь якої змінної не повинно співпадати з ім’ям інших змінних, функцій і процедур системи, тобто воно повинно бути унікальним. Ім’я повинно починатись з літери, може містити цифри та знак підкреслювання `_`. Неприпустимим є включення до імені змінних спеціальних знаків.

**Оператори.** Як відомо, оператор – це спеціальне позначення деякої операції над даними – операндами. Наприклад, найпростішими арифметичними операторами є знак суми `+`, різниці. Оператори використовуються разом з операндами. Слід відмітити, що більшість операторів відноситься до матричних операцій. Специфічними для системи **MATLAB** є оператори `.*` та `./`, які позначають поелементне множення та ділення масивів:

```
>> V1=[1 2 5 ];
>> V2=[1 2 7];
>> V1.*V2

ans =

     1     4    35
```

```
>>
```

### **Застосування оператора : (двокрапка).**

Дуже часто необхідно сформулювати упорядковані числові послідовності. Такі послідовності потрібні для створення векторів або значень абсциси при побудові графіків. Саме для цього в **MATLAB** використовується оператор `:` (двокрапка) :

### **Початкове\_значення:Крок:Кінцеве\_значення**

Якщо крок не задано, то він приймає по умовчання значення 1 :

```
>> V=0:pi/2:2*pi

V =

     0     1.5708     3.1416     4.7124     6.2832

>>
```

Таким чином, даний оператор є дуже зручним засобом для створення регулярної послідовності чисел. Він широко застосовується при побудові графіків.

### **Кольорові виділення та синтаксичний контроль.**

Вбудований редактор виконує синтаксичний контроль по мірі вводу тексту. При цьому використовуються наступні кольорові виділення :

- ключові слова мови програмування – синій колір;
- оператори, константи та змінні – чорний колір;
- коментар після знаку % - зелений колір;
- синтаксичні помилки – червоний колір.

Завдяки здійсненню кольорових виділень імовірність синтаксичних помилок знижується.

## 2 ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

### 2.1 Отримання передаточних функцій цифрових систем автоматичного керування

Цифровою системою автоматичного керування називається система, у замкнутому контурі якої є хоча б один пристрій, що перетворює безперервні сигнали у цифрові коди і виконує математичні операції над цими кодами. У контурі цифрової системи цифровий регулятор виконує властиві йому математичні операції і видає результат в дискретні моменти часу  $t=T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$ . В інтервалах між цими моментами на виході регулятора зберігається те значення, яке було на початку розглядуваного інтервалу. Тому на виході регулятора існує не безперервна функція  $x(t)$ , а відповідна ступінчаста  $x(nT_0)$ , тобто здійснюється квантування за часом (рисунок 1). Крім того, відбувається квантування за рівнем, тому що внаслідок цифрової подачі інформації, вихідний сигнал може набувати лише певних фіксованих рівнів, що відрізняються один від одного на величину  $q$ . Величина  $q$  відповідає одиниці молодшого розряду цифрового регулятора, тобто безперервний сигнал  $x(t)$  подається у вигляді  $x(t) = x(nT_0) + \sigma$ , де  $|\sigma| < q$ , а  $x(nT_0)$  містить ціле число рівнів  $q$ .

Таким чином, в цифрових системах автоматичного керування здійснюється квантування і за рівнем, і за часом. Квантування за рівнем робить цифрову систему нелінійною, а за часом – дискретною. Однак при малому значенні  $q$  впливом квантування за рівнем на динаміку системи можна знехтувати, тобто покласти  $q=0$ . В цьому разі для дослідження цифрових систем застосовується математичний апарат дослідження лінійних імпульсних систем з амплітудно – імпульсною модуляцією : дискретне  $Z$  – перетворення і різницеві рівняння.

Спрощену структурну схему цифрової системи автоматичного керування подано на рисунку 2. Безперервний сигнал похибки  $\varepsilon(t)$  імпульсним елементом  $IE1$  перетворюється в решітчасту цифрову функцію  $\varepsilon[n]$  і надходить на вхід ЦОМ, яку подано у вигляді передаточної функції  $D(z)$ . Вихідний сигнал ЦОМ імпульсним елементом  $IE2$  і формувачем  $W_\phi(s)$  перетворюється в ступінчастий сигнал. Безперервну частину системи подано ланкою з передаточною функцією  $W_{\phi n}(s)$ .

На виході формувача імпульсів протягом усього періоду квантування  $T_0$  зберігається попереднє значення сигналу, тому формувач є фіксатором (екстраполятором) нульового порядку. Його передаточна функція має вигляд :

$$W_\phi(s) = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \quad (2.1.1)$$

або через те, що  $e^{T_0 s} = z$ , тому можна записати :

$$W_\phi = \frac{z - 1}{zs} \quad (2.1.2)$$

Таким чином, передаточна функція зведеної неперервної частини визначається формулою :

$$W_n(s) = W_\phi(s)W_{\delta n}(s) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{W_{\delta n}(s)}{s}, \quad (2.1.3)$$

а її дискретна передаточна функція визначиться наступним чином :

$$W_n(z) = Z\{W_n(s)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_{\delta n}(s)}{s}\right\} \quad (2.1.4)$$

Якщо в каналі керування є затримка в часі, то останній вираз запишеться у вигляді:

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W_{\delta n}(s)}{s} e^{-\tau s}\right\} \quad (2.1.5)$$

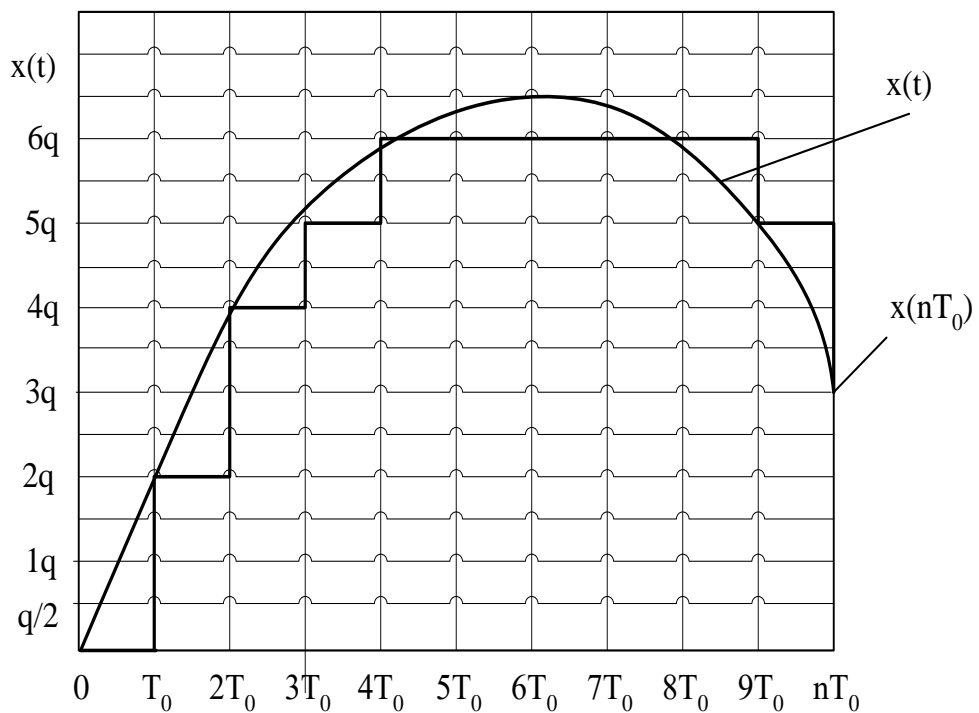


Рисунок 2.1

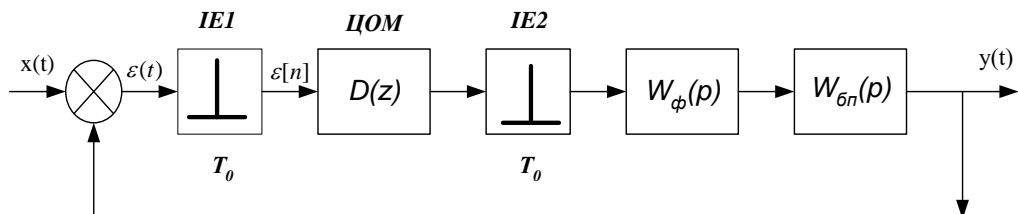


Рисунок 2.2

Z – перетворення  $\left\{ \frac{W_{\text{он}}(s)}{s} \right\}$  знаходять за допомогою таблиць Z – перетворень після розкладу на прості дробі.

**Таблиця 2.1.** Z – перетворення

$x(t)$	$X(p)$	$X(z)$
$\delta(t) = \begin{cases} 1, t = 0, \\ 0, t = nT, n \neq 0 \end{cases}$	1	1
$\delta(t - nT) = \begin{cases} 1, t = nT, \\ 0, t \neq nT \end{cases}$	$e^{-nT_0}$	$Z^{-n}$
одинична ступінчаста функція	1/s	$\frac{z}{z-1}$
t	1/s <sup>2</sup>	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT_0}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT_0})z}{(z-1)(z - e^{-aT_0})}$
sin $\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T_0}{z^2 - 2z \cos \omega T_0 + 1}$
cos $\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T_0)}{z^2 - 2z \cos \omega T_0 + 1}$

**Таблиця 2.2.** Основні властивості Z – перетворення.

$x(t)$	$X(z)$
1. $kx(t)$	$kX(z)$
2. $x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(z) + X_2(z)$
3. $x(t+T)$	$zX(z) - zx(0)$
4. $tx(t)$	$-Tz \frac{dX(z)}{dz}$
5. $e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
6. $x(0)$ , початкове значення	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ , якщо границя існує
7. $x(\infty)$ , кінцеве значення	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$ , якщо система стійка, то границя існує, тобто, якщо всі полюси $(z-1)X(z)$ знаходяться всередині кола одиничного радіусу $ z =1$ на $z$ – площині

Передаточна функція замкнутої системи :

$$H(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} \quad (2.1.7)$$

де  $W(z)$  – передаточна функція розімкнутої системи.

Передаточна функція за похибкою :

$$H_{\varepsilon}(z) = \frac{1}{1+W(z)} \quad (2.1.8)$$

Отримання частотної передаточної функції :

$$W(z) \rightarrow z = \frac{(1+w)}{(1-w)} \text{ (виконання білінійного перетворення)} \rightarrow W(w) \rightarrow w = j\lambda \frac{T}{2} \rightarrow W(j\lambda),$$

де  $\lambda$  – псевдочастота,  $T$  – період квантування.

**Приклад 2.1.** Передаточна функція неперервної частини системи :

$$W(s) = \frac{10}{s(1+0.05s)}$$

період квантування  $T=0,1$ с.

Дискретна передаточна функція визначається в наступній послідовності :

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{10}{s^2(1+0.05s)} \right\} = 10 \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{-0.05}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{0.05}{s+1/0.05} \right\}$$

$Z$  – перетворення кожного доданку визначається згідно таблиць  $Z$  – перетворення:

$$\begin{aligned} W(z) &= 10 \frac{z-1}{z} \left[ \frac{-0.05z}{z-1} + \frac{0.1}{(z-1)^2} + \frac{z \cdot 0.05}{z - e^{-\frac{0.1}{0.05}}} \right] = 10 \left[ -0.05 + \frac{0.1}{z-1} + \frac{0.05(z-1)}{z - e^{-\frac{0.1}{0.05}}} \right] = \\ &= \frac{10 \cdot 0.05 \left[ z - e^{-\frac{0.1}{0.05}} - \frac{0.05}{0.1} (z - e^{-\frac{0.1}{0.05}})(z-1) \right]}{(z-1)(z - e^{-\frac{0.1}{0.05}})} = \frac{0.568z + 0.297}{(z-1)(z - e^{-\frac{0.1}{0.05}})} = \frac{0.568z + 0.297}{z^2 - 1.135z + 0.1353} \end{aligned}$$

$Z$  – перетворення в середовищі Matlab виконується за допомогою команди

$$W2=c2d(W,T,'zoh')$$

де  $W$  – вираз передаточної функції неперервної частини системи,  $T$  – період квантування, 'zoh' – вказує на наявність в системі екстраполятору нульового порядку.

Нижче наведено скрипт – файл для виконання  $Z$  – перетворення за допомогою **MATLAB** для вище наведеного прикладу:

```
>> W=tf([10],[0.05 1 0])           %ввод коефіцієнтів поліномів чисельника і знаменника
Transfer function:
    10
-----
 0.05 s^2 + s
                                     %передаточної функції неперервної частини

>> T=0.1;                          %період квантування
>> W2=c2d(W,T,'zoh')              %Z – перетворення виконується за наявності екстраполятору нульового порядку ('zoh')
Transfer function:
    0.5677 z + 0.297
-----
  z^2 - 1.135 z + 0.1353
                                     % результат виконання операції

Осуществление выборки времени: 0.1
```

Результати виконання  $Z$  – перетворення за допомогою розкладу виразу передаточної функції на прості дроби і за допомогою **MATLAB** співпадають.

**Завдання для самостійного виконання:** виконати  $Z$  – перетворення для передаточної функції неперервної частини системи згідно варіанту шляхом розкладу передаточної функції неперервної частини системи і за допомогою **MATLAB**. Результати порівняти.

**Таблиця 2.3.** Варіанти завдань

№	Вид передаточної функції неперервної частини системи	№	Варіанти параметрів
	$W(p)$		Значення $T_i$ [с]
1.	$\frac{K(T_1s+1)}{s(T_2s+1)}$ Період квантування $T=0.1$ с	1.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.1, K=1$
		2.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.01, K=2$
		3.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.9, K=1.5$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1, K=10$
		5.	$T_1 = 0.15, T_2 = 0.2, K=5$
2.	$\frac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$ Період квантування $T=0.5$ с	1.	$T = 0.1, \zeta = 1, K=1$
		2.	$T = 0.05, \zeta = 0.707, K=1.5$
		3.	$T = 0.03, \zeta = 0.1, K=1$
		4.	$T = 0.08, \zeta = 0.5, K=8$
		5.	$T = 0.01, \zeta = 0.15, K=12$
3.	$\frac{K(T_1s+1)}{s(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$ Період квантування $T=1$ с	1.	$T_1 = 0.03, T_2 = 0.5, T_3 = 0.1, T_4 = 0.05, K=1$
		2.	$T_1 = 0.05, T_2 = 0.4, T_3 = 0.08, T_4 = 0.033, K=10$
		3.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.45, T_3 = 0.1, T_4 = 0.05, K=7$
		4.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.25, T_3 = 0.1, T_4 = 0.02, K=3$
		5.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.25, T_3 = 0.1, T_4 = 0.05, K=4$

Продовження таблиці 1.3

4.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4^2s^2 + 2T_4\zeta s + 1)}$ <p>Період квантування <math>T=0.3с</math></p>	1.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5,$ $K=2$
		2.	$T_1 = 0.07, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5,$ $K=4$
		3.	$T_1 = 0.3, T_2 = 0.1, T_3 = 0.05,$ $T_4 = 0.07, \zeta = 0.5, K=0.3$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1, T_3 = 0.1,$ $T_4 = 0.07, \zeta = 0.5, K=1$
		5.	$T_1 = 0, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5,$ $K=1.2$

## 2.2 Аналіз стійкості цифрових систем автоматичного керування

Стійкість цифрових систем автоматичного керування визначається за виглядом коренів характеристичного рівняння. На  $p$  – площині корені стійкої системи повинні знаходитись в лівій її половині. Перехід до комплексної змінної  $z$  відображає ліву напівплощину в внутрішню частину кола одиничного радіусу з центром в початку координат  $z$  – площини. Тому в стійкій системі корені характеристичного рівняння (знаменника передаточної функції замкнутої системи, який прирівнюється до нуля)

$$1+W(z)=0 \quad (2.2.1)$$

повинні знаходитись в середині кола одиничного радіусу, тобто бути за модулем менше одиниці  $|z_v|<1$  для  $v=1, 2, \dots, k$ , де  $k$  – порядок знаменника передаточної функції замкнутої системи.

Використання відомих критеріїв стійкості до цифрових систем автоматичного керування неможливе, зокрема до рівняння (2.2.1). Тому спочатку виконують перехід до комплексної величини  $w$  – білінійне перетворення, підставляючи в характеристичне рівняння системи наступний вираз :

$$z = \frac{(1+w)}{(1-w)} \quad (2.2.2)$$

Дана операція відображає внутрішню частину кола одиничного радіусу на ліву половину  $w$  – площини, що дозволяє використовувати відомі алгебраїчні критерії стійкості для характеристичного рівняння :

$$\left(1+W\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right)=0$$

Перехід до частотної передаточної функції  $W(j\lambda)$  підстановкою  $w=j\lambda T/2$  дозволяє використовувати для аналізу стійкості цифрових систем частотні критерії стійкості.

### **Алгебраїчні критерії стійкості.**

Алгебраїчний критерій стійкості Шур – Кона за характеристичним рівнянням замкнутої системи  $D(z)=0$  дозволяє судити про розташування полюсів на площині  $z$ . Корені характеристичного рівняння

$$D(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\dots+a_{n-1}z+a_n=0 \quad (2.2.3)$$

будуть знаходитись всередині одиничного кола (що вказує на стійкість системи), якщо коефіцієнти рівняння задовольняють наступним умовам :

$$\begin{aligned} \Delta_k < 0 & \text{ для парних } K; \\ \Delta_k > 0 & \text{ для непарних } K; \end{aligned}$$

де  $\Delta_k$  – визначник Шур – Кона вигляду :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{k-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & a_{n-k+3} & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n^* & a_{n-1}^* & a_{n-2}^* & \dots & a_{n-k+1}^* \\ a_1^* & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n^* & a_{n-1}^* & \dots & a_{n-k+2}^* \\ a_2^* & a_1^* & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_n^* & \dots & a_{n-k+3}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1}^* & a_{k-2}^* & a_{k-3}^* & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^* \end{vmatrix} \quad (2.2.4)$$

де  $k=1, 2, 3, \dots, n$ ;  $a_1^*, a_2^*, a_n^*$  – спряжені значення коефіцієнтів рівняння (2.2.3).

Для характеристичного рівняння другого порядку :

$$D(z) = z^2 + az + b = 0$$

умови стійкості Шур – Кона визначаються :

$$\left. \begin{array}{l} a) |D(0)| < 1; \\ b) D(1) > 0; \\ c) D(-1) > 0; \end{array} \right\}; \quad (2.2.5)$$

### Приклад 2.2.

Дослідити стійкість цифрової системи автоматичного керування, характеристичне рівняння якої має вигляд

$$z^3 - 1.0144z^2 + 0.302z - 0.005 = 0,$$

використовуючи критерій Шур – Кона.

За допомогою визначника (4) знайдемо парні та непарні визначники Шур – Кона:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} a_3 & 1 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.005 & 1 \\ 1 & -0.005 \end{vmatrix} = -1.000 < 0; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 1 & a_1 \\ a_2 & a_3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_1 & 1 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.005 & 0 & 1 & -1.0144 \\ 0.302 & -0.005 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0.005 & 0.302 \\ -1.0144 & 1 & 0 & -0.005 \end{vmatrix} = 0.910; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 & 1 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.005 & 0 & 0 & 1 & -1.144 & 0.302 \\ 0.302 & -0.005 & 0 & 0 & 1 & -1.144 \\ -1.144 & 0.302 & -0.005 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -0.005 & 0.302 & -1.144 \\ -1.144 & 1 & 0 & 0 & -0.005 & 0.302 \\ 0.302 & -1.144 & 1 & 0 & 0 & -0.005 \end{vmatrix} = \\ &= -0.6 < 0; \end{aligned}$$

розглянувши які робимо висновок про стійкість цифрової системи .

```

Скріпт – файли для знаходження визначників за допомогою MATLAB:
>> A1=[-0.005 1;1 -0.005]           %знаходження першого визначника
A1 =                                %інші визначники знаходимо аналогічно

    -0.0050    1.0000
    1.0000   -0.0050

>> det(A1)

ans =

   -1.0000

>> A2=[-0.005 0 1 -1.0144;0.302 -0.005 0 1;1 0 -0.005 0.302;-1.0144 1 0 -0.005]

A2 =

   -0.0050         0    1.0000   -1.0144
    0.3020   -0.0050         0    1.0000
    1.0000         0   -0.0050    0.3020
   -1.0144    1.0000         0   -0.0050

>> det(A2)

ans =

    0.9118

```

Алгебраїчний критерій Гурвіца. Для застосування даного критерію необхідно визначити передаточну функцію замкнутої системи, записати характеристичне рівняння  $D(z)$ . Потім в характеристичному рівнянні виконати підстановку  $z = \frac{(1+w)}{(1-w)}$ , таким чином характеристичне рівняння набуває вигляду:

$$D(w) = a_0 \frac{(1+w)^k}{(1-w)^k} + a_1 \frac{(1+w)^{k-1}}{(1-w)^{k-1}} + \dots + a_k = 0 \quad (2.2.6)$$

Вираз (2.2.3) приводимо до спільного знаменника дістанемо нове характеристичне рівняння того ж самого порядку:

$$D(w) = a_0' w^k + a_1' w^{k-1} + \dots + a_k' = 0 \quad (2.2.7)$$

Згідно з критерієм Гурвіца для стійкості системи необхідно і достатньо, щоб  $a_0' > 0$  визначник Гурвіца і всі його діагональні мінори були додатніми.

**Приклад 2.3.** Визначити за критерієм Гурвіца стійкість системи, характеристичне рівняння якої має вигляд:

$$25z^3 - 5z^2 - 10z - 1 = 0$$

Виконуємо  $w$  – перетворення:

$$25 \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^3 - 5 \left( \frac{1+w}{1-w} \right)^2 - 10 \left( \frac{1+w}{1-w} \right) - 1 = 0$$

Перетворене характеристичне рівняння має вигляд :

$$20w^3 + 90w^2 + 80w + 10 = 0$$

Згідно з критерієм Гурвіца система є стійкою, так як  $a_0' > 0$ ,  $a_1' > 0$ ,  $a_2' > 0$ ,  $a_3' > 0$  і

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1' & a_3' \\ a_0' & a_2' \end{vmatrix} = a_1' a_2' - a_0' a_3' = 7000 > 0.$$

Частотний критерій стійкості Найквіста – Михайлова за розташуванням годографу функції  $W(z)$  відносно точки з координатами  $(-1; j0)$  дозволяє судити про стійкість або нестійкість цифрових систем керування. Цифрова система автоматичного керування буде стійкою, якщо різниця між додатними і від'ємними переходами годографу розімкнутої системи через відрізок вісі  $(-\infty, -1, j0)$  дорівнює  $m_p/2$  ( де  $m_p$  – число полюсів передаточної функції розімкнутої системи).

**Приклад 2.4.** Визначити, при яких значеннях коефіцієнту  $K$  цифрова система автоматичного регулювання з передаточною функцією

$$W(z) = \frac{0.632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

буде стійкою в замкнутому стані.

Характеристичне рівняння замкнутої системи :

$$D(z) = 1 + \frac{0.632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368} = 0,$$

звідки

$$D(z) = z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368 = 0$$

Запишемо умови стійкості Шур – Кона у вигляді нерівностей (2.2.3), тоді

$$|D(0)| = 0.368 < 1;$$

$$D(1) = 0.632K > 0;$$

$$D(-1) = 2.736 - 0.632K > 0$$

Перші дві умови задовольняються для будь яких додатних значень  $K$ , а третя умова виконується лише при  $K < 4,32$ . Тому дана система буде стійкою лише при  $K < 4,32$ .

**Приклад 2.5.** За передаточною функцією розімкнутої цифрової системи побудувати годограф та проаналізувати стійкість за допомогою критерію Михайлова – Найквіста.

$$W(z) = \frac{0,0013(z - 0,934)(z + 0,922)}{(z - 1)(z - 1,00167)(z - 0,51)}$$

Як видно з передаточної функції  $W(z)$ , вона має один полюс поза одиничним колом  $p=1$ . На рисунку побудовано годограф  $W(z)$ , який перетинає відрізок вісі  $(-\infty, -1, j0)$   $1/2$  рази у від'ємному і один раз у додатному напрямку. Звідки випливає  $-1/2 + 1 = 1/2$ . Останнє вказує на стійкість системи в замкнутому стані.

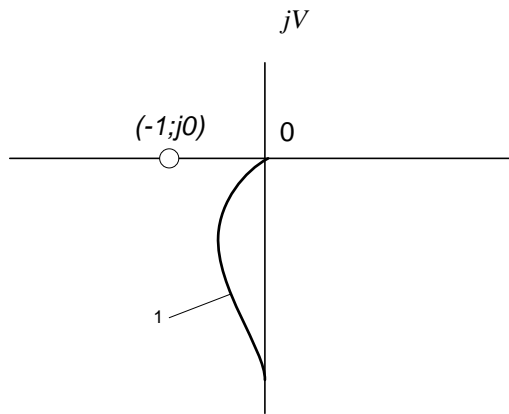


Рисунок 2.3 Дослідження стійкості системи.

### Завдання.

I. Дослідити стійкість цифрових систем автоматичного керування за допомогою критерію Шур – Кона, якщо характеристичні рівняння мають вигляд:

$$a) z^3 - 1.03z^2 - 1.32z + 0.0044 = 0$$

$$б) z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$$в) z^4 - 2.8z^3 + 3.4z^2 - 2.24z + 0.64 = 0$$

$$г) z^3 - 1.54z^2 + 0.607z - 0.0613 = 0$$

$$д) z^2 + 2z + 3 = 0$$

$$е) z^3 - 2.221z^2 - 1.695z - 0.474 = 0$$

II. Дослідити стійкість цифрових систем автоматичного керування за допомогою критерію Шур – Кона, якщо передаточні функції розімкнutoї системи мають вигляд :

$$a) W(z) = \frac{0.636z(z - 0.0185)(z - 0.135)}{(z^2 - 1)(z + 0.05)(z + 0.516)}$$

$$б) W(z) = \frac{0.0013(z - 0.983)(z + 0.861)}{(z - 1)(z - 0.997)(z - 0.51)}$$

$$в) W(z) = \frac{0.15z(z + 0.05)(z + 1.065)}{(z - 1)(z - 0.135)(z - 0.0185)}$$

$$г) W(z) = \frac{0.11z}{z^2 - 1.67z + 0.78}$$

III. Дослідити стійкість цифрових систем автоматичного керування за допомогою критерію Гурвіца, якщо характеристичні рівняння мають вигляд:

$$a) 5z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0 \quad д) z^3 - 1.014456z^2 + 0.302017z - 0.00506 = 0$$

$$б) 25z^3 - 5z^2 - 10z - 1 = 0 \quad е) z^3 - 2.51037z^2 - 2.0225z - 0.51197 = 0$$

$$в) z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad ж) z^2 + z - 0.5 = 0$$

$$г) z^2 + z + 0.5 = 0 \quad з) z^2 + z - 0.5 = 0$$

**IV.** Визначити, при яких значеннях коефіцієнту  $K$  цифрова система автоматичного регулювання з передаточною функцією буде стійкою в замкнутому стані:

$$a) W(z) = \frac{K(z + 0.05)(z + 1.065)}{(z - 1)(z - 0.135)(z - 0.0185)}$$

$$б) W(z) = \frac{K(z - 0.983)(z + 0.861)}{(z - 1)(z - 0.997)(z - 0.51)}$$

$$в) W(z) = \frac{K(z + 0.934)(z + 0.922)}{(z - 1)(z - 1.0067)(z - 0.51)}$$

**V.** Аналіз стійкості на основі частотних критеріїв.

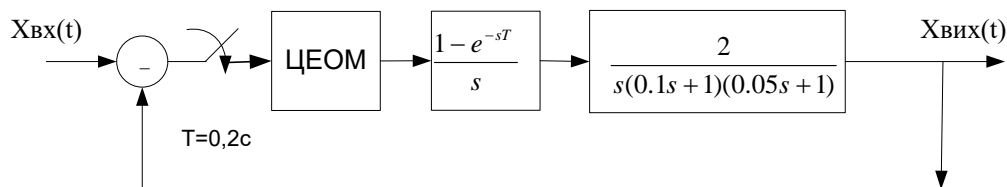
**V.1** Побудувати годограф  $W(z)$  і проаналізувати стійкість системи автоматичного керування, якщо:

– структурна схема має вигляд

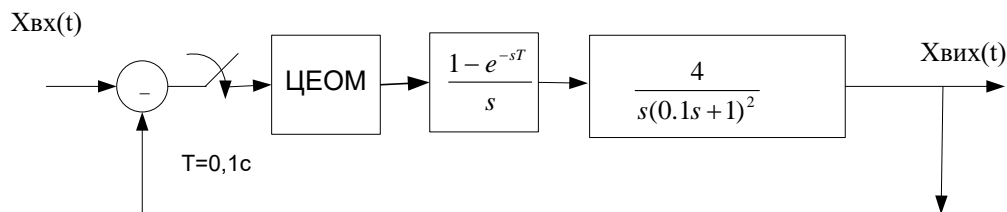
1) рис.2.4а; 4) рис.2.4в –  $K=2c^{-1}$ ,  $T=0,2c$ ;

2) 2) рис.2.4б; 5) рис.2.4в –  $K=10c^{-1}$ ,  $T=0,2$ ;

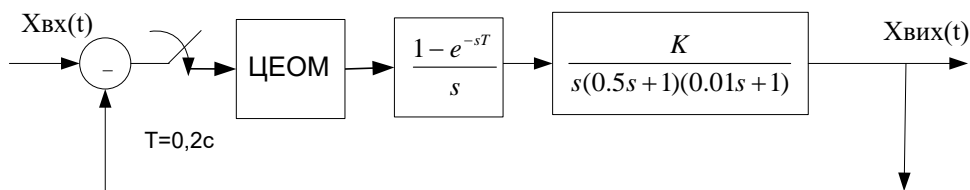
3) 3) рис.2.4в –  $K = 1,5 c^{-1}$ ,  $T=0,2c$ ; 6) рис.2.4г –  $K_1=0,5c^{-1}$ ,  $K_2=10c^{-1}$



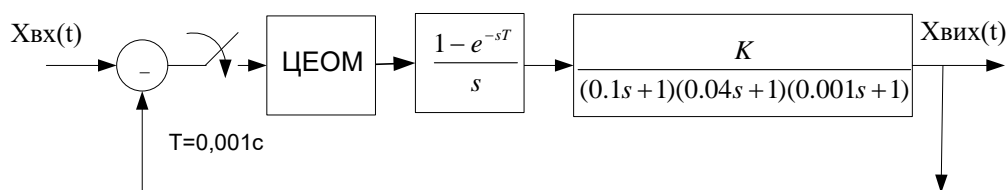
а)



б)



в)



г)

Рисунок 2.4 Структурні схеми замкнутих цифрових систем керування

– передаточні функції розімкнених систем мають вигляд :

$$1)W(z) = \frac{0.00137(z - 0.977)(z + 0.803)}{(z - 1)(z - 0.999)(z - 0.51)}$$

$$2)W(z) = \frac{0.00123(z - 0.996)(z + 0.966)}{(z - 1)(z - 1.0033)(z - 0.51)}$$

$$3)W(z) = \frac{0.152(z + 0.05)(z + 1.065)}{(z - 1)(z - 0.135)(z - 0.0185)}$$

$$4)W(z) = \frac{8.5(z + 1)}{(z + 0.303)(z - 1.65)}$$

$$5)W(z) = \frac{0.0465(z + 5.83)(z + 0.17)(z - 0.66)}{(z - 1)^2(z + 0.25)}$$

$$6)W(z) = \frac{2.37z}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

## 2.3 Аналіз якості цифрових систем автоматичного керування

Оцінку таких якісних показників, як швидкодія системи і запас стійкості, можна робити, використовуючи звичайні методи визначення вказаних величин за перехідною характеристикою. В цифрових системах одиничній ступінчастій функції відповідає зображення  $z/z-1$ , яке слід розглядати як вхідний вплив.

При використанні частотних методів прийоми оцінки якісних показників в основному зберігаються. Для даної цілі можуть використовуватись частотні передаточні функції замкнутої і розімкнутої систем. Їх застосування дає можливість визначити такі показники якості як запаси стійкості за амплітудою та за фазою, показник коливальності, смуга пропускання.

**Приклад 2.6.** Побудувати перехідний процес, якщо задано передаточну функцію замкнутої системи :

$$H(z) = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z + 0.368}$$

Зображення вхідної величини дорівнює :

$$G(z) = \frac{z}{z-1}$$

Зображення вихідної величини набуває наступного вигляду :

$$Y(z) = H(z) \cdot G(z) = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z + 0.368} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Для побудови перехідного процесу виконаємо розклад зображення вихідної величини в ряд Лорана за допомогою ділення чисельника на знаменник:

$$\begin{array}{r} \underline{0.632z^2} \\ - \underline{0.632z^2 - 1.097z + 0.6977 - 0.2326z^{-1}} \\ \hline 1.097z - 0.6977 + 0.2326z^{-1} \\ - \underline{1.097z - 1.9044 + 1.2111z^{-1} - 0.4037z^{-2}} \\ \hline 1.2067 - 0.9785z^{-1} + 0.4037z^{-2} \\ - \underline{1.2067 - 2.0948z^{-1} + 1.3322z^{-2} - 0.4441z^{-3}} \\ \hline 1.1163z^{-1} - 0.9285z^{-2} + 0.4441z^{-3} \\ - \underline{1.1163z^{-1} - 1.9379z^{-2} + 1.2324z^{-3} - 0.4108z^{-4}} \\ \hline 1.0094z^{-2} - 0.7883z^{-3} + 0.4108z^{-4} \\ - \underline{1.0094z^{-2} - 1.7523z^{-3} + 1.1144z^{-4} - 0.3715z^{-5}} \\ \hline 0.9740z^{-3} - 0.7036z^{-4} + 0.3715z^{-5} \\ - \underline{0.9740z^{-3} - 1.6909z^{-4} + 1.0753z^{-5} - 0.3584z^{-6}} \\ \hline 0.9873z^{-4} - 0.7038z^{-5} + 0.3584z^{-6} \\ - \underline{0.9873z^{-4} - 1.714z^{-5} + 1.09z^{-6} - 0.3633z^{-7}} \\ \hline 1.0102z^{-5} - 0.7316z^{-6} + 0.3336z^{-7} \end{array}$$

Отже, частка від ділення :

$$X(z) = 0.632z^{-1} + 1.097z^{-2} + 1.207z^{-3} + 1.116z^{-4} + 1.009z^{-5} + 0.974z^{-6} + 0.987z^{-7} \dots$$

Тому

$$X(kT) = 0.632\delta(t-T) + 1.097\delta(t-2T) + 1.207\delta(t-3T) + 1.116\delta(t-4T) + 1.009\delta(t-5T) + 0.974\delta(t-6T) + 0.987\delta(t-7T) \dots$$

Графік перехідного процесу побудованого за даним виразом зображено на рисунку 2.5.

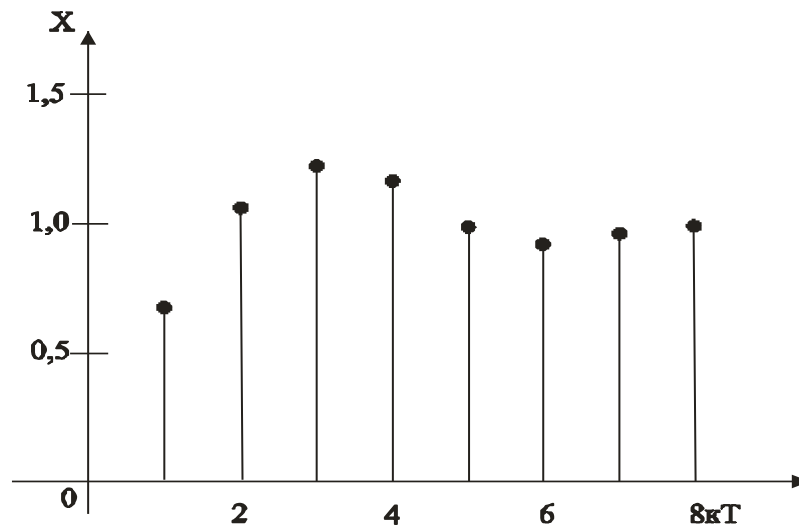
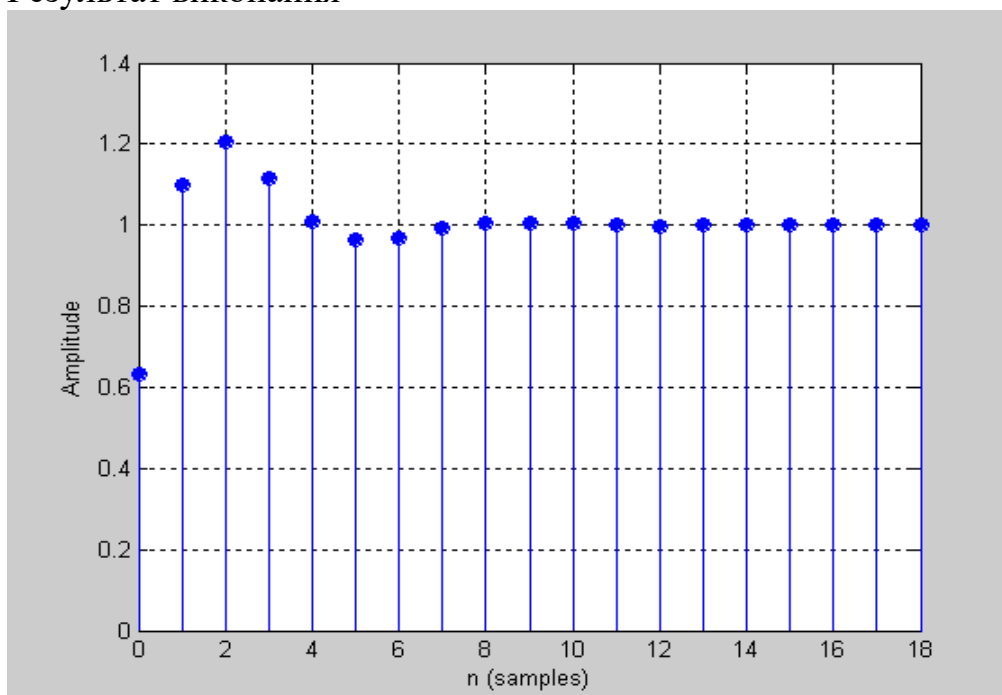


Рисунок 2.5.

Нижче наведено скрипт – файл для побудови перехідного процесу в цифровій системі та оцінки показників якості регулювання :

```
>> num=[0.632 0]; %коєфіцієнти поліному чисельника
>> den=[1 -0.736 0.368]; %коєфіцієнти поліному знаменника
>> stepz(num,den);grid on %виконання побудови перехідного
>> процесу
```

Результат виконання



Показники якості регулювання : час регулювання – 8с, величина перерегулювання – 21%, похибка регулювання – 3%.

**Завдання для самостійного виконання:** виконати побудову перехідного процесу шляхом розкладу в ряд Лорана та з використанням **MATLAB**, оцінити основні показники якості регулювання згідно варіанту.

**Таблиця 2.1**

№	Вид передаточної функції
1	$W_{зам}(p) = \frac{1.7(z+0.46)}{z^2+z+0.5}, T=0.1c$
2	$W_{роз}(p) = \frac{0.5436z^3 - 0.3636z^2 - 0.3566z + 0.1979}{z^4 - 2.011z^3 + 0.8472z^2 + 0.3687z - 0.205}, T=25c$
3	$W_{зам}(p) = \frac{0.000554z + 0.0005483}{z^2 - 1.969z + 0.9704}, T=1c$
4	$W_{роз}(p) = \frac{0.5317z^3 - 0.3787z^2 - 0.3753z + 0.2368}{z^4 - 2.081z^3 + 0.9321z^2 + 0.3919z - 0.243}, T=20c$
5	$W_{зам}(p) = \frac{0.1}{z^2 - 1.5z + 0.6}, T=1c$
6	$W_{роз}(p) = \frac{0.5253z^3 - 0.4522z^2 - 0.4076z + 0.3385}{z^4 - 1.734z^3 + 0.7212z^2 + 0.02861z - 0.01202}, T=10c$
7	$W_{зам}(p) = \frac{0.1}{z^2 - 1.3z + 0.4}, T=1c$
8	$W_{роз}(p) = \frac{0.445z^3 - 2.009z^2 - 0.234z + 0.04757}{z^4 - 1.836z^3 + 0.65811z^2 + 0.2704z - 0.09216}, T=1c$
9	$W_{зам}(p) = \frac{0.7604z^3 - 0.3989z^2 - 0.1564z + 0.002909}{z^4 - 0.8301z^3 + 0.0328z^2 + 0.005457z - 0.0001916}, T=1c$
10	$W_{зам}(p) = \frac{0.11}{z^2 - 1.78z + 0.89}, T=1c$
11	$W_{роз}(p) = \frac{0.484z + 0.516}{z^2 - z}, T=1c$
12	$W_{зам}(p) = \frac{0.6008z^3 - 0.3301z^2 - 0.2937z + 0.07654}{z^4 - 1.177z^3 + 0.2379z^2 + 0.0016z - 0.00486}, T=1c$
13	$W_{зам}(p) = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - z + 0.6322}, T=1c$
14	$W_{зам}(p) = \frac{0.7472z^3 - 0.3901z^2 - 0.1678z + 0.004233}{1.747z^4 - 1.986z^3 + 0.2588z^2 + 0.1781z - 0.0047}, T=1c$
15	$W_{зам}(p) = \frac{0.00147z + 0.001455}{z^2 - 1.969z + 0.9716}, T=1c$
16	$W_{зам}(p) = \frac{0.2145z + 0.1609}{z^2 - 0.75z + 0.125}, T=1c$
17	$W_{зам}(p) = \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z + 0.368}, T=1c$
18	$W_{зам}(p) = \frac{0.773z^3 - 0.4066z^2 - 0.1455z + 0.002064}{z^4 - 0.8126z^3 + 0.4339z^2 + 0.3126z - 0.004084}, T=1c$

## Продовження таблиці 2.1

19	$W_{зам}(p) = \frac{0.0006431z + 0.0006366}{z^2 - 1.969z + 0.9708}, T=1c$
20	$W_{зам}(p) = \frac{0.8077z^3 - 0.5414z^2 - 0.3068z + 0.1092}{z^4 - 0.9823z^3 + 0.03061z^2 + 0.04243z - 0.03915}, T=1c$
21	$W_{зам}(p) = \frac{0.507z^3 - 0.4203z^2 - 0.421z + 0.3387}{z^4 - 1.753z^3 + 0.7536z^2 + 0.0156z - 0.00118}, T=10c$
22	$W_{поз}(p) = \frac{0.5187z^3 - 0.3964z^2 - 0.3969z + 0.2833}{z^4 - 2.164z^3 + 1.043z^2 + 0.4123z - 0.2911}, T=15c$
23	$W_{зам}(p) = \frac{0.5503z^3 - 0.3923z^2 - 0.3881z + 0.245}{z^4 - 1.53z^3 + 0.5392z^2 + 0.003401z - 0.001989}, T=1c$
24	$W_{поз}(p) = \frac{0.0006z + 0.00054}{z^2 - 1.97z + 0.9698}, T=1c$
25	$W_{поз}(p) = \frac{0.5538z^3 - 0.3857z^2 - 0.3451z + 0.195}{z^4 - 1.457z^3 + 0.4615z^2 + 0.0236z - 0.01}, T=1c$

### Контрольні запитання :

1. В чому полягають основні відмінності дискретних систем від безперервних?
2. Що таке цифрова система автоматичного керування ? Назвіть її основні елементи ?
3. Що таке екстраполятор нульового порядку?
4. Наведіть визначення решітчастої функції. Чим вона відрізняється від безперервної ?
5. Що таке  $Z$  – перетворення?
6. Вкажіть основні властивості  $Z$  – перетворення ?
7. Як визначається передаточна функція розімкнутої та замкнутої цифрової системи автоматичного керування?
8. В чому суть  $w$  – перетворення і як воно застосовується для дослідження цифрових систем ?
9. Яким чином визначається стійкість цифрових систем автоматичного керування?
10. Сформулюйте критерій Гурвіца для дослідження цифрових систем ?
11. Сформулюйте критерій стійкості Шур - Кона для цифрової системи третього порядку.
12. Сформулюйте критерій Найквіста – Михайлова для цифрових систем .
13. У чому полягає особливість побудови логарифмічних – частотних характеристик цифрових систем автоматичного керування у низькочастотній та високочастотній зоні ?
14. Яким чином можна побудувати перехідний процес в цифровій системі ?
15. Якими показниками якості характеризується якість перехідних процесів в цифровій системі ?

## 3 ЗМІННІ СТАНУ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

### 3.1 Опис систем в просторі станів

Аналіз та синтез систем в частотній області базується на понятті стану системи. Стан системи – це сукупність таких змінних, знання яких, поруч з вхідними функціями та рівняннями, які описують динаміку системи, дозволяє визначити її майбутній стан і вихідну змінну.

Для динамічної системи її стан описується набором змінних стану  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ . Це такі змінні, які визначають майбутню поведінку системи, якщо відомий поточний стан і всі зовнішні збурення.

Розглянемо систему (рис.1), де  $y_1(t), y_2(t)$  є вихідними змінними, а  $u_1(t), u_2(t)$  – вхідними змінними. Для цієї системи змінні  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  мають наступний зміст : якщо в момент часу  $t_0$  відомі початкові значення  $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$  і вхідні сигнали  $u_1(t), u_2(t)$  для  $t \geq t_0$ , то цієї інформації достатньо для того, щоб визначити майбутні значення всіх змінних стану та вихідних змінних.

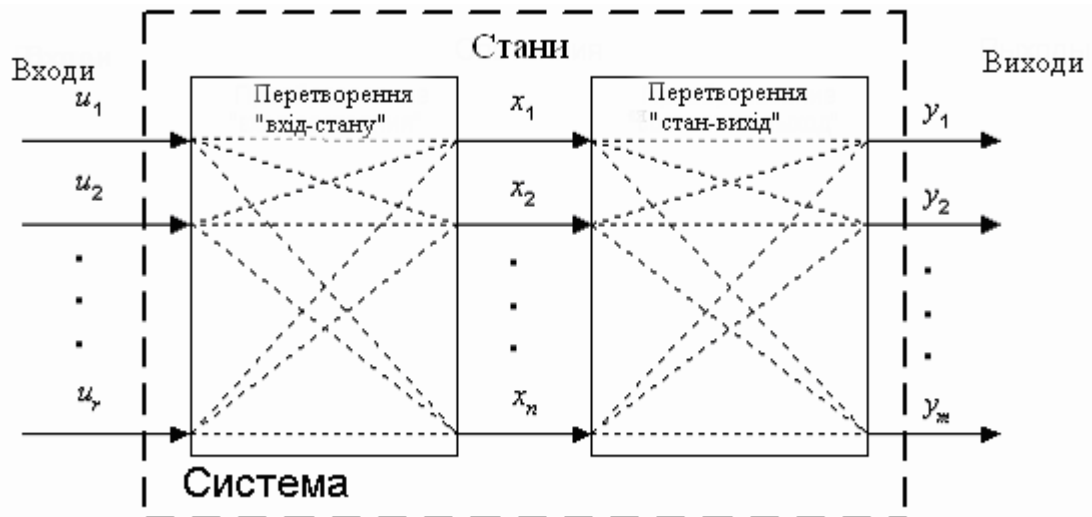


Рисунок 3.1 Структурна схема системи керування

Стан системи описується диференціальними рівняннями першого порядку відносно кожної з змінних стану. Ці рівняння в загальному випадку мають наступний вигляд :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \\ &: \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Цю ж систему рівнянь можна записати в матричній формі :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

Матриця – стовпчик, яка складається із змінних стану називається **вектором стану** і має вигляд :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

Вектор вхідних сигналів позначається як **u**. тоді систему можна записати в компактному вигляді диференційного рівняння стану :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (3.1.4)$$

дане рівняння частіше всього називають просто **рівнянням стану**.

Матриця **A** є квадратної розмірності  $n \times n$ , а матриця **B** має розмірність  $n \times m$ . Рівняння стану пов'язують швидкість зміни стану системи з самим станом і вхідними сигналами. В загальному випадку вихідні сигнали лінійної системи пов'язані із змінними стану і вхідними сигналами рівнянням виходу :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}, \quad (3.1.5)$$

де **y** – сукупність вихідних сигналів, яка представлена у вигляді вектора – стовпчика.

Розв'язок диференційного рівняння стану можна отримати таким же чином, як для скалярного диференційного рівняння першого порядку. Розглянемо рівняння :

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (3.1.6)$$

де  $x(t)$ ,  $u(t)$  – скалярні функції часу. Розв'язок будемо шукати у вигляді експоненти  $e^{at}$ . Перетворюючи рівняння (1.6) за Лапласом, отримаємо:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s), \quad (3.1.7)$$

звідки

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a} U(s). \quad (3.1.8)$$

Зворотне перетворення Лапласа рівняння дає шуканий розв'язок :

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (3.1.9)$$

Аналогічно отримують і розв'язок диференційного рівняння стану. Введемо поняття матричної експоненціальної функції, представивши її у вигляді ряду :

$$e^{At} = \exp(At) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots, \quad (3.1.10)$$

який сходиться для всіх кінцевих  $t$  і будь якої  $A$  . Тоді розв'язок рівняння стану буде мати вигляд :

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau \quad (3.1.11)$$

Розв'язок (3.1.11) можна отримати, застосувавши перетворення Лапласа . В результаті отримуємо :

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}BU(s), \quad (3.1.12)$$

де можна ввести позначення  $[sI - A]^{-1} = \Phi(s)$ , що є перетворенням Лапласа функції  $\Phi(t) = \exp(At)$ , застосувавши до зворотне перетворення Лапласа, і враховуючи, що другий доданок в правій частині містить добуток  $\Phi(s) BU(s)$ , ми отримуємо розв'язок (3.1.11). Матрична експоненціальна функція  $\Phi(t)$  описує вільний рух системи і називається фундаментальною матрицею або перехідною матрицею стану.

Таким чином, розв'язок (3.1.11) можна записати у вигляді :

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (3.1.13)$$

В результаті для вільного руху системи (в випадку, коли  $u=0$ ) розв'язок можна записати наступним чином :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

Як можна побачити з даного виразу, для того, щоб визначити перехідну матрицю стану, необхідно початкові значення всіх змінних стану, крім однієї покласти рівними нулю і обчислити реакцію кожної змінної стану на це ненульове значення. Інакше кажучи, елемент  $\varphi_{ij}(t)$  являє собою реакцію  $i$  – ї змінної стану на початкове значення  $j$ –ї змінної стану при умові, що початкове значення всіх інших змінних стану дорівнюють нулеві.

### 3.2 Зв'язок між передаточною функцією та рівняннями стану

Якщо задано передаточну функцію  $W(z)$ , то можна отримати рівняння стану. Рівняння стану системи з одним входом та одним виходом мають вигляд :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Застосувавши перетворення Лапласа отримуємо:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s), \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

де  $\mathbf{B}$  – матриця розмірності  $n \times 1$ , оскільки  $u$  – є єдиним входом. Відзначимо, що в перетворенні Лапласу не було враховано початкові умови, оскільки визначенню підлягає передаточна функція.

Отже, отримуємо :

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s).$$

Так як  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \Phi(s)$ , то

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s) \mathbf{B}U(s)$$

Тоді

$$Y(s) = \mathbf{C}\Phi(s) \mathbf{B}U(s)$$

Оскільки передаточна функція являє собою відношення вихідної величини до вхідної величини, то в кінцевому випадку отримуємо :

$$W(z) = \mathbf{C}\Phi(s) \mathbf{B}$$

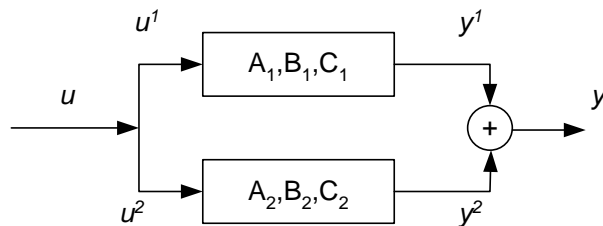
### 3.3 Опис з'єднань систем у просторі станів

Розглянемо задачі з'єднання двох підсистем в систему. При цьому можливі три випадки : послідовне (рисунок 3.2а), паралельне (рисунок 3.2б), зворотній зв'язок (рисунок 3.2в). Передбачається, що обидві системи описуються в просторі станів співвідношеннями:

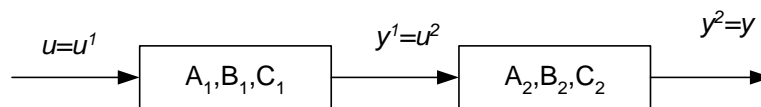
$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u^1; & y^1 &= C x^1; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 u^2; & y^2 &= C x^2; \end{aligned}$$

де  $x^1, u^1, y^1$  – вектори станів, керування, виходів першої системи;  $x^2, u^2, y^2$  – другої. Потрібно за відомими матрицями  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  отримати матриці  $A, B, C$  (рисунок 3.2г)

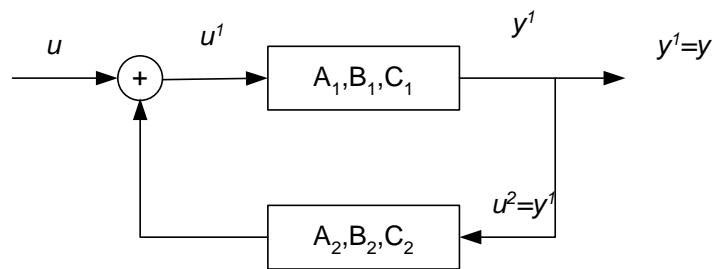
а)



б)



в)



г)

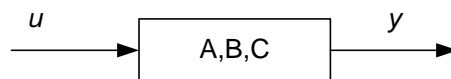


Рисунок 3.2. З'єднання систем

### 1. Паралельне з'єднання.

Запишемо рівняння системи з урахуванням особливостей з'єднання, вказаних на рисунок 3.2а :

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + B_1 u;$$

$$\dot{x}^2 = A_2 x^2 + B_2 u;$$

$$y = C_1 x^1 + C_2 x^2;$$

звідки

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u;$$

$$y = (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Остаточно матриці з'єднання мають вигляд :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}; C = (C_1 \quad C_2)$$

### 2. Послідовне з'єднання.

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + B_1 u;$$

$$\dot{x}^2 = A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1;$$

$$y = C_2 x^2;$$

В матричному вигляді:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u;$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Остаточно маємо

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

### 3.Зворотний зв'язок .

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + B_1 u \pm B_1 C_2 x^2;$$
$$\dot{x}^2 = A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1;$$
$$y = C_1 x^1;$$

у матричному вигляді –

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u;$$
$$y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для лінійних систем легко показати справедливості наступного результату, названого принципом суперпозиції: ефект, викликаний сумою декількох впливів, дорівнює сумі декількох впливів, дорівнює сумі ефектів від декількох впливів окремо. Закон зміни вектора станів лінійної системи представляється у виді суми вільного і вимушеного коливання.

$$x(t) = x_c(t) + x_e(t).$$

Вільний рух  $x_c(t)$  відбувається при відсутності зовнішнього впливу при ненульових початкових умовах. Він визначається розв'язком однорідної системи рівнянь, що відповідає вихідному рівнянню станів :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

з початковими умовами  $x(t_0) = x_0$ .

Збурений рух  $x_b(t)$  - це реакція системи на зовнішній вплив  $u(t)$  при нульових початкових умовах. Він визначається розв'язком неоднорідного рівняння при нульових початкових умовах.

Для багатомірних нестационарних систем, які описуються співвідношеннями, поведінка векторів стану і виходу визначається за формулами:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.1.17)$$

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.1.18)$$

де  $\Phi(t, \tau)$  – матриця переходу або матриця Коші, яка є розв’язком рівняння

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau) \quad (3.1.19)$$

Перші складові рівнянь (3.1.17), (3.1.18) описують вільний рух, а другі – вимушений. Для багатомірних стаціонарних систем закони зміни вектора стану і вектора виходу знаходяться за формулами:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t C\Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

де  $\Phi(t - \tau)$  – перехідна матриця стаціонарної системи, яка залежить від різниці  $t - \tau$ . В даному випадку розв’язок рівняння (3.1.19) має вигляд:

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t - \tau) = \exp[A(t - \tau)]$$

**Приклад 3.1.** Знаходження матриці переходу за допомогою **MATLAB** при заданому кроці дискретності  $\Delta t = dt$ .

```
>> A=[-8 -1 -0.1875;16 0 0;0 2 0]
```

```
A =
```

```
-8.0000    -1.0000   -0.1875
16.0000         0         0
         0     2.0000         0
```

```
>> dt=0.2;
```

```
>> Phi=expm(A*dt)
```

```
Phi =
```

```
0.0863   -0.0941   -0.0168
1.4344    0.8035   -0.0358
0.3821    0.3704    0.9946
```

### 3.4 Керованість та спостережуваність

Одними з найважливіших задач теорії керування є дослідження керованості і спостережуваності динамічних систем. Наведемо відповідні визначення і критерії для стаціонарних лінійних систем, отримані Калманом.

Система називається цілком керованою, якщо вибором керуючого впливу  $u(t)$  на інтервалі часу  $[t_0, t_1]$  можна перевести систему з будь-якого початкового стану  $x(t_0)$  у довільний заздалегідь заданий кінцевий стан  $x(t_1)$ .

Система називається цілком спостережуваною, якщо по реакції  $y(t_1)$  на виході системи на інтервалі часу  $[t_0, t_1]$  при заданому керуючому впливі  $u(t)$  можна визначити початковий стан  $x(t_0)$ .

**Критерій керованості лінійних систем.** Для того щоб система була цілком керованою, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці керованості

$$M_U = (B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B)$$

дорівнював розмірності вектора стану:

$$\text{rank } M_U = n.$$

**Критерій спостережуваності.** Для того щоб система була цілком спостережуваною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці спостережуваності

$$M_Y = (C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T)$$

дорівнював розмірності вектора стану:

$$\text{rank } M_Y = n.$$

Знак  $Z=(X \mid Y)$  означає приєднання матриць, тобто для одержання  $i$ -го рядку матриці  $Z$  береться спочатку  $i$ -тий рядок матриці  $X$ , потім слідує елементи  $i$ -го рядку матриці  $Y$ . Передбачається, що кількість рядків у матриць є однаковою.

Нагадаємо, що під рангом матриці розуміється найвищий з порядків відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Ранг матриці дорівнює найбільшому числу лінійно незалежних рядків.

У **Control System Toolbox** є тип даних, що визначають динамічну систему в просторі станів. Синтаксис команди, що створює неперервну LTI (Linear Time Invariant)-систему у вигляді ss – об'єкту з одним входом та одним виходом.

SS(A, B, C, D). У цю функцію як параметри передаються матриці рівнянь станів і виходів виду :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

**Таблиця 3.1.** Перелік команд

Синтаксис	Опис
ctrb(LTI-об'єкт >) ctrb(A, B)	Формування матриці керованості
obsv(<LTI- об'єкт >) obsv(A, C)	Формування матриці спостережуваності
parallel(<LTI1>,<LTI2>)	Паралельне з'єднання
series(<LTI1>,<LTI2>)	Последовательное з'єднання
feedback(<LTI1>,<LTI2>)	З'єднання зворотним зв'язком
append( <LTI1>, ..., <LTIN>)	Об'єднання систем
connect(<sys>,<Con>,<in>,<out>)	Встановлення зв'язків у з'єднанні

Для одержання результатів обчислення результуючих матриць системи, за структурною схемою, скористаємося останніми двома командами.

Функція **append** створює об'єкт **sys**, що представляє собою об'єднання всіх підсистем. При цьому перший вхідний сигнал першої системи стає входом номер 1, другий вхідний сигнал першої системи - номер 2, і т.д. далі йдуть входи другої системи, і т.д.; аналогічно визначаються і виходи.

У функції **connect** - параметр <Con> визначає матрицю зв'язків за структурною схемою. Матриця формується за наступним правилом: кожен рядок являє собою один вхід системи **sys**, перший елемент - номер входу (відповідно до порядку в команді **append**), потім йдуть номери виходів, що сумуються і подаються на розглянутий вхід. Параметри <in>, <out> - рядка з номерів входів і виходів з'єднання, що є зовнішніми.

Наприклад, для послідовного з'єднання двох систем:

```
sys1= ss(A1, B1, C1, D1)
sys2= ss(A2, B2, C2, D2)
sys=append (sys1, sys2)
sysc=connect(sys, [2 1], [1], [2])
```

У цьому випадку на вхід другої системи (загальний вхід номер 2), надходить вихід першої (загальний вихід номер 1); вхід першої системи (номер один) і вихід другої системи (номер два) є зовнішніми.

### Приклад 3.2.

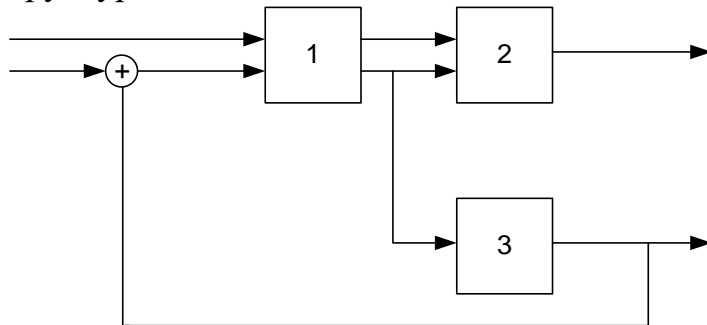
Дано три лінійні стаціонарні системи:

$$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} - 2x = 4u \\ y^3 = x \end{cases}$$

Структурна схема з'єднання систем:



1. Приведемо систему 3 до виду (3.1.1), для цього введемо змінні :

$$x_1^3 = x^3$$

$$x_2^3 = \dot{x}_1^3 = \dot{x}^3$$

і, підставляючи їх у вихідні рівняння, одержимо

$$\begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3 \\ \dot{x}_2^3 - 3x_2^3 - 2x_1^3 = 4u^3 \\ y^3 = x_1^3 \end{cases} ; \begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3 \\ \dot{x}_2^3 = 2x_1^3 + 3x_2^3 + 4u^3 \\ y^3 = x_1^3 \end{cases} ; \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x^3 \end{cases} .$$

2. Створимо матриці першої системи –

```
>> A1=[7 3;2 1]
```

```
A1 =
```

```
    7    3  
    2    1
```

```
>> B1=[1 0;0 2]
```

```
B1 =
```

```
    1    0  
    0    2
```

```
>> C1=[3 -2; 2 1]
```

```
C1 =
```

```
    3   -2  
    2    1
```

```
>>
```

Створюючи аналогічно матриці двох інших систем, отримаємо SS-об'єкти

```
>> S1=ss(A1,B1,C1,0)
```

```
a =
```

```
      x1  x2  
x1    7   3  
x2    2   1
```

```
b =
```

```
      u1  u2  
x1    1   0  
x2    0   2
```

```
c =
```

```
      x1  x2  
y1    3  -2  
y2    2   1
```

```
d =
```

```
      u1  u2  
y1    0   0  
y2    0   0
```

```
Continuous-time model.
```

```
>>
```

```
>> S3=ss(A3,B3,C3,0)
```

```
a =  
      x1 x2  
x1    0  1  
x2    2  3
```

```
b =  
      u1  
x1    0  
x2    4
```

```
c =  
      x1 x2  
y1    1  0
```

```
d =  
      u1  
y1    0
```

Continuous-time model.

```
>> |
```

```
>> S2=ss(A2,B2,C2,0)
```

```
a =  
      x1 x2  
x1    1  2  
x2    3  2
```

```
b =  
      u1 u2  
x1    1  5  
x2    2  1
```

```
c =  
      x1 x2  
y1    4  3
```

```
d =  
      u1 u2  
y1    0  0
```

Continuous-time model.

```
,
```

3. Дослідимо спостережуваності і керованості кожної системи, для чого побудуємо відповідні матриці і порахуємо їхні ранги –

```
>> rank(ctrb(A1,B1))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(ctrb(A2,B2))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(observ(A2,C2))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(observ(A3,C3))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(observ(A1,C1))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(ctrb(A3,B3))
```

```
ans =
```

```
2
```

Видно, що у всіх випадках ранги матриць керованості і спостережуваності збігаються з розмірностями простору станів.

4. Одержимо систему, яка визначається з'єднанням.

Для коректного використання функції *connect* введемо додаткову систему, передаточна функція якої дорівнює 1 (рисунок 3.3).

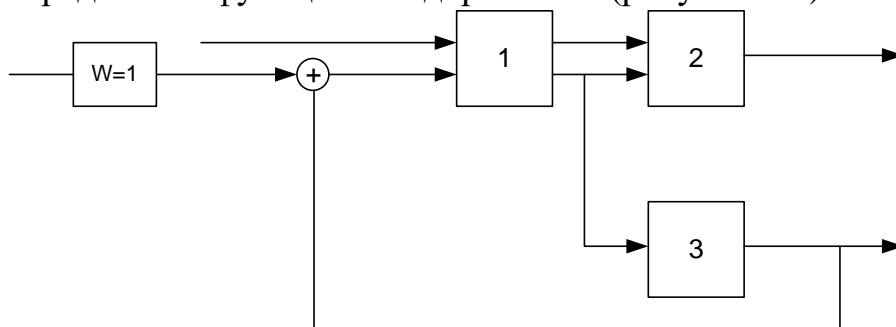


Рисунок 3.3

```
>> s4 = tf(1)
Transfer function:
1
>> sys=append(s1,s2,s3,s4);
>> Q=[2 -4 5; 3 1 0; 4 2 0; 5 2 0];
>> in=[1 5];
>> out=[3 4];
>> s_com=connect(sys,Q, in,out);
```

Звертаючись до даних об'єкта, можна одержати матриці A, B, C

```
>> A=s_com.A;
>> B=s_com.B;
>> C=s_com.C;
```

4. Обчислимо ранги матриць спостережуваності і керованості підсумкової системи:

```
>> rank(ctrb(A,B))
ans =
6
>> rank(observ(A,C))
ans =
6
```

Результати показують, що система керована і спостережувана.

**Завдання для самостійного виконання:**

- створити модель системи в просторі станів згідно варіанту;
- визначити керованість та спостережуваність системи .

**Таблиця 3.2.**

№варіанту	Рівняння системи	№варіанту	Рівняння системи
1	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	14	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	15	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -3 & 3 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	17	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$

## Продовження таблиці 3.2.

5	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = (4 \ 3) x^1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (5 \ 2) x^1 \end{cases}$	19	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \ 2) x^1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = (-4 \ 3) x^1 \end{cases}$	21	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = (4 \ 3) x^1 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	23	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \ 2) x^1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u \\ y = (-4 \ 3) x^1 \end{cases}$
12	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u \\ y = (-1 \ 2) x^1 \end{cases}$	25	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	26	$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$

### **Контрольні запитання :**

1. В чому полягає суть методу змінних стану ?
2. Запишіть рівняння стану в загальному вигляді?
3. Який зв'язок існує між передаточною функцією та рівняннями системи в просторі станів ?
4. Яким чином в просторі станів можна описати поєднання кількох систем ?
5. Що таке матриця переходу і яким чином визначається ?
6. Що таке керованість та спостережуваність ?

## 4 ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

### 4.1 Уявлення про випадкові процеси

Дуже часто системи автоматичного керування працюють в умовах, коли зовнішні дії мають випадковий характер. Як приклади таких дій можна навести опір руху електромеханічних об'єктів, коливання напруги живлення джерел енергопостачання електроприводів, випадкові перешкоди в регуляторах та вимірювальних пристроях тощо. В слідкуючих системах дуже часто випадковою є задаюча дія.

Системи автоматичного керування, які працюють в умовах випадкових збурень, можна проектувати, виходячи тільки з максимально можливих значень цих збурень. Проте, якщо імовірність появи максимального збурення є незначною, то до системи автоматичного керування будуть висуватись жорсткіші вимоги порівняно з тими, що впливають з реальних умов експлуатації. Перед тим, як розглядати поведінку системи автоматичного керування, яка знаходиться під дією випадкових збурень, розглянемо основні відомості про випадкові процеси та їх імовірнісні характеристики.

**Випадковий сигнал** – це функція значення якої при кожному значенні незалежного аргументу є випадкова величина, яка може набувати того чи іншого значення. Конкретний вигляд, який набуває випадкова функція при проведенні досліду, називається її **реалізацією**. Якщо аргументом випадкової функції є час, то її називають **випадковим процесом**, **стохастичним процесом**, або **випадковим стохастичним сигналом**. Таким чином, випадковий процес  $X(t)$  – це сукупність множини можливих кривих  $x(t)$ , кожна з яких становить лише окремі реалізації випадкового процесу  $X(t)$ . Можливі графіки випадкових процесів приведено на рисунку 4.1 :

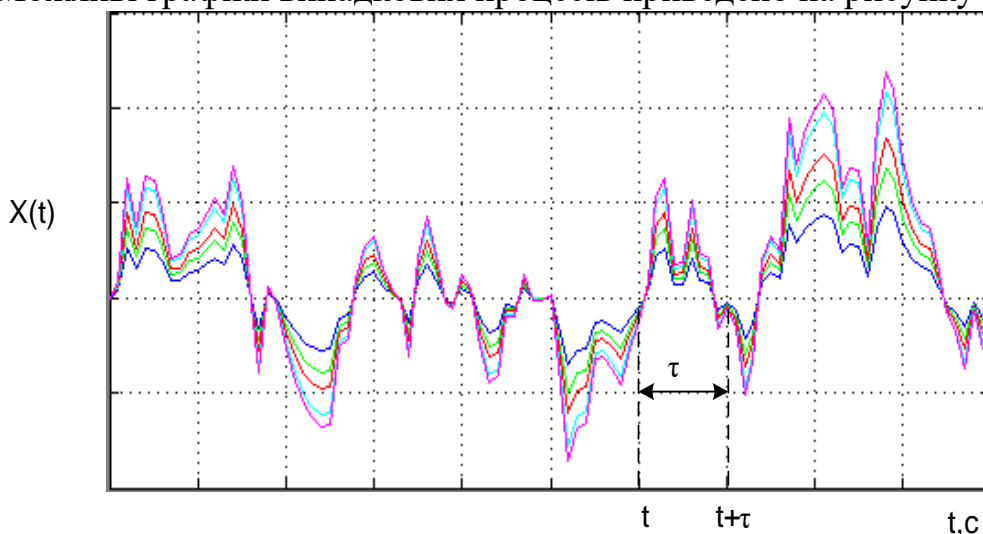


Рисунок 4.1– Можливі графіки випадкових процесів.

Статистичні властивості випадкового процесу визначаються функцією розподілу  $F_1(x,t)$ , або густиною розподілу, які є не тільки функціями

випадкової величини  $x$ , а й моменту часу їх спостереження. Густина розподілу імовірності :

$$w_1(x,t) = \frac{\partial F_1(x_1,t)}{\partial x}$$

Функції  $F_1(x,t)$ ,  $w_1(x,t)$  є найпростішими характеристиками випадкового процесу.

До основних характеристик стаціонарних випадкових процесів належать **математичне очікування, дисперсія, кореляційна функція**.

Математичне очікування визначає середнє значення випадкового процесу за множиною :

$$m_x = M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x) dx$$

Якщо врахувати ергодичну властивість, то

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

### Дисперсія

$$D_x = M\{[x(t) - m_x]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w_1(x) dx =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x(t)]^2 dt = M\{x^2\} - (M\{x\})^2$$

характеризує міру розкиду значень випадкового процесу стосовно його середнього значення і дорівнює різниці середнього значення квадрату процесу і квадрату середнього значення процесу. Квадратний корінь з дисперсії визначає **середньоквадратичне відхилення** :

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

**Кореляційна функція** характеризує ступінь залежності між значеннями процесу, віддаленими один від одного на час  $\tau$ , тобто оцінює швидкість змінювання випадкового процесу протягом часу. Вона становить значення добутку випадкових процесів  $x(t)$  і  $x(t + \tau)$  і визначається формулою :

$$R_x(\tau) = M\{x(t)x(t + \tau)\}$$

Для стаціонарного випадкового процесу на підставі ергодичної властивості кореляційну функцію можна визначити як середнє за часом :

$$R_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt$$

### Основні властивості кореляційних функцій :

1. Початкове значення кореляційної функції дорівнює середньому значенню квадрату випадкового процесу:

$$R_x(0) = \bar{x}^2$$

2. Кінцеве значення кореляційної функції дорівнює квадрату середнього значення випадкового процесу:

$$R_x(\infty) = (\bar{x})^2$$

3. Значення кореляційної функції при всякому  $\tau$  не може бути більшим від її початкового значення, тобто :

$$R_x(0) = |R_x(\tau)|$$

4. Кореляційна функція є парною, тобто

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

5. Чим слабший зв'язок між попереднім  $x(t)$  та наступним значенням  $x(t+\tau)$ , тим швидше спадає кореляційна функція  $R_x(\tau)$ . Час  $\tau_R$ , при якому виконується нерівність

$$R_x(\tau_R) - (\bar{x})^2 \leq \Delta,$$

де  $\Delta$  – досить мала величина, називається **часом кореляції випадкового процесу**.

## 4.2 Спектральна густина випадкового процесу

При дослідженнях систем автоматичного керування зручно користуватись ще однією характеристикою стаціонарного випадкового процесу – **спектральною густиною**.

Спектральна густина  $S_x(\omega)$  визначається як перетворення Фур'є кореляційної функції :

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.2.1)$$

Скориставшись формулою Ейлера, можна записати :

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin \omega\tau d\tau$$

Оскільки  $R_x(\tau)$  – парна функція,  $\sin \omega\tau$  – непарна функція, їх добуток  $R_x(\tau)\sin \omega\tau$  – непарна функція, то інтеграл від непарної функції дорівнює нулю. В той же час  $\cos \omega\tau = \cos(-\omega\tau)$  – парна функція і добуток підінтегрального виразу першої складової правої частини (4.2.1)  $R_x(\tau)\cos \omega\tau$  – парна функція. Тому можна записати

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

і зробити висновок, що  $S_x(\omega) = S_x(-\omega)$ , тобто спектральна густина є парною функцією. Зв'язок між  $R_x(\tau)$  і  $S_x(\omega)$  такий, що чим ширше графік кореляційної функції, тим вузьчий графік спектральної густини і навпаки.

Взаємна спектральна густина двох статистично зв'язаних випадкових стаціонарних процесів визначається за формулою :

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

при цьому

$$R_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

### 4.3 Типові кореляційні функції та спектральні густини

Реальні випадкові процеси мають найрізноманітніші кореляційні функції та спектральні густини. Для їх аналізу та математичного опису застосовуються типові кореляційні та спектральні густини, тобто відповідні імовірнісні характеристики випадкових сигналів, які є достатньо простими функціями аргументів  $\omega$  і  $\tau$ . До вказаних типових основних сигналів відносяться такі :

1. сигнал, який має лише одну сталу складову :

$$x(t) = A_0 = const; R_{\sigma} = A_0^2;$$

$$S(\omega) = 2\pi A_0^2 \delta(\omega)$$

2. сигнал, який є випадковим і не включає у себе сталих та періодичних складових :

$x(t)$  – випадковий сигнал

$$R_{\sigma}(\tau) = D_{\sigma} a^{-\lambda\tau};$$

$$S(\omega) = \frac{2D_{\sigma}\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

3. сигнал, який є чисто випадковим, або „білим шумом”:

$x(t)$  – білий шум

$$R_{\sigma}(\tau) = D_{\sigma} \delta(\tau);$$

$$S(\omega) = D_{\sigma} = \delta^2 = const$$

4. сигнал, який має лише детерміновану періодичну складову :

$$x(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi); R_{\sigma}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_1 \tau;$$

$$S_{\sigma}(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)]$$

#### 4.4 Проходження стаціонарного випадкового сигналу через лінійну систему автоматичного керування

Якість системи, до якої прикладено випадкові діяння, не можна повністю охарактеризувати показниками, за якими оцінюють якість систем при детермінованих діях. Зокрема, такі якісні показники, як похибка відпрацювання завдання, тривалість перехідного процесу втрачають сенс.

Розглянемо лінійну систему з вхідним сигналом  $x(t)$ , до якої прикладено вхідну дію  $g(t)$ . Якщо  $g(t)$  є випадковою функцією, то й вихідний сигнал  $x(t)$  і похибка  $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$  також будуть випадковими функціями. Якість роботи динамічної системи оцінюється середньоквадратичним відхиленням:

$$M\{\varepsilon^2(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt,$$

тобто середнім значенням квадрату похибки.

Середньоквадратичне відхилення визначається кореляційною функцією або спектральною густиною похибки  $\varepsilon(t)$ . Проте звичайно відомими є статистичні характеристики (кореляційна функція і спектральна густина) вхідного сигналу, а не самої похибки. Тому виникає задача визначення статистичних характеристик вихідного сигналу за відомими характеристиками вхідного сигналу.

Нехай вхідний сигнал  $g(t)$  з відомими кореляційною функцією  $R_g(\tau)$  та спектральною густиною  $S_g(\omega)$  подається на вхід лінійної системи з частотною характеристикою  $W(j\omega)$ . В цьому разі взаємна спектральна густина вихідної та вхідної величин дорівнює добутку спектральних густини вхідної величини й частотної характеристики системи:

$$S_{xg}(\omega) = S_g(\omega)W(j\omega),$$

а спектральна густина вихідної величини дорівнює добутку квадрату модулю частотної характеристики системи та спектральної густини вхідної дії:

$$S_x(\omega) = S_g(\omega)|W(j\omega)|^2.$$

**Приклад 4.1.** На вхід лінійної системи автоматичного керування з передаточною функцією

$$W(s) = \frac{(1+s)(1+2s)}{1+2s+8s^2}$$

подається випадковий процес з кореляційною функцією  $R_g(\tau) = 10\exp(-3|\tau|)$ . Знайти спектральну густина вихідного сигналу в усталеному режимі.

*Розв'язок.* Спочатку за видом кореляційної функції визначаємо спектральну густина вхідного сигналу:

$$S_g(\omega) = 2 \cdot 3 \cdot 10 / (3^2 + \omega^2) = 60 / (9 + \omega^2).$$

Квадрат амплітудно – частотної характеристики замкнутої системи автоматичного керування в даному випадку дорівнює:

$$W_s^2(\omega) = |K_s(j\omega)|^2 = \frac{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}{|1+2j\omega+8(j\omega)^2|^2}$$

Тепер знайдемо спектральну густину вихідного сигналу :

$$S_x(\omega) = W_3^2(\omega) S_g(\omega) = \frac{240(j\omega)^4 - 300(j\omega)^2 + 60}{|8(j\omega)^3 + 26(j\omega)^2 + 7(j\omega) + 3|^2}$$

**Приклад 4.2.** Отримання кореляційної функції та спектральної густини випадкового процесу за експериментальними даними з використанням **MATLAB**. Вихідні дані знаходяться в файлі var0.mat.

### 1. Отримання кореляційної функції.

Файл даних містить значення змінної *ans* , яка відображається в робочому просторі після завантаження відповідного файлу. Дана змінна представляє собою матрицю, перший рядок якої відповідає значенням часу, а другий рядок – значення випадкового процесу  $x(t)$ . Нижче наведено скрипт – файл для отримання кореляційної функції

```
>> load ('C:\Студент\СТАУ\Variants\var0.mat'); % завантаження файлу даних
>> t=ans(1,:); % значення часу
>> x=ans(2,:); % значення випадкового процесу
>> plot(t,x) % виконання побудови випадкового процесу
>> Mx=mean(x) % обчислення математичного сподівання

Mx =

    -0.0470

>> Sx=std(x) % обчислення серед. кв. відхилення

Sx =

    1.5004

>> Dx=Sx^2 % обчислення дисперсії

Dx =

    2.2511

>> [c_ww,lags]=xcorr(x,100,'coeff'); % побудова нормованої
>> plot(lags,c_ww);grid on % кореляційної функції
>>
```

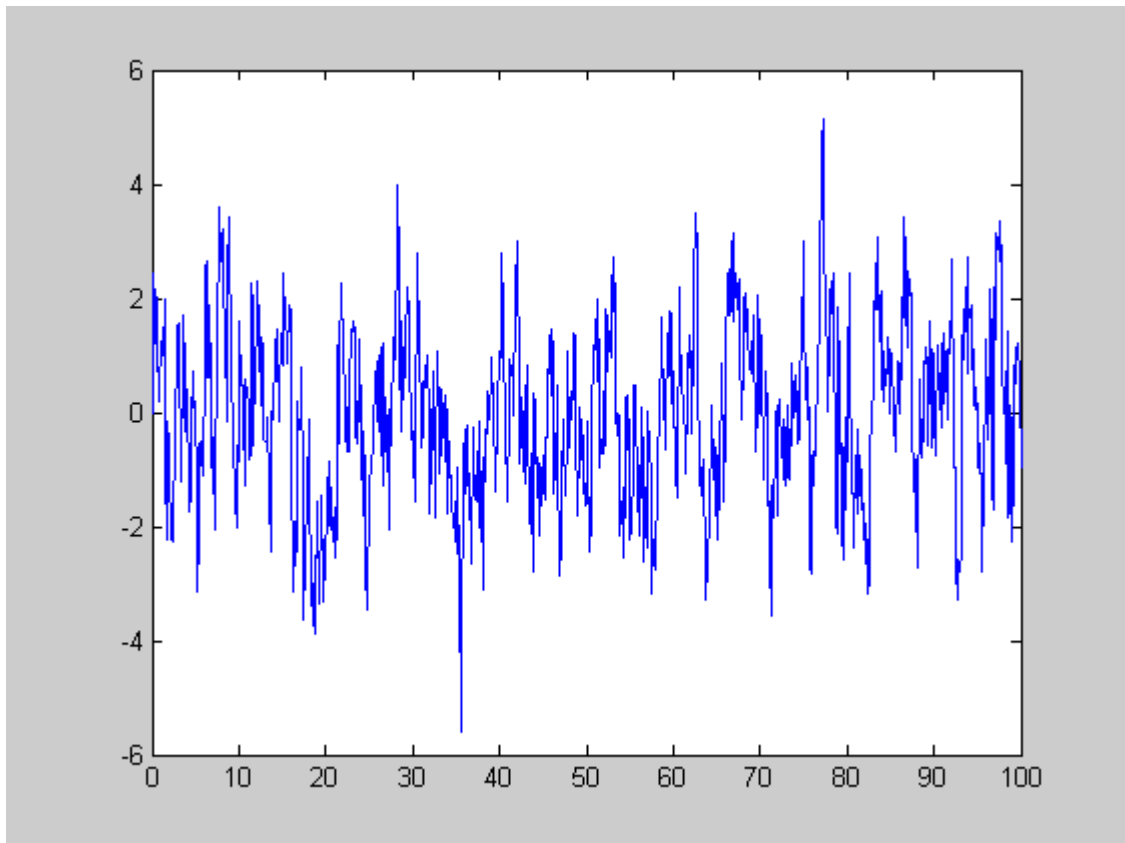


Рисунок 4.2. Випадковий процес

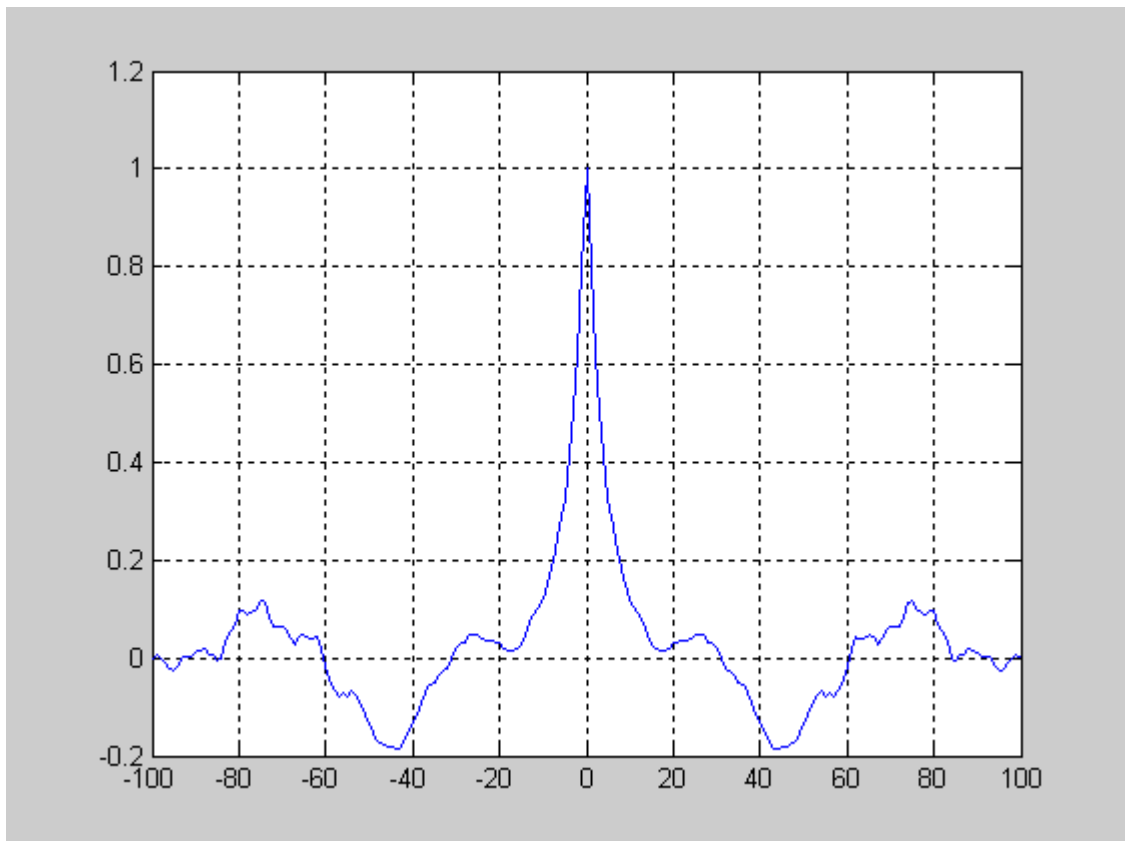


Рисунок 4.3. Кореляційна функція випадкового процесу  
Кореляційної функції представлено на рисунку 3.

## 2. Отримання спектральної густини.

Для отримання спектральної густини випадкового процесу виконаємо апроксимацію кореляційної функції. Кореляційну функцію будемо шукати у вигляді :

$$R_x(\tau) = a \cdot e^{-b(\tau)}$$

Вираз спектральної густини, яка відповідає даній кореляційній функції згідно таблиць:

$$S_x(\omega) = \frac{2 \cdot a \cdot b}{(b^2 + \omega^2)}$$

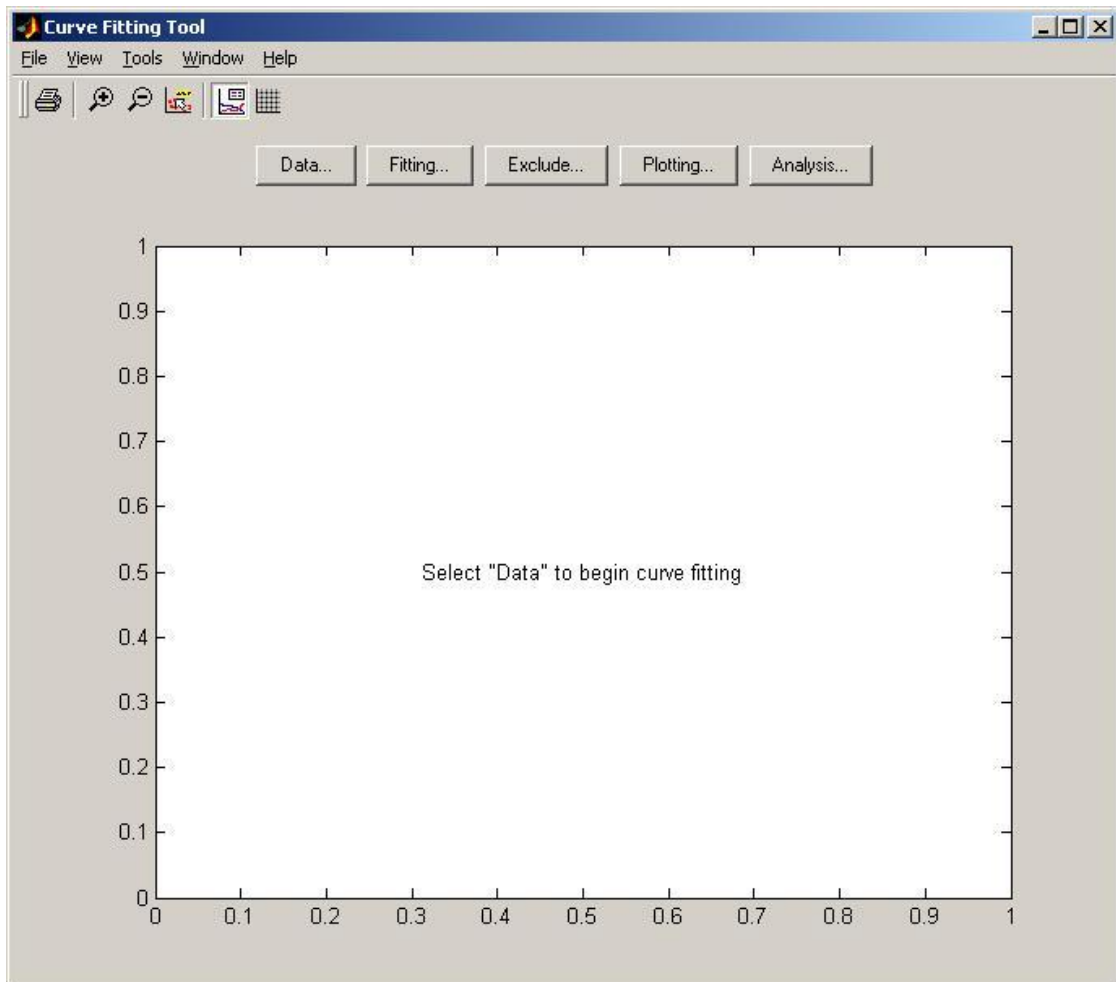
Невідомі параметри знайдемо, використовуючи пакет **Curve Fitting Toolbox**.

Для апроксимації будемо використовувати лише додатні значення кореляційної функції. Виконаємо наступні дії :

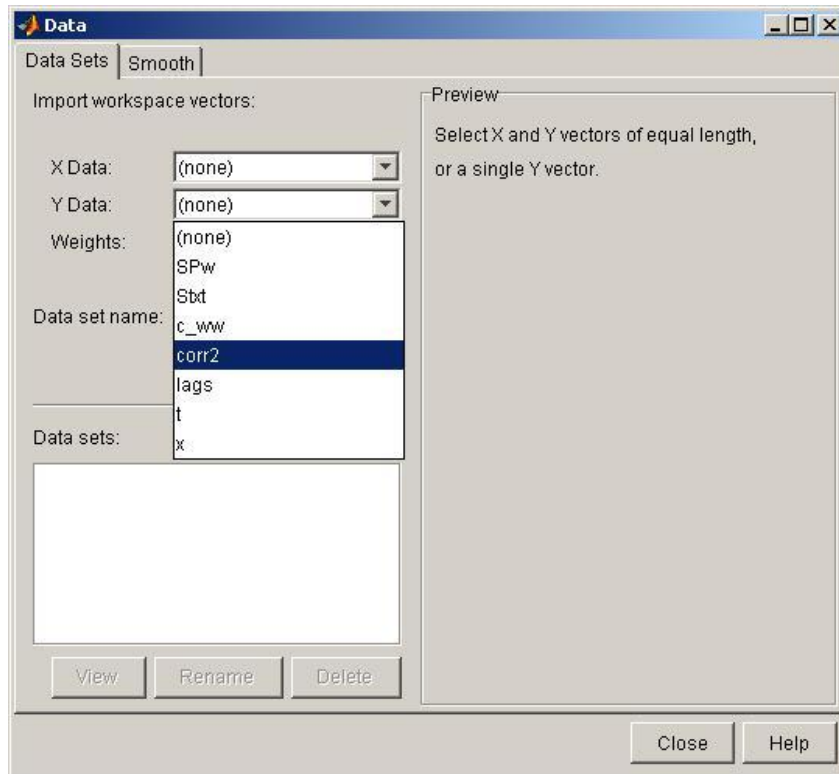
1. Створимо файл даних corr2.txt шляхом копіювання даних, які відповідають додатнім значенням кореляційної функції з редактору **Array Editor**.

2. В робочому просторі створимо нову змінну (в даному випадку corr2), яка відповідає даним файлу corr2.txt – в меню **File** вибираємо пункт **Import Data** ;

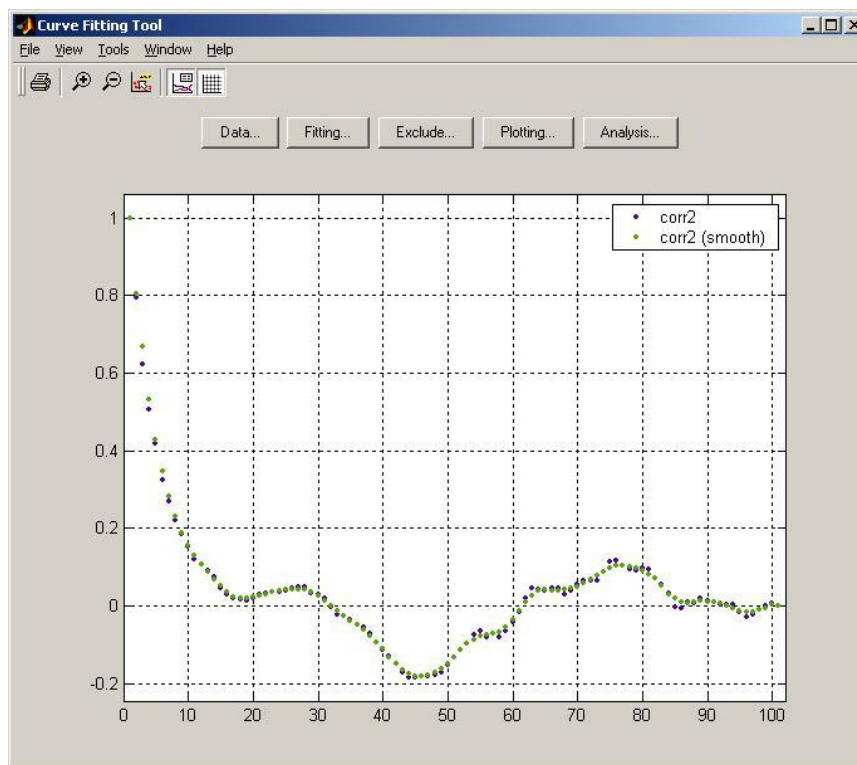
3. Запускаємо пакет **Curve Fitting Toolbox**. Після запуску на екрані з'являється вікно :



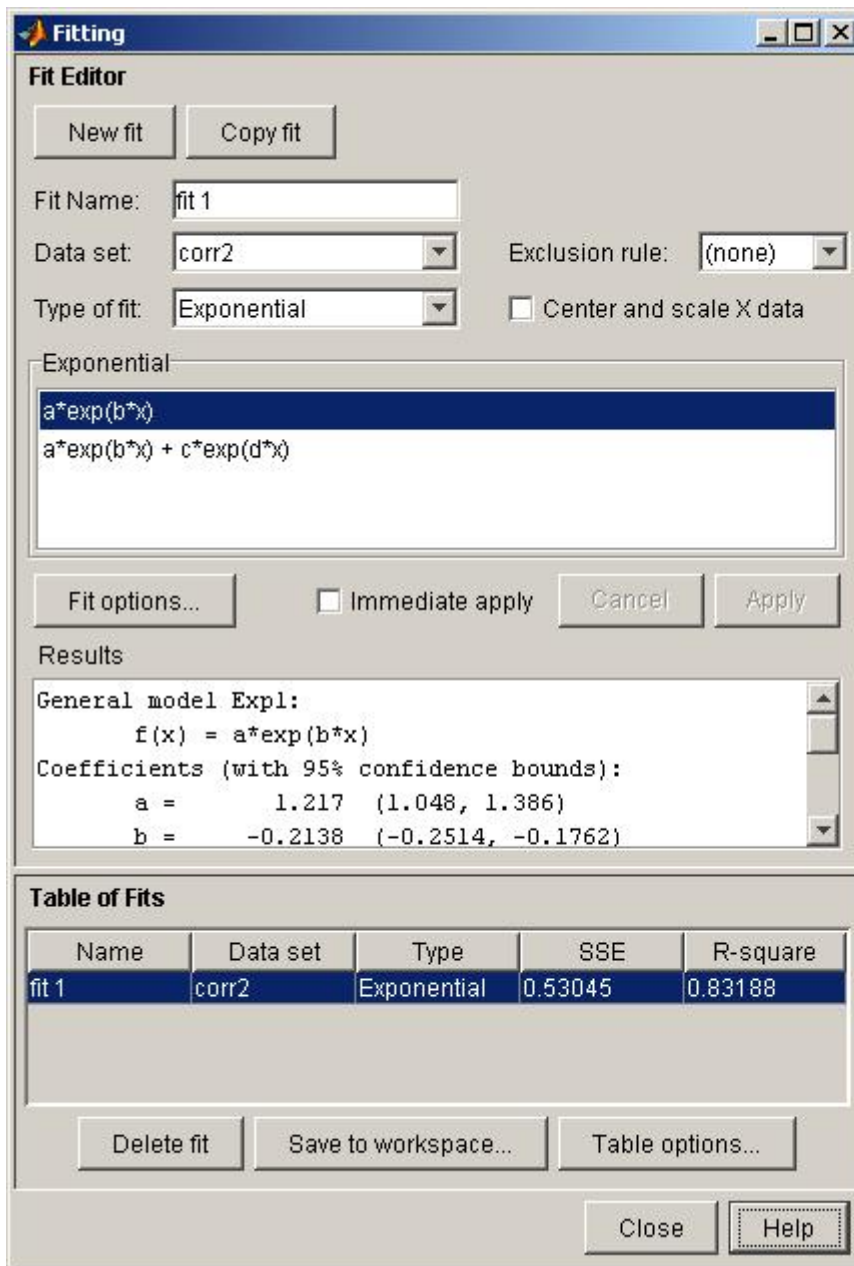
4. Виконуємо імпорт даних, натискаючи кнопку **Data**, після чого відкривається наступне діалогове вікно, в якому вказуємо ім'я змінних і натискаємо **Create Data Set** :



5. Виконуємо згладжування кривої методом ковзаючого середнього, перейшовши на вкладку **Smooth** і натискаємо кнопку **Create Smoothed Data Set**. Перед початком апроксимації отримуємо :



6. Для виконання апроксимації натискаємо **Fitting**, після чого у відповідному вікні послідовно вибираємо кнопку **New Fit**; тип функції, якою будемо апроксимувати в полі **Type of Fit** і натискаємо **Apply** . В полі **Results** з'являються шукані значення параметрів  $a$  і  $b$  :



Підставивши в формулу для знаходження спектральної густини значення параметрів, отримаємо остаточний вираз для спектральної густини, за яким і виконаємо побудову графіку спектральної густини :

$$S_x(\omega) = \frac{0.52}{0.045 + \omega^2}$$

```
>> w=-1:0.05:1;
>> S=0.52./(0.045+w.^2);
>> stem(w,S);grid on
>> |
```

Графік спектральної густини зображено на рисунку 4.4.

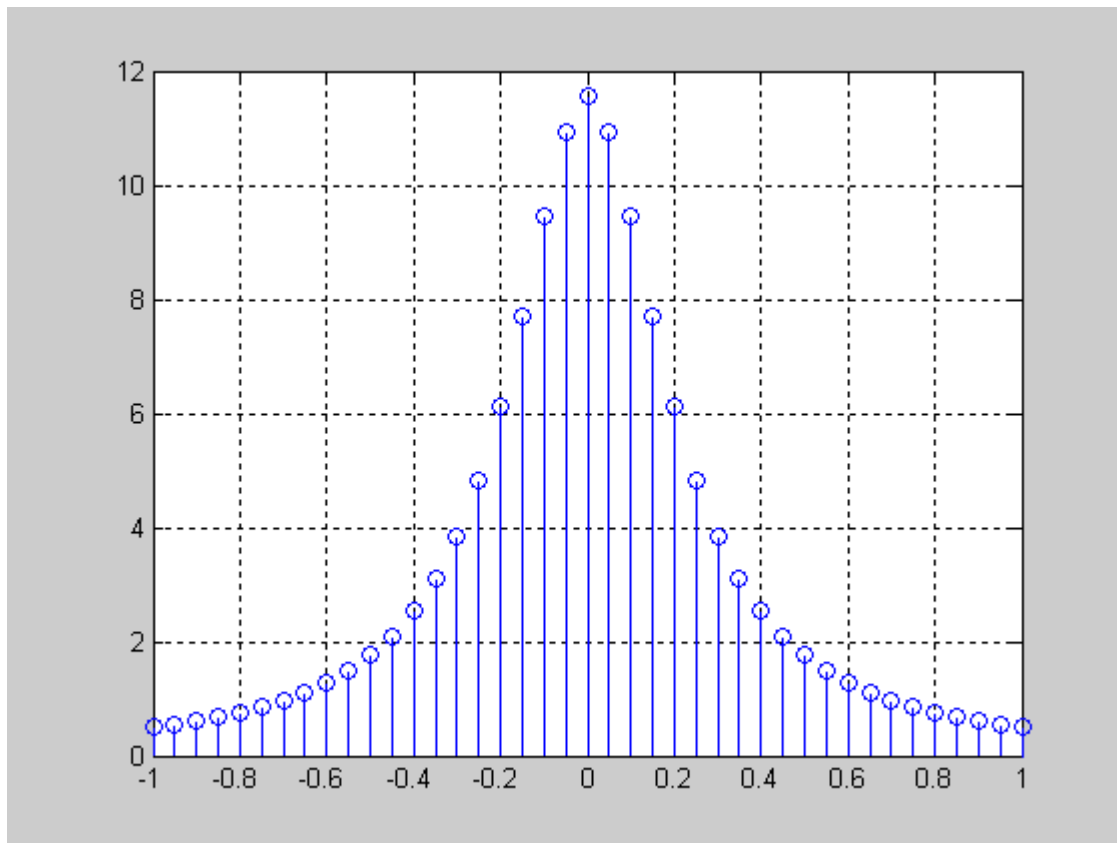


Рисунок 4.4. Спектральна густина випадкового процесу.

## 4.5 Спектральний аналіз та статистична обробка сигналів.

Методи спектрального аналізу випадкових сигналів поділяються на два великих класи — непараметричні і параметричні. У *непараметричних* (nonparametric) методах використовується лише інформація, яка міститься у відліках аналізованого сигналу. *Параметричні* (parametric) методи припускають наявність деякої статистичної *моделі* випадкового сигналу, а процес спектрального аналізу в даному випадку полягає у визначення *параметрів* цієї моделі. Використовується також термін "модельний спектральний аналіз" (Model-Based Spectrum Analysis, MBSA).

Пакет **Signal Processing** містить функції, що реалізують різноманітні методи спектрального аналізу — як параметричні, так і непараметричні (необхідно ще раз підкреслити, що під спектральним аналізом тут розуміється оцінка *спектральної щільності потужності випадкового процесу*). Крім того, є функції для одержання інших усереднених характеристик випадкових дискретних сигналів.

### 4.5.1 Спектр дискретного випадкового процесу.

Для визначення спектральних характеристик дискретного випадкового процесу обчислюється середній спектр потужності його обмеженого по довжині фрагмента, а потім довжина фрагмента спрямовується до нескінченності:

$$W(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{k=-n}^n x(k) e^{-j\omega k T} \right|^2. \quad (4.5.1)$$

Тут  $x(k)$  — відліки випадкового процесу,  $T$  — період дискретизації. Риска зверху позначає усереднення по ансамблю реалізацій.

Крім того, цей спектр можна виразити через кореляційну функцію випадкового процесу:

$$W(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) e^{-j\omega k T}. \quad (4.5.2)$$

Таким чином, спектр дискретного випадкового процесу є перетворенням Фур'є від його кореляційної функції.

**Періодограмою** (periodogram) називається оцінка спектральної щільності потужності, отримана по  $n$  відлікам *однієї реалізації* випадкового процесу відповідно до визначення (4.5.1) (усередненням кінцевого числа доданків). Якщо при розрахунку спектра використовується вагова функція (вікно), отримана оцінка спектра потужності називається *модифікованою періодограмою* (modified periodogram).

Співвідношення (4.5.2) виконується тільки при нескінченному числі використовуваних відліків, тому при будь-якому кінцевому  $n$  періодограма оцінка спектральної щільності потужності є *зміщеною* — тобто всередині суми (4.5.2) кореляційна функція сигналу помножується на трикутну вагову функцію. Крім того, можна показати, що періодограма не є істотною оцінкою спектральної щільності потужності, оскільки *дисперсія* такої оцінки може бути порівняна з квадратом її математичного очікування при будь-якому  $n$ .

#### 4.5.2 Вагові функції (вікна).

Дискретне перетворення Фур'є, використовуване у всіх непараметричних методах спектрального оцінювання, має на увазі періодичне продовження аналізованого фрагмента сигналу. При цьому на стиках фрагментів можуть виникати стрибки, що приводять до появи бічних пелюстків значного рівня в спектральній області. Для ослаблення цього ефекту сигнал перед виконанням дискретного перетворення Фур'є множать на спадаючу від центра до країв *вагову функцію (вікно)*. У результаті величина стрибків на стиках сегментів зменшується. Крім спектрального аналізу вагові функції застосовуються при синтезі нерекурсивних фільтрів шляхом зворотного перетворення Фур'є бажаної частотної характеристики. У цьому випадку вони дозволяють збільшити придушення сигналу в смузі затримання фільтра за рахунок деякого розширення смуги пропускання.

Пакет **Signal Processing Toolbox** містить приблизно півтора десятка вагових функцій. Розглянемо найбільш поширені з них .

##### Вікно Бартлетта :

$w = \text{bartlett}(n)$  – отримання вікна **Бартлетта**, де  $n$  – додатне ціле число, а  $w$  – вектор значень. Коефіцієнти вікна **Бартлетта** обчислюються наступним чином :

– для непарних значень  $n$  :

$$w[k + 1] = \begin{cases} \frac{2k}{n-1}, & 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \\ 2 - \frac{2(k)}{n-1}, & \frac{n-1}{2} \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

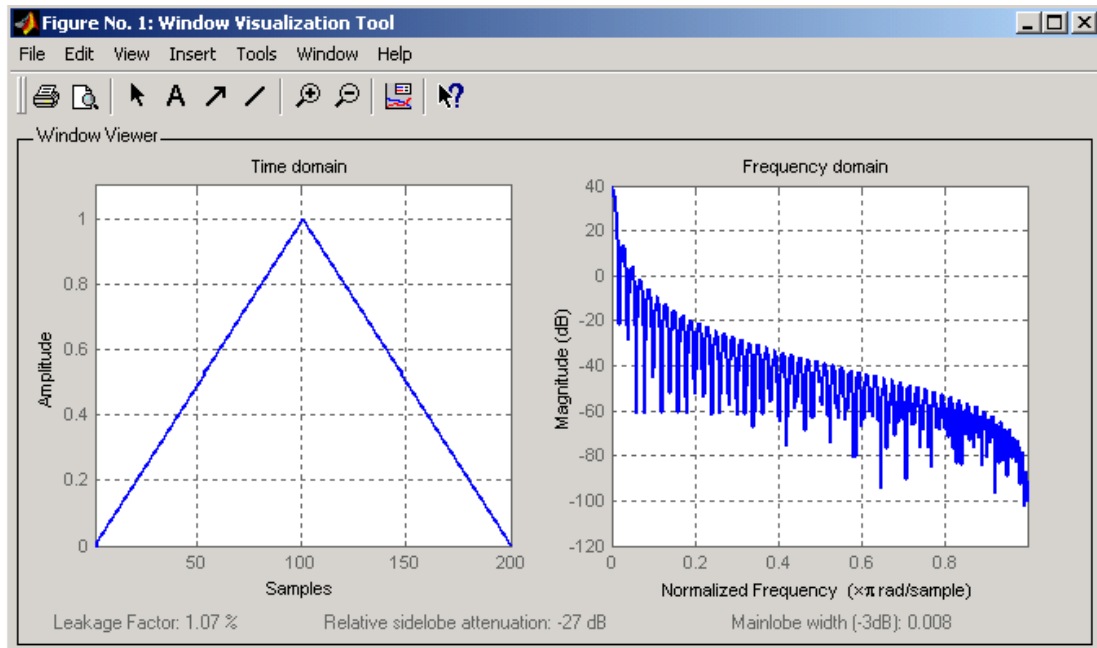
– для парних значень  $n$

$$w[k + 1] = \begin{cases} \frac{2(k)}{n-1}, & 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1 \\ \frac{2(n-k-1)}{n-1}, & \frac{n}{2} \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

## Приклад 1.

$N=64$ ;

`wvtool(bartlett(N))`



## Вікно Бартлетта – Ханна .

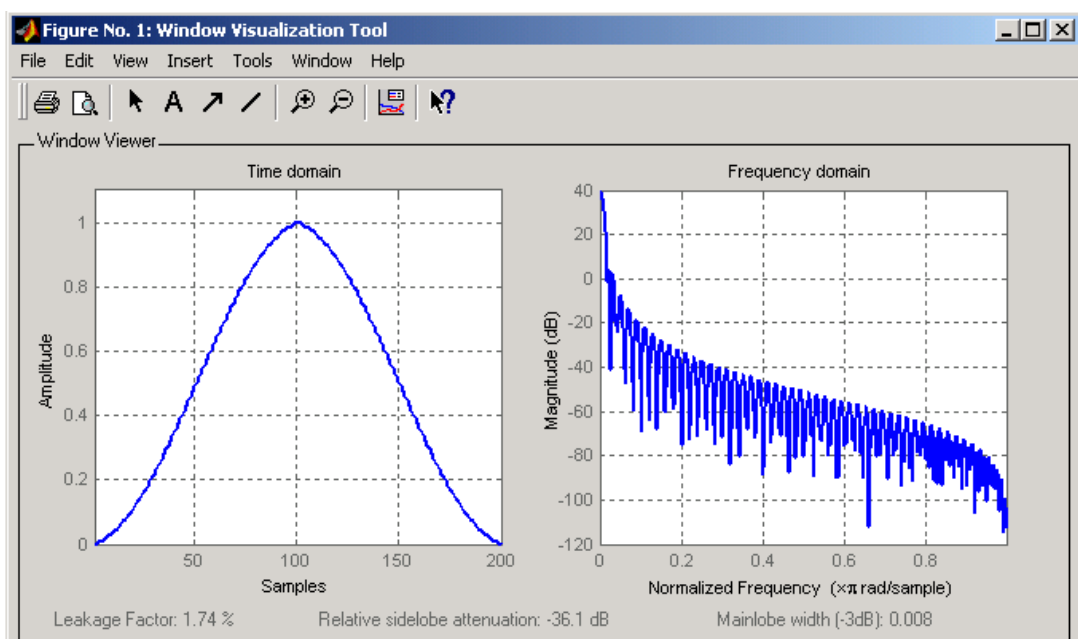
Вікно Бартлетта – Ханна отримують при використанні наступної команди :

`w = barthannwin(n)`

## Приклад 2.

$N=64$ ;

`wvtool(barthannwin(N))`



## Вікно Гаусса .

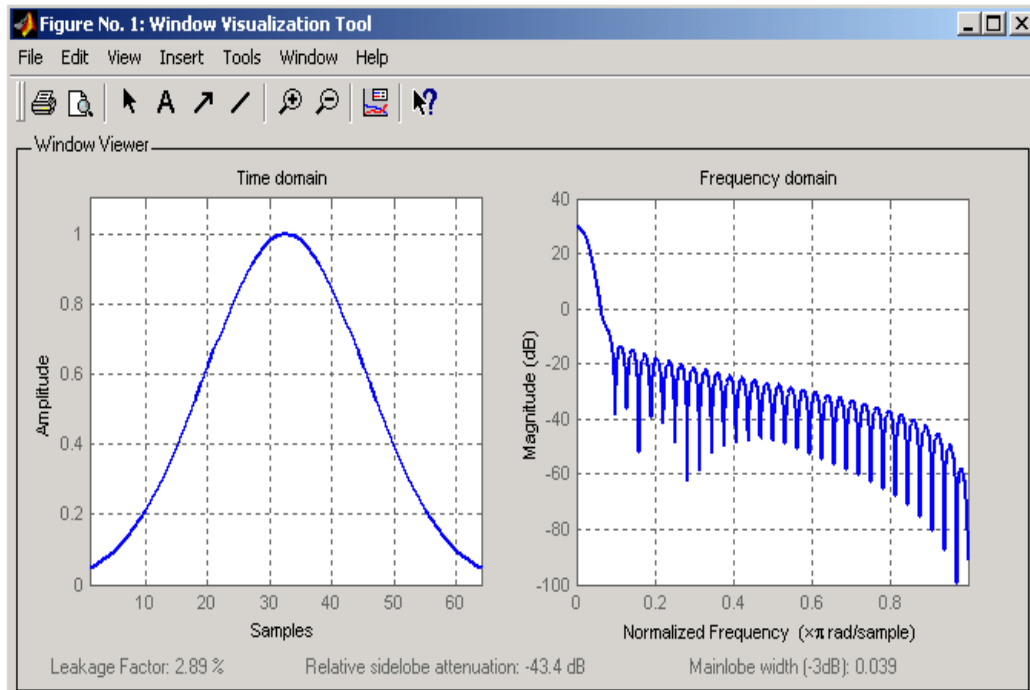
Вікно Гаусса отримують при використанні наступної команди :

**w = gausswin(n)**

### Приклад 3.

N=64;

wvtool(gausswin(N))



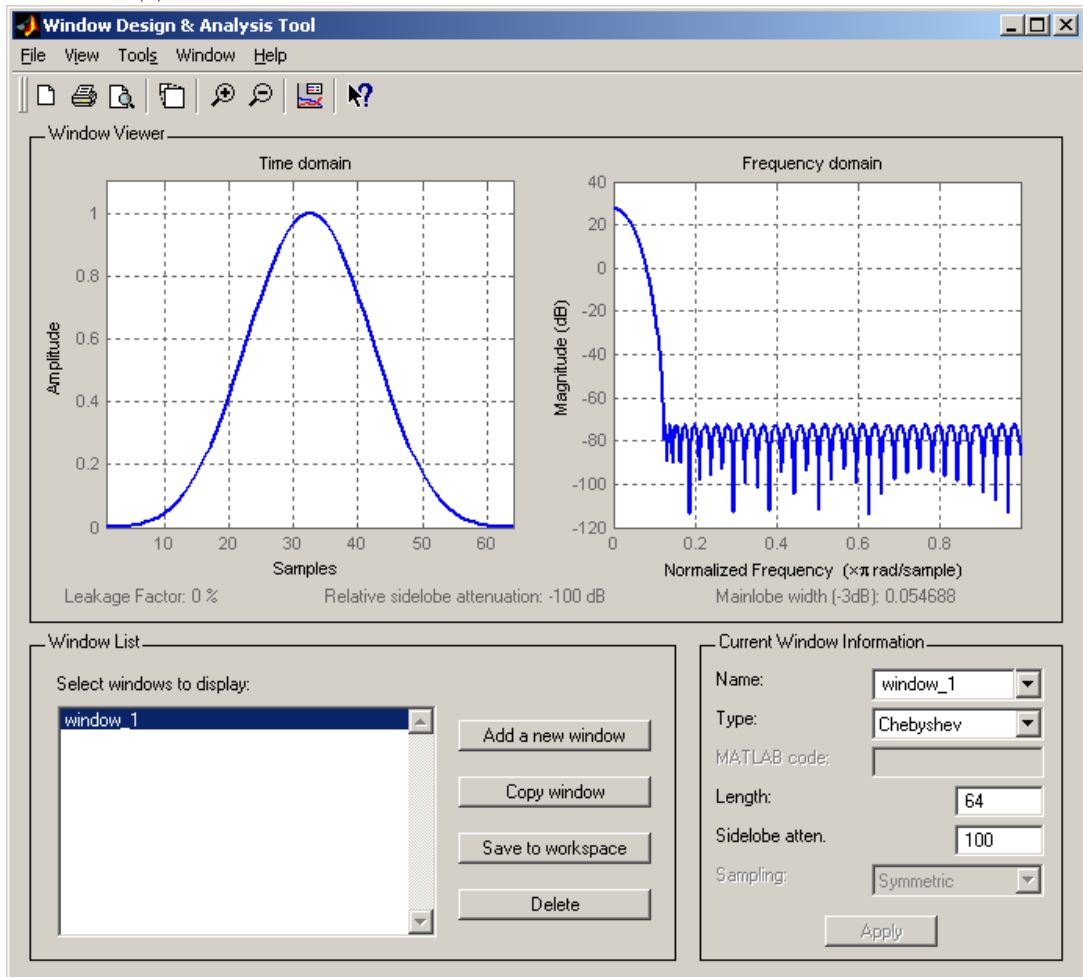
Крім перерахованих вище також часто використовують :

- вікно Ханна (функція **hann**)
- вікно Хеммінга (функція **hamming**)
- вікно Блэкмена (функція **blackman**)
- вікно Блэкмена—Харриса (функція **blackmanharris**)
- вікно Натолла (альтернативна версія вікна Блэкмена—Харриса, функція **nutallwin**)

Інші вікна описуються більш складними математичними співвідношеннями. Форма гауссова вікна (функція **gausswin**) не вимагає пояснень. Модифіковане вікно Бартлетта—Ханна (функція **barthannwin**) являє собою лінійну комбінацію вікон Бартлетта і Ханна. Вікно Бомена (функція **bohmanwin**) є згорткою двох однакових косинусоїдальних імпульсів. Вікно Чебышева (функція **chebwin**) має бічні пелюстки фіксованого (задається при розрахунку) рівня і розраховується шляхом зворотного перетворення Фур'є частотної характеристики вікна. Вікно Кайзера (функція **kaiser**) також має параметр, що регулює рівень бічних

пелюстків і ширину головного пелюстка, при розрахунку даного вікна використовуються модифіковані функції Бесселя. Вікно Тьюки (функція **tukeywin**) є прямокутником з косинусоїдально згладженими краями. При крайніх припустимих значеннях коефіцієнта згладжування воно перетворюється в прямокутне вікно або вікно Ханна.

Ознайомитись з вище перерахованими вікнами можна скориставшись інструментом **Signal Processing Toolbox – WINTool**, інтерфейс якого має наступний вигляд :



## Завдання для самостійного виконання:

### I.

Розв'язати задачі згідно варіанту :

1. Кореляційна функція сигналу  $x(t)$  дорівнює

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha^2 \tau^2}$$

Знайти спектральну густину.

2. Знайти спектральну густину і побудувати її графік для випадкової функції  $x(t)$ , якщо її кореляційна функція представляє собою

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

якщо  $D_x=40$ ,  $\alpha=0.5\text{с}^{-1}$ ,  $\omega_0=2\text{с}^{-1}$ .

3. Лінійна система описується рівнянням вигляду

$$a_1 \dot{Y}(t) + a_0 Y(t) = b_1 \dot{X}(t) + b_0 X(t).$$

Випадкова функція  $x(t)$ , яка діє на вході системи має кореляційну функцію

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha\tau}$$

Знайти дисперсію на виході системи.

4. Кореляційна функція випадкової функції  $x(t)$  описується наступною функцією :

$$R_x(\tau) = \begin{cases} D_x \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right), & |\tau| < \tau_0; \\ 0, & |\tau| > \tau_0 \end{cases}$$

Знайти спектральну густину цієї випадкової функції.

5. В результаті обробки результатів експерименту отримано наступний вираз для кореляційної функції

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$$

де  $D_x$  – дисперсія, яка дорівнює 100,  $\alpha$  – параметр затухання і дорівнює  $5\text{с}^{-1}$ . Визначити спектральну густину та побудувати її графік.

6. На вхід аперіодичної ланки, яка описується рівнянням

$$T_0 \dot{Y}(t) + Y(t) = kX(t)$$

поступає стаціонарний сигнал у вигляді „білого” шуму зі спектральною густиною  $S_g = \text{const}$ . Знайти дисперсію на виході ланки.

7. На лінійну систему, яка описується передаточною функцією

$$W(s) = \frac{0.5s + 1}{0.25s^2 + \xi s + 1}$$

діє стаціонарний випадковий сигнал зі спектральною густиною записаною у вигляді квадрату модуля частотної характеристики формуючого фільтру

$$S_g(\omega) = \left| \frac{j\omega + 1}{j\omega + 2} \right|^2,$$

збудженого „білим ” шумом одиничного рівня. Знайти кореляційну функцію та дисперсію вихідного сигналу при  $\xi=1.25$  і  $\xi=0.6$ .

8. На вхід лінійної системи автоматичного керування поступає випадковий процес з кореляційною функцією  $R_g(\tau) = 4\exp(-2|\tau|)$ . Передаточна функція замкнутої системи

$$W_3(s) = \frac{4s+1}{s^2+s+1}.$$

Визначити дисперсію вихідного сигналу в усталеному режимі.

9. Визначити дисперсію помилки в лінійній системі автоматичного керування, якщо на вході діє корисний сигнал з кореляційною функцією  $R_x(\tau) = 4\exp(-2|\tau|)\cos \tau$ , а передаточна функція замкнутої системи дорівнює :

$$W_3(s) = \frac{20s+10}{0.08s^4 + 1.22s^3 + 4.3s^2 + 21s + 10}.$$

10. Передаточна функція розімкнутої системи автоматичного керування

$$W(s) = \frac{5}{s(1+2s)(1+4s)}.$$

На вхід системи поступає білий шум зі спектральною густиною , яка дорівнює. Визначити дисперсію вихідного сигналу та похибки.

## II.

За допомогою пакету **Signal Processing Toolbox** та **Curve Fitting ToolBox** отримати графіки кореляційної функції та спектральної густини випадкового процесу за експериментальними даними згідно варіанту. Вихідні дані для отримання кореляційної та спектральної густини знаходяться в файлі, ім'я якого визначається наступною структурою :

**Var\_xx.mat**

де xx – номер варіанту.

### **Контрольні запитання :**

1. Назвіть основні характеристики безперервних випадкових величин .
2. Що таке випадковий процес ? Який випадковий процес називається стаціонарним ?
3. Назвіть імовірнісні характеристики стаціонарного випадкового процесу і наведіть формули для їх визначення ?
4. Які властивості має кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу?
5. Що таке спектральна густина ? Який зв'язок існує між спектральною густиною та кореляційною функцією ?
6. Яким чином визначаються статистичні характеристики вихідного сигналу системи автоматичного керування за відомими характеристиками вхідного сигналу ?

## Перелік рекомендованої літератури.

1. Ладанюк А. П., Кишенько В. Д., Луцька Н. М., Іващук В. В. Цифрові системи керування : навч. посіб. Київ : НУХТ, 2015. 230 с.
2. Остріков О. В., Василенко П. М. Цифрові системи автоматичного керування : навч. посіб. Харків : НТУ «ХП», 2018. 256 с.
3. Гаєв Є. О., Нестеренко Б. М. Універсальний математичний пакет MATLAB і типові задачі обчислювальної математики : навч. посіб. Київ : НАУ, 2004. 176 с.
4. Довгий Б. П., Вакал Є. С., Вакал Ю. Є., Попов А. В. Використання математичного пакета MATLAB для розв'язування прикладних задач : навч. посіб. Київ : Український фітосоціологічний центр, 2012. 68 с.
5. Ковриго Ю. М., Бунке О. С., Бойко Т. В. Сучасна теорія управління : підручник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 405 с.
6. Трасковецька Л. М. Програмування в середовищі MATLAB : навч.-метод. посіб. Хмельницький, 2023. 132 с.
7. Хоцкіна В. Б., Вдовиченко І. Н. Робота в пакеті MATLAB : навч. посіб. Кривий Ріг : Державний університет економіки і технологій, 2023. 130 с.
8. Забара С. Моделювання систем у середовищі MATLAB : навч. посіб. Київ : Університет «Україна», 2011. 137 с.
9. Palm W. J. Introduction to MATLAB for Engineers. 4th ed. New York : McGraw-Hill Education, 2020. 720 p.
10. Attaway S. MATLAB: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving. 6th ed. Amsterdam : Elsevier, 2023. 720 p.
11. Теорія сигналів : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 256 с. (розділи спектрального аналізу та перетворення Фур'є).
12. Талах М. В. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики : навч. посіб. Запоріжжя : ЗНУ, 2021. 312 с.
13. Кравчук А.Ф., Кондратець В.О., Степанов Л.Є.. Аналіз регулярних та випадкових сигналів. – К.:УМК ВО, 1991.– 88с.
14. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ : Либідь, 2007. 656 с.