

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ  
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН ТА ЕНЕРГЕТИКИ  
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ**

**ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

**Частина I**

**Методичні рекомендації**

**для здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей**

**КРОПИВНИЦЬКИЙ**

**2023**

Вища та прикладна математика. Ч. I: Методичні рекомендації для здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей / Укл.: Гуцул В.І., Якименко С.М., Філімоніхіна І.І. – Кропивницький: ЦНТУ, 2023. – 184 с.

Перша частина містить основні положення теоретичного матеріалу по всіх розділах вищої математики, які вивчаються на економічних спеціальностях. По кожній темі дані детальні пояснення та розглянуті типові приклади.

Орієнтовано на здобувачів вищої освіти економічних спеціальностей.

Затверджено на засіданні  
кафедри вищої  
математики та фізики.  
Протокол № 1 від 30.08.2023

© В.І.Гуцул,  
С.М.Якименко,  
І.І.Філімоніхіна, 2023  
© ЦНТУ

# ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	7
.....	7
§ 1.1. Матриці.....	7
§ 1.2. Визначники.....	11
§ 1.3. Обернена матриця. Ранг матриці.....	15
§ 1.4. Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса. Метод Жордана-Гаусса.....	20
§ 1.5. Невироджені системи лінійних рівнянь. Матричний метод. Формули Крамера.....	26
§ 1.6. Критерій сумісності та загальна схема дослідження і розв'язування системи лінійних рівнянь.....	28
§ 1.7. Однорідні системи лінійних рівнянь.....	31
РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	32
§ 2.1. Декартова прямокутна система координат.....	32
Довжина відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні.....	32
§ 2.2. Означення вектора. Основні поняття.....	34
§ 2.3. Лінійні операції над векторами.....	37
§ 2.4. Лінійна залежність векторів. Базис.....	39
§ 2.5. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами.....	42
§ 2.6. Векторний добуток векторів.....	44
§ 2.7. Мішаний добуток векторів.....	47
§ 2.8. Пряма на площині.....	49
РОЗДІЛ 3. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА.....	54
§ 3.1. Означення та різні форми запису комплексного числа.....	54
§ 3.2. Дії над комплексними числами.....	57

<b>РОЗДІЛ 4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ</b> .....	59
§ 4.1. Поняття границі функції .....	59
§ 4.2 Нескінченно мала і нескінченно велика функції .....	61
§ 4.3 Обчислення границь та дві чудові границі.....	63
§ 4.4 Неперервність функцій. Класифікація точок розриву.....	67

<b>РОЗДІЛ 5. ПОХІДНА І ДИФЕРЕНЦІАЛ.</b>	
<b>ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ</b> .....	70
§ 5.1. Поняття та властивості похідної .....	70
§ 5.2. Похідна складної функції.....	74
§ 5.3. Диференціювання неявно заданих функцій. Логарифмічне диференціювання.....	77
§ 5.4. Диференціал функції. Наближені обчислення за допомогою диференціала .....	79
§ 5.5. Поняття про похідні вищих порядків.....	81

<b>РОЗДІЛ 6. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ</b> .....	82
§ 6.1. Правило Лопітала .....	82
§ 6.2. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції.....	84
§ 6.3. Дослідження функції на монотонність і точки екстремумів.....	85

<b>РОЗДІЛ 7. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ</b> ...	89
§ 7.1. Поняття невизначеного інтеграла. Безпосереднє.....	89
інтегрування .....	89
§ 7.2. Методи інтегрування .....	93
§ 7.3. Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен .....	96

<b>РОЗДІЛ 8. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.</b>	
<b>ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО</b>	

<b>ІНТЕГРАЛА</b> .....	<b>99</b>
§ 8.1. Означення та основні властивості визначеного інтеграла ..	99
§ 8.2. Обчислення визначеного інтеграла .....	101
§ 8.3. Площа плоскої фігури .....	103
§ 8.4. Довжина дуги кривої .....	105
§ 8.5. Невласні інтеграли.....	106

<b>РОЗДІЛ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ</b>	
<b>ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ</b> .....	<b>108</b>
§ 9.1. Поняття функції декількох змінних .....	108
§ 9.2. Границя та неперервність функції декількох змінних.....	110
§ 9.3. Частинні похідні функції декількох змінних .....	112
§ 9.4. Диференціал функції декількох змінних .....	113
§ 9.5. Частинні похідні вищих порядків .....	116
§ 9.6. Екстремуми функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в заданій області .....	118
§ 9.7. Метод найменших квадратів.....	122

<b>РОЗДІЛ 10. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ</b>	
<b>РІВНЯННЯ</b> .....	<b>125</b>
§ 10.1. Поняття диференціального рівняння. Загальні означення .....	125
§ 10.2. Диференціальні рівняння першого порядку .....	127
§ 10.3. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають пониження порядку .....	133
§ 10.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття.....	136
§ 10.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами .....	138
§ 10.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами .....	141

<b>РОЗДІЛ 11. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....</b>	<b>145</b>
§ 11.1. Основні поняття теорії ймовірностей. Види ймовірностей .....	145
§ 11.2. Умовна ймовірність. Теореми суми і добутку .....	153
§ 11.3. Повна ймовірність .....	154
§ 11.4. Повторні незалежні випробування .....	156
§ 11.5. Випадкова повторна величина. Види випадкових величин .....	160
§ 11.6. Числові характеристики випадкових величин .....	164
§ 11.7. Основні розподіли випадкових величин.....	168
<b>РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА .....</b>	<b>183</b>

# Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

## § 1.1. Матриці

Прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складається з  $m$  рядків і  $n$  стовпців, називається *числовою матрицею* розмірів  $m \times n$ . Числа  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm}$ , які утворюють матрицю, називаються її *елементами*. Для записаної матриці прийняті також наступні позначення:  $A = (a_{ij})$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ );  $A_{m \times n} = (a_{ij})$ .

Розглянемо основні види матриць. Якщо у матриці число рядків дорівнює числу стовпців і дорівнює  $n$ , то вона називається *квадратною матрицею  $n$ -го порядку* :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  утворюють *головну діагональ* квадратної матриці, а елементи  $a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1}$  – *побічну*.

*Матрицею-рядком (матрицею-стовпцем)* називається матриця, яка складається з одного рядка (одного стовпчика).

*Діагональною* називається квадратна матриця, у якій всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю. *Одиничною* називається діагональна матриця, у якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Позначається одинична матриця через  $E$ . Отже,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

*Нульовою* називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю. Позначається вказана матриця літерою  $O$ .

*Трикутною* називається квадратна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

*Лінійними операціями* над матрицями називаються операції додавання, віднімання матриць і множення матриці на число.

Додавати й віднімати можна тільки матриці однакових розмірів. *Сумою (різницею)* двох матриць  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  і  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  називається матриця  $C_{m \times n} = (c_{ij})$ , елементи якої визначаються за формулою  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ( $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ). Іншими словами, при додаванні (відніманні) двох матриць додаються (віднімаються) відповідні елементи цих матриць.

*Добутком* матриці  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на число  $\lambda$  називається матриця  $C_{m \times n} = (c_{ij})$ , елементи якої визначаються за формулою  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ . Як бачимо, для того щоб помножити матрицю на число, необхідно всі елементи матриці помножити на це число.

*Приклад 1.* Знайти  $2A - 3B + 4E$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.*

$$2A - 3B + 4E = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Для лінійних операцій справедливі наступні *основні властивості*:

- 1)  $A + B = B + A$ ; 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- 3)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ; 4)  $A + O = A, 1 \cdot A = A$ ,

де  $\lambda$  – число;  $O$  – нульова матриці. Доведемо першу з них на прикладі квадратних матриць другого порядку:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = B + A.$$

Розглянемо далі добуток двох матриць. Кажуть, що матриця  $A$  *узгоджена* з матрицею  $B$ , якщо число стовпців матриці  $A$  дорівнює числу рядків матриці  $B$ . Добуток  $AB$  двох матриць визначений тільки тоді, коли матриця  $A$  узгоджена з матрицею  $B$ . *Добутком* матриці  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на матрицю  $B_{n \times p} = (b_{ij})$  називається матриця  $C_{m \times p} = (c_{ij})$ , елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (1.1)$$

або

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}.$$

Як бачимо, елемент  $c_{ij}$  матриці  $C$  дорівнює сумі добутків елементів  $i$ -го рядка матриці  $A$  на відповідні елементи  $j$ -го стовпчика матриці  $B$ .

Приклад 2. Задані матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти добутки  $AB$  і  $BA$ , якщо вони існують.

*Розв'язання.* Добуток  $AB$  існує (матриця  $A$  узгоджена з матрицею  $B$ ), а добуток  $BA$  не існує (матриця  $B$  не узгоджена з матрицею  $A$ ).

Використовуючи формулу (1.1), знайдемо елементи матриці  $C = AB$ :

$$c_{11} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = 2, \quad c_{12} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = -1, \quad c_{13} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 0, \\ c_{21} = 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -6, \quad c_{22} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9, \quad c_{23} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 12.$$

Можемо записати

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Для добутку двох матриць справедливі наступні *властивості* (при умові, що відповідні добутки існують):

$$1) (AB)C = A(BC); \quad 2) A(B + C) = AB + AC;$$

$$3) OA = AO = O; \quad 4) EA = AE = A,$$

де  $E$  і  $O$  – одинична і нульова матриці відповідно.

На прикладі квадратних матриць другого порядку доведемо одну з рівностей четвертої властивості:

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що у загальному випадку для добутку двох матриць  $AB \neq BA$ , тобто міняти місцями множники не можна (у прикладі 2 один з добутків узагалі не існує).

Якщо кожен рядок матриці  $A$  записати як стовпчик із тим самим номером, то отримаємо матрицю  $A^T$ , яка називається

транспонованою до матриці  $A$ .

Приклад 3. Для заданої матриці  $A$  визначаємо транспоновану матрицю  $A^T$  :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для операції транспонування справедливі наступні *властивості*:

$$1) (A^T)^T = A; \quad 2) (A+B)^T = A^T + B^T; \quad 3) (AB)^T = B^T A^T.$$

## § 1.2. Визначники

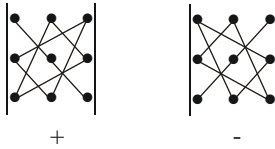
Важливою характеристикою *квадратної* матриці є її *визначник*. Визначник матриці – це число, яке отримують за допомогою певних дій над її елементами. Розглянемо тут тільки методи обчислення визначників та деякі їхні властивості. Такі поняття, як порядок матриці, її елементи, головна й побічна діагональ переносяться і на відповідні їм визначники.

Визначники *другого* й *третього* порядків обчислюються відповідно за формулами :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (2.1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (2.2) \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Остання формула легко запам'ятовується за допомогою правила трикутників:



На схемі зліва вказані правила утворення трьох перших добутоків (вони беруться зі своїм знаком), а справа – трьох останніх (вони беруться із протилежним знаком).

*Приклад 1.* Обчислити визначники даних матриць :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Використовуючи формули (2.1) і (2.2), отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) = 22,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 \cdot (-5) - \\ - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 12 + 30 - 16 = 26.$$

Окрім вже використаного позначення, визначник матриці  $A$  може позначатися також символом  $\det A$  або  $\Delta$ .

*Міномор*  $M_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  називається визначник, який одержимо з даного за допомогою викреслювання рядка  $i$  і стовпчика, що містять цей елемент ( $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпчика). *Алгебраїчне доповнення*  $A_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  визначається формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (2.3)$$

*Приклад 2.* Для матриці  $B$  з попереднього прикладу обчислити  $M_{11}$ ,  $M_{32}$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{32}$ .

*Розв'язання.*

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot 8 = 8; \quad A_{32} =$$

$$(-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot (-12) = 1.$$

*Властивості визначників :*

1. Визначник матриці  $A$  дорівнює визначнику транспонованої матриці  $A^T$ .

2. Якщо матриця містить нульовий рядок або нульовий стовпчик, то її визначник дорівнює нулю.

3. Якщо два рядки або стовпчики матриці пропорційні (однакові), то її визначник дорівнює нулю.

4. Спільний множник одного рядка (стовпчика) виноситься за знак визначника.

5. Якщо поміняти місцями два рядки або стовпчики, то знак визначника зміниться на протилежний.

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпчика) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на будь-яке число.

7. Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на їхні алгебраїчні доповнення.

8. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Доведемо четверту властивість (для визначника другого порядку):

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} \cdot a_{22} - \lambda a_{12} a_{21} = \lambda (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо два методи обчислення визначника  $n$ -го порядку. Ці методи базуються на двох останніх властивостях визначників.

*Метод розкладання визначника за елементами рядка або стовпчика* (сьома властивість) дозволяє поступово знижувати порядок визначників. Об'єм обчислень буде найменшим, якщо визначник розкласти за елементами рядка або стовпчика, що містить найбільше число нулів.

*Приклад 3.* Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Розкладемо визначник за другим стовпчиком:

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42} = 2 \cdot A_{22} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13}) = \\ &= 2 \left( - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \right) = 2(-16 + 3 \cdot 14) = 52. \end{aligned}$$

Суть методу зведення визначника до трикутного вигляду полягає у наступному: спочатку, використовуючи властивості, зводимо даний визначник до трикутного вигляду, а потім обчислюємо останній як добуток елементів головної діагоналі.

*Приклад 4.* Обчислити визначник попереднього прикладу методом зведення до трикутного вигляду.

*Розв'язання.* Нижче здійснена наступна послідовність дій:

поміняли місцями 1-й і 2-й стовпчики; поміняли місцями 1-й і 2-й рядки; поміняли місцями 2-й і 3-й стовпчики; помножили 2-й рядок на  $-2$  і додали до 3-го; помножили 2-й рядок на  $-1$  і додали до 4-го; помножили 3-й рядок на  $5/4$  і додали до 4-го; перемножили елементи головної діагоналі.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ & = - \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -26/4 \end{vmatrix} = 52. \end{aligned}$$

### § 1.3. Обернена матриця. Ранг матриці

Матриця  $A^{-1}$  називається *оберненою* до квадратної матриці  $A$ , якщо виконуються рівності:  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ , де  $E$  – одинична матриця.

Квадратна матриця називається *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля. Нехай задана невинроджена матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці існує єдина обернена матриця  $A^{-1}$ , яка визначається за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

де  $\det A$  – визначник матриці  $A$ ;  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$  – алгебраїчні доповнення відповідних елементів.

*Приклад 1.* Знайти обернену матрицю  $A^{-1}$  і зробити перевірку, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Для матриці третього порядку формула (3.1) має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці та алгебраїчні доповнення її елементів:

$$\det A = 11, \quad A_{11} = 5, \quad A_{12} = -18, \quad A_{13} = 2, \quad A_{21} = 0,$$

$$A_{22} = 11, \quad A_{23} = 0, \quad A_{31} = -3, \quad A_{32} = 2, \quad A_{33} = 1.$$

Підставимо знайдені значення в записану формулу і зробимо перевірку:

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -18 & 11 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -18 & 11 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Існує й інший метод обчислення оберненої матриці. Вкажемо коротко його суть. Дану невироджену матрицю  $A$  зводимо до одиничної. Одночасно ті ж самі дії виконуємо над одиничною матрицею того ж порядку. Матриця, яка отримується з одиничної, є оберненою  $A^{-1}$ .

*Приклад 2.* Знайти обернену матрицю  $A^{-1}$  до матриці  $A$  з попереднього прикладу (другим методом).

*Розв'язання.* Складаємо блокову матрицю, яка містить елементи заданої матриці  $A$  (записуються зліва від вертикальної риски) і елементи одиничної матриці  $E$  (записуються справа від вертикальної риски). Тут і надалі в фігурних дужках вказані дії, які виконуються над рядками матриці при переході від попередньої до наступної. Запис в перших дужках потрібно розуміти так: перший рядок переписується без змін; помноживши перший рядок вихідної матриці на  $-2$  і додавши до другого, отримуємо другий рядок наступної матриці; помноживши перший рядок вихідної матриці на  $2$  і додавши до третього, дістаємо третій рядок наступної матриці. Виконуємо перетворення:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ 2R_1 + R_3 \end{array} \right\} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-3/11)R_3 + R_1 \\ (2/11)R_3 + R_2 \\ (1/11)R_3 \end{array} \right\} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/11 & 0 & -3/11 \\ 0 & 1 & 0 & -18/11 & 1 & 2/11 \\ 0 & 0 & 1 & 2/11 & 0 & 1/11 \end{array} \right).$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/11 & 0 & -3/11 \\ -18/11 & 1 & 2/11 \\ 2/11 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо далі поняття рангу матриці й один із методів його обчислення. Нехай задана матриця  $A$  розмірів  $m \times n$ . Деяким чином виберемо  $k$  рядків і  $k$  стовпців цієї матриці,  $1 \leq k \leq \min(m, n)$ . З елементів, що належать вибраним рядкам і вибраним стовпчикам (стоять на перетині цих рядків і стовпців) складаємо визначник  $k$ -го порядку. Вказаний визначник називається мінором  $k$ -го порядку матриці  $A$ .

*Приклад 3.* Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

обчислити один з мінорів другого й один з мінорів третього порядків.

*Розв'язання.*

$$M_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -36.$$

Мінор  $M_1$  складається з елементів матриці  $A$ , що стоять на перетині 2-го, 3-го рядків і 2-го, 3-го стовпців, а мінор  $M_2$  – 1-го, 2-го, 3-го рядків і 1-го, 3-го, 4-го стовпців.

*Рангом* матриці називається найбільший порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Позначається ранг символом  $r$  (або  $r(A)$ ).

З даного означення випливає, що ранг матриці завжди не більший її меншого розміру.

*Елементарними перетвореннями* матриці будемо називати

наступні дії:

1) множення будь-якого рядка або стовпчика матриці на відмінне від нуля число;

2) додавання до одного рядка або стовпчика матриці іншого рядка або стовпчика, помноженого на будь-яке число;

3) перестановка місцями двох рядків або стовпців.

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Ранг матриці можна обчислити наступним чином: за допомогою елементарних перетворень зводимо дану матрицю до трапецієвидної (або до трикутної) форми:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3k} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці  $A$  дорівнює числу ненульових рядків останньої матриці.

*Приклад 4.* Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Використовуючи елементарні перетворення, зводимо матрицю до трапецієвидної форми:



Для системи (4.1) можна виписати наступні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

де  $A$  – основна матриця (або матриця) системи,  $X$  – матриця-стовпець невідомих,  $H$  – матриця-стовпець вільних членів. За допомогою вказаних матриць система (4.1) може бути представлена у вигляді:

$$AX = H. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) є матричною формою запису системи (4.1).

*Приклад 1.* Виписати матриці для системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Якщо матрицю  $A$  доповнити стовпчиком вільних членів, то отримаємо *розширену матрицю* системи:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

*Елементарними перетвореннями* системи (4.1) будемо називати наступні дії :

1) множення будь-якого рівняння системи на відмінне від нуля число;

2) додавання до одного рівняння іншого, помноженого на будь-яке число;

3) перестановка місцями двох рівнянь системи.

Елементарні перетворення системи не змінюють її розв'язків. Іншими словами, після застосування до системи елементарних перетворень отримаємо систему, еквівалентну даній.

Розглянемо один з основних методів розв'язування системи лінійних рівнянь, а саме *метод Гаусса* (або *метод послідовного виключення невідомих*). Нехай задана система (4.1). На першому кроці, використовуючи елементарні перетворення, виключаємо невідому  $x_1$  з усіх рівнянь, окрім першого (першим повинно стояти рівняння, яке обов'язково містить невідому  $x_1$ ). На другому кроці виключаємо невідому  $x_2$  з усіх рівнянь, окрім перших двох (у другому рівнянні ця невідома повинна бути) і т.д. Після чергового кроку одне з рівнянь може перетворитися у числову тотожність  $0 = 0$ . Такі рівняння відкидаються. Можлива ситуація, коли одне з рівнянь набуває вигляду  $0 = c$ , де  $c$  – відмінне від нуля число. У цьому випадку остання система, а, отже, і система (4.1) несумісна. Якщо система сумісна, то після виконання вказаних дій (прямого ходу методу Гаусса), будемо мати :

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = q_1, \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = q_2, \\ \dots \\ b_{nn}x_n = q_n. \end{cases} \quad (4.5)$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1p}x_p + \dots + b_{1n}x_n = q_1, \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2p}x_p + \dots + b_{2n}x_n = q_2, \\ \dots\dots\dots \\ b_{pp}x_p + \dots + b_{pn}x_n = q_p. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Підкреслимо, що системи (4.1) і (4.6) (або (4.5)) еквівалентні.

Система (4.5) визначена. З останнього рівняння цієї системи знаходимо невідому  $x_n$ . Підставляємо знайдене значення у передостаннє рівняння і знаходимо  $x_{n-1}$ . Продовжуючи таким чином (обернений хід методу Гаусса), знайдемо усі невідомі.

Система (4.6) невизначена. У цьому випадку необхідно вводити основні (базисні) і неосновні (вільні) невідомі. Для системи (4.6) невідомі  $x_1, x_2, \dots, x_p$  – основні, а невідомі  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  – неосновні. Надавши неосновним невідомим довільні значення  $c_1, c_2, \dots, c_{n-p}$ , отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1p}x_p = q_1 - b_{1p+1}c_1 - \dots - b_{1n}c_{n-p}, \\ b_{22}x_2 + \dots + b_{2p}x_p = q_2 - b_{2p+1}c_1 - \dots - b_{2n}c_{n-p}, \\ \dots\dots\dots \\ b_{pp}x_p = q_p - b_{pp+1}c_1 - \dots - b_{pn}c_{n-p}. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Розв'язуємо останню систему відносно основних невідомих.

*Приклад 2.* Розв'язати дані системи методом Гаусса :

$$а) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 1, \end{cases} \quad б) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_2 - x_3 = 1, \end{cases} \quad в) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_3 = 2, \\ -2x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

а) Помножимо перше рівняння системи на  $-3$  і додамо до другого:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 0 = -14. \end{cases}$$

Система не має розв'язків.

б) На практиці зручно працювати не з самою системою, а з її розширеною матрицею, виконуючи елементарні перетворення над її рядками:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} R_1 \\ -3R_1 + R_2 \\ R_3 \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} R_1 \\ R_2 \\ 2R_2 + R_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_2 - 4x_3 = -14, \\ -9x_3 = -27. \end{cases}$$

Здійснюємо обернений хід методу Гаусса:

$$\begin{aligned} -9x_3 &= -27, & x_3 &= 3; \\ -x_2 - 4 \cdot 3 &= -14, & x_2 &= 2; \\ x_1 + 2 + 3 &= 6, & x_1 &= 1. \end{aligned}$$

Таким чином, система має єдиний розв'язок  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ .

в) Аналогічно попередньому, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ R_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} R_1 \\ R_2 \\ -R_2 + R_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Останній матриці відповідає система (рівняння  $0 = 0$  відкидається)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -2x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Невідомі  $x_1$ ,  $x_2$  вважаємо основними, а невідому  $x_3$  – неосновною.

Надавши  $x_3$  довільне значення  $c_1$ , отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 + c_1, \\ -2x_2 = -8 - 3c_1. \end{cases}$$

Знаходимо основні невідомі:

$$-2x_2 = -8 - 3c_1, x_2 = 4 + \frac{3}{2}c_1; \quad x_1 + 4 + \frac{3}{2}c_1 = 5 + c_1, x_1 = 1 - \frac{1}{2}c_1.$$

Дана система має нескінченну множину розв'язків:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}c_1, \quad x_2 = 4 + \frac{3}{2}c_1, \quad x_3 = c_1; \quad c_1 \in R.$$

*Метод Жордана-Гаусса* є модифікацією методу Гаусса. По суті він одночасно реалізує прямий і обернений хід методу Гаусса. Наведемо основні моменти цього методу:

1) На першому кроці випикуємо розширену матрицю системи і вибираємо, так званий, *ключовий елемент* (ненульовий елемент основної матриці). Якщо система має нескінченну множину розв'язків, то відповідна невідома автоматично стає основною. Рядок і стовпчик, які містять ключовий елемент, називаються *ключовим рядком* і *ключовим стовпчиком* відповідно. Використовуючи елементарні перетворення, переходимо до матриці, у якій на місці ключового елемента стоїть одиниця, а решта елементів ключового стовпчика дорівнюють нулю.

2) На кожному наступному кроці ключовий елемент вибираємо так, щоб ключовий рядок і ключовий стовпчик не повторювалися.

*Приклад 3.* За допомогою методу Жордана-Гаусса знайти



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Якщо визначник матриці  $A$  відмінний від нуля, то система (5.1) називається *невиродженою*. У випадку, коли  $\det A = 0$ , кажуть, що система *вироджена*.

Нехай система (5.1) є неvirодженою. Перепишемо її у матричній формі :

$$AX = H. \quad (5.3)$$

Так як  $\det A \neq 0$ , то існує обернена матриця  $A^{-1}$ . Помноживши рівняння (5.3) на матрицю  $A^{-1}$  зліва, отримаємо

$$X = A^{-1}H. \quad (5.4)$$

Якщо неvirоджена система (5.1) розв'язується за допомогою формули (5.4), то кажуть, що вона розв'язана *матричним методом*. При застосуванні цього методу необхідно знаходити обернену матрицю  $A^{-1}$ .

На основі формули (5.4) легко отримати формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (5.5)$$

де  $\Delta = \det A$  – визначник матриці системи;  $\Delta_1$  – визначник, який отримуємо з визначника  $\Delta$  за заміною першого стовпчика стовпчиком вільних членів;  $\Delta_2$  – визначник, який отримуємо з визначника  $\Delta$  за заміною другого стовпчика стовпчиком вільних членів і т.д.

*Приклад 1.* Задана система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язати її: а) за формулами Крамера; б) матричним методом .

*Розв'язання.* а) Обчислюємо потрібні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8;$$

Застосовуємо формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{8} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1.$$

б) Знаходимо спочатку обернену матрицю  $A^{-1}$  (див § 1.3.):

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Застосовуємо формулу (5.4):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,  $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$ .

§ 1.6. Критерій сумісності та загальна схема дослідження і розв'язування системи лінійних рівнянь

Нехай задана система лінійних рівнянь.



невідомим надаємо довільні значення  $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$  і переносимо їх у праві частини рівнянь. Розв'язуємо отриману систему відносно основних невідомих будь-яким методом (система не вироджена).

*Приклад 1.* Дослідити систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

й у випадку сумісності розв'язати її.

*Розв'язання.* Знайдемо ранг розширеної матриці (див § 1.3).

Елементарні перетворення виконуємо тільки над рядками.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 \\ -R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ -R_2 + R_3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже,  $r(\tilde{A}) = 2$  (число ненульових рядків). Остання матриця визначає також і ранг матриці системи. Він дорівнює числу ненульових рядків указаної матриці без останнього стовпчика (без стовпчика вільних членів). У відповідності зі сказаним  $r(A) = 2$ . Таким чином,  $r(\tilde{A}) = r(A) = 2$ . Отже, система сумісна.

Так як при знаходженні рангу матриці перетворення виконувалися тільки над рядками, то далі можна розглядати систему, яка відповідає останній матриці, тобто систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -10x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -11. \end{cases}$$

Виділяємо базисний мінор, тобто відмінний від нуля мінор другого



Якщо ранг  $r$  матриці системи дорівнює числу невідомих  $n$ , то нульовий розв'язок (7.2) буде єдиним. Якщо ж  $r < n$ , то система невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків. Таку систему можна розв'язувати методом Гаусса або за загальною схемою (починаючи з другого пункту).

Нехай у системі (7.1) число рівнянь  $m$  дорівнює числу невідомих  $n$ . У цьому випадку матриця  $A$  системи буде квадратною і якщо  $\det A \neq 0$ , то система має єдиний нульовий розв'язок, а якщо  $\det A = 0$ , то система має нескінченну множину розв'язків.

*Приклад.* Розв'язати однорідну систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Знайдемо визначник матриці системи:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Так як  $\det A \neq 0$ , то система має єдиний розв'язок:  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

## Розділ 2. Елементи аналітичної геометрії

### § 2.1. Декартова прямокутна система координат.

#### Довжина відрізка. Поділ відрізка у даному відношенні

Положення точки у просторі визначається за допомогою системи координат.

Декартова прямокутна система координат  $Oxyz$  (рис.1)

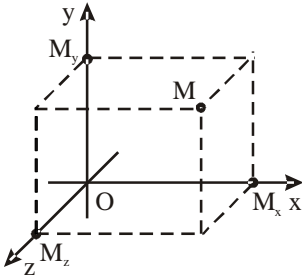


Рис. 1

складається з трьох взаємно перпендикулярних прямих  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (осей координат), які перетинаються в одній точці  $O$  (початку координат). Остання точка ділить кожен з координатних осей на дві півосі. Одну з них будемо називати *додатною* (помічається стрілкою), а іншу *від'ємною*. На координатних осях визначений масштаб і вони утворюють *праву трійку* (для спостерігача, що знаходиться на осі  $Oz$  у точці з додатним значенням, поворот на найменший кут від осі  $Ox$  до осі  $Oy$  здійснюється проти руху годинникової стрілки). Площини  $Oxy$ ,  $Oyz$ ,  $Oxz$  називаються *координатними площинами*. Осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  називаються, також, осями *абсцис*, *ординат* і *аплікват* відповідно.

Нехай у просторі задані прямокутна система координат  $Oxyz$  і точка  $M$  (рис. 1). Побудуємо три площини, що проходять через точку  $M$ , перпендикулярні координатним осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  і перетинають їх у точках  $M_x, M_y, M_z$  відповідно. *Координатою*  $x$  точки  $M$  називається число, рівне по абсолютній величині довжині відрізка  $OM_x$ : додатне, якщо точка  $M_x$  лежить на додатній півосі, і від'ємне, якщо вона лежить на від'ємній півосі. Аналогічно попередньому визначаються координати  $y$  і  $z$  точки  $M$ . Якщо потрібно вказати координати точки  $M$ , то пишуть  $M(x, y, z)$ .

Відстань між двома точками  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  і  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  у просторі знаходиться за формулою

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.1)$$

Нехай у просторі задані прямокутна система координат  $Oxyz$  і дві точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  і  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Якщо точка  $M(x, y, z)$  належить відрізку  $M_1M_2$  і  $|M_1M| : |MM_2| = \lambda$ , то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.2)$$

Формули (1.2.) дозволяють за відомими координатами двох точок знаходити координати третьої. У частинному випадку, коли  $M$  – середина відрізка ( $\lambda = 1$ ), маємо

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.3)$$

*Приклад 1.* Точки  $A(0;1;3)$ ,  $B(-3;4;5)$ ,  $C(5;0;1)$  є вершинами трикутника. Знайти довжину медіани  $AE$  і координати точки перетину медіан трикутника  $ABC$ .

*Розв'язання.* Точка  $E$  – середина відрізка  $BC$ . Знайдемо її координати за формулами (1.3.):

$$x = \frac{-3+5}{2} = 1, \quad y = \frac{4+0}{2} = 2, \quad z = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Довжина медіани – це відстань між точками  $A(0;1;3)$  і  $E(1;2;3)$ . Використовуючи формулу (1.1.), отримуємо

$$|AE| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{2}.$$

Нехай  $P$  – точка перетину медіан, тоді, як відомо,  $|AP| : |PE| = 2 : 1$

Для визначення координат точки  $P$  застосуємо формулу (1.2.) ( $\lambda = 2$ )

$$x = \frac{0+2 \cdot 1}{1+2} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1+2 \cdot 2}{1+2} = \frac{5}{3}, \quad z = \frac{3+2 \cdot 3}{1+2} = \frac{9}{3}.$$

## § 2.2. Означення вектора. Основні поняття

Величина, яка характеризується тільки числовим значенням,

називається *скалярною*. Скалярними величинами є маса, відстань і т.д. Величина, яка характеризується числовим значенням і напрямом, називається *векторною*. Прикладами таких величин можуть бути швидкість, сила і т.д. В геометрії *вектором* називається напрямлений відрізок. Будь-яку векторну величину можна представити за допомогою геометричного вектора. Позначається вектор однією малою, або двома великими буквами з рискою (стрілкою) зверху, наприклад,  $\vec{a}$ ,  $\overline{AB}$  ( $A$  – початок вектора,  $B$  – кінець).

Два вектори вважаються *рівними*, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих, мають однакову довжину і однакою напрямлені. З даного означення випливає, що далі будуть вивчатися *вільні* вектори, тобто вектори, які допускають паралельний перенос. Два вектори називаються *колінеарними*, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих. Вектор, який має однакову довжину з вектором  $\vec{a}$ , колінеарний йому, але протилежно напрямлений, називається *протилежним* вектору  $\vec{a}$  і позначається  $-\vec{a}$ . Три вектора називаються *компланарними*, якщо вони розміщені в одній площині або на паралельних площинах. *Нульовим* вектором  $\vec{0}$  називається вектор, довжина якого дорівнює нулю. Напрямок нульового вектора не визначений.

Нехай у просторі задані прямокутна система координат  $Oxyz$  і дві точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  і  $B(x_2, y_2, z_2)$ . *Координатами* вектора  $\overline{AB}$  називають упорядковану трійку чисел  $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ . Якщо  $a_x, a_y, a_z$  – координати вектора  $\overline{AB}$ , то пишуть  $\overline{AB} = (a_x, a_y, a_z)$  або  $\overline{AB} = \vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ . Відмітимо, що координати вектора – це його

проекції на координатні осі. Рівні вектори мають рівні координати, а колінеарні вектори – пропорційні.

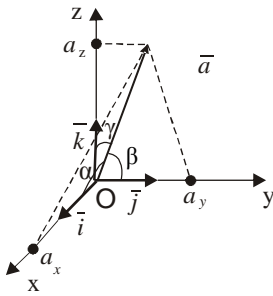


Рис.2

Модуль (довжина) вектора  $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$  позначається  $|\vec{a}|$  і обчислюється за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.1)$$

Напрямок вектора  $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$  у просторі задається за допомогою кутів  $\alpha, \beta, \gamma$ , які цей вектор утворює з осями  $Ox, Oy, Oz$  відповідно (рис. 2). Косинуси вказаних кутів називаються *напряmnими косинусами* вектора. Легко бачити, що вони визначаються рівностями

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (2.2)$$

З формул (2.1.) і (2.2.) випливає, що

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.3)$$

*Приклад 1.* Задані точки  $A(2;-1;3)$  і  $B(4;3;4)$ . Знайти координати, модуль і напрямні косинуси вектора  $\overline{AB}$ .

*Розв'язання.* Знайдемо спочатку координати вектора (від координат кінця віднімаємо координати початку):

$$\overline{AB} = (4 - 2; 3 - (-1); 4 - 3) = (2; 4; 1).$$

За формулами (2.1.) і (2.2.) маємо:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21},$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \cos \beta = \frac{4}{\sqrt{21}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

### § 2.3. Лінійні операції над векторами

Операції додавання, віднімання векторів і множення вектора на число називаються лінійними операціями над векторами. Додавати два вектори можна за правилом паралелограма (рис.3) або за правилом трикутника (рис.4).

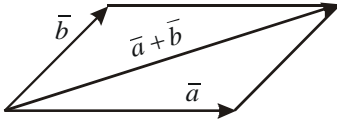


Рис. 3

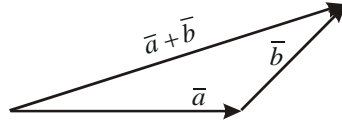


Рис. 4

Операція віднімання векторів визначається рівністю

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}), \quad (3.1)$$

де  $-\bar{b}$  – вектор, протилежний до вектора  $\bar{b}$ .

За формулою (3.1) операція віднімання зводиться до операції додавання двох векторів. Різницю двох векторів можна знаходити, також, за правилом трикутника (рис. 5). При додаванні декількох векторів зручно використовувати правило многокутника (рис.6).

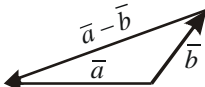


Рис. 5

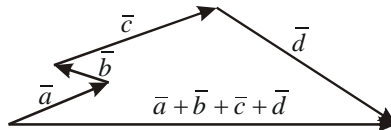


Рис. 6

Добутком додатного (від'ємного) числа  $k$  на вектор  $\bar{a}$  є вектор  $\bar{b} = k\bar{a}$ , який однаково (протилежно) напрямлений з вектором  $\bar{a}$  і модуль якого дорівнює  $|k| \cdot |\bar{a}|$  (якщо  $|k| > 1$ , то довжина вектора  $\bar{a}$  збільшується у  $|k|$  раз; якщо  $|k| < 1$ , то довжина вектора  $\bar{a}$  зменшується у  $1/|k|$  раз).

*Приклад 1.* Нижче для заданих векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  побудовано вектор  $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ .



Основні властивості лінійних операцій ( $k, l$  – числа):

$$1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad 2) \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

$$3) \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}; \quad 4) (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a};$$

$$5) k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; \quad 6) k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a};$$

$$7) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}.$$

Якщо вектори задані своїми координатами, то при додаванні (відніманні) двох векторів їхні відповідні координати додаються (віднімаються). Для того щоб помножити вектор на число, на це число необхідно помножити всі координати даного вектора. Для векторів  $\vec{a} (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} (b_x, b_y, b_z)$  і числа  $k$  можемо записати

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z), \quad (3.2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z), \quad (3.3)$$

$$k\vec{a} = (ka_x, ka_y, ka_z). \quad (3.4)$$

*Приклад 2.* Задані вектори  $\vec{a} (2;0;5)$ ,  $\vec{b} (3;1;-2)$  і  $\vec{c} (-1;1;0)$ . Знайти вектор  $\vec{d} = \vec{a} - 2(\vec{b} + \vec{c}) + 3(\vec{a} - \vec{b})$ .

*Розв'язання.* Використовуючи властивості лінійних операцій над векторами, маємо:

$$\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c} + 3\vec{a} - 3\vec{b} = 4\vec{a} - 5\vec{b} - 2\vec{c};$$

$$4\bar{a} = (8; 0; 20), \quad 5\bar{b} = (15; 5; -10), \quad 2\bar{c} = (-2; 2; 0);$$

$$\bar{d} = (8 - 15 + 2; 0 - 5 - 2; 20 + 10 - 0) = (-5; -7; 30).$$

#### § 2.4. Лінійна залежність векторів. Базис

Нехай у просторі задані три ненульових вектори  $\bar{a}, \bar{b}$  і  $\bar{c}$ . Якщо рівність

$$\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c} = \bar{0}, \quad (4.1)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – числові коефіцієнти, можлива тільки при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , то кажуть, що вектори  $\bar{a}, \bar{b}$  і  $\bar{c}$  *лінійно незалежні*. Якщо існує трійка чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , серед яких хоча б одне відмінне від нуля і для яких виконується рівність (4.1), то вектори  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  *лінійно залежні*. В останньому випадку один із трьох векторів може бути представлений через лінійну комбінацію двох інших, наприклад,  $c = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ .

Якщо ненульові вектори  $\bar{a}, \bar{b}$  і  $\bar{c}$  лінійно незалежні, то упорядкована трійка цих векторів є *базисом* у просторі. Будь-який інший вектор  $\bar{d}$  може бути представлений через лінійну комбінацію базисних векторів:

$$\bar{d} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}. \quad (4.2)$$

Упорядкована трійка чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  називається координатами вектора

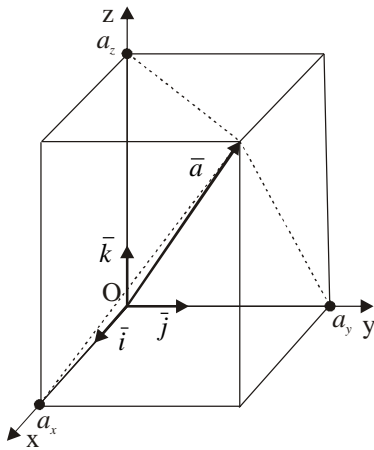


Рис. 7

$\bar{d}$  у базисі  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

Координати вектора, що були визначені у §2.2 є його координатами у ортонормованому базисі  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  (рис.7). Напрями останніх векторів співпадають із напрямками координатних осей, а їхні довжини дорівнюють одиниці, тобто  $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$ . Іншими словами, якщо вектор  $\bar{a}$

представлений у вигляді

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad (4.3)$$

то упорядкована трійка чисел  $a_x, a_y, a_z$  є його координатами, які були визначені у § 2.2. Надалі координати вектора  $\bar{a}$  часто будуть задаватися у формі (4.3).

Нехай вектори  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  задані своїми координатами у базисі  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  (цей базис взято для визначеності; можна було взяти будь-який інший):

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

$$\bar{c} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}, \quad \bar{d} = d_x \bar{i} + d_y \bar{j} + d_z \bar{k}.$$

Визначимо умову, при якій вектори  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  утворюють базис і знайдемо координати вектора  $\bar{d}$  у цьому базисі.

Перепишемо векторну рівність (4.1) у координатній формі:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = 0, \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = 0, \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Однорідна система (4.4) має єдиний нульовий розв'язок (див. §1.7)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , при умові, що визначник системи відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.5)$$

Нерівність (4.5) і є шуканою умовою того, що вектори  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  утворюють базис.

Припустимо, що умова (4.5) виконується. Знайдемо координати вектора  $\bar{d}$  у базисі  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ . Перепишемо рівність (4.2) у координатній формі:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = d_x, \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = d_y, \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = d_z. \end{cases} \quad (4.6)$$

Розв'язавши невинроджену систему (4.6) будь-яким методом, знайдемо координати  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

*Приклад 1.* Вектори  $\bar{a}(1;3;2)$ ,  $\bar{b}(2;-1;0)$ ,  $\bar{c}(0;1;1)$  і  $\bar{d}(4;8;7)$  задані у деякому базисі. Довести, що вектори  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  утворюють базис і знайти координати вектора  $\bar{d}$  у цьому базисі.

*Розв'язання.* Доведемо, що вектори  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  утворюють базис

(перевіримо умову (4.5)):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Запишемо систему (4.6):

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 4, \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 8, \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему за формулами Крамера:

$$\Delta = -3, \Delta_1 = -6, \Delta_2 = -3, \Delta_3 = -9;$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

Отже, у новому базисі  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  вектор  $\bar{d}$  представляється у вигляді

$$\bar{d} = 2\bar{a} + \bar{b} + 3\bar{c}.$$

## § 2.5. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами

Вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  можна перемножити двома способами. В одному випадку результатом буде число (скаляр), а в іншому – вектор. Відповідно визначаються скалярний і векторний добуток двох векторів.

*Скалярним добутком* двох ненульових векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  називається *число*, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Позначається скалярний добуток  $\bar{a}\bar{b}$ ,  $\bar{a} \cdot \bar{b}$  або  $(\bar{a}, \bar{b})$ . Таким чином:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \phi, \quad (5.1)$$

де  $\phi$  – кут між векторами  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ .

Скалярний добуток можна задати, також, за допомогою проєкції

одного вектора на інший:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} \quad (5.2)$$

Якщо, принаймні, один із двох даних векторів нульовий, то скалярний добуток вважається рівним нулю.

*Приклад 1.* Відомо, що  $|\bar{a}| = 5$ ,  $|\bar{b}| = 10$  і кут між векторами  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$

дорівнює  $60^\circ$ . Знайти скалярний добуток  $\bar{a}\bar{b}$ .

*Розв'язання.* Використовуючи формулу (5.1), маємо:

$$\bar{a}\bar{b} = 5 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 25.$$

*Властивості скалярного добутку:*

- 1)  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ ;
- 2)  $(\alpha\bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b})$ ,  $\alpha \in R$ ;
- 3)  $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ ;
- 4)  $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$ .

Нехай вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  задані своїми координатами:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \quad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Використовуючи властивості скалярного добутку, отримуємо

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (5.3)$$

Формула (5.3) визначає скалярний добуток у *координатній формі*. Як бачимо, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат.

*Приклад 2.* Знайти скалярний добуток векторів  $\bar{a}(3;0;4)$  і  $\bar{b}(2;5;-3)$ .

*Розв'язання.*  $\bar{a}\bar{b} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) = -6$ .

З рівності (5.1) безпосередньо випливає формула для обчислення кута між двома ненульовими векторами:

$$\cos \phi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \quad (5.4)$$

або

$$\cos \phi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (5.5)$$

З останніх формул отримаємо умову *ортогональності* (перпендикулярності) двох ненульових векторів:

$$\bar{a}\bar{b} = 0 \quad (5.6)$$

або

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (5.7)$$

*Приклад 3.* Точки  $A (-3;0;1)$ ,  $B (2;4;-5)$ ,  $C (0;2;3)$  є вершинами трикутника. Знайти  $\angle A$  трикутника  $ABC$ .

*Розв'язання.* Знайдемо координати векторів:

$$\overline{AB} = \bar{a}(5;4;-6), \quad \overline{AC} = \bar{b}(3;2;2).$$

Застосовуючи формулу (5.5), отримуємо

$$\cos \angle A = \frac{5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + (-6) \cdot 2}{\sqrt{25 + 16 + 36} \sqrt{9 + 4 + 4}} = \frac{11}{\sqrt{1309}} \approx 0,30;$$

$$\angle A \approx \arccos 0,3 \approx 72,5^\circ.$$

## § 2.6. Векторний добуток векторів

Упорядкована трійка ненульових векторів  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  називається правою, якщо після зведення її до спільного початку для спостерігача, що знаходиться на кінці вектора  $\bar{c}$ , поворот на менший кут від вектора

$\vec{a}$  до вектора  $\vec{b}$  здійснюється проти руху годинникової стрілки.

Векторним добутком двох неколінарних векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називається вектор  $\vec{c}$ , який визначається наступними трьома правилами:

1) довжина вектора  $\vec{c}$  задається формулою

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi, \quad (6.1)$$

де  $\varphi$  – кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ; 2) вектор  $\vec{c}$  перпендикулярний до

кожного з векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ; 3) вектори

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  утворюють праву трійку векторів (рис.8).

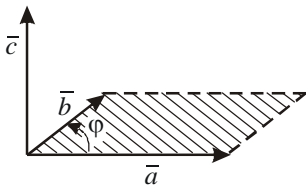


Рис. 8

Перше правило визначає довжину вектора  $\vec{c}$ , а два останні – його напрям.

Легко бачити, що добуток правої частини

формули (6.1) дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . Отже, довжина вектора  $\vec{c}$  дорівнює площі вказаного паралелограма.

Вважається, що векторний добуток двох колінарних векторів дорівнює нульовому вектору.

Векторний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  будемо позначати  $\vec{a} \times \vec{b}$  або  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

Властивості векторного добутку:

- 1)  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ ;
- 2)  $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ ;

4) якщо векторний добуток двох ненульових векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  дорівнює нульовому вектору, то вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні.

Нехай вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  задані координатами:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (6.2)$$

або

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \quad (6.3)$$

Площа паралелограма й площа трикутника, побудованих на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , обчислюються наступним чином:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad S_{\text{нар}} = |\vec{c}|, \quad S_{\text{тр}} = \frac{|\vec{c}|}{2}. \quad (6.4)$$

*Приклад 1.* Задані два вектори  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$  і  $\vec{b} = \vec{j} - 2\vec{k}$ . Знайти:

а) вектор, перпендикулярний до кожного з векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ ; б) площу трикутника, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

*Розв'язання.* а) Відмітимо, що задача не має єдиного розв'язку, тобто існує нескінченне число колінеарних векторів, які задовольняють умовам цієї задачі. Одним із таких векторів є векторний добуток (див. означення):

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}.$$

б) Використовуючи (6.4), отримаємо

$$S_{mp} = \frac{\sqrt{1+4+1}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (кв. од.)}.$$

## § 2.7. Мішаний добуток векторів

Скалярний добуток векторів  $\bar{a} \times \bar{b}$  і  $\bar{c}$  називається *мішаним добутком* векторів  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  і позначається  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  або  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ . Таким чином, у відповідності з означенням, можемо записати

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}. \quad (7.1)$$

*Властивості* мішаного добутку:

1) мішаний добуток не змінюється, якщо в ньому поміняти місцями операції векторного й скалярного добутку:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c});$$

2) мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці векторів:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b};$$

3) при перестановці місцями будь-яких двох векторів мішаний добуток змінює знак на протилежний.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}, \quad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}.$$

Якщо задані вектори  $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ ,  $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$  і  $\bar{c}(c_x, c_y, c_z)$ , то

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (7.2)$$

Модуль мішаного добутку некопланарних векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Отже, об'єм паралелепіпеда й піраміди, побудованих на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  можуть бути знайдені за формулами:

$$V_{нар} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|, \quad V_{пір} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (7.3)$$

*Приклад 1.* Точки  $A_1(-3;2;5)$ ,  $A_2(0;1;-2)$ ,  $A_3(2;0;1)$ ,  $A_4(4;3;5)$  є вершинами чотирикутної піраміди. Знайти її об'єм.

*Розв'язання.* Використовуючи формули (7.3) і (7.2), отримуємо:

$$\vec{A_1A_2} = \vec{a}(3;-1;-7), \quad \vec{A_1A_3} = \vec{b}(5;-2;-4), \quad \vec{A_1A_4} = \vec{c}(7;1;0);$$

$$\vec{abc} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 5 & -2 & -4 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -93; \quad V_{пір} = |-93|/6 = 15,5 \text{ (куб. од).}$$

Використовуючи поняття мішаного добутку, умову *компланарності* (лінійної залежності) трьох ненульових векторів  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  можна представити у вигляді

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0. \quad (7.4)$$

Якщо мішаний добуток трьох ненульових векторів відмінний від нуля, то ці вектори лінійно незалежні і *утворюють базис* у просторі.

*Приклад 2.* При якому значенні параметра  $\alpha$  вектори  $\vec{a}(2;0;3)$ ,  $\vec{b}(0;1;\alpha)$ , і  $\vec{c}(-1;2;5)$  компланарні ?

*Розв'язання.* Використовуємо умову компланарності (7.4):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad 13 - 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{13}{4}.$$

## § 2.8. Пряма на площині

Нехай на площині задані прямокутна система координат  $Oxy$  і лінія  $L$ . Рівняння

$$F(x, y) = 0 \quad (8.1)$$

називається *рівнянням лінії*  $L$ , якщо координати  $x, y$  будь-якої точки цієї лінії задовольняють даному рівнянню, а координати будь-якої іншої точки площини – не задовольняють.

У цьому параграфі розглянемо найбільш просту лінію – пряму. Наведемо основні рівняння прямої на площині. Відмітимо, що у загальному випадку рівняння прямої на площині є *лінійним рівнянням* відносно змінних  $x$  і  $y$  (змінні  $x$  і  $y$  входять тільки у першому степені і між собою не перемножуються).

*Загальне рівняння прямої* на площині:

$$Ax + By + C = 0. \quad (8.2)$$

Вектор  $\vec{n}(A, B)$ , координатами якого є коефіцієнти при змінних  $x$

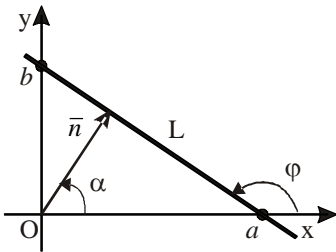


Рис. 9

і  $y$ , розміщений перпендикулярно до прямої (рис. 9) і називається її *нормальним вектором*. Можливі наступні частинні випадки рівняння (8.2):  $A = 0$  (відсутня змінна  $x$ ) – пряма паралельна осі  $Ox$ ;  $B = 0$  (відсутня змінна  $y$ ) – пряма паралельна осі  $Oy$ ;

$C = 0$  – пряма проходить через початок координат.

*Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:*

$$y = kx + b, \quad (8.3)$$

де  $k = \operatorname{tg} \varphi$  – кутовий коефіцієнт прямої (рис.9),  $b$  – ордината точки перетину прямої з віссю  $Oy$ . Для того, щоб від загального рівняння (8.2) перейти до рівняння (8.3), необхідно розв’язати перше відносно змінної  $y$ .

*Приклад 1.* Пряма на площині задана рівнянням  $3x - 3y + 5 = 0$ . Визначити кут  $\varphi$ , який утворює ця пряма з додатним напрямом осі  $Ox$ .

*Розв’язання.* Перейдемо від заданого загального рівняння до рівняння з кутовим коефіцієнтом (розв’язуємо дане рівняння відносно  $y$ ):  $y = x + 5/3$ . Отже,  $k = \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/4$ .

*Рівняння прямої, що проходить через дану точку з даним кутовим коефіцієнтом:*

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (8.4)$$

де  $k$  – кутовий коефіцієнт прямої;  $x_0, y_0$  – координати точки, яка лежить на прямій.

*Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (8.5)$$

де  $x_1, y_1; x_2, y_2$  – координати даних точок.

*Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно до даного вектора:*

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l}, \quad (8.6)$$

де  $x_0, y_0$  – координати точки, яка лежить на прямій;  $k, l$  – координати

даного вектора, який паралельний до прямої (вектор  $\vec{q}(k,l)$  називається *напрямним вектором прямої*).

*Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора:*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \quad (8.7)$$

де  $x_0, y_0$  – координати даної точки, через яку проходить пряма;  $A, B$  – координати вектора, що перпендикулярний до прямої, тобто координати нормального вектора цієї прямої.

*Рівняння прямої у відрізках:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (8.8)$$

де  $a, b$  – відповідно абсциса й ордината точок перетину прямої з осями координат (рис. 9). Рівняння (8.8) легко отримується із загального рівняння (8.2). Для цього достатньо поділити останнє на вільний член з протилежним знаком, тобто на  $-C$  (мається на увазі, що  $C \neq 0$ ).

*Нормальне рівняння прямої:*

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (8.9)$$

де  $\alpha$  – кут, який утворює нормаль прямої з додатнім напрямом осі  $Ox$  (рис.9);  $p$  – відстань до прямої від початку координат. Для того щоб перейти від загального рівняння (8.2) до нормального (8.9), необхідно поділити перше на число  $\pm \sqrt{A^2 + B^2}$  (знак береться протилежним знаку вільного члена  $C$ ).

*Відстань  $d$  від даної точки  $M_0(x_0, y_0)$  до даної прямої  $Ax + By + C = 0$  знаходиться за формулою*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (8.10)$$

*Приклад 2.* Точки  $A(1;1)$ ,  $B(2;7)$ ,  $C(4;3)$  є вершинами трикутника. Знайти: а) рівняння сторони  $AB$ ; б) рівняння й довжину висоти  $CD$ ; в) рівняння медіани  $AE$ ; г) рівняння прямої, яка проходить через точку  $C$  й паралельна стороні  $AB$ .

*Розв'язання.* а) Використовуючи рівняння (8.5), маємо

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{7-1}, \quad 6(x-1) = 1(y-1), \quad 6x - y - 5 = 0.$$

б) Застосовуємо рівняння (8.7). Шукана пряма проходить через точку  $C(4;3)$  і її нормаллю є вектор  $\overline{AB} = \vec{n}(1;6)$ . Отримуємо:

$$1(x-4) + 6(y-3) = 0, \quad x + 6y - 22 = 0.$$

Довжину висоти  $CD$  знайдемо як відстань від точки  $C(4;3)$  до прямої  $AB$ . За формулою (8.10), маємо

$$|CD| = \frac{|6 \cdot 4 - 1 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}} = \frac{16}{\sqrt{37}}.$$

в) Знайдемо спочатку координати точки  $E$  – середини сторони  $BC$ :  $x_E = (2+4)/2 = 3$ ,  $y_E = (7+3)/2 = 5$ . Використовуючи рівняння (8.5), знайдемо рівняння медіани  $AE$ :

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{5-1}, \quad 4(x-1) = 2(y-1), \quad 4x - 2y - 2 = 0, \quad 2x - y - 1 = 0.$$

г) Застосовуємо рівняння (8.6) ( $\overline{AB} = \vec{q}(1;6)$ ):

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{6}, \quad 6(x-4) = 1(y-3), \quad 6x - y - 21 = 0.$$

Нехай дві прями задані загальними рівняннями або рівняннями з

кутовим коефіцієнтом:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0; \quad (8.11)$$

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2. \quad (8.12)$$

Один із двох кутів між цими прямими знаходиться відповідно за формулами:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (8.13)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|. \quad (8.14)$$

Другий кут  $\psi$  доповнює кут  $\varphi$  до  $180^\circ$ , тобто  $\psi = 180^\circ - \varphi$ .

Умови паралельності для прямих (8.11) і (8.12) мають відповідно вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad k_1 = k_2; \quad (8.15)$$

умови перпендикулярності:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad k_1k_2 = -1. \quad (8.16)$$

*Приклад 3.* На площині задані три прямі:  $x + 2y + 5 = 0$ ,  $3x - 7 = 0$ ,  $2x + by + 1 = 0$ . Знайти кут між двома першими прямими й визначити при якому значенні параметра  $b$  перша й третя прямі перпендикулярні.

*Розв'язання.* Так як прямі задані загальними рівняннями, то для знаходження кута використовуємо формулу (8.13):

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 0}{\sqrt{1 + 4} \sqrt{9 + 0}} = \frac{3}{3\sqrt{5}}.$$

Значення параметра  $b$  знаходимо за першою з умовою (8.16):

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot b = 0, \quad b = -1.$$

## Розділ 3. Комплексні числа

### § 3.1. Означення та різні форми запису комплексного числа

Множину комплексних чисел можна розглядати як розширення множини дійсних чисел. Вважаємо, що з від'ємного числа добувається квадратний корінь і введемо позначення  $i = \sqrt{-1}$ . Указане число  $i$  називається *уявною одиницею*.

Комплексне число  $z$  визначається рівністю

$$z = x + iy \quad (\text{або } z = x + yi), \quad (1.1)$$

де  $x, y$  – дійсні числа,  $i$  – уявна одиниця. Числа  $x$  і  $y$  називаються відповідно *дійсною* й *уявною* частинами числа  $z$  і для них прийняті позначення:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (1.2)$$

Якщо  $\operatorname{Im} z = 0$ , то  $z = x + 0 \cdot i = x$ . Отже, множина дійсних чисел міститься у множині комплексних чисел (це комплексні числа із нульовою уявною частиною).

Число  $\bar{z} = x - yi$  називається *спряженим* до числа  $z = x + yi$ .

Нехай задана площина із прямокутною системою координат  $Oxy$ . Кожному комплексному числу  $z = x + yi$  можна поставити у відповідність точку  $M(x, y)$  даної площини, і, навпаки, кожній точці  $M(x, y)$  можна поставити у відповідність число  $z = x + yi$ . Площина, кожна точка якої розглядається як комплексне число, називається *комплексною площиною*, при цьому вісь  $Ox$  називається дійсною віссю, а вісь  $Oy$  – уявною віссю. Надалі не будемо робити різниці між комплексним числом і його зображенням на комплексній площині.

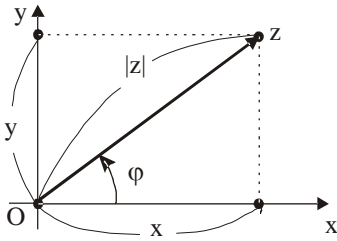


Рис.11

Нехай задані комплексна площина  $Oxy$  і число  $z = x + yi$  на цій площині (рис.11). Вектор, з початком в точка  $O$  і кінцем в точці  $z$  називається радіус-вектором числа  $z$ . Довжина радіус-вектора числа  $z$  називається його

модулем (позначається  $|z|$ ) і обчислюється за формулою

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.3)$$

Очевидно, що  $0 \leq |z| < \infty$ . Кут, який утворює радіус-вектор числа  $z$  із віссю  $Ox$ , називається *аргументом* цього числа й позначається  $Arg z$ . У загальному випадку  $Arg z$  приймає нескінченне число значень, а саме:

$$Arg z = \varphi + 2k\pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad (1.4)$$

де  $\varphi = \arg z$  - *головне значення* аргументу. Далі, говорячи про аргумент комплексного числа, будемо мати на увазі тільки його головне значення. Для аргументу  $\varphi$  маємо (рис.11):

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (1.5)$$

*Приклад 1.* Розв'язати рівняння  $2z^2 - 2z + 5 = 0$  на множині комплексних чисел.

*Розв'язання.* Використавши формулу для знаходження коренів квадратного рівняння і означення комплексного числа, будемо мати

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{4} = \frac{2 \pm 6i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i.$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \quad z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ — комплексно-спряжені корені заданого}$$

квадратного рівняння.

*Приклад 2.* Знайти модуль й аргумент комплексного числа  
 $z = -1 + \sqrt{3}i$ .

*Розв'язання.* Застосовуючи формулу (1.3), дістанемо

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Аргумент знайдемо за третьою рівністю формул (1.5). Маємо

$$\operatorname{tg} \phi = -\sqrt{3}, \quad \phi_k = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + k\pi = -\pi/3 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Інтервалу  $[0; 2\pi)$  належать два з указаних розв'язків, а саме  $\phi_1 = 2\pi/3$  і  $\phi_2 = 5\pi/3$ . Враховуючи, що дана точка  $z$  належить другій чверті комплексної площини ( $x < 0, y > 0$ ), остаточно отримуємо  $\phi = \phi_1 = 2\pi/3$ .

Якщо комплексне число записане у вигляді  $z = x + yi$ , то кажуть, що воно представлене в *алгебраїчній* формі. *Тригонометрична* і *показникова* форми комплексного числа мають відповідно вигляд:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z = re^{i\varphi}, \quad (1.6)$$

де  $r = |z|, \varphi = \arg z$ .

*Приклад 3.* Комплексне число  $z = 3 + 3i$  представити у тригонометричній і показниковій формах.

*Розв'язання.* Спочатку визначаємо модуль і аргумент комплексного числа:

$$r = |z| = 3\sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \pi/4.$$

Використовуючи формули (1.6), можемо записати:

$$z = 3\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)), \quad z = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

### § 3.2. Дії над комплексними числами

Операції *додавання, віднімання, множення й ділення* комплексних чисел  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$  визначаються наступними формулами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \quad (2.1)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i, \quad (2.2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i, \quad (2.3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i, \quad (z_2 \neq 0). \quad (2.4)$$

Відмітимо, що формула (2.3) здобута шляхом перемноження двочленів  $x_1 + y_1i$  і  $x_2 + y_2i$  за звичайними правилами (враховано, що  $i^2 = -1$ ). Для отримання формули (2.4) достатньо чисельник й знаменник дроби  $(x_1 + y_1i)/(x_2 + y_2i)$  помножити на спряжене до знаменника число, тобто на  $x_2 - y_2i$ .

Нехай комплексні числа задані у тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

У цьому випадку операції множення й ділення здійснюються за формулами:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (2.5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (z_2 \neq 0). \quad (2.6)$$

*Приклад 1.* Знайти  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 z_2$ ,  $z_1 / z_2$ , якщо

$$z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 1 + 5i.$$

*Розв'язання.* Використовуючи формули (2.1)-(2.4), отримуємо:

$$z_1 + z_2 = 2 - 3i + 1 + 5i = 3 + 2i; \quad z_1 - z_2 = 2 - 3i - (1 + 5i) = 1 - 8i;$$

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + 5i) = 2 - 3i + 10i - 15i^2 = 2 + 7i + 15 = 17 + 7i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{1 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 5i)}{(1 + 5i)(1 - 5i)} = \frac{-13 - 13i}{26} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Операції піднесення до степеня й добування кореня для комплексних чисел визначаються наступними рівностями:

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi); \quad (2.7)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (2.8)$$

де  $n$  – натуральне число;  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . З останньої формули випливає, що корінь  $n$ -го степеня має рівно  $n$  значень. Якщо на комплексній площині побудувати коло радіуса  $\sqrt[n]{r}$  з центром у початку координат, то всі вказані значення кореня будуть розміщені на цьому колі на однаковій відстані одне від одного.

*Приклад 2.* Розв'язати рівняння  $\sqrt[5]{z} - \sqrt{3} - i = 0$ .

*Розв'язання.* Перепишемо рівняння у вигляді

$$z = (\sqrt{3} + i)^5.$$

Представимо комплексне число  $\sqrt{3} + i$  у тригонометричній формі і застосуємо формулу (2.7):

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \operatorname{tg} \varphi = 1/\sqrt{3}, \quad \varphi = \pi/6; \quad \sqrt{3} + i =$$

$$2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right);$$

$$z = \left( 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right)^5 = 2^5 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) =$$

$$= 32 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -16\sqrt{3} + 16i.$$

*Приклад 3.* Розв'язати рівняння  $z^3 = -\sqrt{3} - i$ .

*Розв'язання.* Представимо число  $-\sqrt{3}-i$  у тригонометричній формі і застосуємо формулу (2.8):

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2; \operatorname{tg} \varphi = 1/\sqrt{3}, \varphi = 7\pi/6;$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi/6 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{7\pi/6 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{18} + i \sin \frac{7\pi}{18} \right);$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi/6 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{7\pi/6 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{18} + i \sin \frac{19\pi}{18} \right);$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi/6 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{7\pi/6 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{31\pi}{18} + i \sin \frac{31\pi}{18} \right).$$

## Розділ 4. Вступ до математичного аналізу

### § 4.1. Поняття границі функції

Нехай функція  $f(x)$  визначена на множині  $X$  і нехай точка  $a$  належить або не належить цій множині. Число  $A$  називається *границею функції*  $f(x)$  в точці  $a$  (або при  $x \rightarrow a$ ), якщо для будь-якого (скільки завгодно малого) числа  $\varepsilon > 0$  знайдеться число  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x \in X, x \neq a$ , які задовольняють умові  $|x - a| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Для вказаної границі прийняте позначення

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ або } f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow a.$$

*Приклад 1.* Довести, що  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$ .

*Розв'язання.* Нехай  $\varepsilon$  – довільне додатне число. Доведемо, що для нього існує відповідне  $\delta$  (знайдемо це  $\delta$ ). У нашому випадку  $f(x) = 3x + 2, a = 1, A = 5$ . Розглянемо нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Маємо

$$|(3x + 2) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x - 1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon/3.$$

Отже,  $\delta = \varepsilon/3$  (враховано, що  $|x-a| = |x-1|$ ).

Число  $A$  називається *правою (лівою) границею* функції  $f(x)$  в точці  $a$ , якщо для будь-якого числа  $\varepsilon > 0$  знайдеться число  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x \in X$ , які задовольняють умові  $a < x < a + \delta$  ( $a - \delta < x < a$ ), виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Для вказаних границь прийняті позначення (перша – права, друга – ліва):

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Зрозуміло, що у випадку правої границі змінна  $x$  наближається до числа  $a$ , залишаючись справа від нього, а у випадку лівої – зліва (рис.



Рис. 12

12). Права і ліва границі називаються також *односторонніми*.

Між границею функції і її односторонніми границями в даній точці існує простий зв'язок: число  $A$  є границею функції  $f(x)$  в точці  $a$  тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують обидві односторонні границі, причому

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Число  $A$  називається границею функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , якщо для будь якого числа  $\varepsilon > 0$  існує число  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x \in X$ , які задовольняють умові  $|x| > \delta$ , виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Позначається вказана границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

Наведемо *основні властивості* границі функції. Нехай

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B. \quad \text{Тоді:}$$

$$1). \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = AB;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kA, \quad k = \text{const};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} k = k, \quad k = \text{const}.$$

Вказані властивості справедливі для односторонніх границь і при  $x \rightarrow \infty$ .

*Приклад 2.* Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 0} (5e^x + 3\cos x + 2x^2 - 10)$ .

*Розв'язання.* Тут достатньо застосувати наведені властивості границь і підставити замість змінної  $x$  її граничне значення:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (5e^x + 3\cos x + 2x^2 - 10) &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} e^x + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x + 2 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - \\ &- \lim_{x \rightarrow 0} 10 = 5 \cdot e^0 + 3 \cos 0 + 2 \cdot 0^2 - 10 = 5 + 3 - 10 = -2 \end{aligned}$$

## § 4.2 Нескінченно мала і нескінченно велика функції

Функція  $\alpha(x)$  називається *нескінченно малою* в точці  $a$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

Функція  $f(x)$ , яка визначена на  $X$ , називається *нескінченно великою* в точці  $x = a$ , якщо для будь якого (як завгодно великого) числа  $M > 0$  існує число  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x \in X, x \neq a$ , які задовольняють умові  $|x - a| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(x)| > M$ . Для вказаної функції прийняте позначення  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ . Подібні означення даються при  $x \rightarrow a-, x \rightarrow a+, x \rightarrow \infty$ .

Між нескінченно малими і нескінченно великими існує наступний зв'язок: якщо  $f(x)$  – нескінченно велика при  $x \rightarrow a$ , то  $1/f(x)$  –

нескінченно мала при  $x \rightarrow a$ ; якщо  $\alpha(x)$  – нескінченно мала при  $x \rightarrow a$ , то  $1/\alpha(x)$  – нескінченно велика при  $x \rightarrow a$ . У зв'язку зі сказаним більш детально розглянемо одну з цих функцій, а саме, нескінченно малу.

Основні властивості нескінченно малих функцій ( $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow a+$ ,  $x \rightarrow a-$ ,  $x \rightarrow \infty$ ):

1) алгебраїчна сума декількох нескінченно малих функцій є нескінченно малою;

2) добуток нескінченно малих функцій є нескінченно малою;

3) добуток нескінченно малої на обмежену функцію є нескінченно малою.

Розглянемо правила порівняння двох нескінченно малих функцій. Нехай  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  – дві нескінченно малі функції при  $x \rightarrow a$ , ( $x \rightarrow a+$ ,  $x \rightarrow a-$ ,  $x \rightarrow \infty$ ) і нехай  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x)/\beta(x)) = A$ . Тоді:

1) якщо  $A=0$ , то  $\alpha(x)$  є нескінченно малою *більш високого порядку*, ніж  $\beta(x)$ ;

2) якщо  $A$  – будь-яке відмінне від нуля число, то  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  є нескінченно малими *одного порядку*;

3) якщо  $A=1$ , то  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  є *еквівалентними* нескінченно малими й у цьому випадку пишуть  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x)/(\beta(x))^n) = A$ , де  $A$  – будь-яке відмінне від нуля число, то кажуть, що  $\alpha(x)$  є нескінченно малою *n-го порядку* відносно  $\beta(x)$ .

*Приклад 1.* Функції  $\alpha(x) = x^2 - 4$  і  $\beta(x) = x - 2$  є нескінченно

малими одного порядку в при  $x \rightarrow 2$ , так як

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Нехай  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\alpha_1(x)$ ,  $\beta_1(x)$  – нескінченно малі функції при  $x \rightarrow a$ . Тоді, якщо  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ,  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$  при  $x \rightarrow a$  і існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x) / \beta(x))$ , то також існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1(x) / \beta_1(x))$ , причому

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Вказана властивість еквівалентних нескінченно малих функцій може використовуватися при обчисленні границь. Вона дозволяє замінювати нескінченно малі функції еквівалентними їм нескінченно малими. Корисно пам'ятати наступні пари нескінченно малих (при  $x \rightarrow 0$ ):  $\sin x \sim x$ ,  $\operatorname{tg} x \sim x$ ,  $\arcsin x \sim x$ ,  $\operatorname{arctg} x \sim x$ ,  $\ln(1 + x) \sim x$ ,  $1 - \cos 2x \sim 2x^2$ ,  $e^x - 1 \sim x$ .

Приклад 2. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\ln^2(1 + x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

### §4.3 Обчислення границь та дві чудові границі

Суть обчислення границь функцій (якщо вони існують) полягає у тому, що шляхом перетворень вони зводяться до деяких стандартних або найпростіших границь. Нехай  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ ,  $k = \text{const}$

. До вказаних найпростіших границь можна віднести наступні рівності:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \left\{ \frac{0}{\infty} \right\} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\alpha(x)} = \left\{ \frac{\infty}{0} \right\} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{\varphi(x)} = \left\{ \frac{k}{\infty} \right\} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{k}{\alpha(x)} = \left\{ \frac{k}{0} \right\} = \infty.$$

Укажемо тепер типи границь, для обчислення яких обов'язково необхідні перетворення. Іншими словами, наведемо *основні види невизначеностей*:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Деякі стандартні прийоми обчислення границь розглянемо на конкретних прикладах.

*Приклад 1.* Обчислити границі.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10}{x^3 + x + 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{2 + x - x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7} - x).$$

*Розв'язання.* а) Маємо невизначеність типу  $0/0$ . Необхідно чисельник і знаменник даного дробу розкласти на лінійні множники (точніше, у чисельнику й знаменнику потрібно вилучити множник  $x - 5$ ). Нагадаємо, що квадратний тричлен розкладається на лінійні множники за наступною формулою:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де  $x_1, x_2$  – корені квадратного тричлена. Можемо записати

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 2)(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 2}{x + 5} = \frac{3}{10}.$$

б) Маємо невизначеність типу  $\infty/\infty$ . У подібних прикладах необхідно чисельник і знаменник даного дробу поділити на  $x^n$ , де  $n$  – найбільший показник степеня змінної  $x$  в усьому виразі. У нашому

випадку ділимо на  $x^3$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10}{x^3 + x + 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{10}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

в) Аналогічно попередньому, поділивши на  $x^2$ , отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{2 + x - x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = -5.$$

г) Маємо невизначеність типу  $\infty - \infty$ . Помножимо й поділимо даний вираз на суму  $\sqrt{x^2 - 7} + x$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7} - x) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 7} - x)(\sqrt{x^2 - 7} + x)}{\sqrt{x^2 - 7} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 7})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 7} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7 - x^2}{\sqrt{x^2 - 7} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7}{\sqrt{x^2 - 7} + x} = 0. \end{aligned}$$

Якщо  $P_n(x)$  і  $Q_m(x)$  – многочлени степеня  $n$  і  $m$  відповідно, то границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} (P_n(x) / Q_m(x))$  визначається за наступним правилом:

1) якщо  $n > m$ , то границя відношення дорівнює нескінченності;  
2) якщо  $n < m$ , то границя дорівнює нулю; 3) якщо  $n = m$ , то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях  $x$ . В останньому прикладі границі б) і в) можна було б обчислити за вказаним правилом.

*Першою чудовою границею називають рівність*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (3.1)$$

У більш загальному випадку, якщо  $\varphi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1. \quad (3.2)$$

*Приклад 2.* Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2}$ .

*Розв'язання.* Застосовуючи першу чудову границю, отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 5x}{x^2} = \\ &= 50 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \right)^2 = 50 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \right)^2 = 50 \cdot 1 = 50. \end{aligned}$$

*Другою чудовою границею* називають кожну з двох наступних рівностей:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad (e \approx 2.72). \quad (3.3)$$

Узагальненням формул (3.3) є наступне співвідношення:

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + \phi(x))^{\frac{1}{\phi(x)}} = e, \quad (3.4)$$

де  $\phi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ .

Друга чудова границя використовується для розкриття невизначеностей типу  $1^\infty$ .

*Приклад 3.* Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^{7x}$ .

*Розв'язання.* Ця границя обчислюється за допомогою стандартних перетворень і застосуванням другої чудової границі:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^{7x} = \left\{ 1^\infty \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \left( \frac{2x+3}{2x-1} - 1 \right) \right)^{7x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-1}\right)^{7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4} \cdot \frac{4}{2x-1} \cdot 7x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}} \right)^{\frac{28x}{2x-1}} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{28x}{2x-1}} = e^{14}.
\end{aligned}$$

На останньому кроці перетворень використано те, що границю основи й границю показника даної функції можна обчислювати окремо, тобто

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{\varphi(x)} = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}. \quad (3.5)$$

Усі вказані методи і прийоми обчислення границь функцій можуть застосовуватися і для обчислення границь числових послідовностей. Загальний член числової послідовності  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  можна розглядати як функцію цілочисельного аргументу.

*Приклад 4.* Обчислити границю числової послідовності

$$\frac{4}{3}, \frac{13}{6}, \dots, \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 2}, \dots$$

*Розв'язання.* У даному випадку границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника і знаменника:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{3}{1} = 3.$$

## § 4.4 Неперервність функцій. Класифікація точок розриву

Нехай функція  $f(x)$  визначена в точці  $x_0$  і деякому її околі.

Кажуть, що функція  $f(x)$  *неперервна* в точці  $x_0$ , якщо виконується

рівність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (4.1)$$

Використовуючи зв'язок між границею й односторонніми границями, умову неперервності (4.1) можна переписати у вигляді:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0). \quad (4.2)$$

Якщо функція  $f(x)$  не є неперервною в точці  $x_0$ , то кажуть, що  $x_0$  є *точкою розриву* (або в точці  $x_0$  функція терпить розрив).

Розрізняють декілька типів точок розриву, а саме:

1) точка  $x_0$  називається *точкою усунього розриву*, якщо у цій точці існують обидві односторонні границі, вони рівні між собою, але не рівні значенню функції у цій точці (функція може бути невизначеною у точці  $x_0$ );

2) точка  $x_0$  називається *точкою розриву першого роду*, якщо у цій точці існують обидві односторонні границі, але вони не рівні між собою, тобто  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

3) точка  $x_0$  називається *точкою розриву другого роду*, якщо у цій точці не існує (дорівнює нескінченності) хоча б одна з односторонніх границь.

Кажуть, що функція  $f(x)$  неперервна на інтервалі  $(a, b)$ , якщо вона неперервна у кожній точці цього інтервалу.

Відмітимо, що кожна з основних елементарних функцій неперервна в області її визначення.

*Приклад.* Дослідити функції на неперервність, визначити

характер точок розриву (якщо вони є) та схематично зобразити їх графіки.

$$а) f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 3 & \text{при } x > 1, \end{cases} \quad б) f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}.$$

*Розв'язання.* а) Дана функція визначена на всій числовій прямій і на трьох указаних інтервалах вона задається різними аналітичними

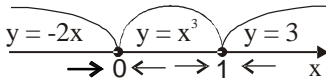


Рис.13

виразами. Так як у кожній внутрішній точці інтервалів  $(-\infty; 0)$ ,  $[0; 1]$ ,  $(1; \infty)$

функція неперервна (ці інтервали входять в область визначення відповідних елементарних функцій), то точками розриву можуть бути тільки граничні точки інтервалів, тобто  $x_1 = 0$  і  $x_2 = 1$ . Перевіримо виконання умови неперервності (4.2) у кожній з цих точок. Розглянемо спочатку точку  $x_1 = 0$  (рис.13):

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0, \quad f(x_1) = 0^3 = 0.$$

Так як  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ , то в точці  $x_1 = 0$  функція

неперервна. Розглянемо далі точку  $x_2 = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 0, \quad f(x_2) = 1^3 = 1.$$

Так як односторонні границі існують, але не рівні між собою, то в точці  $x_2 = 1$  функція терпить розрив першого роду.

Будуємо схематичний графік функції (рис.14).

б) Дана функція визначена на всій числовій прямій, крім точки  $x_0 = 2$ , яка є точкою розриву функції. Для з'ясування характеру розриву знайдемо односторонні границі функції в цій точці. При обчисленні

границі зліва (справа) зручно зробити заміну змінної  $x = 2 - \alpha, \alpha > 0$  ( $x = 2 + \alpha, \alpha > 0$ ). Очевидно, що умова  $x \rightarrow 2^-$  ( $x \rightarrow 2^+$ ) еквівалентна умові  $\alpha \rightarrow 0$ . Виконаємо вказані дії:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \alpha, \quad \alpha > 0; \\ x \rightarrow 2^- \Leftrightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 3^{\frac{1}{2-\alpha-2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{3^{\alpha}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \alpha, \quad \alpha > 0; \\ x \rightarrow 2^+ \Leftrightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 3^{\frac{1}{2+\alpha-2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 3^{\alpha} = \infty.$$

Так як одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності, то  $x_0 = 2$  – точка розриву другого роду. Будуємо схематичний графік функції (рис.15).

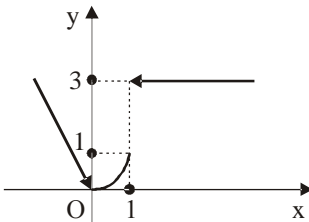


Рис. 14

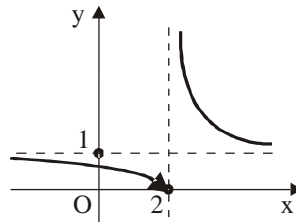


Рис. 15

## Розділ 5. Похідна і диференціал. Правила диференціювання

### § 5.1. Поняття та властивості похідної

Розглянемо функцію  $y = f(x)$ , яка визначена і неперервна на інтервалі  $(a, b)$ . Нехай  $x_0$  – фіксована внутрішня точка вказаного інтервалу. Надамо аргументу  $x$  приріст  $\Delta x$  в точці  $x_0$ . Вважаємо, що отримана точка  $x_0 + \Delta x$  також належить інтервалу  $(a, b)$ . Функція

$y = f(x)$  отримає приріст  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . Якщо існує границя відношення приросту функції до приросту аргументу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , тобто якщо існує границя  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , то вона називається *похідною* функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  і позначається  $y'(x_0)$  або  $f'(x_0)$  (можливі і інші позначення). Таким чином,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1.1)$$

Похідна характеризує *швидкість* зміни значення функції  $y$ .

Операція знаходження похідної називається також *диференціюванням* функції.

*Приклад 1.* Знайти похідну функції  $y = x^2 + 5x$  в точці  $x_0$ .

*Розв'язання.* Використовуючи означення, можемо записати:

$$f(x_0) = x_0^2 + 5x_0,$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 5(x_0 + \Delta x) = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x_0 + 5\Delta x,$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x_0 + 5\Delta x - x_0^2 - 5x_0}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x + 5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x + 5) = 2x_0 + 5; \\ f'(x_0) &= 2x_0 + 5. \end{aligned}$$

У загальному випадку похідна функції  $y = f(x)$  у довільній точці  $x$  (якщо вона існує) позначається одним із символів  $f'(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$ .

При розв'язанні практичних задач похідну знаходимо не за

означенням, а використовуючи *таблицю похідних*, основні *властивості похідної* і різні *методи диференціювання*.

*Таблиця похідних:*

1.  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ;

9.  $(\sin x)' = \cos x$ ;

2.  $(x)' = 1$ ;

10.  $(\cos x)' = -\sin x$ ;

3.  $(c)' = 0, (c = \text{const})$ ;

11.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;

4.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ ;

12.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ;

5.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ;

13.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

6.  $(e^x)' = e^x$ ;

14.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

7.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ ;

15.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ;

8.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;

16.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

*Приклад 2.* Довести, що  $(\sin x)' = \cos x$ .

*Розв'язання.* Відмітимо, що функція  $y = \sin x$  визначена і неперервна на інтервалі  $(-\infty; \infty)$ . Використовуючи означення приросту функції і одну з тригонометричних формул, отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

Застосувавши першу чудову границю, знайдемо:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.\end{aligned}$$

Отже  $y' = \cos x$ .

*Приклад 3.* Знайти похідну  $y'$  для наступних функцій:

а)  $y = x^7$ ; б)  $y = \sqrt[3]{x}$ ; в)  $y = \frac{1}{x^4}$ ; г)  $y = \log_5 x$ ; д)  $y = 3^x$ .

*Розв'язання.* За допомогою таблиці похідних маємо:

$$\begin{aligned}\text{а) } y' &= (x^7)' = 7 \cdot x^6; & \text{б) } y' &= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}; \\ \text{в) } y' &= (x^{-4})' = -4 \cdot x^{-5}; & \text{г) } y' &= (\log_5 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 5}; \\ \text{д) } y' &= (3^x)' = 3^x \cdot \ln 3.\end{aligned}$$

*Основні властивості похідної:*

$$\begin{aligned}1. (u \pm v)' &= u' \pm v'; & 3. (u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v'; \\ 2. (c \cdot u)' &= c \cdot u'; & 4. \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\end{aligned}$$

де  $c$  – стала;  $u, v$  – функції від  $x$ .

*Приклад 4.* Знайти похідні функцій:

а)  $y = x^3 - 3 \cdot \sin x$ ; б)  $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ ; в)  $y = 2 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{x^2 - 1}{\sin x + x}$ .

*Розв'язання:* Використовуючи основні властивості і таблицю похідних, отримуємо:

$$\text{а) } y' = (x^3)' - 3 \cdot (\sin x)' = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot \cos x;$$

$$\text{б) } y' = (\sqrt{x})' \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot (e^x)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot e^x + \sqrt{x} \cdot e^x;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } y' &= 2 \cdot (\operatorname{tg} x)' + \frac{(x^2 - 1)' \cdot (\sin x + x) - (x^2 - 1) \cdot (\sin x + x)'}{(\sin x + x)^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2x \cdot (\sin x + x) - (x^2 - 1) \cdot (\cos x + 1)}{(\sin x + x)^2}. \end{aligned}$$

*Геометричний зміст* похідної полягає у тому, що похідна функції  $y = f(x)$  у точці  $x_0$  дорівнює кутovому коефіцієнту дотичної до графіка

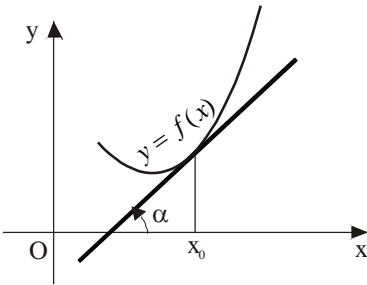


Рис. 16

функції  $y = f(x)$  в точці  $M(x_0, f(x_0))$ , тобто  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$  (рис. 16), де кут  $\alpha$  відраховується проти руху годинникової стрілки.

*Приклад 5.* До кривої  $y = x^4$  у точці з абсцисою  $x_0 = \sqrt[3]{0,25}$  проведена дотична. Знайти кут між

цією дотичною і додатнім напрямом осі  $Ox$ .

*Розв'язання.* Знайдемо спочатку похідну в заданій точці:

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3; \quad f'(x_0) = f'(\sqrt[3]{0,25}) = 4 \cdot (\sqrt[3]{0,25})^3 = 1.$$

Шуканий кут визначається рівністю (геометричний зміст похідної)  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ . Отже,  $\alpha = 45^\circ$ .

## §5.2. Похідна складної функції

Розглянемо складну функцію, тобто функцію, яка задана у вигляді

$y = f(u)$ , де  $u = \varphi(x)$  (або  $y = f(\varphi(x))$ ). Похідна від такої функції (якщо вона існує) шукається за формулою:

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x). \quad (2.1)$$

При використанні формули (2.1) після диференціювання замість проміжної змінної  $u$  необхідно підставити  $\varphi(x)$ . З формули (2.1) випливає наступне правило диференціювання складної функції: похідна складної функції дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції по проміжній змінній на похідну від проміжної функції по незалежній змінній.

*Приклад 1.* Знайти  $y'$ , якщо:

а)  $y = \sin^5 x$ ; б)  $y = \ln(x^3 + 3x^2)$ .

*Розв'язання.* а) Задану функцію можна представити у вигляді  $y = u^5$ , де  $u = \sin x$ . Згідно з формулою (2.1), маємо:

$$y' = (u^5)' \cdot (\sin x)' = 5u^4 \cdot \cos x = 5 \sin^4 x \cdot \cos x.$$

б) Аналогічно попередньому,  $u = x^3 + 3x^2$ ,  $y = \ln u$ ;

$$y' = (\ln u)' \cdot (x^3 + 3x^2)' = \frac{1}{u} \cdot (3x^2 + 6x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2} \cdot (3x^2 + 6x).$$

У більш загальному випадку складна функція представляє собою суперпозицію декількох елементарних функцій. Наприклад, функція може мати вигляд  $y = f(v)$ ,  $v = \psi(u)$ ,  $u = \varphi(x)$  (або  $y = f(\psi(\varphi(x)))$ ). У цьому випадку справедлива формула

$$y'(x) = f'(v) \cdot \psi'(u) \cdot \varphi'(x). \quad (2.2)$$

Підкреслимо, що добуток правої частини останньої рівності складається з похідних від кожної із задіяних функцій по відповідній змінній.

Приклад 2. Продиференціювати функції:

а)  $y = \operatorname{tg}^3(x^2 + 5)$ ; б)  $y = e^{\sin^2 x}$ .

Розв'язання. а) Задану функцію можемо представити у вигляді  $y = v^3$ ,  $v = \operatorname{tg} u$ ,  $u = x^2 + 5$ . За формулою (2.2) маємо:

$$\begin{aligned} y' &= (v^3)' \cdot (\operatorname{tg} u)' \cdot (x^2 + 5)' = 3v^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \cdot 2x = \\ &= 3 \operatorname{tg}^2(x^2 + 5) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2 + 5)} \cdot 2x. \end{aligned}$$

б) При оформленні розв'язків проміжні змінні вводити не обов'язково. Беручи послідовно похідні від показникової, степеневої і тригонометричної функцій, отримуємо

$$y' = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x.$$

Якщо функція задана параметрично, тобто у вигляді  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$  то

похідна від  $y$  по  $x$  визначається за формулою

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (2.3)$$

У формулі (2.3) і надалі індекс знизу вказує змінну, по якій береться похідна.

Приклад 3. Знайти похідну  $y'_x$ :

а)  $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = t^2 - 1; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x = t^4 - t^2, \\ y = e^{3t-1}. \end{cases}$

Розв'язання. За формулою (2.3) маємо:

а)  $y'_x = \frac{2t}{3\sin^2 t \cdot \cos t}$ ; б)  $y'_x = \frac{e^{3t-1} \cdot 3}{4t^3 - 2t}$ .

### §5.3. Диференціювання неявно заданих функцій.

#### Логарифмічне диференціювання

Нехай функція  $y$  від  $x$  задана *неявно*, тобто  $y$  вигляді рівності  $F(x, y) = 0$ . Розглянемо метод диференціювання вказаної функції на конкретному прикладі.

*Приклад 1.* Функція  $y$  від  $x$  задана виразом  $y^3 + e^{x^2+y^5} + 3\sin x = 0$ .

Знайти похідну  $y'$ .

*Розв'язання.* Продиференціюємо задану рівність, враховуючи те, що  $y$  є функцією від  $x$ :

$$3y^2 y' + e^{x^2+y^5} \cdot (2x + 5y^4 y') + 3\cos x = 0.$$

Отриманий вираз розглядаємо як рівняння відносно похідної  $y'$  (воно завжди лінійне). Розв'язуємо рівняння:

$$y'(3y^2 + 5y^4 e^{x^2+y^5}) = -2xe^{x^2+y^5} - 3\cos x,$$
$$y' = \frac{-2xe^{x^2+y^5} - 3\cos x}{3y^2 + 5y^4 e^{x^2+y^5}}.$$

Розглянемо показниково-степеневу функцію  $y = u^v$ , де  $u$  і  $v$  – функції від  $x$ . Похідна  $y'(x)$  у цьому випадку визначається за допомогою *методу логарифмічного диференціювання*. Суть вказаного методу полягає у тому, що спочатку логарифмуємо рівність  $y = u^v$ , а потім знаходимо похідну  $y'$  за правилами диференціювання неявної функції.

*Приклад 2.* Знайти похідну функції  $y = (x^2 + 5)^{\sin x}$ .

*Розв'язання.*: Логарифмуємо задану рівність і робимо очевидні

перетворення (використано властивість логарифму  $\log_a x^p = p \log_a x$ ):

$$\ln y = \ln(x^2 + 5)^{\sin x}, \quad \ln y = \sin x \cdot \ln(x^2 + 5).$$

Диференціюємо останню рівність за правилами диференціювання неявної функції:

$$(\ln y)' = (\sin x)' \cdot \ln(x^2 + 5) + \sin x \cdot (\ln(x^2 + 5))',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln(x^2 + 5) + \sin x \cdot \frac{1}{x^2 + 5} \cdot 2x,$$

$$y' = y \cdot \left( \cos x \cdot \ln(x^2 + 5) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2 + 5} \right),$$

$$y' = (x^2 + 5)^{\sin x} \cdot \left( \cos x \cdot \ln(x^2 + 5) + \frac{2x \cdot \sin x}{x^2 + 5} \right).$$

За допомогою вказаного методу для показниково-степеневі функції  $y = u^v$  можна отримати наступну формулу:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \quad (3.1)$$

Формула (3.1) легко запам'ятовується. Перший доданок її правої частини – це похідна функції  $y = u^v$  при умові, що основа  $u$  є сталою величиною (використовується таблична похідна для показникової функції  $a^x$ ); другий доданок – це похідна функції  $y = u^v$  при умові, що показник  $v$  є сталою величиною (використовується таблична похідна для степеневі функції  $x^\alpha$ ).

*Приклад 3.* Знайти похідну функції  $y = (\operatorname{tg} x)^{3x+1}$ .

*Розв'язання.* Користуючись формулою (3.1), знайдемо

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{3x+1} \cdot \ln \operatorname{tg} x \cdot 3 + (3x+1) \cdot (\operatorname{tg} x)^{3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

## §5.4. Диференціал функції. Наближені обчислення за допомогою диференціала

Якщо функція  $y = f(x)$  диференційована в точці  $x$ , то її приріст  $\Delta y$  у цій точці можна представити у вигляді:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad (4.1)$$

де  $\Delta x$  – приріст аргументу у точці  $x$ ;  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Добуток  $f'(x) \cdot \Delta x$  є головною частиною приросту функції (другий доданок правої частини формули (4.1) є нескінченно малою величиною більш високого порядку малості відносно першого при  $\Delta x \rightarrow 0$ ). Вказаний добуток називається *диференціалом* функції в точці  $x$  і позначається символом  $dy$  або  $df(x)$ . Отже,

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (4.2)$$

Приріст  $\Delta x$  незалежної змінної  $x$  співпадає з її диференціалом  $dx$ , тобто  $dx = \Delta x$ . Означення (4.2) може бути записане у вигляді:

$$dy = f'(x) dx. \quad (4.3)$$

Всі основні властивості диференціала співпадають з властивостями похідної. Наприклад, для диференціала суми і добутку справедливі формули

$$d(u + v) = du + dv, \quad d(uv) = u dv + v du.$$

*Приклад 1.* Знайти диференціал функції  $y = 2 \arcsin^2 x + \sqrt{x}$ .

*Розв'язання.* На основі формули (4.3) маємо:

$$dy = \left( 2 \arcsin^2 x + \sqrt{x} \right)' dx = \left( \frac{4 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$$

Як бачимо, знаходження диференціала  $dy$  по суті зводиться до

знаходження похідної  $y'$ .

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційовна на інтервалі  $(a, b)$  і нехай  $x_0$  – внутрішня точка цього інтервалу. Припустимо, що незалежна змінна  $x$  отримала приріст  $\Delta x$  в точці  $x_0$ , причому  $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ . Як відомо, приріст  $\Delta y$  і диференціал  $dy$  функції визначаються наступним чином:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad dy = f'(x_0)dx.$$

З формули (4.1) випливає, що  $\Delta y \approx dy$ . Можемо записати

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx$$

або

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) застосовується для *наближених обчислень* значення функції.

*Приклад 2.* Задана функція  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ . Обчислити наближено за допомогою диференціала значення цієї функції в точці  $x = 1,97$ .

*Розв'язання.* Значення  $x_0$  підбираємо таким чином, щоб воно було близьким до заданого значення  $x$  і щоб сама функція і її похідна легко обчислювалися у цій точці. У більшості випадків  $x_0$  є найближчим цілим числом до заданого  $x$ . Нехай  $x_0 = 2$ . Тоді:

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3, \quad \Delta x = x - x_0 = 1,97 - 2 = -0,03;$$

$$f'(x) = \left( \sqrt{2x^2 + 1} \right)' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}; \quad f'(x_0) = f'(2) = \frac{4}{3}.$$

Підставивши знайдені значення у формулу (4.4), отримуємо:

$$f(1,97) = f(2 + (-0,03)) \approx 3 + \frac{4}{3} \cdot (-0,03) = 2,96.$$

### §5.5. Поняття про похідні вищих порядків

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована в точці  $x$ , тобто у цій точці існує похідна  $f'(x)$ . Якщо для функції  $f(x)$  у точці  $x$  існує похідна від похідної  $f'(x)$ , то вона називається *похідною другого порядку* або *другою похідною*. Похідною третього порядку називається похідна від похідної другого порядку і т. д. Для вказаних похідних вищих порядків прийняті позначення  $y''$ ,  $y'''$ , ...,  $y^{(n)}$  або  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ , ...,  $f^{(n)}(x)$ .

*Приклад 1.* Знайти похідні другого порядку для наступних функцій:

$$\text{а) } y = 2x^3 + \sin 3x - 1; \quad \text{б) } y = e^{x^2+1}.$$

*Розв'язання.* У відповідності з означенням другої похідної можемо записати:

$$\text{а) } y' = 6x^2 + 3 \cdot \cos 3x, \quad y'' = (6x^2 + 3 \cdot \cos 3x)' = 12x - 9 \cdot \sin 3x;$$

$$\text{б) } y' = 2 \cdot xe^{x^2+1}, \quad y'' = (2 \cdot xe^{x^2+1})' = 2e^{x^2+1} + 4x^2e^{x^2+1}.$$

Якщо функцію задано *параметрично*  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , то похідна другого порядку від  $y$  по  $x$  обчислюється за формулою:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{\phi'(t)} \quad (5.1)$$

або

$$y''_{xx} = \frac{\phi'(t) \cdot \psi''(t) - \phi''(t) \cdot \psi'(t)}{(\phi'(t))^3}. \quad (5.2)$$

**Приклад 2.** Знайти похідні другого порядку  $y''_{xx}$  від функцій, заданих параметрично:

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = \cos t + t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = e^{2t-1}, \\ y = t^4 - \sin t. \end{cases}$$

*Розв'язання.* а) Користуючись формулою (5.1), отримуємо:

$$y'_x = \frac{-\sin t + 1}{2t}, \quad y''_{xx} = \frac{\left(\frac{-\sin t + 1}{2t}\right)'}{(t^2 - 3)'} = \frac{-2t \cos t - 2 \cdot (-\sin t + 1)}{8t^3}.$$

б) Застосовуючи формулу (5.2), дістаємо:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= 2e^{2t-1}, \quad \varphi''(t) = 4e^{2t-1}, \quad \psi'(t) = 4t^3 - \cos t, \\ \psi''(t) &= 12t^2 + \sin t; y''_{xx} = \frac{2e^{2t-1} \cdot (12t^2 + \sin t) - 4e^{2t-1} \cdot (4t^3 - \cos t)}{(2e^{2t-1})^3}. \end{aligned}$$

## Розділ 6. Деякі застосування похідної

### § 6.1. Правило Лопітала

*Правило Лопітала* застосовується для обчислення границь. Сформулюємо його суть. Нехай функції  $\varphi(x)$  і  $\psi(x)$  диференційовані в околі точки  $x_0$  і нехай в цій точці вони одночасно нескінченно малі або нескінченно великі, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 \text{ і } \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0 \text{ або } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty \text{ і } \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \infty.$$

Тоді, якщо існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ , то існує також границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ,

причому:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}. \quad (1.1)$$

Очевидно, що правило Лопітала використовується для розкриття

невизначеностей виду  $\frac{0}{0}$  і  $\frac{\infty}{\infty}$ .

*Приклад 1.* Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin^2 x}{x^3 + x^2}.$$

*Розв'язання.* Застосовуючи правило Лопіталя, дістаємо:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{x - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2^x - 2)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x \cdot \ln 2}{1} = 2 \ln 2;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

в) При обчисленні цієї границі правило Лопіталя необхідно застосувати два рази (у загальному випадку при виконанні відповідних умов це можна робити декілька разів).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)'}{(x^3 + x^2)'} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{3x^2 + 2x} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x^2 + 2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x^2 + 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(3x^2 + 2x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6x + 2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Правило Лопіталя використовується також для розкриття невизначеностей вигляду  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$  і  $\infty^0$ . У всіх вказаних випадках можна зробити перетворення, після яких отримаємо невизначеність виду  $\frac{0}{0}$  або  $\frac{\infty}{\infty}$ .

*Приклад 2.* Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arctg x} - \frac{1}{x} \right); \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln^2 x).$$

*Розв'язання.* У наведених нижче розв'язках спочатку за допомогою елементарних перетворень зводимо задану границю до невизначеності  $\frac{0}{0}$  або  $\frac{\infty}{\infty}$ , а потім застосовуємо правило Лопітала.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arctg x} - \frac{1}{x} \right) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x \cdot \arctg x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{\arctg x + x \cdot \frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1+x^2) \cdot \arctg x + x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x \cdot \arctg x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot \arctg x + 1} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln^2 x) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 \left( 1 - \frac{\ln^2 x}{x^2} \right) \right).$$

Так як

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \right)^2 = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} \right)^2 = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \right)^2 = 0,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\ln^2 x}{x^2} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^2 \left( 1 - \frac{\ln^2 x}{x^2} \right) \right) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

## § 6.2. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції

Якщо функція  $y = f(x)$  диференційована при  $x = x_0$ , то в точці

$M_0(x_0, f(x_0))$  існує дотична до графіка функції і її рівняння

визначається за формулою:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.1)$$

Рівняння нормалі до кривої  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0, f(x_0))$ , при умові, що  $f'(x_0) \neq 0$ , має вигляд:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (2.2)$$

Якщо  $f'(x_0) = 0$ , то дотична паралельна осі  $Ox$ , а нормаль – осі  $Oy$ . У цьому випадку рівняння дотичної має вигляд  $y = f(x_0)$ , а рівняння нормалі –  $x = x_0$ .

*Приклад.* Записати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції  $y = x^3 + 1$  в точці  $x_0 = 1$ .

*Розв'язання.* Обчислюємо всі необхідні значення:

$$f(x_0) = f(1) = 1^3 + 1 = 2; \quad f'(x) = 3x^2; \quad f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Використовуючи формулу (2.1), отримуємо рівняння дотичної:

$$y = 2 + 3 \cdot (x - 1) \text{ або } y = 3x - 1.$$

Застосовуючи формулу (2.2), отримуємо рівняння нормалі:

$$y = 2 - \frac{1}{3}(x - 1) \text{ або } y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

### § 6.3. Дослідження функції на монотонність і точки екстремумів

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена і неперервна на інтервалі  $(a, b)$  і нехай  $x_1, x_2$  – дві довільні точки з цього інтервалу, причому  $x_1 < x_2$ . Якщо для вказаних точок виконується нерівність  $f(x_1) < f(x_2)$

(  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ), то кажуть, що функція  $y = f(x)$  *зростаюча (неспадна)* на інтервалі  $(a, b)$ . Якщо ж для вказаних точок виконується нерівність  $f(x_1) > f(x_2)$  (  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ), то кажуть, що функція  $y = f(x)$  *спадна (незростаюча)* на інтервалі  $(a, b)$ .

Інтервали зростання і спадання функції (*інтервали монотонності*) визначаються за допомогою першої похідної. Якщо  $f'(x) > 0$  для будь-якого  $x$  з інтервалу  $(a, b)$ , то функція  $y = f(x)$  на вказаному інтервалі зростає; якщо ж  $f'(x) < 0$ , то функція спадає.

Точка  $x_0$  називається точкою *локального мінімуму* функції  $y = f(x)$ , якщо для будь-якого  $x$  з деякого околу цієї точки виконується нерівність  $f(x_0) < f(x)$ . Якщо ж  $f(x_0) > f(x)$ , то точка  $x_0$  називається точкою *локального максимуму*.

Мінімум або максимум (тут і надалі мова йде про локальний мінімум і локальний максимум) функції будемо називати її *екстремумом*, а точку  $x_0$ , в якій функція має екстремум – *точкою екстремуму*.

*Необхідна умова екстремуму функції*: якщо функція  $y = f(x)$  має екстремум в точці  $x_0$ , то у цій точці перша похідна дорівнює нулю або не існує. Точки, в яких перша похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками* цієї функції. Точки, в яких перша похідна дорівнює нулю, називаються *стаціонарними*.

*Достатні умови екстремуму функції*: критична точка  $x_0$  є точкою максимуму, якщо при переході через цю точку (зліва направо) перша похідна змінює знак з «+» на «-»; якщо ж знак змінюється з «-» на «+», то точка  $x_0$  є точкою мінімуму (якщо знак не змінюється, то екстремуму

немає).

Дослідження функції на зростання, спадання і точки екстремумів будемо здійснювати за наступною схемою:

- 1) знаходимо область визначення функції;
- 2) знаходимо критичні точки;
- 3) на числовій прямій відмічаємо всі критичні точки і точки розриву;
- 4) визначаємо знак першої похідної на кожному із отриманих інтервалів області визначення функції (для цього достатньо обчислити значення похідної в одній точці даного інтервалу);
- 5) використовуючи відповідні умови, визначаємо інтервали зростання, спадання і точки екстремумів (при необхідності обчислюємо і самі екстремуми).

*Приклад 1.* Знайти проміжки зростання, спадання і точки екстремумів функцій:

$$\text{а) } y = \frac{3}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{2x^2}; \quad \text{б) } y = \sqrt[3]{x^2}; \quad \text{в) } y = x - \ln x.$$

*Розв'язання.* а) Функція визначена на всій числовій прямій, окрім точки  $x = 0$ . Область визначення функції будемо позначати через  $D(f)$ . Таким чином,  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ . Знайдемо критичні точки:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{4}(x^{-4})' + \frac{2}{3}(x^{-3})' - \frac{1}{2}(x^{-2})' = -3x^5 - 2x^{-4} + x^{-3} = -\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} = \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{x^5}; \quad \frac{x^2 - 2x - 3}{x^5} = 0; \quad x^2 - 2x - 3 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 0. \end{aligned}$$

На числовій прямій відмічаємо критичні точки, точки розриву і визначаємо знак першої похідної на отриманих проміжках (рис.17).

Маємо: функція спадає на інтервалах  $(-\infty, -1)$  і  $(0, 3)$ ; функція зростає на інтервалах  $(-1; 0)$  і  $(3; +\infty)$ ; в точці  $x = -1$  функція має локальний мінімум ( $y_{1\min} = f(-1) = -5/12$ ); точка  $x = 3$  також є точкою мінімуму ( $y_{2\min} = f(3) = -7/324$ ).

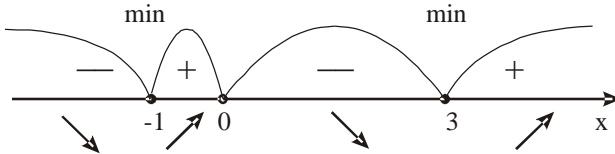


Рис. 17

Відмітимо, що в точці  $x = 0$  похідна не існує і змінює знак, але ця точка є точкою розриву і не може бути точкою екстремуму функції.

б) Функція визначена на всій числовій прямій, тобто  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ . Знайдемо похідну:

$$y' = \left( x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}.$$

В точці  $x = 0$  похідна не існує. Отже,  $x = 0$  – критична точка. Вказана точка належить області визначення функції. Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремумів (рис. 18).

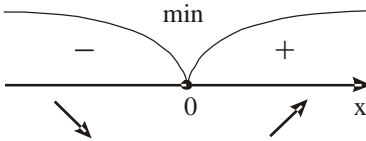


Рис. 18

На інтервалі  $(-\infty; 0)$  функція спадає; на інтервалі  $(0; +\infty)$  функція зростає;  $x = 0$  – точка локального

мінімуму ( $y_{\min} = f(0) = 0$ ).

в) Аналогічно попередньому дістаємо (Рис.19):  $D(f) = (0; +\infty)$ ;

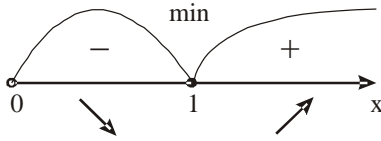


Рис. 19

$$y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}; \quad \frac{x-1}{x} = 0; \quad x = 1 -$$

критична точка.

Функція спадає на інтервалі

$(0;1)$ ; функція зростає на інтервалі

$(1; +\infty)$ ;  $x = 1$  – точка мінімуму ( $y_{\min} = f(1) = 1$ ).

## Розділ 7. Невизначений інтеграл

### §7.1. Поняття невизначеного інтеграла. Безпосереднє інтегрування

У диференціальному численні розглядалася наступна основна задача: по заданій функції  $F(x)$  потрібно знайти її похідну  $F'(x) = f(x)$

. У інтегральному численні розглядається обернена задача: по заданій функції  $f(x)$  потрібно знайти таку функцію  $F(x)$ , похідна від якої дорівнювала б функції  $f(x)$ , тобто  $F'(x) = f(x)$ . Іншими словами, по заданій похідній від невідомої функції необхідно знайти саму функцію.

Якщо для кожного  $x$  з деякої області  $X$  виконується рівність  $F'(x) = f(x)$ , то функція  $F(x)$  називається *первісною* для функції  $f(x)$  в області  $X$ . Наприклад, функція  $F(x) = 0,25x^4 + 3$  є первісною для функції  $f(x) = x^3$  на числовій прямій  $\mathbb{R}$ , так як

$$F'(x) = (0,25x^4 + 3)' = x^3 = f(x).$$

Нехай  $F(x)$  є первісною для функції  $f(x)$  в області  $X$ . Тоді на в цій області функція  $f(x)$  має нескінченну множину первісних, які

можуть бути представлені у вигляді суми  $F(x) + C$ , де  $C$  – довільна стала. Вказана множина всіх можливих первісних називається *невизначеним інтегралом* і позначається символом  $\int f(x)dx$ . Таким чином, можемо записати

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (1.1)$$

Функція  $f(x)$  називається *підінтегральною функцією*,  $f(x)dx$  – *підінтегральним виразом*,  $x$  – *змінною інтегрування*. Операцію знаходження невизначеного інтеграла (первісної) будемо називати *інтегруванням функції*.

*Основні властивості невизначеного інтеграла:*

1.  $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ ,
2.  $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ ,
3.  $\int dF(x) = F(x) + C$ ,
4.  $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$  ( $k$  – стала),
5.  $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ .

*Таблиця інтегралів:*

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$  ( $\alpha \neq -1$ ),
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ,
3.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$ ,
4.  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$ ,
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ ,
6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ,
7.  $\int e^x dx = e^x + C$ ,
8.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ,
9.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ,
10.  $\int \cos x dx = \sin x + C$ ,

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C.$$

У найпростіших випадках невизначені інтеграли можуть бути знайдені тільки за допомогою таблиці інтегралів, основних властивостей та елементарних перетворень підінтегральної функції. Вказаний підхід називається *безпосереднім інтегруванням*.

*Приклад 1.* Знайти інтеграли:

$$a) \int \left( \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^5} \right) dx; \quad б) \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

*Розв'язання.* Використовуючи основні властивості, таблицю інтегралів і очевидні елементарні перетворення, отримуємо:

$$\begin{aligned} a) \int \left( \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x^3} + \sqrt[3]{x^5} \right) dx &= 5 \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2 \int x^{-3} dx + \int x^{\frac{5}{3}} dx = \\ &= 5 \operatorname{tg} x + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} б) \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \\ &= \operatorname{tg} x - x + C. \end{aligned}$$

Для невизначеного інтеграла справедлива також наступна властивість: якщо  $\int f(x) dx = F(x) + C$  і  $u = \varphi(x)$  – будь-яка неперервно диференційовна функція, то  $\int f(u) du = F(u) + C$ . На основі цієї

властивості в деяких випадках інтеграл може бути зведений до табличного за допомогою прийому *внесення функції під знак диференціала*.

*Приклад 2.* Знайти інтеграли: а)  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x}$ ; б)  $\int x e^{x^2+3} dx$ .

*Розв'язання.* а) Застосовуємо прийом внесення функції під знак диференціала. Так як  $d \sin x = (\sin x)' dx = \cos x dx$  і  $\int u^{-5} du = \frac{u^{-4}}{-4} + C$ , то можемо записати

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{d \sin x}{\sin^5 x} = \int \sin^{-5} x d \sin x = \frac{\sin^{-4} x}{-4} + C.$$

б) Аналогічно попередньому, враховуючи, що  $x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + 3)$ ,

маємо

$$\int x e^{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2+3} d(x^2 + 3) = \frac{1}{2} e^{x^2+3} + C.$$

Нехай функція  $F(x)$  є первісною для функції  $f(x)$ . Застосовуючи прийом внесення функції під знак диференціала, отримуємо:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Отже, справедлива формула

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad (1.2)$$

де  $F(x)$  – первісна для  $f(x)$ .

*Приклад 3.* Обчислити інтеграли: а)  $\int \frac{dx}{5x+1}$ ; б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$ .

*Розв'язання.* а) Застосовуючи прийом внесення функції під знак

диференціала, отримуємо:

$$\int \frac{dx}{5x+1} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x+1)}{5x+1} = \frac{1}{5} \ln|5x+1| + C.$$

б) Використовуючи формулу (1.2), отримуємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin 3x + C.$$

## §7.2. Методи інтегрування

Досить часто заміна змінної суттєво спрощує обчислення невизначеного інтеграла. Нехай перехід до нової змінної задається підстановкою  $x = \varphi(t)$  і нехай  $\varphi(t)$  – монотонна, неперервно диференційована функція (на відповідному проміжку) нової змінної  $t$ . *Метод заміни змінної* (або *метод підстановки*) визначається наступною формулою

$$\int f(x)dx = \left| x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (2.1)$$

Інколи нову змінну зручно вводити за допомогою підстановки  $u = \psi(x)$ . У цьому випадку використовується формула

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \left| u = \psi(x), du = \psi'(x)dx \right| = \int f(u)du. \quad (2.2)$$

При застосуванні формул (2.1) і (2.2) після інтегрування потрібно повернутися до змінної  $x$ .

*Приклад 1.* Знайти інтеграл: а)  $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$ ; б)  $\int \sin^6 x \cdot \cos x dx$ .

*Розв'язання.* а) За формулою (2.1) маємо:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} = \left| x = t^2, dx = 2tdt \right| = \int \frac{t \cdot 2tdt}{1+t^2} = 2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2} dt =$$

$$= 2 \int \frac{t^2+1}{1+t^2} dt - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = |t = \sqrt{x}| = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

б) Використовуючи формулу (2.2), отримуємо:

$$\int \sin^6 x \cdot \cos x dx = |u = \sin x, du = \cos x dx| = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Якщо  $u$  і  $v$  – диференційовні функції від  $x$ , то має місце формула:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2.3)$$

Формула (2.3) лежить в основі *методу інтегрування частинами*.

При її застосуванні мається на увазі, що інтеграл у правій частині простіший, ніж інтеграл у лівій. При використанні вказаного методу підінтегральний вираз розбивається на два множники  $u = \varphi(x)$  і  $dv = \psi(x)dx$ . Продиференціювавши першу рівність та проінтегрувавши другу, знаходимо  $du = \varphi'(x)dx$  і  $v = \int \psi(x)dx$  (довільну сталу беремо рівною нулю). Далі застосовуємо формулу (2.3).

*Приклад 2.* Знайти інтеграли: а)  $\int x \cdot \sin x dx$ ; б)  $\int \sqrt{1+x^2} dx$ .

*Розв'язання.* а) Використавши метод інтегрування частинами, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, dv = \sin x dx, \\ du = dx, v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

б) Аналогічно попередньому, маємо:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1+x^2}, dv = dx, \\ du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}, v = x \end{array} \right| = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|.$$

Можемо записати

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|.$$

Помітивши, що в лівій і правій частинах однакові інтеграли, зводимо подібні і розв'яжемо рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|,$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| \right) + C.$$

Наведемо деякі типи інтегралів, для обчислення яких завжди застосовується метод інтегрування частинами:

$$\int P(x) \cdot \sin(ax+b) dx, \quad (P(x) = u, \sin(ax+b) dx = dv);$$

$$\int P(x) \cdot \cos(ax+b) dx, \quad (P(x) = u, \cos(ax+b) dx = dv);$$

$$\int P(x) \cdot a^{bx+c} dx, \quad (P(x) = u, a^{bx+c} dx = dv);$$

$$\int P(x) \cdot \log_a x dx, \quad (\log_a x = u, P(x) dx = dv);$$

де  $P(x)$  – многочлен.

*Приклад 3.* Знайти інтеграли:

а)  $\int (x^4 + x^2 + 1) \cdot \ln x dx$ ; б)  $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$ .

*Розв'язання.* а) Маємо один з наведених вище стандартних випадків. Інтегруємо:

$$\int (x^4 + x^2 + 1) \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, dv = (x^4 + x^2 + 1)dx, \\ du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x \end{array} \right| = \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \int \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x \right) \frac{dx}{x} = \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \int \left( \frac{x^4}{5} + \frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \frac{x^5}{25} - \frac{x^3}{9} - x + C.$$

б) Застосовуємо метод інтегрування частинами два рази:

$$\int x^2 \cdot e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, dv = e^{3x} dx, \\ du = 2x dx, v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3} \int x \cdot e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, dv = e^{3x} dx, \\ du = dx, v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C.$$

### §7.3. Інтегрування деяких виразів, що містять квадратний тричлен

Розглянемо інтеграли виду

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (3.1)$$

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx, \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \quad (3.2)$$

де  $A, B, a, b, c$  – сталі.

Інтеграли (3.1) зводяться до табличних за допомогою виділення

повного квадрата у квадратному тричлені знаменника, а саме:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( \left( x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) =$$

$$= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a((x+h)^2 - l), \text{ де } h = \frac{b}{2a}, l = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

У залежності від значень параметрів  $a$  і  $l$  будемо отримувати різні табличні інтеграли. Наприклад, якщо  $l < 0, -\infty < a < +\infty$ , то для першого інтеграла отримуємо

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x+h)^2 - l} = \frac{1}{a\sqrt{-l}} \operatorname{arctg} \frac{x+h}{\sqrt{-l}} + C;$$

якщо  $a < 0, l > 0$ , то для другого інтеграла маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a((x+h)^2 - l)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-a(l - (x+h)^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{l - (x+h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{x+h}{\sqrt{l}} + C.$$

*Приклад 1.* Знайти інтеграли:

а)  $\int \frac{dx}{2x^2 - 16x + 46}$ ; б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + 12x - 15}}$ .

*Розв'язання.* а) Виділяємо в знаменнику повний квадрат і інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 16x + 46} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 9} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16) - 16 + 9} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-4)^2 - 7} = \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x-4-\sqrt{7}}{x-4+\sqrt{7}} \right| + C.$$

б) Аналогічно попередньому, отримуємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + 12x - 15}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-2(x^2 - 6x + 7,5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2((x-3)^2 - 1,5)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1,5 - (x-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x-3}{\sqrt{1,5}} + C. \end{aligned}$$

Розглянемо інтеграли (3.2). В чисельнику виділяємо похідну від квадратного тричлена знаменника ( $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$ ):

$$\begin{aligned} Ax + B &= \frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{bA}{2a} = r(2ax + b) + s, \text{ де } r = \frac{A}{2a}, s = B - \frac{bA}{2a}; \\ \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{r(2ax + b) + s}{ax^2 + bx + c} dx = r \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} + s \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \\ \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= r \int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + s \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

Два з чотирьох отриманих інтегралів були розглянуті вище, а для двох інших маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c} = \ln|ax^2 + bx + c| + C; \\ \int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \int (ax^2 + bx + c)^{-\frac{1}{2}} d(ax^2 + bx + c) = 2(ax^2 + bx + c)^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

*Приклад 2.* Обчислити інтеграл  $\int \frac{(3x+5)}{2x^2+8x+9} dx$ .

*Розв'язання.* Враховуючи, що похідна знаменника дорівнює  $4x+8$ , отримуємо

$$\int \frac{(3x+5)}{2x^2+8x+7} dx = \int \frac{\frac{3}{4}(4x+8) + 5-6}{2x^2+8x+7} dx = \frac{3}{4} \int \frac{(4x+8)dx}{2x^2+8x+7} -$$

$$\begin{aligned}
 -\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 7} &= \frac{3}{4} \int \frac{d(2x^2 + 8x + 7)}{2x^2 + 8x + 7} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 0,5} = \\
 &= \frac{3}{4} \ln|2x^2 + 8x + 9| - \frac{1}{4\sqrt{0,5}} \ln \left| \frac{x+2-\sqrt{0,5}}{x+2+\sqrt{0,5}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

## Розділ 8. Визначений інтеграл.

### Застосування визначеного інтеграла

#### § 8.1. Означення та основні властивості визначеного інтеграла

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена і неперервна на відрізку  $[a, b]$

Довільним чином розіб'ємо вказаний відрізок на  $n$  частин точками

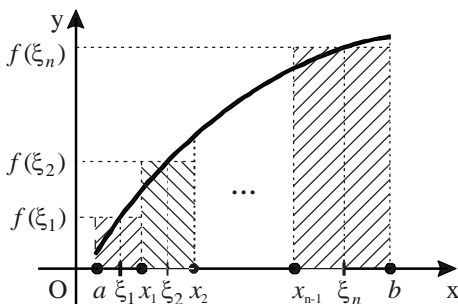


Рис. 20

поділу  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ , причому  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  (рис.20).

Введемо позначення

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

На кожному з відрізків  $[x_{i-1}, x_i]$   $(i = 1, 2, \dots, n)$

певним чином виберемо по одній точці  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Складемо суму

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1.1)$$

Сума  $s_n$  називається *інтегральною сумою* для функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ . Очевидно, що значення інтегральної суми залежить від самої функції  $f(x)$ , способу розбиття відрізка  $[a, b]$  на  $n$  частин і від вибору

точок  $\xi_i$ . Міняючи вказані складові, отримаємо послідовність інтегральних сум  $s_n$ . Нехай  $\lambda$  – найбільша з величин  $\Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Відмітимо, що при  $\lambda \rightarrow 0$  число відрізків  $n$  нескінченно збільшується.

Якщо існує границя послідовності інтегральних сум (1.1) при  $\lambda \rightarrow 0$ , яка не залежить ні від способу розбиття відрізка  $[a, b]$  на частини, ні від вибору точок  $\xi_i$ , то ця границя називається *визначеним інтегралом* функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ .

Визначений інтеграл позначається через  $\int_a^b f(x)dx$ , де  $a, b$  – відповідно нижня і верхня межі інтегрування,  $f(x)$  – підінтегральна функція,  $f(x)dx$  – підінтегральний вираз. Отже, можемо записати

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1.2)$$

Якщо визначений інтеграл існує (існує границя інтегральної суми), то функція  $f(x)$  називається *інтегрованою* на відрізку  $[a, b]$ .

Дамо *геометричний зміст* визначеного інтеграла. Нехай  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Кожен доданок  $f(\xi_i) \Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) інтегральної суми (1.1) дорівнює площі прямокутника зі сторонами  $f(\xi_i)$  і  $\Delta x_i$  (рис.20), а вся інтегральна сума дорівнює площі фігури, що обмежена віссю  $Ox$ , вертикальними прямими  $x = a, x = b$  і ламаною лінією, ланки якої паралельні координатним осям. Очевидно, що при  $\lambda \rightarrow 0$  вказана ламана прямує до кривої  $y = f(x)$ . Таким чином, визначений інтеграл (1.2) при  $f(x) \geq 0$  чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (див. рис. 21, а), тобто площі фігури, яка зліва обмежена прямою  $x = a$ ,

справа – прямою  $x = b$ , знизу – віссю  $Ox$  і зверху – кривою  $y = f(x)$ .

*Основні властивості визначеного інтеграла:*

$$\begin{aligned} 1. \int_a^a f(x) dx &= 0, & 4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx, \\ 2. \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx, & 5. \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \\ 3. \int_a^b k \cdot f(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx, & 6. m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \end{aligned}$$

де  $k$  – стала;  $c \in R$ ; числа  $m$  і  $M$  – відповідно найменше і найбільше значення функції  $f(x)$  на відрізьку  $[a, b]$ .

## § 8.2. Обчислення визначеного інтеграла

В основі обчислення визначеного інтеграла лежить *формула*

*Ньютона-Лейбніца:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (2.1)$$

де  $F(x)$  – деяка первісна функції  $f(x)$ .

*Приклад 1.* Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/6} \sin 2x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \left( \frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x} \right) dx.$$

*Розв'язання.* а) Використовуючи (2.1), отримуємо:

$$\int_0^{\pi/6} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

б) Застосовуючи третю та четверту властивості, отримуємо:

$$\int_0^1 \left( \frac{3}{1+x^2} + 5e^{2x} \right) dx = 3 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + 5 \int_0^1 e^{2x} dx =$$

$$= \left( 3 \operatorname{arctg} x + \frac{5}{2} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{5}{2} e^2 - \frac{5}{2}.$$

Розглянуті в першому розділі метод інтегрування частинами і метод заміни змінної переносяться і на випадок визначеного інтеграла. *Інтегрування частинами* у визначеному інтегралі здійснюється за допомогою формули

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (2.2)$$

Даний метод застосовують до тих же функцій, що й у випадку невизначеного інтеграла.

*Приклад 2.* Обчислити інтеграл  $\int_0^2 x \cdot e^{3x} dx$ .

*Розв'язання.* Згідно (2.2) маємо:

$$\int_0^2 x \cdot e^{3x} dx = \left| u = x, dv = e^{3x} dx, du = dx, v = \frac{1}{3} e^{3x} \right| = \frac{1}{3} x e^{3x} \Big|_0^2 -$$

$$- \frac{1}{3} \int_0^2 e^{3x} dx = \frac{2}{3} e^6 - \frac{1}{9} e^{3x} \Big|_0^2 = \frac{5}{9} e^6 + \frac{1}{9}.$$

*Метод заміни змінної* у визначеному інтегралі при застосуванні підстановки  $x = \varphi(t)$  базується на формулі:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (2.3)$$

Нові межі інтегрування у правій частині визначаються рівностями

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ .

Розв'язання. Використовуючи (2.3), отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} &= \left| x = t^2, dx = 2t dt, \right. \\ &\left. \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1, \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2 \right| = \int_1^2 \frac{2t dt}{t(t+1)} = \\ &= 2 \int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 2 \ln|t+1| \Big|_1^2 = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

### § 8.3. Площа плоскої фігури

Площа криволінійної трапеції (рис. 21, а), тобто площа фігури, яка

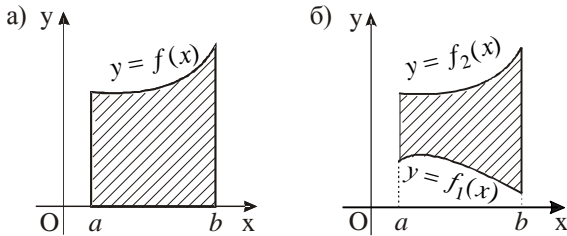


Рис.21

обмежена прямими  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ), віссю  $Ox$  і кривою  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.1)$$

У більш загальному випадку для фігури (рис. 21, б), яка обмежена прямими  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ) і кривими  $y = f_1(x), y = f_2(x)$  ( $f_1(x) \leq$

$f_2(x)$ ) справедлива формула

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (3.2)$$

*Приклад 1.* Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а)  $y = x^3, y = 0, x = 1$ ; б)  $y = 2\sqrt{x}, y = x$ .

*Розв'язання.* а) Побудуємо фігуру, площу якої потрібно знайти (рис. 22). Застосуємо формулу (3.1), причому звертаємо увагу на те,

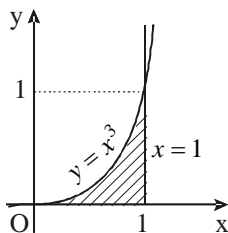


Рис. 22

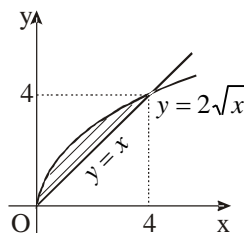


Рис. 23

що підінтегральна функція)  $f(x)$  визначається рівнянням лінії, яка обмежує криволінійну трапецію зверху:

$$S = \int_0^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

б) Спочатку будемо фігуру (рис. 23). Розв'язавши систему двох рівнянь  $y = 2\sqrt{x}$  і  $y = x$ , знаходимо координати точок перетину кривих, а саме (0;0) і (4;4). Застосуємо формулу (3.2):

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx = \left( \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Якщо верхня межа криволінійної трапеції (рис.24) задана параметричними рівняннями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , причому  $\varphi(a) = a$ ,

$\varphi(\beta) = b$ , то її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (3.3)$$

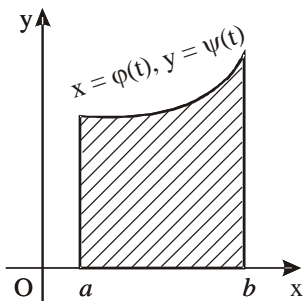


Рис. 24

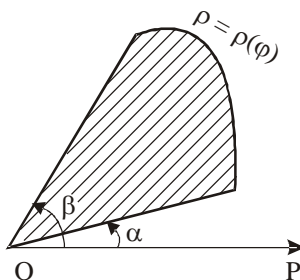


Рис. 25

#### § 8.4. Довжина дуги кривої

Довжина  $l$  дуги кривої  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.1)$$

*Приклад.* Обчислити довжину дуги параболи  $y = 0,5x^2$  від  $x = 0$  до  $x = 1$ .

*Розв'язання.* Застосуємо формулу (4.1). Знайдемо спочатку підінтегральну функцію:

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \left( (0,5x^2)' \right)^2} = \sqrt{1 + x^2}.$$

Обчислюємо довжину (знаходження первісної див. § 7.2, прикл. 2б):

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1+x^2} + \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

### § 8.5. Невласні інтеграли

Розглянемо спочатку *невласні інтеграли з нескінченими границями (невласні інтеграли першого роду)*. Нехай функція  $f(x)$  неперервна на проміжку  $[a; +\infty)$ . Невласний інтеграл від цієї функції на інтервалі  $[a; +\infty)$  визначається наступним чином:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx, \quad (5.1)$$

Якщо границя у правій частині записаної формули існує, то кажуть, що невластний інтеграл *збігається*; якщо ж границя не існує, то інтеграл *розбігається*. Аналогічно для функції  $f(x)$ , яка неперервна на інтервалі  $[-\infty; b)$ , маємо:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f(x) dx. \quad (5.2)$$

Якщо функція  $f(x)$  неперервна на  $R$ , то невластний інтеграл з нескінченими границями від цієї функції визначається так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (5.3)$$

де  $c$  – довільне число. Невласні інтеграли правої частини останньої рівності досліджуються за допомогою формул (5.2) і (5.1). Інтеграл (5.3) збігається, якщо збігається кожний доданок.

*Приклад 1.* Обчислити невластні інтеграли (або показати, що вони

розбігаються): а)  $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2+1}$ ; б)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}}$ .

*Розв'язання.* а) Застосуємо формулу (5.2):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_{\alpha}^1 = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (\arctg 1 - \arctg \alpha) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

б) Використовуючи (5.1), отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_e^{\beta} \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_e^{\beta} (\ln x)^{-\frac{1}{3}} d \ln x = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} (\ln x)^{\frac{2}{3}} \Big|_e^{\beta} = \\ &= \frac{3}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{\ln^2 \beta} - \sqrt[3]{\ln^2 e} \right) = \frac{3}{2} (\infty - 1) = \infty. \end{aligned}$$

Інтеграл розбігається.

Розглянемо тепер *невласні інтеграли від функцій, які мають точки розриву (невласні інтеграли другого роду)*. Нехай функція  $f(x)$  неперервна на проміжку  $[a; b)$ , а в точці  $x=b$  вона має розрив або невизначена. Невласний інтеграл від цієї функції на проміжку  $[a, b]$  визначається наступною рівністю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx. \quad (5.4)$$

Якщо функція  $f(x)$  неперервна на проміжку  $(a; b]$ , а в точці  $x=a$  розривна або невизначена, то:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_{\alpha}^b f(x) dx. \quad (5.5)$$

У випадку, коли функція  $f(x)$  має розрив у внутрішній точці  $x = c$  відрізка  $[a, b]$ , невласний інтеграл визначається наступним чином:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (5.6)$$

Інтеграл зліва збігається, якщо збігаються обидва доданки справа.

*Приклад 2.* Обчислити невласний інтеграл (або показати, що він розбігається)  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ .

*Розв'язання:* Так як при  $x=1$  підінтегральна функція невизначена ( $\ln 1 = 0$ ), то маємо невласний інтеграл. Застосовуємо формулу (5.5):

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \int_{\alpha}^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \int_{\alpha}^e (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d \ln x = \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} 2(\ln x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\alpha}^e = \\ &= 2 \lim_{\alpha \rightarrow 1+0} (\sqrt{\ln e} - \sqrt{\ln \alpha}) = 2(1 - 0) = 2. \end{aligned}$$

## Розділ 9. Диференціальне числення функції декількох змінних

### § 9.1. Поняття функції декількох змінних

Теорія функції однієї змінної, яка вивчалася раніше, дозволяє дослідити взаємозв'язок між двома змінними величинами, але на практиці часто виникає ситуація, коли взаємозалежними є вже не дві, а три і більше величин. Наприклад, сила струму в провіднику залежить від напруги й опору; об'єм прямокутного паралелепіпеда визначається трьома лінійними розмірами; кількість витраченого автомобілем пального залежить від пройденої відстані, швидкості, рельєфу дороги, маси вантажу і т. д. У зв'язку зі сказаним виникла необхідність введення поняття функції декількох змінних.

Нехай задано множину  $Z$ , елементами якої є дійсні числа  $z$  й множину  $D$ , елементами якої є упорядковані пари дійсних чисел  $(x, y)$ . Якщо кожній парі чисел  $(x, y)$  із множини  $D$  за певним законом ставиться у відповідність єдине число  $z$  із множини  $Z$ , то кажуть, що  $z$  є функцією двох незалежних змінних  $x$  і  $y$ . Для вказаної функціональної залежності прийнято позначення  $z = f(x, y)$  (або  $z = z(x, y)$ ). Множина  $D$  називається *областю визначення* або *областю існування* функції  $z$ , а множина  $Z$  – *областю її значень*.

Область визначення зручно зображати у вигляді сукупності точок на площині у декартовій прямокутній системі координат  $Oxy$  ( $x$  і  $y$  розглядаються як абсциса й ордината точки відповідно). Як правило, область визначення функції двох змінних є деяка обмежена або необмежена область площини.

*Приклад 1.* Знайти область визначення функції  $z = \ln(x - y)$ .

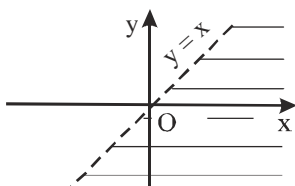


Рис. 28

*Розв'язання.* Так як логарифмічна функція визначена тільки для додатного аргументу, то необхідно, щоб  $x$  та  $y$  задовольняли нерівність  $x - y > 0$  або  $y < x$ . Це означає, що область визначення є півплощина, що розміщена справа від прямої  $y = x$ , за

виключенням точок самої прямої (рис. 28).

Геометричним зображенням функції двох змінних (її графіком), як правило, є деяка поверхня у просторі. Наприклад, графіками функцій

$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$  і  $z = 1 + 5x - y$  є півсфера й площина відповідно.

Аналогічно попередньому визначаються функції трьох і більше змінних. Якщо кожній трійці дійсних чисел  $(x, y, z)$  із заданої множини  $\Omega$  (елементами множини є упорядковані трійки чисел) ставиться у відповідність єдине дійсне число  $u$  із заданої множини  $U$ , то кажуть, що  $u$  є функцією трьох незалежних змінних  $x, y$  і  $z$ . Для цієї залежності прийнято позначення  $u = f(x, y, z)$ . Область визначення  $\Omega$  для функції трьох змінних можна задати сукупністю точок у просторі в декартовій прямокутній системі координат  $Oxyz$ .

## § 9.2. Границя та неперервність функції декількох змінних

Число  $A$  називається *границею функції*  $f(x, y)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$ , якщо для будь-якого як завгодно малого наперед заданого числа  $\varepsilon > 0$  знайдеться число  $r > 0$  таке, що для всіх точок  $M(x, y)$ , які задовольняють умові  $|MM_0| < r$ , виконується нерівність

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Для вказаної границі прийнято наступне позначення:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

*Приклад 1.* Знайти границі: а)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{2 - \sqrt{xy} + 4}$ , б)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$ .

*Розв'язання.* а) Знаходимо границю за допомогою вказаних очевидних перетворень:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{2 - \sqrt{xy} + 4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(2 + \sqrt{xy} + 4)}{(2 - \sqrt{xy} + 4)(2 + \sqrt{xy} + 4)} =$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(2 + \sqrt{xy+4})}{-xy} = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (2 + \sqrt{xy+4}) = 4.$$

б) Враховуючи, що  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (перша чудова границя), маємо:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Функція  $z = f(x, y)$  називається *неперервною* в точці  $M_0(x_0, y_0)$

, яка належить області визначення функції, якщо виконується рівність

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \quad (2.1)$$

Уведемо позначення:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Рівність (2.1) можна подати у наступному вигляді:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0. \quad (2.2)$$

Функція називається неперервною в деякій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

*Приклад 2.* Дослідити на неперервність функцію  $z = 3x^2 - y^2$ .

*Розв'язання.* Дана функція визначена на всій площині  $Oxy$ . Нехай  $M(x, y)$  – довільна точка цієї площини. Перевіримо виконання рівності (2.2) в цій точці. Можемо записати

$$\Delta z = 3(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 - (3x^2 - y^2) = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2) = 0.$$

Таким чином, дана функція неперервна на всій площині  $Oxy$ .

### § 9.3. Частинні похідні функції декількох змінних

Нехай задана функція  $z = f(x, y)$  і нехай точка  $M(x, y)$  належить області визначення цієї функції разом із деяким своїм околom. *Частинним приростом функції  $z = f(x, y)$  по змінній  $x$  в точці  $M(x, y)$*  називається приріст функції  $z$  за умови, що незалежна змінна  $x$  отримує приріст  $\Delta x$ , а незалежна змінна  $y$  зберігає стале значення, тобто

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (3.1)$$

Аналогічно визначається *частинний приріст  $z$  по змінній  $y$* :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (3.2)$$

*Частинною похідною по  $x$*  від функції  $z = f(x, y)$  називається границя відношення частинного приросту  $\Delta_x z$  функції  $z$  до приросту  $\Delta x$  аргументу  $x$  за умови, що приріст аргументу прямує до нуля. Позначається вказана частинна похідна одним із символів  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ ,  $z'_x$ ,  $f'_x(x, y)$ . Можемо записати:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \quad (3.3)$$

Аналогічно визначається *частинна похідна по  $y$*  (позначається одним із символів  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ,  $z'_y$ ,  $f'_y(x, y)$ ):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (3.4)$$

Як впливає з означення, при знаходженні частинної похідної по  $x$  потрібно вважати, що  $y$  є сталою величиною, а  $x$  – змінною. При знаходженні частинної похідної по  $y$  вважаємо, що  $x$  є сталою, а  $y$  – змінною.

Приклад 1. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  від функцій:

$$\text{а) } z = 4x^3 + 3y^2 \operatorname{tg} x; \quad \text{б) } z = 4 \ln \left( \frac{x^2}{y} + 1 \right) + y^x.$$

Розв'язання. а) Вважаючи, що  $x$  – змінна, а  $y$  – стала, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x^3)'_x + 3y^2(\operatorname{tg} x)'_x = 12x^2 + \frac{3y^2}{\cos^2 x}.$$

Вважаємо, тепер, що  $y$  – змінна, а  $x$  – стала:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x^3)'_y + 3 \operatorname{tg} x (y^2)'_y = 6y \operatorname{tg} x.$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = \left( 4 \ln \left( \frac{x^2}{y} + 1 \right) + y^x \right)'_x = 4 \frac{1}{\frac{x^2}{y} + 1} \left( \frac{x^2}{y} + 1 \right)'_x + y^x \ln y =$$

$$= \frac{4y}{x^2 + y} \cdot \frac{2x}{y} + y^x \ln y = \frac{8x}{x^2 + y} + y^x \ln y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left( 4 \ln \left( \frac{x^2}{y} + 1 \right) + y^x \right)'_y = 4 \frac{1}{\frac{x^2}{y} + 1} \cdot \left( \frac{x^2}{y} + 1 \right)'_y + xy^{x-1} =$$

$$= \frac{4y}{x^2 + y} \cdot \left( -\frac{x^2}{y^2} \right) + xy^{x-1} = -\frac{4x^2}{y(x^2 + y)} + xy^{x-1}.$$

#### § 9.4. Диференціал функції декількох змінних

Розглянемо функцію  $z = f(x, y)$ . Нехай точка  $M(x, y)$  належить області визначення цієї функції разом із деяким своїм оточенням. Якщо незалежні змінні  $x$  і  $y$  набули в точці  $M(x, y)$  приріст  $\Delta x$  і  $\Delta y$  відповідно, то повний приріст  $\Delta z$  заданої функції визначається рівністю:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (4.1)$$

Припустимо тепер, що в деякому околі точки  $M(x, y)$  існують обидві частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , а у самій точці  $M$  вказані похідні неперервні. Можна показати, що при виконанні даних умов повний приріст  $\Delta z$  визначається через частинні похідні наступним чином:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \quad (4.2)$$

де  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – нескінченно малі при  $\Delta x \rightarrow 0$  і  $\Delta y \rightarrow 0$ . Якщо приріст  $\Delta z$  представляється у вигляді (4.2), то функція  $z = f(x, y)$  називається *диференційовною* в точці  $M(x, y)$ . Сума перших двох доданків правої частини формули (4.2), яка є головною частиною приросту функції, називається *повним диференціалом* і позначається символом  $dz$ . Таким чином:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y. \quad (4.3)$$

Для незалежних змінних  $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$  (диференціал дорівнює приросту). Отже, формулу (4.3) можна переписати у вигляді:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy. \quad (4.4)$$

Перший доданок правої частини формули (4.4) (або (4.3)) називається *частинним диференціалом* по змінній  $x$ , а другий – по змінній  $y$ . Як бачимо, повний диференціал дорівнює сумі частинних диференціалів.

Аналогічно попередньому визначається повний диференціал функції трьох і більше змінних. Для функції  $u = f(x, y, z)$  можемо

записати:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (4.5)$$

*Приклад 1.* Знайти повний диференціал функцій:

$$\text{а) } z = x^2 + y^x, \quad \text{б) } z = u^2 v + w^3 e^{uv}$$

*Розв'язання.* а)  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^x \ln y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$ ;

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + y^x \ln y) dx + xy^{x-1} dy;$$

б)  $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv + vw^3 e^{uv}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v} = u^2 + uw^3 e^{uv}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial w} = 3w^2 e^{uv}$ ;

$$dz = (2uv + vw^3 e^{uv}) du + (u^2 + uw^3 e^{uv}) dv + 3w^2 e^{uv} dw.$$

Згідно формулі (4.2) для малих значень  $\Delta x$  та  $\Delta y$  має місце наближена рівність  $\Delta z \approx dz$ . Підставивши в останнє співвідношення замість  $\Delta z$  і  $dz$  відповідні вирази, одержимо формулу для наближеного обчислення:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \quad (4.6)$$

*Приклад 2.* Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функції  $z$  за вказаних значень аргументів  $x$  та  $y$ , якщо

$$z = \sqrt[3]{x^3 + y^4 + 10}; \quad x = 1,09; \quad y = 1,973.$$

*Розв'язання.* Застосуємо формулу (4.6):

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4 + 10}; \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad \Delta x = 0,09, \quad \Delta y = -0,027;$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^4 + 10)^2}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{4y^3}{3\sqrt[3]{(x^3 + y^4 + 10)^2}};$$

$$f(1,2) = \sqrt[3]{1+16+10} = 3, \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = \frac{1}{9}, \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = \frac{32}{27}.$$

Отже,  $\sqrt[3]{1,09^3 + 1,973^4 + 10} \approx 3 + \frac{1}{9} \cdot 0,09 - \frac{32}{27} \cdot 0,027 = 2,978.$

## § 9.5. Частинні похідні вищих порядків

Припустимо, що функція  $z = f(x, y)$  в деякій області  $D$  має частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Вказані похідні в загальному випадку також є функціями двох змінних і можна ставити питання про існування їхніх частинних похідних. Частинні похідні від  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  (якщо вони існують) називаються *частинними похідними другого порядку*. Вказані похідні визначаються і позначаються наступним чином:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Дві останні похідні називаються *змішаними частинними похідними другого порядку*.

*Приклад 1.* Для функції  $z = \arctg \frac{x}{y}$  знайти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

*Розв'язання.*  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2};$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Аналогічно попередньому визначаються частинні похідні вищих порядків для функції трьох і більше змінних.

*Приклад 2.* Задана функція  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ . Довести, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

*Розв'язання.*  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \left( -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial z} \left( -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} -$$

$$-(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$\begin{aligned}
 +3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} &= -\frac{3}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^5}} = \\
 &= -\frac{3}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} + \frac{3}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = 0.
 \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

Якщо змішані частинні похідні неперервні в деякій області, то в цій області вони рівні між собою, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (5.1)$$

*Приклад 3.* Знайти змішані частинні похідні функції  $z = x^4 y^2 + 4x^3 - y^2$ .

*Розв'язання.*  $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 y^2 + 12x^2$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8x^3 y$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^4 y - 2y$ ;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8x^3 y. \text{ Як бачимо, } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

## § 9.6. Екстремуми функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в заданій області

Точка  $M_0(x_0, y_0)$  називається точкою *локального максимуму* (*мінімуму*) функції  $z = f(x, y)$ , якщо знайдеться такий окіл цієї точки, що для всіх  $(x, y)$  із цього околу виконується нерівність  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  ( $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ). Точки локального мінімуму або максимуму називають також точками *локальних екстремумів*.

Наведемо *необхідні умови екстремуму*. Якщо в точці  $M_0(x_0, y_0)$  функція  $z = f(x, y)$  диференційовна і досягає локального екстремуму,

то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (6.1)$$

Точки, в яких виконуються умови (9.1), називаються *стаціонарними*. Отже, якщо функція може досягати в якійсь точці свого екстремального значення, то така точка – стаціонарна. Іншими словами, точки локального екстремуму функції слід шукати серед її стаціонарних точок.

Проте не всі стаціонарні точки є точками екстремуму. Для цього повинні виконуватись *достатні умови екстремуму*. Наведемо вказані умови. Нехай  $M_0(x_0, y_0)$  – стаціонарна точка функції  $z = f(x, y)$ . Припустимо, що в самій точці  $M_0$  і деякому її околі вказана функція має неперервні частинні похідні другого порядку. Складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \quad (6.2)$$

Тоді, якщо  $\Delta > 0$ , то в точці  $M_0$  функція має екстремум. А саме, максимум при  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  (або  $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$ ) та мінімум при  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$  (або  $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$ ). Якщо ж  $\Delta < 0$ , то в точці  $M_0$  екстремум відсутній.

*Приклад 1.* Дослідити на екстремум функцію  $z = x^3 - y^3 - 3xy$ .

*Розв'язання.* Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ -3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 + 1) = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Маємо дві стаціонарні точки  $M_1(0;0)$  і  $M_2(-1;1)$ . Обчислюємо другі частинні похідні:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -3, \quad f''_{yy}(x, y) = -6y.$$

Перевіряємо виконання достатніх умов у стаціонарних точках. В точці  $M_1(0;0)$  маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Так як  $\Delta < 0$ , то дана точка не є точкою екстремуму.

В точці  $M_2(-1;1)$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0.$$

Так як  $\Delta > 0$  і  $f''_{xx}(-1;1) = -6 < 0$ , то дана точка є точкою локального максимуму;  $f(-1;1) = 1$ .

Нагадаємо, що функція однієї змінної  $y = f_1(x)$ , яка диференційована на відрізку  $[a, b]$ , приймає найбільше та найменше значення на цьому відрізку або в стаціонарних точках (стаціонарними точками є розв'язки рівняння  $f'_1(x) = 0$ ), що належать відрізку  $[a, b]$ , або на його кінцях.

Розглянемо тепер задачу на обчислення найбільшого та найменшого значень функції  $z = f(x, y)$  в заданій області  $D$ . Нехай вказана функція диференційована в області  $D$ , а сама область  $D$  замкнена і обмежена. Тоді найбільше та найменше значення досягаються функцією або в стаціонарних точках, що належать області  $D$ , або на межі даної області. Нехай область  $D$  обмежена лініями, рівняння яких представлені у формі  $y = \varphi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) або  $x = \psi(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ). Наведемо далі схему розв'язування поставленої

задачі.

1. Знаходимо всі стаціонарні точки функції, що лежать в області  $D$ , і визначаємо її значення в цих точках.

2. Досліджуємо функцію на межі області. На лінії  $y = \varphi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) функція  $z$  приймає вигляд  $z = f(x, \varphi(x)) = f_1(x)$ . Розв'язавши рівняння  $f_1'(x) = 0$ , знаходимо стаціонарні точки функції однієї змінної  $f_1(x)$ . Обчислюємо значення вказаної функції на кінцях відрізка  $[a, b]$  і в стаціонарних точках, що йому належать. На лінії  $x = \psi(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ) отримаємо функцію однієї змінної  $z = f(\psi(y), y) = f_2(y)$ . Досліджуємо її на відріжку  $[c, d]$  аналогічно попередньому. Виконуємо вказані дії на всій межі області  $D$ .

3. Вибираємо з одержаних значень функції найбільше та найменше.

*Приклад 2.* Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = x^3 - y^3 - 3xy$  в області  $D$ , що обмежена лініями  $y = x + 3$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

*Розв'язання.* Зобразимо область  $D$  у системі координат  $Oxy$  (рис.29). В попередньому прикладі були визначені стаціонарні точки

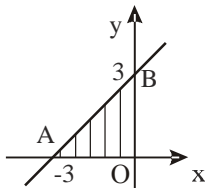


Рис. 29

даної функції, а саме  $M_1(-1;1)$  і  $M_2(0;0)$ . Обидві точки належать області  $D$ . Обчислюємо значення функції в цих точках:  $z_1 = f(-1;1) = 1$ ,  $z_2 = f(0,0) = 0$ . Межа області  $D$  складається із трьох відрізків  $AO$ ,  $OB$  і  $AB$  (див. рис.29).

Досліджуємо дану функцію на кожному з них. На відріжку  $AO$  ( $y = 0$ ,

$-3 \leq x \leq 0$ ) функція  $z$  приймає вигляд  $z = f_1(x) = x^3$ . Досліджуємо, далі, отриману функцію однієї змінної на відрізьку  $[-3;0]$ .

$$f_1'(x) = 3x^2, \quad 3x^2 = 0, \quad x = 0.$$

Так як значення функції  $z$  в точці  $(0;0)$  вже знайдено, то обчислюємо її значення лише в точці  $A(-3;0)$ :  $z_3 = f_1(-3) = f(-3;0) = -27$ .

На відрізьку  $OB$ :

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 3; \quad z = f_2(y) = -y^3; \quad f_2'(y) = -3y^2, \quad -3y^2 = 0, \quad y = 0;$$

$$z_4 = f_2(3) = f(0;3) = -27.$$

На відрізьку  $AB$ :

$$y = x + 3, \quad -3 \leq x \leq 0; \quad z = f_3(x) = x^3 - (x + 3)^3 - 3x(x + 3) = \\ = -12x^2 - 36x - 27, \quad f_3'(x) = -24x - 36, \quad -24x - 36 = 0, \quad x = -1,5;$$

$$z_5 = f_3(-1,5) = f(-1,5;1,5) = 0.$$

Отже,  $z_{\text{найб}} = 1$  при  $x = -1, y = 1$ ;  $z_{\text{найм}} = -27$  при  $x = -3, y = 0$  й при  $x = 0, y = 3$ .

## § 9.7. Метод найменших квадратів

В багатьох експериментальних дослідженнях для кожного значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  змінної величини  $x$  визначаються відповідні значення  $y_1, y_2, \dots, y_n$  змінної величини  $y$ . Іншими словами, експериментально визначається функція  $y$  від аргументу  $x$ , причому задається вказана функція табличним способом. Проте, більш зручною для подальшого аналізу є аналітична форма функціональної залежності, тобто виникає потреба представлення знайденої функції у вигляді



У випадку лінійної залежності  $y = ax + b$  маємо:

$$\varphi(x_i, a, b) = ax_i + b, \quad \frac{\partial \varphi(x_i, a, b)}{\partial a} = x_i, \quad \frac{\partial \varphi(x_i, a, b)}{\partial b} = 1.$$

Система (7.2) набуде вигляду

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (7.3)$$

*Приклад 1.* В результаті експериментальних досліджень між величинами  $x$  та  $y$  була встановлена залежність, яка наведена в таблиці.

x	1	3	5	7	10
y	6	5	3	2	1

За допомогою методу найменших квадратів визначити аналітичну залежність  $y = ax + b$ . Зобразити експериментальні точки та побудувати знайдену пряму в декартовій прямокутній системі координат  $Oxy$ .

*Розв'язання.* Визначаємо числові коефіцієнти системи (7.3):

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 10^2 = 184, \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 1 + 3 + 5 + 7 + 10 = 26,$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 60, \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 6 + 5 + 3 + 2 + 1 = 17.$$

Складаємо систему (7.3) і розв'язуємо її за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 184a + 26b = 60, \\ 26a + 5b = 17, \end{cases} \quad \begin{cases} 92a + 13b = 30, \\ 26a + 5b = 17; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 92 & 13 \\ 26 & 5 \end{vmatrix} = 122, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 13 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} = -71, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 92 & 30 \\ 26 & 17 \end{vmatrix} = 784;$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{71}{122} \approx -0,58; \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{784}{122} \approx 6,43.$$

Отже,  $y = -0,58x + 6,43$ . Будуємо знайдену пряму та відмічаємо задані точки (рис. 30).

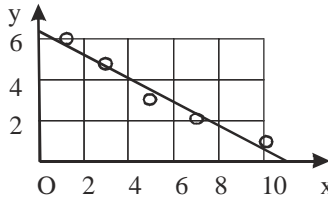


Рис. 30

## Розділ 10. Диференціальні рівняння

### § 10.1. Поняття диференціального рівняння. Загальні означення

*Звичайним диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке пов'язує між собою незалежну змінну  $x$ , шукану функцію  $y$  та її похідні різних порядків. Якщо шукана функція залежить від декількох змінних, то диференціальне рівняння містить вже не звичайні, а частинні похідні і називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*. Далі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння (слово „звичайні” у їхній назві будемо опускати).

*Порядком* диференціального рівняння називається порядок його старшої похідної. Таким чином, у загальному випадку диференціальне рівняння  $n$ -го порядку можна представити у вигляді:

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Відмітимо, що у окремих випадках деякі з величин  $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$  можуть явно не входити у диференціальне рівняння  $n$ -го порядку. *Розв'язком* диференціального рівняння називається будь-яка функція  $y = \varphi(x)$ , яка після підстановки у дане рівняння перетворює його у тотожність. Очевидно, що *розв'язання* (або *інтегрування*) диференціального рівняння зводиться до знаходження його розв'язку.

*Приклад 1.* Показати, що функція  $y = x^3 - \sin 2x + 3x$  є розв'язком диференціального рівняння  $y'' + y - x^3 - 9x - 3\sin 2x = 0$ .

*Розв'язання.* Знаходимо другу похідну  $y''$  і підставляємо відповідні вирази у задане рівняння:

$$y' = 3x^2 - 2\cos 2x + 3, \quad y'' = 6x + 4\sin 2x;$$

$$6x + 4\sin 2x + x^3 - \sin 2x + 3x - x^3 - 9x - 3\sin 2x = 0, \quad 0 = 0.$$

*Початковими умовами* диференціального рівняння (1.1) називаються наступні умови (задаються значення функції та її похідних при певному значенні незалежної змінної):

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.2)$$

де  $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – задані числа.

*Загальним розв'язком* диференціального рівняння (1.1) називається функція  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , яка залежить від  $n$  довільних сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  і яка задовольняє наступним двом умовам: а) вона є розв'язком при будь-яких значеннях указаних довільних сталих; б) при будь-яких початкових умовах (1.2) довільні сталі  $C_1, C_2, \dots, C_n$  можуть бути визначені таким чином, що вказані початкові умови будуть

задовольнятися.

Якщо у загальному розв'язку всім довільним сталим надати певні числових значень, то отримаємо так званий *частинний розв'язок* диференціального рівняння. *Розв'язати задачу Коші* означає, що необхідно знайти частинний розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє початковим умовам (1.2). Якщо загальний розв'язок знайдено неявно, тобто у вигляді  $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , то кажуть, що знайдено *загальний інтеграл* диференціального рівняння (1.1). *Частинний інтеграл* отримується із загального за допомогою надання довільним сталим певних числових значень.

## § 10.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Зробимо спочатку одне зауваження. У теорії диференціальних рівнянь похідна  $y'$  часто позначається символом  $\frac{dy}{dx}$ . Вказане позначення розглядається як відношення двох диференціалів, які можуть відокремлюватися один від одного.

У загальному випадку диференціальне рівняння першого порядку та його початкова умова мають відповідно вигляд:

$$F(x, y, y') = 0, \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.1)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція  $y = \varphi(x, C)$ , яка залежить від однієї довільної сталої  $C$ . Розглянемо далі деякі основні типи диференціальних рівнянь першого порядку.

Диференціальним *рівнянням із відокремленими змінними* називається наступне рівняння:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \quad (2.2)$$

Вказане рівняння розв'язується за допомогою безпосереднього інтегрування.

*Приклад 1.* Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } (x^2 + e^{3x})dx + (2y + \cos 5y)dy = 0; \quad \text{б) } \sqrt{y}y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

$$\text{Розв'язання. а) } \int (x^2 + e^{3x})dx + \int (2y + \cos 5y)dy = 0,$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}e^{3x} + y^2 + \frac{1}{5}\sin 5y + C = 0.$$

б) Замінюємо  $y'$  на  $\frac{dy}{dx}$ , домножаємо отримане рівняння на  $dx$  й

$$\text{інтегруємо: } \sqrt{y} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \sqrt{y}dy + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,$$

$$\int \sqrt{y}dy + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \arcsin x + C = 0.$$

Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \quad (2.3)$$

Як бачимо, у лівій частині цього рівняння кожен із множників залежить тільки від однієї змінної. Розділивши рівняння на добуток  $M_2(y)N_1(x)$ , отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = 0.$$

*Приклад 2.* Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } 2x(1+y^2)dx + (3+x^2)dy = 0; \quad \text{б) } (y-xy^2)y' = 5x+xy^2.$$

*Розв'язання.* а) Ділимо рівняння на добуток  $(1+y^2)(3+x^2)$  та

інтегруємо:  $\frac{2xdx}{3+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0, \quad \int \frac{d(3+x^2)}{(3+x^2)} + \int \frac{dy}{1+y^2} = 0,$

$$\ln |3+x^2| + \operatorname{arctg} y + C = 0.$$

б) Робимо спочатку прості, очевидні перетворення:

$$y(1-x^2) \frac{dy}{dx} = x(5+y^2), \quad y(1-x^2)dy = x(5+y^2)dx.$$

Ділимо останнє рівняння на добуток  $(1-x^2)(5+y^2)$  і інтегруємо:

$$\int \frac{ydy}{5+y^2} = \int \frac{xdx}{1-x^2}, \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(5+y^2)}{5+y^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2},$$

$$\frac{1}{2} \ln |5+y^2| + \frac{1}{2} \ln |1-x^2| = \frac{1}{2} \ln |C|, \quad \ln |(5+y^2)(1-x^2)| = \ln |C|,$$

$$(5+y^2)(1-x^2) = C.$$

Зауважимо, що з метою спрощення кінцевого результату довільна стала представлена за допомогою логарифма (таке допускається).

Рівняння  $y' = f(x, y)$  будемо називати *однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку, якщо для будь-якого відмінного від нуля  $\lambda$  виконується рівність  $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ . Дане рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки  $y = ux$ , де  $u$  – нова шукана функція від  $x$ .

*Приклад 3.* Розв'язати рівняння  $y' = \frac{y}{x-y}$ .

*Розв'язання.* Покажемо, що задане рівняння є однорідним.

$$f(x, y) = \frac{y}{x-y}; \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{\lambda y}{\lambda(x-y)} = \frac{y}{x-y} = f(x, y).$$

Зробимо заміну  $y = ux, y' = u'x + u$ :

$$u'x + u = \frac{ux}{x-ux}, \quad u'x = \frac{u}{1-u} - u, \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1-u}, \quad \int \frac{1-u}{u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \left(u^{-2} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| + C,$$

$$\frac{x}{y} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| + \ln|x| + C = 0, \quad x + y \ln|y| + Cy = 0.$$

*Лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке лінійне відносно шуканої функції  $y$  та її похідної  $y'$  (величини  $y$  і  $y'$  входять тільки у першому степені і між собою не перемножуються). Указане рівняння можна представити у формі

$$y' + P(x)y = Q(x). \quad (2.4)$$

Розв'язок рівняння (2.4) будемо шукати у вигляді  $y = uv$ , де  $u, v$  – нові шукані функції від  $x$ . Очевидно, що  $y' = u'v + uv'$ . Підставимо  $y$  і  $y'$  в рівняння (2.4):

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x). \quad (2.5)$$

Прирівнюємо до нуля вираз у дужках у формулі (2.5) і знаходимо функцію  $u$ :

$$u' + P(x)u = 0, \quad \frac{du}{dx} = -P(x)u, \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx,$$

$$\ln|u| = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}.$$

Зауважимо, що при інтегруванні довільна стала береться рівною нулю.

Підставимо функцію  $u$  в рівняння (2.5) і знайдемо функцію  $v$ :

$$e^{-\int P(x)dx} v' = Q(x), \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx, \quad v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Враховуючи, що  $y = uv$ , отримаємо

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right). \quad (2.6)$$

Формулу (2.6) можна використовувати для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь.

*Приклад 4.* Розв'язати рівняння  $y' - 2xy = e^{x^2} \cos x$ .

*Розв'язання. Перший спосіб.* Здійснюємо підстановку  $y = uv$ ,  
 $y' = u'v + uv'$  і розв'язуємо рівняння за наведеною вище схемою:

$$u'v + uv' - 2xuv = e^{x^2} \cos x, \quad v(u' - 2xu) + uv' = e^{x^2} \cos x;$$

$$u' - 2xu = 0, \quad \int \frac{du}{u} = 2 \int x dx, \quad \ln |u| = x^2, \quad u = e^{x^2};$$

$$e^{x^2} v' = e^{x^2} \cos x, \quad v' = \cos x, \quad \int dv = \int \cos x dx, \quad v = \sin x + C;$$

$$y = e^{x^2} (\sin x + C).$$

*Другий спосіб.* Розв'яжемо рівняння за допомогою формули (2.6).

У нашому випадку  $P(x) = -2x$ ,  $Q(x) = e^{x^2} \cos x$ . Знайдемо потрібні інтеграли:

$$\int P(x)dx = \int (-2x)dx = -x^2;$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int e^{x^2} \cdot \cos x \cdot e^{-x^2} dx = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Підставимо знайдені інтеграли у формулу (2.6):

$$y = e^{x^2} (\sin x + C).$$

*Рівнянням Бернуллі* називається рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m; \quad m \neq 0, \quad m \neq 1. \quad (2.7)$$

Аналогічно попередньому, воно розв'язується за допомогою підстановки  $y = uv$ .

Розглянемо рівняння виду

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad (2.8)$$

де  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  – числові коефіцієнти. Очевидно, що якщо  $c_1 = c_2 = 0$ , то рівняння (2.8) є однорідним. У зв'язку зі сказаним будемо вважати, що хоча б один із коефіцієнтів  $c_1, c_2$  відмінний від нуля. Розглянемо два можливі випадки вказаного рівняння.

1) Коефіцієнти при  $x$  і  $y$  пропорційні, тобто  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ . У цьому

випадку рівняння (2.8) зводиться до рівняння з *відокремлюваними змінними* за допомогою підстановки  $z = a_1x + b_1y$  (або  $z = a_2x + b_2y$ ), де  $z$  – нова функція. Продиференціювавши останню рівність, знайдемо  $y'$ :  $z' = a_1 + b_1y'$ ,  $y' = (z' - a_1)/b_1$ .

2) Коефіцієнти при  $x$  і  $y$  не пропорційні, тобто виконується умова  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ . У цьому випадку рівняння (2.8) зводиться до *однорідного* за допомогою підстановки  $x = x_1 + h$ ,  $y = y_1 + k$ , де  $x_1$  – нова незалежна змінна,  $y_1$  – нова функція;  $h, k$  – числа, які визначаються розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Відмітимо, що при вказаній підстановці  $dx = dx_1$ ,  $dy = dy_1$ .

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\text{а) } y' = \frac{x-y+3}{3x-3y+5}; \quad \text{б) } (y-1)dx = (x-y+3)dy.$$

Розв'язання. а) Так як коефіцієнти при  $x$  і  $y$  пропорційні ( $\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3}$ ), то розв'язок знайдемо за допомогою підстановки  $z = x - y$ , ( $y = x - z$ ,  $y' = 1 - z'$ ):

$$1 - z' = \frac{z-3}{3z+5}, \quad \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{z-3}{3z+5}, \quad \frac{3z+5}{z+4} dz = 2dx,$$

$$\int \left(3 - \frac{7}{z+4}\right) dz = \int 2dx, \quad 3z - 7 \ln|z+4| = 2x + C,$$

$$3(x-y) - 7 \ln|x-y+4| = 2x + C.$$

б) Перепишемо задане рівняння у вигляді  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x-y+3}$ .

Коефіцієнти при  $x$  і  $y$  не пропорційні ( $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$ ). Складемо систему (2.9) і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} k-1=0, \\ h-k+3=0; \end{cases} \quad \begin{cases} k=1, \\ h=-2. \end{cases}$$

Зробимо заміну  $x = x_1 - 2$ ,  $y = y_1 + 1$ :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1+1-1}{x_1-2-(y_1+1)+3}, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1}{x_1-y_1}.$$

Здобує однорідне рівняння інтегрується за допомогою підстановки  $y_1 = ux_1$  (див. приклад 3).

§ 10.3. Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають пониження порядку

Розглянемо рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x). \quad (3.1)$$

Враховуючи, що похідна  $n$ -го порядку дорівнює похідній від похідної  $n-1$ -го порядку, можемо записати

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x), \quad \int dy^{(n-1)} = \int f(x)dx, \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Отримане диференціальне рівняння  $n-1$ -го порядку відноситься до типу рівняння (3.1) і до нього можна застосувати вказані вище дії. Поступово знижуючи порядок рівняння, визначаємо шукану функцію  $y$ .

*Приклад 1.* Розв'язати рівняння  $y''' = 6x + \cos 2x$ .

*Розв'язання.* Поступово знижуємо порядок заданого рівняння і визначаємо функцію  $y$ :

$$y'' = \int (6x + \cos 2x)dx = 3x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C_1;$$

$$y' = \int (3x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C_1)dx = x^3 - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2;$$

$$y = \int (x^3 - \frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно шукану функцію  $y$ , тобто рівняння виду

$$F(x, y', y'') = 0. \quad (3.2)$$

Указане рівняння зводиться до рівняння першого порядку за допомогою підстановки  $y' = p, (y'' = p')$ , де  $p$  – функція від  $x$ . Після здійснення вказаної заміни отримаємо рівняння  $F(x, p, p') = 0$ .

Розв'язавши його, визначаємо функцію  $p = \varphi_1(x, C_1)$ . Враховуючи, що  $p = y'$ , маємо  $y' = \varphi_1(x, C_1)$ . Розв'язуємо останнє рівняння і знаходимо функцію  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ .

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - \frac{1}{x}y' = x^2 + x; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

*Розв'язання.* Так як задане рівняння не містить явно  $y$ , то робимо підстановку  $y' = p$ , ( $y'' = p'$ ), де  $p$  – функція від  $x$ . Отримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку  $p' - \frac{1}{x}p = x^2 + x$ . Його

розв'язок шукаємо у вигляді  $p = uv$ , ( $p' = u'v + uv'$ ):

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2 + x, \quad v(u' - \frac{1}{x}u) + uv' = x^2 + x;$$

$$u' - \frac{1}{x}u = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}, \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \quad u = x;$$

$$xv' = x^2 + x, \quad v' = x + 1, \quad v = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1;$$

$$p = x(\frac{1}{2}x^2 + x + C_1), \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x.$$

Використовуючи початкові умови, визначаємо значення довільної сталої  $C_1$  і інтегруємо отримане диференціальне рівняння:

$$1 = \frac{1}{2} + 1 + C_1, \quad C_1 = -\frac{1}{2}; \quad y' = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x;$$

$$y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + C_2.$$

Визначаємо значення довільної сталої і записуємо кінцеву відповідь:

$$0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + C_2, \quad C_2 = -\frac{5}{24}, \quad y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{24}.$$

Розглянемо далі диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежну змінну  $x$ , тобто рівняння виду

$$F(y, y', y'') = 0. \quad (3.3)$$

Зробимо підстановку  $y' = p$ , де  $p$  – функція від  $y$ . Друга похідна у даному випадку визначається рівністю  $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$  або  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ .

Отже, рівняння (3.3) зводиться до рівняння першого порядку  $F(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$ . Відмітимо, що у цьому рівнянні величина  $y$  виступає як незалежна змінна, а величина  $p$  – як шукана функція. Розв'язавши вказане рівняння, знайдемо функцію  $p = \varphi_1(y, C_1)$  або  $y' = \varphi_1(y, C_1)$ . Інтегруємо отримане рівняння першого порядку і визначаємо функцію  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ .

*Приклад 3.* Розв'язати рівняння  $y'' = (y')^2 \operatorname{tg} y$ .

*Розв'язання.* Маємо диференціальне рівняння типу (3.3). Робимо заміну  $y' = p$  ( $p$  – функція від  $y$ ;  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ ) і інтегруємо:

$$p \frac{dp}{dy} = p^2 \operatorname{tg} y, \quad p \left( \frac{dp}{dy} - p \operatorname{tg} y \right) = 0;$$

$$1) p = 0, \quad y' = 0, \quad y = C, \quad C \in \mathbb{R};$$

$$2) \frac{dp}{dy} - p \operatorname{tg} y = 0, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \operatorname{tg} y \, dy, \quad \ln |p| = -\ln |\cos y| +$$

$$\ln |C_1|;$$

$$\ln |p| = \ln \left| \frac{C_1}{\cos y} \right|, \quad p = \frac{C_1}{\cos y}, \quad y' = \frac{C_1}{\cos y};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos y}, \quad \int \cos y \, dy = \int C_1 \, dx, \quad \sin y = C_1 x + C_2.$$

## § 10.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

### Основні поняття

Диференціальне рівняння другого порядку називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно шуканої функції  $y$  та її похідних  $y'$  і  $y''$ ,

тобто це рівняння виду

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (4.1)$$

де  $a_1, a_2$  – функції від  $x$  або сталі числа,  $f(x)$  – задана функція. Якщо права частина рівняння (4.1) тотожно дорівнює нулю, то отримаємо

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \quad (4.2)$$

Рівняння (4.1) називається *неоднорідним лінійним рівнянням другого порядку*, а рівняння (4.2) – *однорідним*.

Нехай  $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$  – частинні розв'язки однорідного рівняння (4.2). Якщо можна підібрати сталі коефіцієнти  $\alpha$  і  $\beta$ , які не рівні одночасно нулю і які дозволяють утворити тотожну рівність  $\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0$ , то розв'язки  $y_1$  і  $y_2$  називаються *лінійно залежними*. Легко показати, що відношення таких розв'язків дорівнює сталому числу. Якщо ж коефіцієнти  $\alpha$  і  $\beta$  підібрати вказаним вище чином неможливо, то розв'язки  $y_1$  і  $y_2$  називаються *лінійно незалежними*. Сформульовані означення лінійної залежності і лінійної незалежності справедливі і для довільних функцій  $y_1$  і  $y_2$ .

Припустимо, тепер, що  $y_1 = y_1(x)$  і  $y_2 = y_2(x)$  є частинними лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння (4.2). У цьому випадку *загальний розв'язок* вказаного рівняння представляється у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (4.3)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі. Отже, знаходження загального розв'язку рівняння (4.2) можна звести до знаходження двох лінійно незалежних частинних розв'язків цього рівняння.

*Приклад 1.* Показати, що функції  $y_1 = e^x$  і  $y_2 = e^{2x}$  є частинними

лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . Записати загальний розв'язок указанного рівняння.

*Розв'язання.* Підставляємо функції та відповідні похідні в задане рівняння:

$$y_1' = e^x, y_1'' = e^x; e^x - 3e^x + 2e^x = 0, 0 = 0;$$

$$y_2' = 2e^{2x}, y_2'' = 4e^{2x}; 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0, 0 = 0.$$

Для з'ясування питання про лінійну незалежність розглянемо

відношення заданих розв'язків:  $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$ . Так як відношення не

дорівнює сталому числу, то  $y_1$  і  $y_2$  лінійно незалежні. За формулою (4.3) загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд  $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ .

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) можна представити в наступній формі

$$y = \bar{y} + y^*, \quad (4.4)$$

де  $y^*$  – будь-який *частинний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння, а  $\bar{y}$  – *загальний розв'язок* відповідного однорідного рівняння  $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ .

## § 10.5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, а саме

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (5.1)$$

де  $p, q$  – сталі числа. Особливістю даного рівняння є те, що його розв'язок може бути знайдений без застосування операцій інтегрування.

Частинні розв'язки рівняння (5.1) шукаємо у вигляді  $y = e^{kx}$ , де  $k$  – числовий коефіцієнт. Підставивши вказаний розв'язок у задане рівняння і враховуючи, що  $y' = ke^{kx}$ ,  $y'' = k^2e^{kx}$ ,  $e^{kx} \neq 0$ , отримаємо

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (5.2)$$

Квадратне рівняння (5.2) відносно невідомої  $k$  називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (5.1). Зауважимо, що формально рівняння (5.2) отримується з рівняння (5.1) за допомогою заміни  $y'', y', y$  на  $k^2, k, 1$  відповідно. Якщо  $k$  є розв'язком рівняння (5.2), то функція  $y = e^{kx}$  є розв'язком рівняння (5.1).

Нагадаємо, що корені квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  визначаються за формулами

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac. \quad (5.3)$$

Для рівняння (5.2) маємо

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = p^2 - 4q. \quad (5.4)$$

Розглянемо усі можливі випадки стосовно розв'язків характеристичного рівняння.

1. Характеристичне рівняння має дійсні й різні корені  $k_1$  і  $k_2$  (дискримінант додатній). Функції  $y_1 = e^{k_1x}$  і  $y_2 = e^{k_2x}$  є частинними

розв'язками диференціального рівняння (5.1). Так як

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}, (k_1 \neq k_2),$$

то  $y_1$  і  $y_2$  лінійно незалежні. Отже, на основі формули (4.3) попереднього параграфу загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (5.5)$$

де  $C_1, C_2$  – довільні сталі.

*Приклад 1.* Розв'язати рівняння  $y'' + 3y' - 10y = 0$ .

*Розв'язання.* Маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$k^2 + 3k - 10 = 0; D = 49; k_1 = -5, k_2 = 2.$$

Так як корені дійсні й різні, то загальний розв'язок визначається за допомогою формули (5.5), а саме  $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$ .

2. Характеристичне рівняння має дійсні і рівні корені  $k_1 = k_2 = k$  (дискримінант дорівнює нулю). У цьому випадку частинними лінійно незалежними розв'язками рівняння (5.1) будуть функції  $y_1 = e^{kx}$ ,  $y_2 = xe^{kx}$  і для знаходження загального розв'язку отримаємо наступну формулу

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x). \quad (5.6)$$

*Приклад 2.* Розв'язати рівняння  $y'' - 8y' + 16y = 0$ .

*Розв'язання.* Складаємо й розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 8k + 16 = 0; D = 0; k_1 = k_2 = 4.$$

Оскільки корені дійсні й рівні, то застосувавши формулу (5.6),

отримаємо  $y = e^{4x}(C_1 + C_2x)$ .

3. Коренями характеристичного рівняння є комплексні числа  $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  (дискримінант від'ємний). Можна показати, що для такого диференціального рівняння частинними лінійно незалежними розв'язками будуть функції  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  і  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ . Отже, загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (5.7)$$

*Приклад 3.* Розв'язати рівняння  $y'' + 6y' + 25y = 0$ .

*Розв'язання.* Розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 25 = 0; D = -64, \sqrt{D} = 8i; k_{1,2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i.$$

Так як корені комплексні, то на основі формули (5.7) маємо

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

## § 10.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, а саме

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (6.1)$$

де  $p, q$  – числові коефіцієнти;  $f(x)$  – функція від  $x$  ( $f(x)$  не дорівнює тотожно нулю). Загальний розв'язок рівняння (6.1) будемо шукати у вигляді

$$y = \bar{y} + y^*, \quad (6.2)$$

де  $y^*$  – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння;  $\bar{y}$  – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (6.3)$$

Спочатку за допомогою характеристичного рівняння інтегруємо диференціальне рівняння (6.3) і визначаємо складову  $\bar{y}$  (див. попередній параграф), а потім знаходимо складову  $y^*$ . Загальна форма останньої залежить від типу функції  $f(x)$  та від коренів характеристичного рівняння. Наведемо, далі, деякі частинні випадки рівняння (6.1) у залежності від правої частини  $f(x)$  і вкажемо методи визначення відповідних частинних розв'язків  $y^*$ .

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x), \quad (6.4)$$

де  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -го степеня відносно  $x$ . Частинний розв'язок  $y^*$  рівняння (6.4) шукаємо у вигляді

$$y^* = x^r Q_n(x), \quad (6.5)$$

де  $r$  – кратність кореня  $k=0$  у відповідному характеристичному рівнянні;  $Q_n(x)$  – повний многочлен  $n$ -го степеня, тобто

$$Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n. \quad (6.6)$$

З метою визначення невідомих числових коефіцієнтів  $A_0, A_1, \dots, A_n$  підставляємо розв'язок (6.5) у рівняння (6.1). Після зведення подібних здобудемо рівність двох многочленів. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $x$  (два многочлена рівні, якщо рівні коефіцієнти при однакових степенях  $x$ ) отримуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих  $A_0, A_1, \dots, A_n$ . Розв'язуємо систему і записуємо частинний розв'язок  $y^*$ .

*Приклад 1.* Знайти загальний розв'язок диференціального

рівняння  $y'' - 2y' = 6x^2 + 2x$ .

*Розв'язання.* Маємо рівняння типу (6.4) і розв'язок шукаємо у формі (6.2). Розглядаємо спочатку відповідне однорідне рівняння і визначаємо складову  $\bar{y}$ :

$$y'' - 2y' = 0; k^2 - 2k = 0, k(k - 2) = 0; k_1 = 0, k_2 = 2;$$

$$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Частинний розв'язок  $y^*$  шукаємо за формулою (6.5). У нашому випадку  $Q_n(x)$  – многочлен другого степеня (права частина заданого рівняння є многочленом другого степеня) і  $r=1$  (число  $k=0$  є однократним коренем характеристичного рівняння), отже  $y^* = xQ_2(x) = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$ . Знаходимо похідні  $(y^*)', (y^*)''$  і підставляємо їх в задане рівняння:

$$(y^*)' = 3A_0x^2 + 2A_1x + A_2, (y^*)'' = 6A_0x + 2A_1;$$

$$6A_0x + 2A_1 - 2(3A_0x^2 + 2A_1x + A_2) = 6x^2 + 2x;$$

$$-6A_0x^2 + (6A_0 - 4A_1)x + 2A_1 - 2A_2 = 6x^2 + 2x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$  і розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 & -6A_0 = 6, \\ x & 6A_0 + 4A_1 = 2, \\ x^0 & 2A_1 - 2A_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} A_0 = -1, \\ A_1 = 2, \\ A_2 = 2. \end{cases}$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = x(-x^2 + 2x + 2); y = C_1 + C_2 e^{2x} + x(-x^2 + 2x + 2).$$

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}, \quad (6.7)$$

де  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -го степеня відносно  $x$ ;  $\alpha$  – числовий коефіцієнт.

Частинний розв'язок  $y^*$  для рівняння (6.7) визначається формулою

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}, \quad (6.8)$$

де  $Q_n(x)$  – многочлен (6.6), коефіцієнти якого необхідно визначити;  $r$  – кратність кореня  $k = \alpha$  в характеристичному рівнянні.

*Приклад 2.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$ .

*Розв'язання.* Маємо рівняння типу (6.7), причому,  $\alpha = 3$ ,  $P_n(x) = 2$  (многочлен нульового степеня). Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0; k^2 + k - 6 = 0; k_1 = -3, k_2 = 2;$$

$$\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Частинний розв'язок  $y^*$  визначаємо за допомогою формули (6.8). Для даного рівняння  $r = 0$  (число  $\alpha = 3$  не є розв'язком характеристичного рівняння) і  $Q_n(x) = Q_0(x)$  (многочлен нульового степеня). Отже, маємо

$$y^* = x^0 Q_0(x)e^{3x} = Ae^{3x}.$$

Підставляємо функцію  $y^*$  в задане рівняння і визначаємо невідомий коефіцієнт  $A$ :

$$(y^*)' = 3Ae^{3x}, (y^*)'' = 9Ae^{3x}; 9Ae^{3x} + 3Ae^{3x} - 6Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

$$6Ae^{3x} = 2e^{3x}, 6A = 2, A = \frac{1}{3}.$$

Записуємо частинний та загальний розв'язки заданого рівняння:

$$y^* = \frac{1}{3} e^{3x}; y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} e^{3x} .$$

## Розділ 11. Теорія ймовірностей

### § 11.1. Основні поняття теорії ймовірностей. Види ймовірностей

*Теорія ймовірностей* - спеціальний розділ курсу вищої математики, що вивчає математичні закономірності масових однорідних випадкових подій.

Методи теорії ймовірностей широко використовуються в економіці, в теорії надійності, теорії інформації, теорії масового обслуговування, теорії прийняття рішень, в фізиці, астрономії та інших дисциплінах. Теорія ймовірностей лежить в основі *математичної статистики*, яка, в свою чергу, використовується при плануванні та організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції та ін.

*Математична статистика* – наука про математичні методи систематизації та використання статистичних даних для здійснення науково обґрунтованих прогнозів та практичних рекомендацій.

Взагалі кажучи, всі спостережні події (явища) оточуючого нас світу можна поділити на наступні три види: *достовірні*, *неможливі* та *випадкові*.

*Достовірною* називають подію, яка обов'язково відбудеться, якщо буде виконана певна сукупність умов. *Приклад* – лід плавиться при температурі вище нуля.

*Неможливою* називають подію, яка точно не відбудеться при виконанні певної сукупності умов. *Приклад* – лід не може існувати при

100 градусах Цельсія, Земля не може без впливу зовні припинити своє обертання.

*Випадковою* називають подію, яка при виконанні сукупності умов може відбутися або не відбутися. *Приклад* – випадання певного числа очок при киданні грального кубика, попадання снаряду в ціль, вихід з ладу технічного пристрою, отримання певного прибутку фірмою і т.д.

*Експериментом* називається реалізація наміченої дії, що приводить до деякого результату. Експерименти поділяються на детерміновані та стохастичні (випадкові).

Експеримент називається *детермінованим*, якщо, виходячи з умов, що описують експеримент, його результат передбачуваний.

*Приклади:* 1) камінь, підкинутий вгору, обов'язково впаде вниз; 2) підвищення життєвого рівня викликає зростання споживання товарів; 3) поломка системного блоку виводить з ладу комп'ютер.

Експеримент вважається *стохастичним (випадковим)*, якщо він може закінчитися будь-яким з деякої сукупності відомих результатів, але до здійснення експерименту не можна сказати, яким саме.

Будемо розглядати *подію* як результат експерименту.

*Приклади:* 1) стрілець стріляє по мішені, яка поділена на декілька частин. Постріл – це експеримент, попадання в певну частину мішені – подія. 2) діставання кулі з урни – експеримент, поява кулі певного кольору – подія. 3) здача екзамену – експеримент, отримання оцінки – подія.

Нехай в результаті експерименту настає одна і тільки одна з подій  $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ .

Події  $\omega_i$  називають *елементарними подіями*.

*Простором елементарних подій*  $\Omega$  називають множину всіх елементарних подій, які можуть з'явитися в експерименті.

Простір елементарних подій зазвичай вважається заданим, якщо вказані всі його елементи.

*Приклад.* Для експерименту з підкиданням грального кубика простір елементарних подій утворює сукупність елементарних подій  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; при підкиданні монети  $\{Ц, Г\}$ .

З елементарних подій можна скласти більш складну подію.

Дві події називаються *сумісними* в даному експерименті, якщо поява одного з них не виключає появу іншої.

*Приклади:* 1) попадання в ціль двома різними стрільцями, 2) випадання однакового числа очок на двох кубиках.

Дві події називаються *несумісними* в даному експерименті, якщо вони не можуть відбутися разом при одному і тому ж експерименті.

Деякі події називаються *несумісними*, якщо вони попарно несумісні.

*Приклади:* 1) попадання і промах при одному пострілі; 2) з ящика з деталями навмання дістали деталь – події “дістали стандартну деталь” та “дістали нестандартну деталь” 3) розорення фірми та отримання нею прибутку.

Іншими словами, події  $A$  і  $B$  сумісні, якщо відповідні множини  $A$  і  $B$  мають спільні елементи і несумісні, якщо відповідні множини  $A$  і  $B$  не мають спільних елементів.

При визначенні ймовірностей подій часто використовується поняття рівно можливих подій.

Деякі події в даному експерименті називаються *рівно можливими*, якщо за умовами симетрії є підстава вважати, що жодна з них об'єктивно не є більш можливою, ніж інші.

*Приклади:* 1) випадання герба і цифри, 2) поява карти будь-якої масті, 3) вибір кулі з урни тощо.

При розв'язанні ряду теоретичних та практичних задач потрібно з скінченної множини елементів за заданими правилами скласти різні сполуки та підраховувати кількість всіх можливих таких сполук.

*Комбінаторика* – це розділ математики, що вивчає розташування об'єктів у відповідності зі спеціальними правилами і методи підрахунку кількості всіх можливих способів, якими ці розташування можна здійснити.

*Правила суми та добутку*

*Правило суми* – якщо елемент  $a$  може бути вибраний  $n$  способами, а елемент  $b$  –  $m$  способами, то один з цих елементів можна вибрати  $n+m$  способами.

*Правило добутку* – якщо елемент  $a$  може бути вибраний  $n$  способами та після кожного такого вибору елемент  $b$  можна вибрати  $m$  способами, то пару  $(ab)$  з цих елементів у вказаному порядку можна вибрати  $nm$  способами.

*Розміщеннями з  $n$  елементів по  $k$*  називаються впорядковані набори, що складаються з  $k$  різних елементів, вибраних з  $n$  даних елементів, .

Розміщення можуть відрізнятися як елементами, так і порядком.

Число всіх розміщень з  $n$  елементів по  $k$  обчислюється за формулою:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

*Приклад:* Різними розміщеннями множини з трьох елементів  $\{1,2,3\}$  по два будуть набори  $(1,2)$ ,  $(2,1)$ ,  $(1,3)$ ,  $(3,1)$ ,  $(2,3)$ ,  $(3,2)$

*Перестановками  $P_n$*  називаються розміщення при  $k = n$ .

Так як кожна перестановка містить всі  $n$  елементів множини, то різні перестановки відрізняються одна від одної лише порядком елементів і

$$P_n = A_n^n = n!$$

*Приклад:* Різними перестановками множини елементів  $\{1,2,3\}$  будуть  $(1,2,3)$ ,  $(1,3,2)$ ,  $(2,3,1)$ ,  $(2,1,3)$ ,  $(3,2,1)$ ,  $(3,1,2)$ .

*Сполученнями (комбінаціями) з  $n$  елементів по  $k$*  називаються неупорядковані набори з  $k$  елементів, взятих з даних  $n$  елементів,

Число сполучень з  $n$  елементів по  $k$  обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

*Ймовірність* є кількісною мірою можливості появи події. Найбільш широке застосування отримали два означення ймовірності події: класичне та статистичне.

*Класичне означення ймовірності* пов'язане з означенням сприятливого наслідку.

Наслідок називається *сприятливим* даній події, якщо з його появи випливає настання цієї події.

*Приклад.* При підкиданні грального кубика події “випадання парної кількості очок” сприяють елементарні події {2,4,6}. Здачі екзамену сприяє отримання 3, 4 чи 5 балів.

*Ймовірність події* дорівнює відношенню числа всіх рівно можливих елементарних наслідків випробування, сприяючих даній події, до всіх рівно можливих елементарних наслідків:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де  $m$  – число сприятливих події  $A$  наслідків;

$n$  – загальна кількість можливих наслідків.

*Приклади.*

1) Яка ймовірність випадіння двійки при киданні кубика?

*Розв'язання.* Всього наслідків випробування 6, число сприятливих наслідків 1, тому  $P(A) = \frac{1}{6}$ .

2) Яка ймовірність того, що в довільному двозначному числі дві цифри однакові.

*Розв'язання.* Всього наслідків випробування  $A_{10}^2 = 9 \cdot 10 = 90$ , число сприятливих наслідків 9, тому  $P(A) = \frac{9}{90}$ .

3) З букв слова “диференціал” вибирається одна буква. Яка ймовірність того, що це а) голосна, б) буква “ф”.

*Розв'язання.* а) всього наслідків випробування 11, число сприятливих наслідків 5, тому  $P(A) = \frac{5}{11}$ ;

б) всього наслідків випробування 11, число сприятливих наслідків 1, тому  $P(A) = \frac{1}{11}$ .

З означення ймовірності події  $A$  випливає, що  $0 \leq m \leq n$ , тому завжди виконуються нерівності  $0 \leq P(A) \leq 1$ , тобто ймовірність будь-якої події є невід'ємне число, що не перевищує одиницю.

- Якщо  $P(A) = 0$ , то подія  $A$  неможлива.
- Якщо  $P(A) = 1$ , то подія  $A$  достовірна.
- Рівно можливі елементарні події є *рівно ймовірними*, тобто мають однакову ймовірність.

Ймовірність події  $\bar{A}$ , протилежної до події  $A$  дорівнює

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Класичне означення ймовірності припускає що:

- число елементарних наслідків скінченне;
- ці наслідки рівно можливі.

Однак на практиці зустрічаються випробування з нескінченним числом можливих наслідків. Крім того, немає загальних методів, які дозволяють результат випробування, навіть з скінченним числом наслідків, представити у вигляді суми рівно можливих елементарних наслідків. Тому застосування класичного означення ймовірностей обмежене.

*Приклад.* Кубик зі зміщеним центром ваги.

Класичне означення ймовірності має обмежене застосування. Так, воно неприйнятне, якщо результати випробування не рівно можливі.

В багатьох випадках більш зручним є *статистичне означення ймовірності*, яке пов'язане з поняттям відносної частоти появи події  $A$  в випробуваннях.

*Відносна частота* появи події  $A$  – це відношення числа  $m$  появи події  $A$  в серії з  $n$  випробувань до числа випробувань:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Досвід показує, що при проведенні порівняно невеликого числа випробувань відносна частота  $P^*(A)$  приймає значення, які можуть дуже відрізнитися одне від одного. При однотипових *масових* випробуваннях в багатьох випадках спостерігається стійкість відносної частоти події, тобто зі збільшенням числа випробувань відносна частота коливається навколо деякого постійного  $P(A)$ , причому ці відхилення тим менші, чим більше проведено випробувань.

*Ймовірністю події  $A$  в статистичному значенні* називається число  $P(A)$ , відносно якого стабілізується (встановлюється) відносна частота  $P^*(A)$  при необмеженому збільшенні числа випробувань.

Тому, на практиці за ймовірність події  $A$  приймається відносна частота  $P^*(A)$  при достатньо великому числі випробувань.

Властивості ймовірності, що випливають з класичного означення ймовірності, зберігаються і при статистичному означенні ймовірності.

Якщо ймовірність деякої події близька до нуля, то, в відповідності зі сказаним, впливає, що при одиничному випробуванні в більшості випадків така подія не настане. Виникає питання: наскільки малою повинна бути ймовірність, щоб можна було знехтувати ймовірністю настання деякої події в одиничному випробуванні (наприклад, землетрус в Кіровограді)?

*Рівнем значущості* називають достатньо малу ймовірність, при якій настання події можна вважати практично неможливим.

На практиці рівень значущості зазвичай приймають рівним 0,05 (п'ятивідсотковий рівень) або 0,01 (одновідсотковий рівень).

Щоб подолати недолік класичного означення ймовірності, пов'язаний з його незастосовністю до випробувань з нескінченним числом наслідків, вводять поняття *геометричної ймовірності*.

*Геометричною ймовірністю* називають ймовірність попадання точки в деяку область ( відрізок, частину площини тощо).

В подібних випадках простір елементарних наслідків може бути представлений областю  $G$ , а під подією  $A$  можна розуміти наслідки, що входять в деяку область  $g$ , яка належить області  $G$ . Нехай на область  $G$  навмання кидається "точка". Яка ймовірність того, що ця точка попаде в область  $g$ , що є частиною області  $G$ ?

1. Нехай відрізок  $g$  довжини  $l_g$ , складає частину відрізка  $G$ , довжина якого  $l_G$ . На відрізок  $G$  навмання поставлена точка.

Припускається, що:

- поставлена точка може опинитися в будь-якій точці відрізка  $G$ ;
  - ймовірність попадання точки на відрізок  $g$  пропорційна довжині цього відрізка та не залежить від його розташування відносно відрізка  $G$ .
- Тоді ймовірність попадання точки на відрізок  $g$  визначається рівністю

$$P = \frac{l_g}{l_G}.$$

2. Нехай плоска фігура  $g$  з площею  $S_g$  складає частину плоскої фігури  $G$ , площа якої  $S_G$ . На фігуру  $G$  навмання кинута точка.  
Припускається, що:

- Кинута точка може опинитися в будь-якій точці фігури  $G$ ;
- Ймовірність попадання кинutoї точки на фігуру  $g$  пропорційна площі цієї фігури і не залежить ні від її розташування відносно фігури  $G$ , ні від форми  $g$ .

При цих припущеннях ймовірність попадання точки на фігуру  $g$  визначається рівністю

$$P = \frac{S_g}{S_G}.$$

3. Аналогічно вводиться поняття геометричної ймовірності при киданні точки в просторову область об'єму, що містить область об'єму  $V_g$ :

$$P = \frac{V_g}{V_G}.$$

В загальному випадку поняття геометричної ймовірності вводиться наступним чином. Позначимо міру області  $g$  (довжину, площу, об'єм тощо) через  $mes(g)$ , а міру області  $G$  – через  $mes(G)$ . Тоді ймовірність попадання в область  $g$  точки, кинutoї в область  $G$ , визначається формулою:

$$P = \frac{mes(g)}{mes(G)}.$$

*Приклад:* Протягом доби до причалу можуть підійти 2 пароплави. Час прибуття обох пароплавів незалежний і рівно можливий протягом доби. Визначити ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час розвантаження одного з них дорівнює 1 годині, а іншого – 2 години.

*Розв'язання.* Застосуємо геометричну ймовірність. Розглянемо прямокутну декартову систему координат  $xOy$ , в якій  $x$  та  $y$  будемо відраховувати в годинах від 0 до 24. Нехай  $x$  – час прибуття першого пароплаву,  $y$  – час прибуття другого пароплаву. Тоді всі можливі комбінації прибуття пароплавів до причалу зобразяться точками квадрата, для якого  $0 \leq x \leq 24$ . Очевидно, що положення точок  $(x, y)$  в області цього квадрата рівно можливі.

З'ясуємо, які точки  $(x, y)$  сприяють події  $A$  (один з пароплавів чекає звільнення причалу). Подія  $A$  може відбутися лише в тому випадку, якщо момент  $y$  прибуття другого пароплаву не більше, ніж на дві години раніше моменту  $x$  прибуття першого пароплаву і не більше, ніж на одну годину пізніше прибуття першого пароплаву:

$$x-2 \leq y \leq x+1.$$

Таким чином, область квадрата, сприяюча події  $A$ , складається з точок, координати  $(x, y)$  яких задовольняють нерівностям, тобто з точок, що лежать між прямими  $y=x-2$  та  $y=x+1$ . Площа квадрата дорівнює  $S_G = 24^2 = 576$ . Площа меншої області дорівнює  $S_g = 576 - \frac{1}{2} \cdot 23^2 - \frac{1}{2} \cdot 22^2 = 69,5$ .

$$\text{Звідси } P(A) = \frac{69,5}{576} \approx 0,121.$$

## § 11.2. Умовна ймовірність. Теорема суми і добутку

У багатьох випадках ймовірності появи одних подій залежать від того, відбулася інша подія чи ні.

*Умовною ймовірністю події  $A$*  називається ймовірність події  $A$ , обчислена за умови, що подія  $B$  вже відбулася, і позначається

$$P(A/B) = P_B(A).$$

У тих випадках, коли ймовірність події  $A$  розглядається за умови, що мали місце дві інші події  $B$  і  $C$ , використовується умовна ймовірність відносно добутку подій  $B$  і  $C$ :  $P(A/BC)$ .

*Теорема.* Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія відбулася:

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A).$$

Теорему множення ймовірності легко узагальнити на будь-яке скінченне число подій.

*Теорема.* Ймовірність добутку скінченного числа подій дорівнює добутку їх умовної ймовірності відносно добутку попередніх подій :

$$P(ABC \dots LM) = P(A)P(B/A)P(C/AB) \dots P(M/AB \dots L).$$

*Теорема.* Ймовірність суми скінченного числа несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій :

$$P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

*Теорема.* Ймовірність появи хоч би однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

*Події  $A$  і  $B$  називаються незалежними*, якщо при настанні події  $A$  ймовірність події  $B$  не змінюється.

**Теорема.** Ймовірність спільної появи двох незалежних подій  $A$  і  $B$  (добутку  $A$  і  $B$ ) дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

*Доведення.* Дійсно, оскільки події  $A$  і  $B$  незалежні, то  $P(B/A) = P(B)$ . В цьому випадку формула ймовірності добутку подій  $A$  і  $B$  набирає вигляду

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  називаються попарно незалежними, якщо незалежні будь-які дві з них.

Події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  називаються незалежними в сукупності, якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і усі можливі добутки інших.

**Теорема.** Ймовірність добутку скінченного числа незалежних в сукупності подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

Проілюструємо відмінність в застосуванні формул ймовірності добутку подій для залежних і незалежних подій на прикладах.

*Приклад 1.* Ймовірність попадання в ціль першим стрільцем дорівнює 0,85, другим 0,8. Стрільці зробили по одному пострілу. Яка ймовірність того, що в ціль потрапив хоча б один стрілець?

*Розв'язання.*  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ . Оскільки постріли незалежні, то  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,97$ .

*Приклад 2.* У урні знаходиться 2 червоних і 4 чорних кулі. З неї виймають підряд 2 кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі червоні.

*Розв'язання.* 1 випадок. Подія  $A$  - поява червоної кулі при першому вийманні, подія  $B$  - при другому. Подія  $C$  - поява двох червоних куль.

$$P(C) = P(A) \times P(B/A) = (2/6) \times (1/5) = 1/15.$$

2 випадок. Перша вийнята куля повертається в урну.

$$P(C) = P(A) \times P(B) = (2/6) \times (2/6) = 1/9$$

### § 11.3. Повна ймовірність

Нехай подія  $A$  може статися тільки з однією з несумісних подій  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , що утворюють повну групу. Наприклад, в магазин поступає одна і та ж продукція від трьох підприємств і в різній кількості. Ймовірність випуску неякісної продукції на цих підприємствах різна.

Випадковим чином відбирається один з виробів. Необхідно визначити ймовірність того, що це виріб неякісний (подія  $A$ ). Тут події  $H_1, H_2, H_3$  це вибір виробу з продукції відповідного підприємства.

В цьому випадку ймовірність події  $A$  можна розглядати як суму добутків подій  $A = \sum_{i=1}^n AH_i$ .

За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій отримуємо  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i)$ .

Використовуючи теорему множення ймовірностей, знаходимо

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i).$$

Отримана формула називається формулою повної ймовірності.

Нехай подія  $A$  відбувається одночасно з однією з несумісних подій  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , ймовірність яких  $P(H_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) відома до випробування (ймовірність апіорі). Проводиться випробування, в результаті якого зареєстрована поява події, причому відомо, що ця подія мала певну умовну ймовірність  $P(A/H_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Необхідно знайти ймовірність подій  $H_i$ , якщо відомо, що подія  $A$  відбулася (ймовірність апостеріорі).

Завдання полягає в тому, що, маючи нову інформацію (подія  $A$  відбулася), треба переоцінити ймовірність подій  $H_1, H_2, \dots, H_n$ .

На підставі теореми про ймовірність добутку двох подій

$$P(H_i A) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i),$$

звідки

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$$

або

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Отримана формула носить назву формули Байеса.

*Приклад.* Для підготовки до змагань були відібрані 4 курсанти першого взводу, 9 курсантів другого взводу та 7 курсантів третього взводу. Ймовірність виграти змагання для курсанту першого взводу дорівнює 0,7; для другого - 0,8; для третього - 0,9. Виявилось, що навмання вибраний курсант став переможцем змагань. З якого взводу ймовірніше всього був цей курсант?

*Розв'язування.* Введемо позначення подій:

$A$  - курсант переміг в змаганнях;  $H_1$  - курсант першого взводу;  $H_2$  - курсант другого взводу;  $H_3$  - курсант третього взводу. Тоді

$$P(H_1) = \frac{4}{4+9+7} = \frac{4}{20} = 0,2;$$

$$P(H_2) = \frac{9}{4+9+7} = \frac{9}{20} = 0,45;$$

$$P(H_3) = \frac{7}{4+9+7} = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Якщо  $A$  – подія, що полягає в тому, що навання вибраний курсант переміг в змаганнях, то  $P(A)$  знаходимо за формулою повної ймовірності:  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$ . В нашому випадку  $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)$ .

За умовою

$$P(A/H_1) = 0,7; P\left(\frac{A}{H_2}\right) = 0,8; P(A/H_3) = 0,9.$$

Отже,

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,45 + 0,9 \cdot 0,35 = 0,815$$

Вибраний навання курсант переміг в змаганнях. Необхідно визначити ймовірність того, що він з першого, другого або третього взводу.

а) ймовірність того, що курсант з першого взводу. Для цього скористаємося формулою Байеса

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$$

В нашому випадку

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,45 + 0,9 \cdot 0,35} = \frac{0,14}{0,815} = 0,1718;$$

б) ймовірність того, що курсант з другого взводу.

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,45 \cdot 0,8}{0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,45 + 0,9 \cdot 0,35} = 0,4417;$$

в) ймовірність того, що курсант з третього взводу.

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,9}{0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,45 + 0,9 \cdot 0,35} = 0,3865.$$

Отже, ймовірніше всього курсант був з другого взводу, так як ця ймовірність більша двох інших.

## § 11.4. Повторні незалежні випробування

*Схемою Бернуллі* називається серія повторних незалежних випробувань, в кожному з яких ця подія  $A$  має одну і ту ж ймовірність  $P(A) = p$ , не залежну від номера випробування.

Таким чином, в схемі Бернуллі для кожного випробування є тільки два результати: подія  $A$  (успіх), ймовірність якої  $P(A) = p$  і подія  $\bar{A}$  (невдача), ймовірність якої  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q$ .

Ймовірність, що подія  $A$  наступить в  $m$  випробуваннях, визначається за формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

*Приклад.* Ймовірність враження цілі стрільцем при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність, що при 10 пострілах ціль вражається 8 разів.

*Розв'язання.* 
$$P_{10}(8) = \frac{10!}{2!8!} \cdot (0,8)^8 \cdot (0,2)^2 = 0,302.$$

Якщо число випробувань велике, формулу Бернуллі застосовувати незручно. В цьому випадку можна застосовувати наближені формули, точність яких збільшується із зростанням  $n$ .

*Теорема Пуассона.* Якщо ймовірність  $p$  настання події  $A$  в кожному випробуванні постійна і мала, а число незалежних випробувань  $n$  досить велике, то ймовірність того, що подія  $A$  наступить  $m$  разів, наближено дорівнює

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}; \quad \lambda = np.$$

*Приклад.* Ткаля обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив нитки відбудеться на 7 веретенах.

*Розв'язання.* Так як кількість випробувань велика ( $n = 1000$ ), а ймовірність окремого випробування дуже мала ( $p = 0,005$ ), то для обчислення шуканої ймовірності скористаємося формулою Пуассона. Параметр розподілу  $\lambda = 1000 \times 0,005 = 5$ , тоді шукана ймовірність дорівнює:

$$P_{1000}(7) = \frac{5^7}{7!} e^{-5} = \frac{78125}{5040} \cdot 0,006738 = 0,1044.$$

Формула Пуассона знаходить застосування в теорії масового обслуговування. Вона може розглядатися як математична модель простого потоку подій з інтенсивністю  $\lambda = np$ . Параметр  $\lambda = np$  є при цьому середнє число успіхів.

*Потоком подій* називають послідовність подій, які настають у випадкові моменти часу.

*Інтенсивністю потоку  $\lambda$*  називають середнє число подій за одиницю часу.

*Простим (пуассонівським)* називають потік подій, який має властивості стаціонарності, відсутності післядії і ординарності.

Властивість стаціонарності характеризується тим, що ймовірність  $P_t(m)$  появи  $m$  подій на будь-якому проміжку часу залежить тільки від числа  $m$  і від тривалості проміжку часу  $t$  і не залежить від початку його відліку.

Властивість відсутності післядії характеризується тим, що ймовірність появи  $m$  подій на будь-якому проміжку часу не залежить від того, з'являлися або не з'являлися події в моменти часу, передуючі початку даного проміжку, тобто передісторія потоку не позначається на ймовірності появи подій.

Властивість ординарності характеризується тим, що поява двох і більше подій за малий проміжок часу малоімовірна в порівнянні з ймовірністю появи тільки однієї події.

Якщо інтенсивність простого потоку  $\lambda$  відома, то ймовірність появи  $m$  подій за час  $t$  визначається формулою

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{-\lambda t}}{m!}.$$

*Приклад.* Середнє число замовлень таксі, що поступають на диспетчерський пункт за одну хвилину, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини поступить 4 виклики.

*Розв'язання.* Підставляючи в наведену вище формулу  $\lambda = 3$ ,  $t = 2$ ,  $m = 4$ , отримаємо:

$$P_2(4) = \frac{(3 \cdot 2)^4 \cdot e^{-3 \cdot 2}}{4!} = 0,135.$$

Лапласом була отримана важлива наближена формула для ймовірності  $P_n(m)$  появи події  $A$  рівно  $m$  разів, за умови, що  $n$  досить велике. На відміну від формули Пуассона тут немає обмеження на мализну величини  $p$  в окремому випробуванні, тобто область застосовності формули Лапласа ширша.

*Теорема Лапласа.* Ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі подія  $A$  при  $n$  випробуваннях з'явиться рівно  $m$  разів, виражається наближеною формулою Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Формулу Лапласа іноді називають асимптотичною формулою, оскільки доведено, що відносна помилка формули Лапласа прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ .

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа містить наближену формулу для ймовірності  $P_n(m_1, m_2)$  того, що подія  $A$  з'явиться не менше  $m_1$  разів і не більше  $m_2$  разів.

*Теорема.* Ймовірність того, що подія  $A$  з'явиться в  $n$  випробуваннях від  $m_1$  до  $m_2$  разів, приблизно дорівнює визначеному інтегралу

$$P_n(m_1, m_2) \approx \int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}} \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_{m_1}}^{t_{m_2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

де:  $t_{m_1} = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; t_{m_2} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

Введемо стандартний інтеграл Лапласа (функцію Лапласа):

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

який, очевидно, є первісною функції Гауса

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Тоді на підставі формули Ньютона - Лейбніца можна записати

$$P_m(m_1, m_2) \approx \Phi_0(t_{m_2}) - \Phi_0(t_{m_1}).$$

Значення функцій  $\Phi_0(x)$  і  $\varphi_0(x)$  зазвичай знаходяться з таблиць, причому таблиці зазвичай дані лише для невід'ємних значень  $x$ , оскільки  $\varphi_0(x)$  - парна функція, а  $\Phi_0(x)$  - непарна.

*Приклад.* Ймовірність присутності студента на лекції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з 100 студентів на лекції будуть присутні не менше 75 і не більше 90.

*Розв'язання.* Так як кількість випробувань велика ( $n = 100$ ), то для знаходження ймовірності, що подія  $A$  з'явиться від 75 до 90 разів, скористаємося інтегральною теоремою Лапласа. Визначимо аргументи інтегральної функції Лапласа  $x_1$  і  $x_2$ :

$$x_1 = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25, \quad x_2 = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

Враховуючи, що функція  $\Phi(x)$  є непарною, тобто  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$  за таблицею значень інтегральної функції Лапласа знаходимо:

$$\Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,39435 \quad \text{і} \quad \Phi(2,5) = 0,49379,$$

тоді

$$P_{100}(75 \leq k \leq 90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = 0,49379 + 0,39435 = 0,888.$$

## § 11.5. Випадкова повторна величина. Види випадкових величин

Одним з найважливіших понять теорії ймовірності є поняття *випадкової величини*.

*Випадковою* називають величину, яка в результаті випробування прийме одне і тільки одне можливе значення, наперед невідоме і залежне від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані.

*Приклад 1.* Число хлопчиків, що народилися, серед ста новонароджених - випадкова величина, що має наступні можливі значення: 0, 1, ..., 100.

*Приклад 2.* Відстань, яку пролетить снаряд при пострілі з гармати, є випадковою величиною, яка залежить не лише від установки прицілу, але і від сили і напрямку вітру, температури, вологості і так далі. Можливі значення цієї випадкової величини належать деякому проміжку  $(a, b)$ .

Випадкова величина зазвичай позначається великою латинською буквою  $X, Y, Z, \dots$ , її конкретні значення - малими буквами  $x, y, z$ .

Випадкові величини діляться на дискретні і неперервні.

*Дискретною* називають випадкову величину, яка набуває окремих, ізольованих можливих значень з певною вірогідністю. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або нескінченним.

*Неперервною* називають випадкову величину, яка може набувати усіх значень з деякого скінченного або нескінченного проміжку. Очевидно, число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченне.

*Законом розподілу випадкової величини* називається відповідність між усіма можливими значеннями дискретної випадкової величини і їх ймовірностями, тобто сукупність пар чисел  $(x_i, p_i)$ .

Закон розподілу можна задавати таблично, аналітично (у вигляді формули) і графічно. При табличному заданні закону розподілу перший рядок таблиці містить можливі значення, а другий - їх ймовірності:

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	..	$p_n$

Оскільки в одному випробуванні випадкова величина приймає одне і тільки одне можливе значення, то події  $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$  утворюють повну групу, у зв'язку з чим сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

*Приклад.* Нехай схожість насіння деякої рослини визначається ймовірністю 0,6. Знайти закон розподілу  $X$  - числа рослин, що з'явилися, з 5 посаджених насінин.

Розв'язання: випадкова величина  $X$  може набувати значень 0,1,2,... 5. Завдання описується схемою випробувань Бернуллі з  $p = 0.6$ . Таким чином  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  і ми отримуємо

$x_k$	0	1	2	3	4	5
$p_k$	0,01	0,077	0,230	0,345	0,259	0,0778

Як вже відзначалося, дискретна випадкова величина може бути задана переліком усіх її можливих значень і їх ймовірностей. Такий спосіб непридатний для неперервних випадкових величин, оскільки неможливо скласти перелік усіх можливих значень, що заповнюють інтервал  $(a, b)$ . У зв'язку з цим вводиться поняття функції розподілу ймовірності випадкової величини, придатне як для дискретної, так і для неперервної випадкової величини.

Нехай  $x$  - дійсне число. Ймовірність події, що полягає в тому, що  $X$  набуде значення, менше  $x$ , тобто ймовірність події  $x < X$ , позначимо через  $F(x)$ . Зрозуміло, якщо  $x$  змінюється, то, взагалі кажучи, змінюється і  $F(x)$ , тобто  $F(x)$  є функцією  $x$ .

Функцією розподілу називають функцію  $F(x)$ , що визначає ймовірність того, що випадкова величина  $X$  в результаті випробування набуде значення, менше  $x$ :

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрично цю рівність можна представити так:  $F(x)$  є ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке зображується на числовій осі точкою, що лежить лівіше  $x$ .

Розглянемо окремо випадки дискретної і неперервної випадкової величин.

1. *Дискретна випадкова величина.* Розглянемо функцію розподілу  $F(x)$  дискретної випадкової величини  $X$ , що набуває значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

- ✓ Якщо  $x < x_1$ , то  $F(x) = P(X < x) = 0$ , оскільки в цьому випадку подія  $(X < x)$  є неможливою.
- ✓ Якщо  $x_1 < x \leq x_2$ , то подія  $(X < x)$  наступить тоді і тільки тоді, коли наступить подія  $(X < x_1)$ , тому  $F(x) = P(X < x) = P(X = x_1) = p_1$ .
- ✓ Якщо  $x_2 < x \leq x_3$ , то подія  $(X < x)$  дорівнює сумі подій  $X = x_1$  і  $X = x_2$  і

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2.$$

Аналогічно, якщо  $x_i < x \leq x_{i+1}$ , то  $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$ .

Таким чином, функція розподілу випадкової дискретної величини дорівнює  $F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$ , де  $p_i = P(X = x_i)$ , і підсумовування ведеться по тих  $i$ , для яких  $x_i < x$ .

Таким чином, в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  функція розподілу має стрибки.

2. *Неперервна випадкова величина.* На відміну від дискретної випадкової величини в даному випадку  $X$  пробігає всю неперервну множину значень, а сама функція  $F(x)$  зростає монотонно.

Якщо ймовірність події  $X < x_1$  дорівнює  $F(x_1)$ , а ймовірність події  $X < x_2$  дорівнює  $F(x_2)$ , то ймовірність того, що випадкова величина  $X$  знаходиться між  $x_1$  і  $x_2$ , дорівнює різниці відповідних значень функції розподілу:  $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ .

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина  $X$  набуде одного певного значення, дорівнює нулю. Має сенс розглядати лише ймовірність попадання її в деякий інтервал, нехай навіть і скільки завгодно малий.

Графік функції розподілу для дискретної випадкової величини є ступінчастою розривною функцією, а неперервної - монотонно зростаючою неперервною функцією.

Приведемо ряд властивостей функції розподілу, що безпосередньо впливають з її означення.

1. Функція розподілу набуває значень з проміжку  $[0; 1]$ :  
 $0 \leq F(x) \leq 1$ .

2. Функція розподілу - неспадна функція, тобто  $F(x_2) \geq F(x_1)$  при  $x_2 > x_1$ .
3. Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з напівінтервалу  $[x_1, x_2)$ , дорівнює різниці  $F(x_2) - F(x_1)$   
 $P(x_1 \leq x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
4.  $P(X \geq x) = 1 - F(x)$ .
5. Якщо  $x \rightarrow \infty$ , то  $F(x) \rightarrow 1$ .
6. Якщо  $x \rightarrow -\infty$ , то  $F(x) \rightarrow 0$ .

Для неперервних випадкових величин, окрім функції розподілу вводиться також поняття щільності розподілу ймовірності, або щільність ймовірності.

*Щільністю розподілу* ймовірності неперервної випадкової величини називається похідна від її функції розподілу

$$f(x) = F'(x).$$

Знаючи щільність розподілу ймовірності, можна знайти функцію розподілу, інтегруючи щільність ймовірності в загальному випадку від  $-\infty$  до даного значення, тобто

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

*Властивості щільності розподілу*

1.  $f(x) \geq 0$

Дійсно, оскільки функція розподілу неспадна функція, то її похідна - функція невід'ємна

2. Невласний інтеграл від щільності розподілу ймовірності в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$  дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Дійсно, цей невластний інтеграл виражає ймовірність події, що полягає в тому, що випадкова величина набуде значення, що належить інтервалу  $(-\infty, +\infty)$ . Оскільки така подія достовірна, то її ймовірність дорівнює одиниці.

3.  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Імовірнісний зміст щільності розподілу ймовірності : ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, що належить інтервалу  $(x, x+dx)$  приблизно дорівнює добутку щільності ймовірності в точці  $x$  на ширину інтервалу  $dx$ .

*Приклад.* Нехай дальність польоту снаряду при певній установці прицілу описується щільністю розподілу виду

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 15)^2 + 5, & \text{якщо } 14,9 < x < 15,1 \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Яка ймовірність того, що при одному пострілі буде отриманий переліт в межах від 10 до 20 метрів?

$$\text{Відповідь: } \int_{15,01}^{15,02} f(x) dx = 0,1$$

## § 11.6. Числові характеристики випадкових величин

У багатьох практичних випадках інформація про випадкову величину, яку дають закон розподілу, функція розподілу або щільність ймовірності, є надлишковою. Часто простіше і зручніше користуватися числами, які описують випадкову величину сумарно. До найбільш важливих з таких числових характеристик випадкових величин належать математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання характеризує середнє очікуване значення випадкової величини, тобто приблизно дорівнює її середньому значенню (імовірнісний зміст математичного сподівання). Іноді знання цієї характеристики вистачає для розв'язання завдання. Наприклад, при оцінці купівельної спроможності населення цілком може вистачити знання середнього доходу, при аналізі ймовірності двох видів діяльності можна обмежитися порівнянням їх середніх прибутковостей. Знання того, що випускники цього університету заробляють в середньому більше випускників іншого, може послужити основою для ухвалення рішення про вступ до цього ВНЗу і тому подібне.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини визначається співвідношенням:

$$M(X) = M_X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ де } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини дорівнює

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx,$$

де  $f(x)$  – щільність ймовірності.

### *Властивості математичного сподівання*

Перш ніж формулювати властивості математичного сподівання, необхідно пояснити зміст арифметичних операцій  $X + Y$ ,  $X - Y$ ,  $X \cdot Y$  і тому подібне, де  $X$  і  $Y$  – дискретні випадкові величини.

Наприклад, під сумою  $X + Y$  розуміється випадкова величина  $Z$ , значеннями якої є усі допустимі суми  $z_{ij} = x_i + y_j$ , де  $x_i$  і  $y_j$  - усі можливі значення відповідно випадкових величин  $X$  і  $Y$ .

Під добутком  $X \cdot Y$  розуміється випадкова величина  $Z$ , значеннями якої є усі допустимі добутки  $z_{ij} = x_i \cdot y_j$ , де  $x_i$  і  $y_j$  - усі можливі значення відповідно випадкових величин  $X$  і  $Y$ .

1. Математичне сподівання постійної величини  $C$  дорівнює цій величині.

$$M(C) = C.$$

2. Математичне сподівання суми (різниці) двох або декількох випадкових величин  $X$  і  $Y$  дорівнює сумі (різниці) їх математичних сподівань :

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

*Наслідок.* Якщо  $C$  - постійна величина, то

$$M(X + C) = M(X) + C.$$

3. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин  $X$  і  $Y$  дорівнює добутку їх математичних сподівань :

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

*Наслідок 1.* Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин.

*Наслідок 2.* Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто  $M(CX) = CM(X)$ .

На практиці часто вимагається оцінити розсіювання випадкової величини навколо її середнього значення. Наприклад, акції двох компаній можуть приносити в середньому однакові дивіденди, проте вкладення грошей в одну з них може бути набагато ризикованою операцією, ніж в іншу. Тому виникає необхідність в числовій характеристиці, що оцінює розкид можливих значень випадкової величини відносно її середнього значення (математичного сподівання). Такою характеристикою є дисперсія.

*Дисперсією (розсіюванням) випадкової величини* називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Легко показати, що наведений вище вираз може бути записаний у вигляді

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Дійсно, використовуючи основні теореми про математичне сподівання, отримуємо

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = M(X^2 - 2XM(X) + (M(X))^2) = M(X^2) - 2M(X)M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - M^2(X)$$

У разі дискретної випадкової величини, що має закон розподілу  $(x_i, p_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), дисперсія обчислюється за формулою

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i.$$

Для неперервної випадкової величини формула для розрахунку дисперсії має вигляд

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx.$$

*Властивості дисперсії*

1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю.

$$D(C) = 0.$$

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підводячи його до квадрату:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія суми (різниці) двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин :

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

*Наслідок 1.* Дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

*Наслідок 2.* Якщо  $C$  - постійна величина, то  $D(X + C) = D(X)$ .

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини є її основними числовими характеристиками.

*Приклад 1.* Нехай закон розподілу дискретної випадкової величини має вигляд

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	0,07	0,21	0,55	0,16	0,01

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини  $X$ .

*Розв'язування:* Розрахуємо спочатку математичне сподівання

$$M(X) = 1 \cdot 0,07 + 2 \cdot 0,21 + 3 \cdot 0,55 + 4 \cdot 0,16 + 5 \cdot 0,01 = 2,83$$

Дисперсія дорівнює

$$D(X) = (1 - 2,83)^2 \cdot 0,07 + (2 - 2,83)^2 \cdot 0,21 + (3 - 2,83)^2 \cdot 0,55 + (4 - 2,83)^2 \cdot 0,16 + (5 - 2,83)^2 \cdot 0,01 = 0,661$$

*Приклад 2.* Щільність ймовірності неперервної випадкової величини дорівнює

$$f(x) = e^{-x}; \quad x > 0$$

Знайти її математичне сподівання і дисперсію.

*Розв'язування:* Знайдемо математичне сподівання:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{-x} dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} - e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^{-x} dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -x^2 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = 2 \end{aligned}$$

Знайдемо дисперсію, використовуючи формулу

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2 - 1 = 1.$$

Для оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення окрім дисперсії служать і деякі інші характеристики. До їх числа відноситься середнє квадратичне відхилення.

*Середнім квадратичним відхиленням  $\sigma$  (чи стандартом) випадкової величини  $X$  називається корінь квадратний з дисперсії цієї величини:*  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

Легко показати, що дисперсія має розмірність, рівну квадрату розмірності випадкової величини. Тому розмірність  $\sigma(X)$  співпадає з розмірністю  $X$ . В тих випадках, коли бажано, щоб оцінка розсіювання мала розмірність випадкової величини, обчислюють середнє квадратичне відхилення, а не дисперсію.

Поняття дисперсії і середнього квадратичного відхилення широко використовується практично в усіх областях людської діяльності, пов'язаних з процесами вимірів. Так, наприклад, в техніці, вони характеризують точність вимірювальної апаратури (чим вище середньоквадратичне відхилення (розкид) при вимірах, тим гірша якість приладу).

Прикладами використання цих параметрів в економіці можуть служити вивчення ризику різних дій з випадковим результатом, зокрема, при аналізі ризику інвестування в ту або іншу галузь, при оцінюванні різних активів в портфелі цінних паперів і так далі.

*Приклад.* Нехай є два варіанти інвестування з наступними характеристиками

Чистий дохід, млн. гр. од.	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Ймовірності:								
Інвестиція 1	0	0	0,1	0	0,3	0,2	0,2	0
Інвестиція 2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2

Очікуваний чистий прибуток інвестування визначається математичним сподіванням і складає:

$$\text{Інвестиція 1: } M(X) = \sum x_i p_i = 1,2 \text{ млн.};$$

$$\text{Інвестиція 2: } M(X) = \sum x_i p_i = 1,1 \text{ млн.}$$

За очікуваним прибутком прийнятніший 1-й варіант. Проте ми не врахували ризик, пов'язаний з інвестиціями. Цей ризик може бути визначений за допомогою дисперсії і (чи) середнього квадратичного відхилення. Використовуючи результати таблиці, отримаємо:

$$\text{Інвестиція 1: } \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1,25;$$

$$\text{Інвестиція 2: } \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2,385.$$

Тобто ризик за варіантом для інвестиції 1 менший. Вибір - за підприємцем.

## § 11.7. Основні розподіли випадкових величин

Випадкову величину повністю задає закон її розподілу (у дискретному випадку), а також функція розподілу або щільність ймовірності (для неперервної випадкової величини).

Найбільш важливими законами розподілу дискретної випадкової величини є біноміальний закон, закон розподілу Пуассона, геометричний і гіпергеометричний розподіли, а неперервної - нормальний, рівномірний і показниковий розподіли.

### **Біноміальний розподіл**

Закон розподілу випадкової величини  $X$  числа появ події  $A$  в схемі Бернуллі має вигляд

$$P_m(n) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $q = P(\bar{A}) = 1 - p$ .

Ця формула ще називається біноміальною, оскільки її права частина є  $(m + 1)$ -й член бінома Ньютона:  $(p + q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m}$ .

Біноміальний розподіл для  $n = 10$  і деяких значень  $p$  наведено нижче



Математичне сподівання числа появ події  $A$  в  $n$  незалежних випробуваннях для біноміального розподілу дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події  $A$  в кожному випробуванні (тобто середньому числу появ події в цій серії випробувань):

$$M(X) = np.$$

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення дорівнюють відповідно:

$$D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}.$$

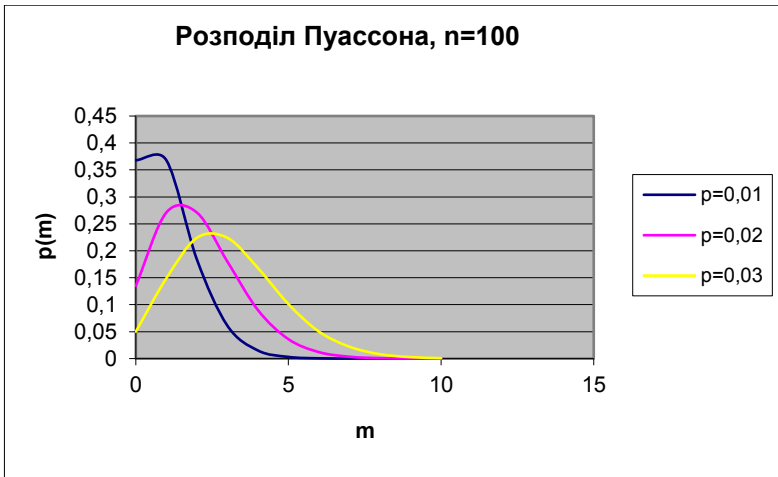
### **Розподіл Пуассона**

Раніше відзначалося, що якщо при збільшенні числа випробувань добуток  $np = \lambda$  залишається постійним, то біноміальний розподіл при великих значеннях  $n$  збігається до розподілу Пуассона.

Випадкова величина  $X$  називається розподіленою за законом Пуассона, якщо вона може набувати значень  $0, 1, 2, \dots, n$ , відповідна ймовірність яких визначається за формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Розподіл Пуассона для  $n = 100, \lambda = 1, 2, 3$  наведено нижче.



Для розподілу Пуассона математичне сподівання і дисперсія дорівнюють відповідно:

$$M(X) = \lambda; \quad D(X) = \lambda.$$

Рівність значень математичного очікування і дисперсії є унікальною властивістю розподілу Пуассона. Ця властивість часто застосовується на практиці для вирішення питання, чи правдоподібна гіпотеза про те, що випадкова величина  $X$  розподілена за законом

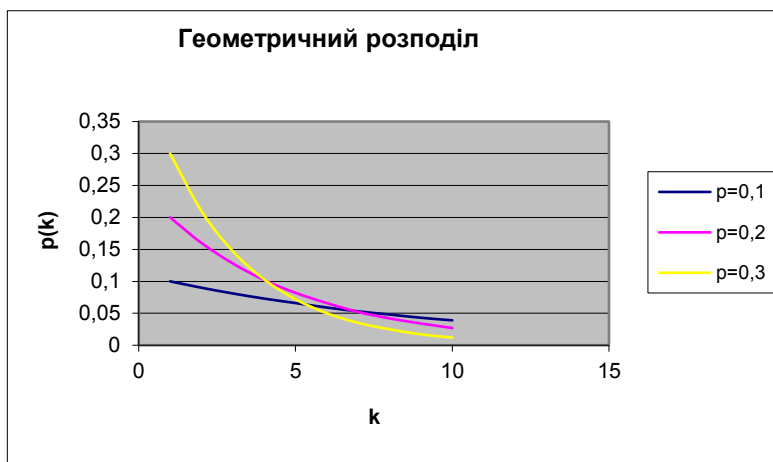
Пуассона. Для цього визначають з експерименту статистичні характеристики випадкової величини - математичне сподівання і дисперсію. Якщо їх значення близькі, то це може служити аргументом на користь гіпотези про пуассонівський розподіл.

### **Геометричний розподіл**

Дискретна випадкова величина  $X$  має геометричний розподіл, якщо вона набуває значень  $k = 1, 2, 3, \dots$  (зліченна кількість значень) з ймовірностями

$$p_k = P(X = k) = q^{k-1} \cdot p, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p.$$

Випадкова величина, що має геометричний розподіл, є числом випробувань в схемі Бернуллі до першого успіху. Геометричний розподіл для деяких конкретних значень  $p$  наведений нижче.



Можна показати, що математичне сподівання і дисперсія для геометричного розподілу дорівнюють відповідно:

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}$$

*Приклад.* У великій партії виробів ймовірність браку рівна  $p$ . Контроль якості проводиться до першої появи бракованого виробу. В

результаті серії перевірок виявилось, що бракований виріб уперше з'являється в середньому при десятому випробуванні. Оцінити чисельне значення  $p$ .

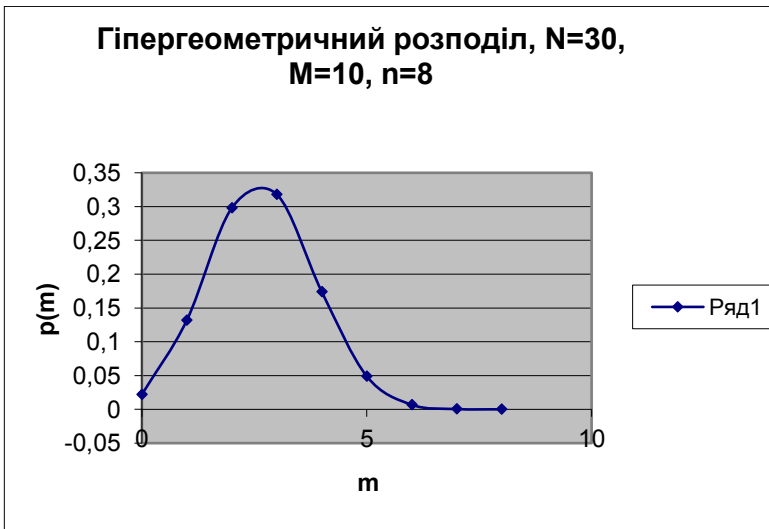
Розв'язання. Нехай  $X$  - число випробувань до першої появи бракованого виробу. Ця випадкова величина має геометричний розподіл. За умовою її середнє значення рівне  $M(X) = 10$ . Таким чином  $p = \frac{1}{M(X)} = 0,1$

### **Гіпергеометричний розподіл (урнова схема)**

Дискретна випадкова величина  $X$  має гіпергеометричний розподіл, якщо вона набуває значення  $m$  з ймовірностями

$$p_m = P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Величина  $p_m$  представляє ймовірність вибору  $m$  об'єктів, що мають задану властивість, з безлічі об'єктів, випадково витягнутих (без повернення) з сукупності  $N$  об'єктів, серед яких  $M$  об'єктів мають задану властивість. Нижче наведений приклад графіка гіпергеометричного розподілу.



Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що має гіпергеометричний розподіл з параметрами рівні :

$$M(X) = n \cdot \frac{M}{N}; \quad D(X) = n \cdot \frac{M}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

*Приклад.* Є 5 фірм, у трьох з яких звітність оформлена неправильно. 2 ревізори перевіряють 2 довільно вибрані фірми. Яка ймовірність того, що при перевірці буде виявлена неправильна звітність: а) ні в одній, б) в одній, в) в двох фірмах?

Розв'язання. Ця задача може бути розв'язана за допомогою гіпергеометричного розподілу. За умовою задачі загальне число об'єктів (фірм) рівне  $N = 10$ , число фірм з неправильною звітністю  $M=3$ . Перевіряється всього дві фірми ( $n = 2$ ). Число фірм з неправильною звітністю серед двох вибраних - величина змінна ( $m=0, 1, 2$ ). Таким чином, маємо

$$\text{а) } p_0 = P(X = 0) = \frac{C_3^0 \cdot C_2^2}{C_5^2} \quad (\text{жодної неправильної звітності});$$

$$\text{б) } p_1 = P(X = 1) = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} \quad (\text{одна неправильна звітність});$$

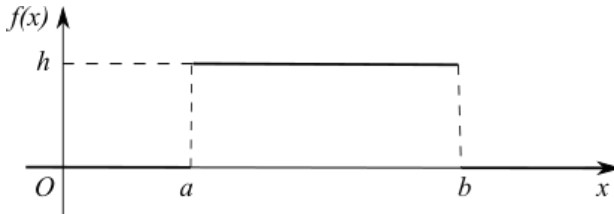
$$\text{в) } p_2 = P(X = 2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^0}{C_5^2} \quad (\text{дві неправильні звітності}).$$

### ***Рівномірний розподіл***

Неперервна випадкова величина вважається рівномірно розподіленою на відрізьку (а, b), якщо її щільність ймовірності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Графік щільності ймовірності для рівномірного розподілу наведений нижче ( $h = 1/(b - a)$ ).



Математичне сподівання і дисперсія неперервної випадкової величини, що має рівномірний розподіл, дорівнюють відповідно:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Приклад. Інтервал руху автобуса дорівнює 15 хв. Яка ймовірність того, що пасажир на зупинці чекатиме автобус не більше 5 хвилин?

Розв'язання. Нехай випадкова величина  $X$  - час очікування автобуса. Вона має рівномірний розподіл на відрізку  $[0,15]$ . Маємо

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

У даному випадку

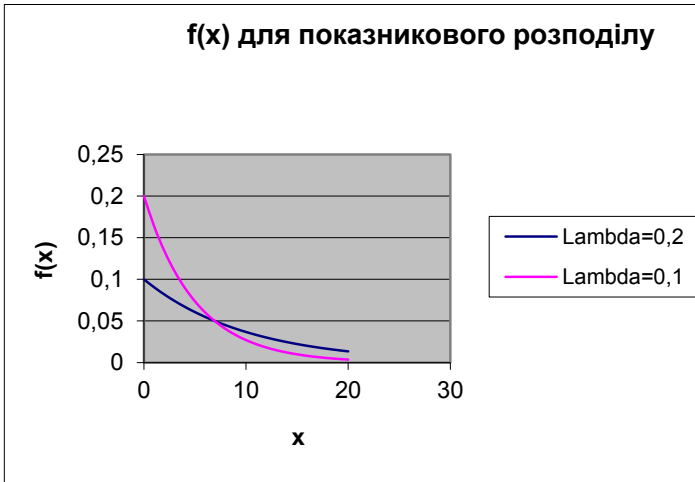
$$P(0 \leq X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{b-a} dx = \int_0^5 \frac{1}{15-0} dx = \frac{5-0}{15-0} = \frac{1}{3}$$

### **Показниковий розподіл**

Показниковим (експоненціальним) розподілом неперервної випадкової величини  $X$  називається розподіл, що має щільність ймовірності виду :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

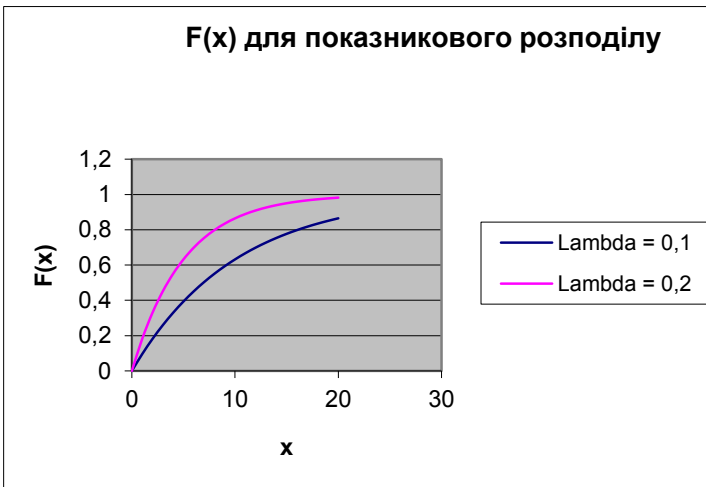
де  $\lambda$  - постійна додатна величина. Щільність ймовірності для показникового розподілу для  $\lambda = 0,1; 0,2$  наведена нижче



Функція розподілу ймовірності для показникового розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Функція розподілу для  $\lambda = 0,1; 0,2$  наведена нижче



Можна показати, що математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що має експоненціальний розподіл, дорівнюють:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Приклад. Встановлено, що час горіння електричної лампочки (Т) є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом. Вважаючи, що середнє значення цієї величини дорівнює 6 місяцям, знайти ймовірність того, що лампочка буде справна більше року.

Розв'язання. Оскільки  $M(T) = \frac{1}{\lambda} = 6$ , то  $\lambda = \frac{1}{6}$  і функція розподілу випадкової величини Т має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{6}}, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } P(T > 12) &= P(12 < T < +\infty) = F(\infty) - F(12) = \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{12}{6}}) = e^{-2} \end{aligned}$$

### **Нормальний розподіл**

Неперервна випадкова величина має нормальний закон розподілу з параметрами  $a$  і  $\sigma$ , якщо її щільність ймовірності має вигляд функції Гауса

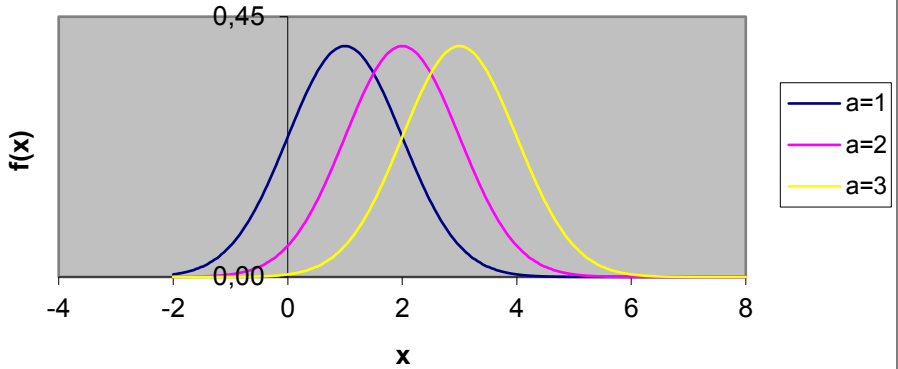
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де  $\sigma > 0$ .

За допомогою безпосереднього обчислення математичного сподівання і дисперсії нормального розподілу легко з'ясувати імовірнісний зміст його параметрів:  $a$  - є математичне сподівання, а  $\sigma$  - середнє квадратичне відхилення нормального розподілу. При  $a = 0$ ,  $\sigma = 1$  розподіл називається *стандартним нормальним розподілом*.

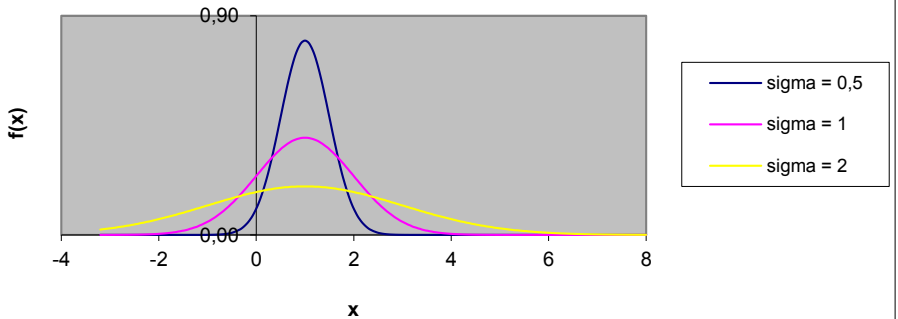
Графіки для ряду конкретних значень математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення приведені нижче.

**Щільність розподілу при  $\sigma=1$  и  $a_1=1$ ,  
 $a_2=2$ ,  $a_3=3$**



Мал. 1. Зміна вигляду функції  $f(x)$  при зміні математичного сподівання

**Щільність розподілу при  $\sigma=0.5$ , 1 и 2 и  $a=1$**

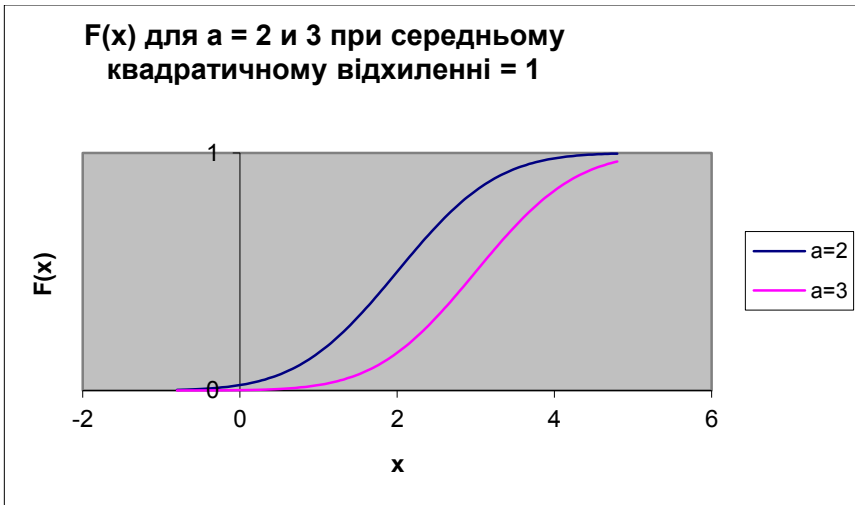


Мал. 2. Зміна вигляду функції  $f(x)$  при зміні середнього квадратичного відхилення

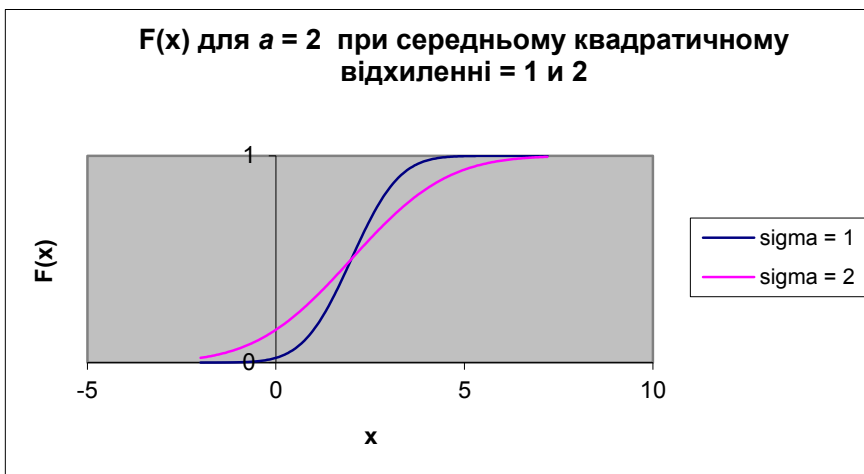
Функція розподілу у випадку нормального розподілу, очевидно, дорівнює

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Графіки функції для ряду значень математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення зображені на малюнках, що наводяться нижче



Мал. 3. Залежність функції розподілу від величини  $a$



Мал. 4. Залежність функції розподілу від величини  $\sigma$

Нормальний розподіл має виключно важливе значення для практичних застосувань, оскільки багато неперервних випадкових величин описуються саме цим розподілом. Виявляється, що підсумовування великого числа випадкових величин з різними законами розподілу призводить до нормального розподілу результуючої суми.

Слід мати на увазі, що при посиленні впливу окремих факторів можуть з'являтися відхилення від нормального розподілу результуючого параметра. Тому велике значення на практиці приділяється експериментальній перевірці висунених гіпотез, у тому числі і гіпотези про нормальний розподіл.

Графік щільності нормального розподілу називають *нормальною кривою Гауса*. Досліджуємо поведінку функції щільності ймовірності  $f(x)$ .

1. Очевидно, що функція визначена на усій осі  $Ox$ .
2. Функція набуває лише додатних значень, тобто нормальна крива розташована над віссю  $Ox$ .
3. Вісь  $Ox$  служить горизонтальною асимптотою графіка. Інших асимптот у графіка немає.
4. При  $x = a$  функція має максимум, рівний  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ .
5. Функція парна : її графік симетричний відносно прямої  $x = a$
6. При  $x = a \pm \sigma_x$  графік функції має точки перегину.

При будь-яких значеннях параметрів  $a$  і  $\sigma$ , площа, обмежена нормальною кривою і віссю  $Ox$ , дорівнює одиниці.

Часто вимагається визначити ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал. Ця ймовірність може бути виражена у вигляді різниці функції розподілу ймовірності в граничних точках цього інтервалу :

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

У разі нормального розподілу шукана ймовірність може бути виражена у вигляді:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

де  $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  - функція Лапласа.

Функція Лапласа протабульована, що істотно спрощує розрахунок попадання нормально розподіленої випадкової величини в будь-який заданий інтервал.

Функція Лапласа не виражається через елементарні функції.

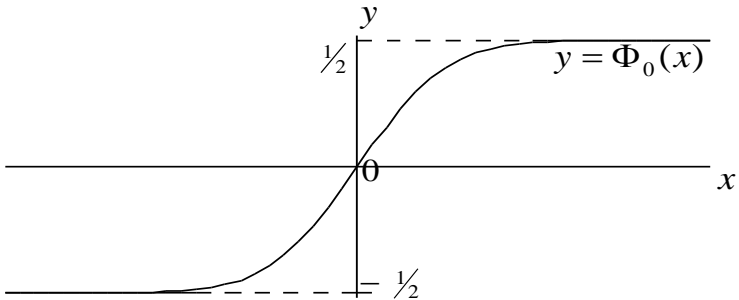
Для її обчислення використовуються спеціальні таблиці або методи наближеного обчислення.

Функція  $\Phi_0(x)$  має наступні властивості:

1.  $\Phi_0(0) = 0$ .
2.  $\Phi_0(+\infty) = 0,5$ .
3. Функція  $\Phi_0(x)$  - непарна, тобто  $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$ , тому в таблицях зазвичай приводяться значення  $\Phi_0(x)$  тільки для додатних значень.
4. Функція  $\Phi_0(x)$  - монотонно зростаюча функція (це випливає з того, що  $\Phi_0'(x) = \varphi_0(x) > 0$ ).

***Відхилення нормальної випадкової величини від її математичного сподівання. Правило "трьох сигм"***

Часто вимагається обчислити ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини за абсолютною величиною від математичного сподівання менше заданого додатного числа  $\delta$ , тобто вимагається знайти ймовірність того, що виконується



нерівність  $|X - M_X| < \delta$ .

Замінімо цю нерівність рівносильною їй подвійною нерівністю

$$M_X - \delta < X < M_X + \delta.$$

Скористаємося формулою:  $P(x_1 < X < x_2) = \Phi_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$ .

Отримаємо (нагадаємо, що  $a = M_X$ ):

$$P(M_X - \delta < X < M_X + \delta) = \Phi_0\left(\frac{M_X + \delta - M_X}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{M_X - \delta - M_X}{\sigma}\right) = \\ = \Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Якщо в якості  $\delta$  узяти потрійне значення середнього квадратичного відхилення, то дістанемо:

$$P(|X - M_X| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) = 0,9973.$$

Таким чином, ймовірність того, що абсолютна величина відхилення перевищить потрійне середнє квадратичне відхилення, дуже мала (0,0027 або 0,27%). Такі події можна вважати практично неможливими.

Іншими словами, якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потрійного середнього квадратичного відхилення. У цьому і полягає *суть правила "трьох сигм"*.

На практиці правило "трьох сигм" застосовують так: якщо розподіл випадкової величини, що вивчається, невідомий, але правило "трьох сигм" виконується, то є підстава вважати, що величина, що вивчається, розподілена нормально, і навпаки.

*Приклад 1.* Поточна ціна цінного паперу є нормально розподіленою випадковою величиною з середнім 100 у.о. і дисперсією 9. Знайти ймовірність того, що ціна активу знаходитиметься в межах від 91 до 109 у.о.

$$\text{Розв'язання. Оскільки } a = 100, \sigma = 3, \text{ то } P(91 < X < 109) = \\ = \Phi_0\left(\frac{109-100}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{91-100}{3}\right) = \Phi_0(3) - \Phi_0(-3) = 2\Phi_0(3).$$

*Приклад 2.* Магазин продає чоловічі костюми. За даними статистики відомо, що розподіл за розмірами є нормальним з математичним очікуванням і середнім квадратичним відхиленням, рівними 48 і 2 відповідно.

Визначити відсоток попиту на 50-й розмір, за умови розкиду значень цієї величини в інтервалі (49,51).

*Розв'язання.* Використовуємо формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

За умовою,  $a = 48, \sigma = 2, \alpha = 49, \beta = 51$ . Отримуємо, що ймовірність попиту на 50-й розмір в заданому інтервалі дорівнює

$$\begin{aligned} P(49 < X < 51) &= \Phi_0\left(\frac{51-48}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{49-48}{2}\right) = \\ &= \Phi_0(1,5) - \Phi_0(0,5) = 0,4332 - 0,1915 = 0,2417. \end{aligned}$$

Висновок: попит на 50-й розмір складе приблизно 24% і магазину треба передбачити це в загальному об'ємі закупівлі.

## Рекомендована література

1. Мацкул В.М. Вища математика для економістів.: Підручник.- Одеса: ОНЕУ,. 2018.- 472с.
2. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К. : Вид. центр “Академія”, 2003.
3. Вища математика у прикладах і задачах для економістів [Електронний ресурс] : навч. посіб. / А. М. Алілуйко, Н. В. Дзюбановська, О. Ф. Лесик [та ін.]. - Тернопіль : ТНЕУ, 2017. - 148 с..
4. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи і моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007.
5. Вища математика для менеджерів : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с.
6. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников,

Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2000.

7. Пістунів І.М., Турчанінова І.Ю. ПЗ4 Теорія ймовірності та математична статистика для економістів. З елементами електронних таблиць: Навч. Посібн. Дніпро: НТУ «ДП», 2023. 174 с. Режим доступу: [http://pistunovi.inf.ua/TU\\_ma\\_MC2.pdf](http://pistunovi.inf.ua/TU_ma_MC2.pdf)