МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики та фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
з розділу **Криволінійні інтеграли**
для студентів технічних спеціальностей

КРОПИВНИЦЬКИЙ
2020

Вища математика. Методичні вказівки з розділу Криволінійні інтеграли для студентів технічних спеціальностей

/ Укл.: С.М.Якименко, В.І. Гуцул – Кропивницький: ЦНТУ, 2020 р. – 45 с.

Укладачі:

Якименко Сергій Миколайович - канд. фіз.-матем. наук, доц.
Гуцул Василь Іванович - канд. техн. наук, доц.

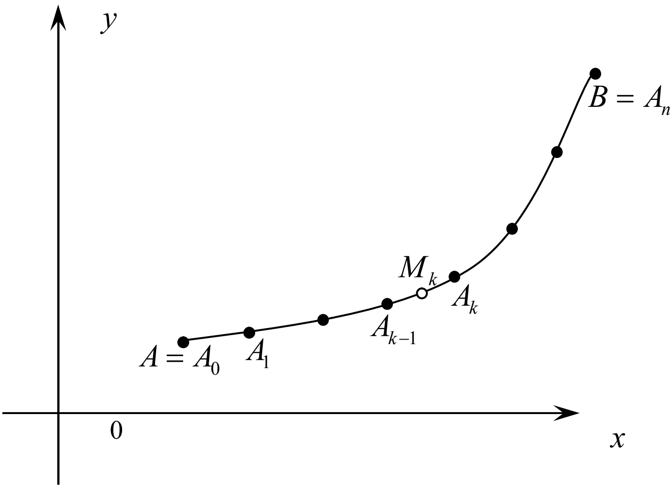
Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики та фізики
Протокол № 7 від 6.03.2020 р.

Криволінійні інтеграли

Криволінійні інтеграли першого роду (по довжині дуги)

Означення криволінійного інтегралу першого роду

Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є відрізок деякої кривої. Одержимо криволінійні інтеграли, які широко використовуються в різних розділах вищої математики.



Розглянемо на площині гладку криву L і функцію $z = f(x, y)$, яка визначена в кожній точці цієї кривої. Розіб'ємо дугу AB цієї кривої на елементарні дуги (частини) точками $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$. Позначимо через Δl_k - довжину елементарної дуги A_{k-1}, A_k і виберемо на кожній елементарній дузі довільну точку $M_k(x_k, y_k)$. Помноживши значення функції в цій точці на довжину Δl_k відповідної дуги, одержимо інтегральну суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta l_k. \qquad (1)$$

Будемо збільшувати число елементарних дуг таким чином, щоб максимальна довжина елементарних дуг прямувала до нуля.

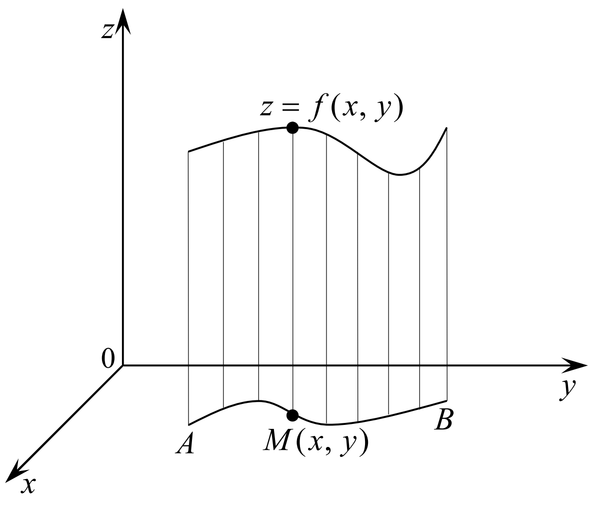
Означення. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (1) при $\max \Delta l_k \to 0$, яка не залежить ні від способу розбивки дуги кривої AB на елементарні дуги, ні від вибору точок $M_k(x_k, y_k)$, то вона називається **криволінійним інтегралом першого роду (по довжині дуги)** від функції $f(x, y)$ по дузі кривої AB і позначається

$$\lim_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta l_k = \int_{AB} f(x, y)dl. \qquad (2)$$

Функція $f(x, y)$ називається інтегрованою вздовж кривої AB, крива AB називається контуром інтегрування, A - початкова, а B - кінцева точки інтегрування.

Геометричний та фізичний зміст криволінійного інтегралу першого роду

Якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx \quad (f(x) \geq 0)$ представляє собою площу криволінійної трапеції, то криволінійний інтеграл першого роду $\int_{AB} f(x, y)dl$ при $f(x, y) \geq 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, яка складена із перпендикулярів до площини Oxy, поставлених в точках $M(x, y)$ дуги кривої AB і які мають змінну довжину $f(x, y)$ (геометричний зміст).



В частинному випадку, якщо AB - не крива, а відрізок прямої $[a,b]$, розміщений на осі Ox, то $f(x,y)=f(x),\ \Delta l_k=\Delta x_k$ і криволінійний інтеграл буде звичайним визначеним інтегралом.

Якщо покласти $f(x,y)\equiv 1$, то одержимо криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} dl$,значення якого дорівнює довжині дуги кривої AB.

Якщо ж вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу m лінійною густиною $\rho(x,y)$, то

$$m=\lim_{\max\ \Delta l_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k,\,y_k)\Delta l_k=\int\limits_{AB}\rho(x,y)dl,$$

Тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої (фізичний зміст).

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду

1) Значення криволінійного інтеграла першого роду не залежить від напрямку шляху інтегрування.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{BA} f(x,y)dl. \tag{3}$$

2) Постійний множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла.

$$\int_{AB} k \cdot f(x,y)dl = k\int_{AB} f(x,y)dl. \qquad (4)$$

3) Криволінійний інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі криволінійних інтегралів від цих функцій.

$$\int_{AB} [f(x,y) \pm g(x,y)]dl = \int_{AB} f(x,y)dl \pm \int_{AB} g(x,y)dl. \qquad (5)$$

4) Якщо крива інтегрування AB розбита з допомогою точки C на дві частини: $AB = AC \cup CB$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{AC} f(x,y)dl + \int_{CB} f(x,y)dl. \qquad (6)$$

5) Якщо в усіх точках кривої AB

$$f_1(x,y) \le f_2(x,y),$$

то

$$\int_{AB} f_1(x,y)dl \le \int_{AB} f_2(x,y)dl. \qquad (7)$$

6) Теорема про середнє. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на кривій AB, то на цій кривій існує точка (x_0, y_0) така, що

$$\int_{AB} f(x, y)dl = f(x_0, y_0) \cdot L, \qquad (8)$$

де L - довжина дуги кривої AB.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів. Розглянемо різні випадки задання кривої інтегрування AB.

1) Нехай крива інтегрування AB задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t \in [\alpha, \beta]$, де $x(t),\ \ y(t)$ - неперервні разом зі своїми похідними $x'(t),\ \ y'(t)$ функції, а $f(x,\ y)$ - функція, неперервна вздовж цієї кривої, причому для визначеності будемо вважати, що точці A відповідає значення $t = \alpha$, точці B - значення $t = \beta$. Диференціал дуги кривої знаходиться за формулою

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Тоді криволінійний інтеграл першого роду буде обчислюватись за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),\ \ y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (9)$$

<u>Приклад</u>. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{AB}\sqrt{2y}dl,$ де контур інтегрування AB - перша арка циклоїди $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$

<u>Розв'язування</u>.

$$\int\limits_{AB}\sqrt{2y}dl = \int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{2a(1-\cos t)}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{2a(1-\cos t)}a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt =$$

$$= a\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{2a}\sqrt{(1-\cos t)2(1-\cos t)}dt =$$

$$= 2a\sqrt{a}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos t)dt = 2a\sqrt{a}(t-\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 4a^{\frac{3}{2}}\pi.$$

2) Нехай крива інтегрування AB задана на площині рівнянням $y = g(x),\ \ x\in[a,b]$, а $f(x,y)$ — неперервна в

точках цієї кривої функція. Тоді диференціал дуги кривої матиме вигляд:

$$dl = \sqrt{1 + g'^2(x_i)}dx\,,$$

а криволінійний інтеграл першого роду буде обчислюватись за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)dl = \int\limits_a^b f(x,\ \ g(x))\sqrt{1 + g'^2(x)}dx. \qquad (10)$$

<u>Приклад</u>. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} xdl$, де контур інтегрування AB — дуга параболи $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$, що з'єднує точки (0, 0) і (2, $\sqrt{2}$).

<u>Розв'язування</u>. Оскільки $x \in [0,\ 2]$ і $y' = \sqrt{2}x$, то згідно з (10) маємо:

$$\int\limits_{AB} xdl = \int\limits_0^2 x\sqrt{1 + 2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 (1 + 2x^2)^{1/2}\,d(1 + 2x^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(1 + 2x^2)^3}\Bigg|_0^2 = \frac{13}{6}.$$

3) Якщо крива інтегрування AB задана на площині рівнянням $r = r(\varphi)$, то її можна задати параметрично за

допомогою рівностей $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$.

Тоді криволінійний інтеграл першого роду буде обчислюватись за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi,\ \ r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (11)$$

<u>Приклад</u>. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dl$, де контур інтегрування AB - кардіоїда

$r = a(1+\cos\varphi),\ \ \left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

<u>Розв'язування</u>. Найдемо $r' = -a\sin\varphi$. Скориставшись формулою (11), будемо мати

$$\int\limits_{AB} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dl = \int\limits_0^{\pi/2} \varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi d\varphi} =$$

$$= a\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi d\varphi} =$$

$$= a\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\sqrt{1+\cos\varphi}d\varphi = a\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi d\varphi} =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\varphi\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 2a\int_0^{\pi/2}\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} u=\varphi, & dv=\cos\frac{\varphi}{2}, \\ du=d\varphi, & v=2\sin\frac{\varphi}{2} \end{vmatrix} = 2a\cdot\varphi\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} - 4a\int_0^{\pi/2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 4a\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} + 8a\cos\frac{\pi}{2}\Big|_0^{\pi/2} = a\left[\sqrt{2}(\pi+4)-8\right].$$

4) До цього часу розглядали криволінійний інтеграл першого роду для плоскої кривої. Аналогічно визначається криволінійний інтеграл першого роду від функції трьох змінних $f(x,y,z)$ для просторової кривої, яка задається параметричними рівняннями

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad t\in[\alpha,\beta]$. Тоді криволінійний інтеграл першого роду буде обчислюватись за формулою

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt. \qquad (12)$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_l xyzdl,$ де $l: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ \quad z = t, \end{cases}$

Розв'язування. Застосовуючи формулу (12), одержимо:

$$\int\limits_l xyzdl = \int\limits_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 2\sin t \cdot t \cdot \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1}dt =$$

$$= -\sqrt{5}\int\limits_0^{2\pi} td(\cos 2t) = -\sqrt{5}\left(t\cos 2t \Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \cos 2tdt \right) =$$

$$= -\sqrt{5} \cdot 2\pi + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}\sin 2t \Big|_0^{2\pi} = -2\sqrt{5}\pi.$$

Застосування криволінійних інтегралів першого роду

1) Довжина кривої.

Якщо підінтегральна функція $f(x, y) \equiv 1$, то згідно означення криволінійного інтеграла першого роду одержуємо, що в цьому випадку він дорівнює довжині кривої, по якій ведеться інтегрування:

$$L = \int_l dl. \tag{13}$$

2) Маса матеріальної кривої.

Вважаючи, що підінтегральна функція $f(x, y)$, визначає густину кожної точки кривої, можна знайти масу матеріальної кривої по формулі

$$m = \int_l \rho(x, y) dl. \tag{14}$$

3) Статичні моменти кривої l відносно координатних осей для плоскої кривої можна знайти, міркуючи так само, як у випадку плоскої області:

$$m_x = \int_l y \cdot \rho(x, y) dl, \quad m_y = \int_l x \cdot \rho(x, y) dl . \tag{15}$$

4) Моменти інерції кривої l відносно координатних осей визначаються так:

$$I_x = \int_l y^2 \cdot \rho(x, y) dl, \quad I_y = \int_l x^2 \cdot \rho(x, y) dl. \tag{16}$$

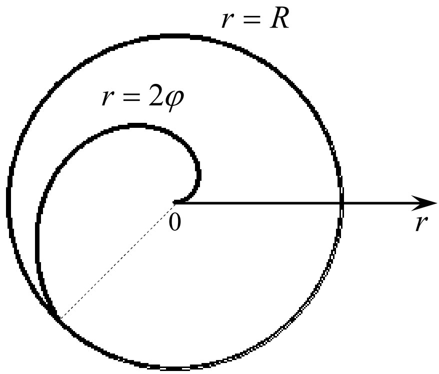
Полярний та центробіжний моменти інерції можна обчислити за формулами:

$$I_0 = \int_l (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y) \rho dl, \quad I_{xy} = \int_l xy \cdot \rho(x, y) dl, \tag{17}$$

5) Координати центру мас матеріальної кривої l можна обчислити за формулами:

$$x_c = \frac{m_y}{m}, \quad y_c = \frac{m_x}{m}. \qquad (18)$$

Зауваження. Якщо густина маси матеріальної кривої в усіх точках постійна (тобто матеріальна крива однорідна), то в наведених вище формулах потрібно взяти $\rho(x, y) = 1$.



Приклад 1. Обчислити масу спіралі Архімеда $r = 2\varphi$, яка лежить всередині круга радіуса R з центром в полюсі, якщо густина спіралі $\rho = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Розв'язування. Межі інтегрування по φ знайдемо із розв'язку системи рівнянь $\begin{cases} r = R, \\ r = 2\varphi. \end{cases}$

Звідси маємо: $R = 2\varphi, \quad \varphi = \frac{R}{2}$. Застосовуючи формулу (14), одержимо:

$$m = \int\limits_l \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl = \int\limits_0^{R/2} \operatorname{arctg} \frac{r \sin\varphi}{r\cos\varphi} \sqrt{(2\varphi)^2 + 2^2}\, d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{R/2} \varphi\sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi = \int\limits_0^{R/2} (\varphi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d(\varphi^2 + 1) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\varphi^2 + 1\right)^{3/2}\Big|_0^{\frac{R}{2}} = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{R^2}{4} + 1\right)^{3/2} - 1\right].$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити координати центру мас однорідної кривої, яка задається однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$.

<u>Розв’язування</u>. Спочатку знайдемо масу кривої. Так як крива однорідна, приймемо, що густина $\rho(x, y) = 1$. Обчислимо масу циклоїди за формулою (15):

$$m = \int\limits_l dl = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = 8a.$$

Координати центру маси циклоїди знаходяться за формулами (15), (18):

$$x_C = \frac{m_y}{m} = \frac{1}{8a}\int\limits_l x dl = \frac{1}{8a} a^2 \int\limits_0^{2\pi} (t - \sin t)\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\, dt = \pi a,$$

$$y_C = \frac{m_x}{m} = \frac{1}{8a}\int_l y dl = \frac{1}{8a} a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} dt = \frac{4}{3}a.$$

Криволінійні інтеграли другого роду (по координатах)

Означення криволінійного інтегралу другого роду

Нехай в деякій області площини Oxy задані неперервні функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, і нехай в цій же області розміщена дуга AB плоскої кривої L. Розіб'ємо дугу кривої AB на n частин точками $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Одержимо елементарні дуги A_{k-1}, A_k. Всередині кожної елементарної дуги виберемо точку $M(x_k, y_k)$ і складемо інтегральні суми

$$\sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k, \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} Q(x_k, y_k)\Delta y_k, \qquad (2)$$

де Δx_k, Δy_k - проекції елементарної дуги l_k на осі Ox, Oy.

<u>*Означення.*</u> **Криволінійним інтегралом від функції** $P(x, y)$ $(Q(x, y))$ **по координаті** x (y) по кривій AB називається границя (якщо вона існує і не залежить від способу розбивки дуги кривої на відрізки й вибору точок $M(x_k, y_k)$) інтегральної суми (1) (відповідно суми(2)) при умові $\max \Delta x_k \to 0 \quad (\max \Delta y_k \to 0)$, тобто

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k)\Delta x_k = \int_{AB} P(x, y)dx, \qquad (3)$$

$$(\lim_{\max \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(x_k, y_k)\Delta y_k = \int_{AB} Q(x, y)dy.) \qquad (4)$$

<u>*Означення.*</u> **Загальним криволінійним інтегралом по координатах (другого роду)** від функцій $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ по кривій AB називають суму інтегралів (3), (4) і позначають

$$\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (5)$$

Зауваження1. Якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ - проекції сили $\vec{F}$ на координатні осі, тобто $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, то із (1), (2) і (5) випливає, що загальний криволінійний інтеграл другого роду виражає роботу цієї сили на шляху AB (фізичний зміст криволінійного інтегралу другого роду).

Зауваження2. Якщо крива AB задана в просторі, то криволінійний інтеграл другого роду від трьох функцій $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначається аналогічно

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z). \tag{6}$$

Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду

При зміні напрямку кривої (тобто зміни місцями початкової й кінцевої її точок) криволінійний інтеграл другого роду змінює знак на протилежний. Дійсно, із структури інтегральних сум (1), (2) випливає, що криволінійний інтеграл другого роду змінює знак на протилежний при зміні напрямку кривої AB, тобто

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int\limits_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{7}$$

Якщо змінити напрямок кривої, то змінюються знаки проекцій $\Delta x_k, \Delta y_k$ в сумах (1), (2), а значить, сама сума і її границя змінюють знак.

Інші властивості аналогічні властивостям криволінійних інтегралів першого роду.

<u>*Зауваження.*</u> Означення криволінійного роду другого роду залишається в силі і в тому випадку, коли крива інтегрування замкнута. Для позначення криволінійного інтегралу другого роду по замкнутому контуру використовують символ

$$\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (8)$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду, так як і першого роду, зводиться до обчислення визначених інтегралів. Розглянемо різні випадки задання кривої інтегрування AB .

1) Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta,$ де $x(t),\ y(t)$ - неперервні, диференційовані функції, і на ній задана

неперервна функція $f(x, y)$. Точці A відповідає значення $t = \alpha$, точці B - значення $t = \beta$. Тоді криволінійний інтеграл другого роду існує й має місце рівність

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt. \qquad (9)$$

<u>Приклад</u>. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, де l:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

<u>Розв'язування</u>. Обчислимо похідні $x'(t) = -a\sin t,\ \ y'(t) = a\cos t$ і, застосовуючи формулу (9), одержимо:

$$\int_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{\pi} \frac{a\cos t \cdot a\cos t + a\sin t \cdot a\sin t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

2) Якщо крива задана рівнянням $y = y(x), \quad (a \le x \le b)$, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx, \qquad (10)$$

де - a і b - абсциси точок A і B.

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_{AB} xy^2dx + x^2ydy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

Розв'язування. Обчислимо похідну $y'(x) = 2x$ і, застосовуючи формулу (10), одержимо:

$$\int_{AB} xy^2dx + x^2ydy = \int_1^2 \left(x \cdot x^4 + x^2x^2 \cdot 2x\right)dx = \int_1^2 \left(x^5 + 2x^5\right)dx =$$

$$= \int_1^2 3x^5dx = \left.\frac{x^6}{2}\right|_1^2 = 32 - \frac{1}{2} = 31\frac{1}{2}.$$

3) Якщо крива задана в полярній системі координат рівнянням $r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)(-r\sin\varphi) + Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\cos\varphi \} d\varphi. \quad (11)$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_l (x+y)dx - (x-y)dy$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$, яке лежить в першому квадранті.

Розв'язування. Застосовуючи формулу (11), одержимо:

$$\int_l (x+y)dx - (x-y)dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} [(R\cos\varphi + R\sin\varphi)(-R\sin\varphi) - (R\cos\varphi - R\sin\varphi)R\cos\varphi] d\varphi =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \left(-\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi - \cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi =$$

$$= -R^2 \int_0^{\pi/2} dt = -\frac{\pi R^2}{2}.$$

4) Розглянемо просторову криву, яку задано параметричними рівняннями

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$. Тоді криволінійний інтеграл другого роду буде обчислюватись за формулою:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt.$$

(12)

<u>Приклад</u>. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{l} yzdx + zxdy + xydz$ вздовж гвинтової лінії

$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z = 0$ до точки перетину з площиною $z = a$.

<u>Розв'язування</u>. Обчислимо похідні

$x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t,\ z'(t) = \frac{a}{2\pi}$ і, застосовуючи формулу (12), одержимо:

$$\int\limits_{l} yzdx + zxdy + xydz =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \left(-R\sin t \frac{at}{2\pi} R\sin t + \frac{at}{2\pi} R\cos t R\cos t + R^2 \sin t\cos t \frac{a}{2\pi} \right) dt =$$

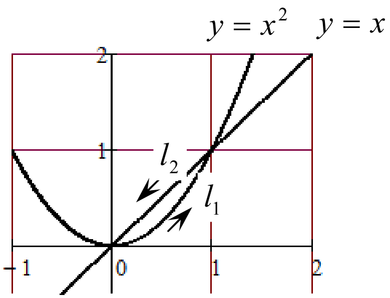
$$= \frac{R^2 a}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) dt = \begin{vmatrix} u = t, & dv = \cos 2tdt, \\ du = dt, & v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{R^2 a}{2\pi}\left(\frac{1}{2}t\sin 2t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t dt\right) = 0.$$

Зауваження 1. Якщо контур інтегрування замкнутий, то будемо вважати, що замкнутий контур обходиться в додатному напрямку, при якому область, яка лежить всередині цього контура, залишається по ліву сторону від точки обходу.

Зауваження 2. Якщо контур інтегрування замкнутий, то величина криволінійного інтегралу другого роду по цьому контуру не залежить від того, яка точка контуру вибрана за початок інтегрування.

Приклад. Обчислити $\oint\left(x^2 - y^2\right)dx + 2xydy$, де замкнутий контур області, утвореної при перетині ліній $y = x$ і $y = x^2$.



Розв'язування. За додатній напрямок обходу приймемо напрямок проти годинникової стрілки. Контур розіб'ємо на дві частини. Тоді, у відповідності з властивостями криволінійних інтегралів другого роду, можемо записати:

$$\oint\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy=$$

$$=\int\limits_{l_1}\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy+\int\limits_{l_2}\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy,$$

де l_1 - дуга параболи $y=x^2$, l_2 - відрізок прямої $y=x$. Так як парабола і пряма перетинаються в точках $(0,0); (1,1)$, то

$$\oint\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2-x^4+2x\cdot x\cdot 2x\right)dx+\int\limits_1^0\left(x^2-x^4+2x\cdot x\cdot 1\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2+3x^4\right)dx+\int\limits_1^0 2xdx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1+\frac{2}{3}x_3\Bigg|_1^0=\frac{4}{15}.$$

Зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду

Нехай AB - деяка плоска крива з початком A і кінцем B. Позначимо кути, які утворює дотична до AB з осями координат, через $\alpha, \beta.$ Очевидно, що ці кути являються функціями координат x, y точки дотику M. Виділимо із AB елементарну дугу dl і будемо вважати її прямолінійною. Значить, dl є вектор з проекціями dx, dy, направлений так же, як і крива AB. Отже, $dx = \cos\alpha dl, dy = \cos\beta dl$. Тоді криволінійний інтеграл другого роду виразиться через криволінійний інтеграл першого роду за формулою:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta\right)dl. \qquad (13)$$

При зміні напрямку руху точки по кривій на протилежний $\cos\alpha, \cos\beta, dx, dy$ змінюють знак, і формули (13) залишаються в силі.

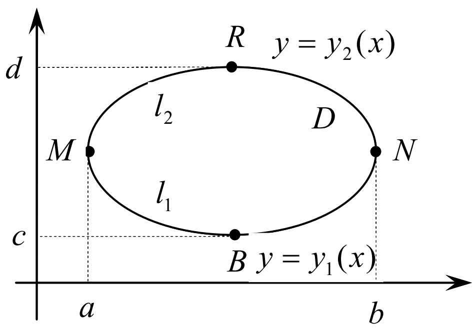
Застосування криволінійних інтегралів другого роду

1) Робота сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ на деякому криволінійному шляху l обчислюється за формулою:

$$A = \int\limits_{l} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (14)$$

2) Якщо D - область, обмежена замкнутим контуром l, то площу цієї області можна знайти за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx. \qquad (15)$$



Доведення. Нехай область D - правильна і проектується на вісь Ox в відрізок $[a,b]$, причому знизу вона обмежена кривою l_1, рівняння якої $y = y_1(x)$, а зверху – кривою l_2, рівняння якої $y = y_2(x)$. Тоді площа області D дорівнює

$$S = \int_a^b y_2(x)dx - \int_a^b y_1(x)dx.$$

Перший інтеграл є криволінійним інтегралом по кривій $l_2\,(MRN)$, так як $y = y_2(x)$ є рівняння цієї кривої. Отже,

$$\int_a^b y_2(x)dx = \int_{MRN} ydx.$$

Другий інтеграл є криволінійним інтегралом по кривій $l_1\,(MBN)$, тобто

$$\int_a^b y_1(x)dx = \int_{MBN} ydx.$$

Використавши властивість криволінійного інтегралу другого роду, одержимо

$$\int_{MRN} ydx = -\int_{NRM} ydx.$$

Отже,

$$S = -\int_{NRM} ydx - \int_{MBN} ydx = -\oint ydx. \qquad (16)$$

Аналогічно можна показати, що

$$S = \oint xdy. \qquad (17)$$

Додаючи почленно рівності (16) і (17) і ділячи на 2, одержимо формулу для обчислення площі області D:

$$S = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx.$$

Зауваження. Цю формулу можна також вивести за допомогою формули Гріна.

Приклад. Знайти площу еліпса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Розв'язування. Скористаємось формулою (15):

$$S = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx = \left| \begin{matrix} dx = -a\sin t, \\ dy = b\cos t. \end{matrix} \right| =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab\,(\text{од.})^2$$

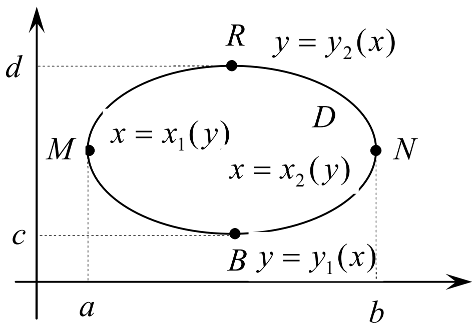
Формула Гріна.

Формула Гріна встановлює зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D і криволінійним інтегралом по границі l цієї області. Вона широко застосовується в математичному аналізі.

Теорема. Нехай D - деяка правильна замкнута область, обмежена контуром l, і нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в даній області. Тоді має місце формула

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint P(x,y)dx+Q(x,y)dy, \qquad (18)$$

яка називається формулою Гріна.



Доведення. Розглянемо на площині Oxy обмежену замкненим контуром l правильну область D. Криві, що обмежують цю область знизу й зверху, задані рівняннями $y = y_1(x),\ y = y_2(x).$ Тоді область D можна задати системою нерівностей

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x). \end{cases}$$

Задамо в області D неперервні функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, що мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$, і розглянемо подвійний іитеграл

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy \ .$$

Переходячи до повторного (двократного) інтеграла, перетворимо його в криволінійний:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial x} dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b P(x,y) \Bigg| \begin{matrix} y_2(x) \\ y_1(x) \end{matrix} dx = \int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right) dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx .$$

Кожний із цих визначених інтегралів дорівнює криволінійному інтегралу другого роду, взятому по відповідній кривій

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int_{MRN} P(x,y) dx = -\int_{NRM} P(x,y) dx,$$

$$\int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \int_{MBN} P(x,y) dx.$$

Таким чином,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial x} dxdy = -\left[\int_{NRM} P(x,y) dx + \int_{MBN} P(x,y) dx \right] = -\oint P(x,y) dx. \quad (19)$$

Так само можна одержати, що

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint Q(x,y) dy \quad (20)$$

(при цьому область D потрібно задати системою нерівностей $\begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y). \end{cases}$)

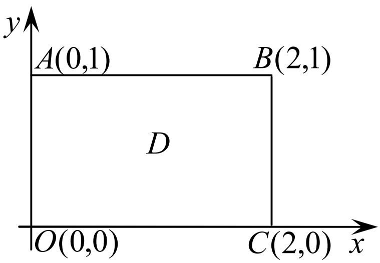
Віднімемо із(20) почленно (19), одержимо шукану формулу (18).

<u>Приклад</u> 1. Застосувавши формулу Гріна, обчислити

$$\oint_l (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy,$$

де l - контур прямокутника з вершинами в точках $O(0,0)$; $A(0,1)$; $B(2,1)$; $C(2,0)$.

<u>Розв'язування</u>. За умовою $P(x, y) = xy + x + y, \quad Q(x, y) = xy + x - y.$ Знайдемо



частинні похідні

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1.$$

Застосовуючи формулу Гріна, одержимо

$$\oint_l (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy =$$

$$= \iint_D (y + 1 - x - 1)dxdy = \iint_D (y - x)dxdy.$$

Для даної області запишемо систему нерівностей:

$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$ Перейдемо в подвійному інтегралі до

повторного (двократного) інтеграла і одержимо

$$\iint_D (y-x)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^1 (y-x)dy =$$

$$= \int_0^2 dx \left(\frac{y^2}{2} - xy \right)\Bigg|_0^1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - x \right) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 = -1.$$

Отже, одержимо відповідь:

$$\oint_l (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = -1.$$

Приклад 2. Обчислити:

$$\oint_l y\left(1 - x^2\right)dx + x\left(1 + y^2\right)dy,$$

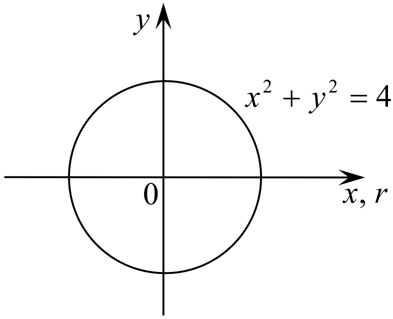
де контур l - коло $x^2 + y^2 = 4$.

Розв’язування. За умовою

$P(x, y) = y\left(1 - x^2\right), \quad Q(x, y) = x\left(1 + y^2\right)$. Знайдемо частинні

похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2$. Застосовуючи формулу

Гріна, одержимо



$$\oint_l y(1-x^2)dx + x(1+y^2)dy =$$

$$= \iint_D (1+y^2-1+x^2)dxdy =$$

$$= \iint_D (x^2+y^2dxdy),$$

де контур інтегрування D - коло, визначене нерівністю $x^2 + y^2 \le 4$. Для обчислення подвійного інтегралу перейдемо до полярної системи координат. Область інтегрування D в полярній системі координат запишеться системою нерівностей:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le r \le 2. \end{cases}$$

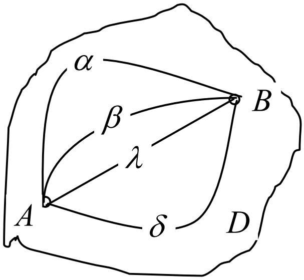
Обчисливши подвійний інтеграл, одержимо:

$$\oint_l y(1-x^2)dx + x(1+y^2)dy = \iint_D (x^2+y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = 8\pi.$$

Незалежність криволінійного інтегралу другого роду від контуру інтегрування

Розглянемо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - неперервні в деякій замкнутій області D.



Візьмемо дві довільні точки A і B і різні шляхи $A\alpha B, A\beta B, A\lambda B, A\delta B, \ldots\ldots$, які з'єднують ці точки (точка A - початок, точка B - кінець шляху), і які не виходять за межі області D. Якщо виконується рівність

$$\int_{A\alpha B} Pdx + Qdy = \int_{A\beta B} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{A\lambda B} Pdx + Qdy = \ldots\ldots\ldots\ldots = \int_{AB} Pdx + Qdy, \qquad (21)$$

то кажуть, що криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування в даній області D.

<u>*Теорема.*</u> Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними в деякій області D, яка повністю містить контур l. Тоді необхідною і достатньою умовою незалежності криволінійного інтегралу другого роду $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ від контуру інтегрування є виконання в області D рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (22)$$

Зауваження 1. При виконанні умови (22) криволінійний інтеграл по замкнутому контуру, який лежить в області D, дорівнює нулю:

$$\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{23}$$

Зауваження 1. Якщо виконується умова (22), то підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

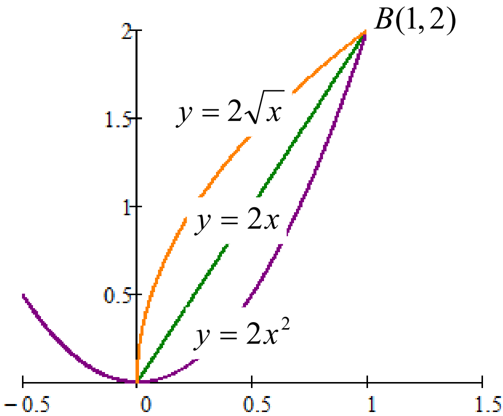
$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{24}$$

В цьому випадку можна записати узагальнену формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} =$$

$$= u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1). \tag{25}$$

Приклад. Знайти значення криволінійного інтеграла $I = \int\limits_l y^2dx + 2xydy$ від точки $O(0,0)$ до точки $B(1,2)$ вздовж указаних шляхів: а) $y = 2x$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 2\sqrt{x}$.



Розв'язування. а) Підставимо у I замість y величину $2x$ і замість $dy = 2dx$, тому що $y = 2x$. Одержимо:

$$I = \int_0^1 \left(4x^2 + 2x \cdot 2x \cdot 2\right)dx = 12\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{12x^3}{3}\right|_0^1 = 4.$$

б) Підставимо у I замість y величину $2x^2$ і замість $dy = 4xdx$, тому що $y = 2x^2$. Одержимо:

$$I = \int_0^1 \left(4x^4 + 2x \cdot 2x^2 \cdot 4x\right)dx = 20\int_0^1 x^4 dx = \left.\frac{20x^5}{5}\right|_0^1 = 4.$$

в) Підставимо у I замість y величину $2\sqrt{x}$ і замість $dy = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, тому що $y = 2\sqrt{x}$. Одержимо:

$$I = \int_0^1 \left(4x + 2x \cdot 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 8\int_0^1 xdx = \left.\frac{8x^2}{2}\right|_0^1 = 4.$$

Всі три відповіді однакові. Отже, криволінійний інтеграл не залежить від контуру інтегрування, так як виконується рівність:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$

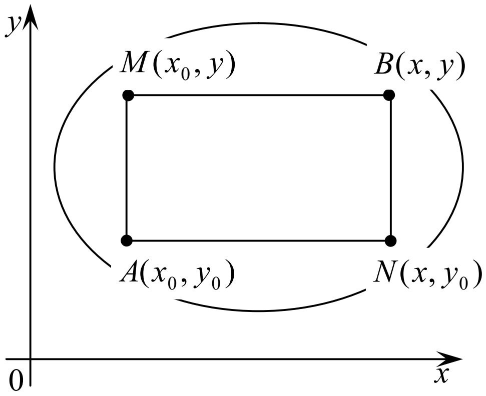
Інтегрування повних диференціалів

Використовуючи формули (24), (25), можна вказати спосіб знаходження функції $u(x, y)$, повний диференціал якої задається виразом: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Із узагальненої формули Ньютона-Лейбніца (25), запишемо криволінійний інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C, \tag{26}$$

який дає можливість визначити всі функції, які мають підінтегральний вираз своїм повним диференціалом.



Для знаходження функції $u(x, y)$ по формулі (26) достатньо, вибравши будь-яку точку (x_0, y_0) в області D, обчислити криволінійний інтеграл по будь-якій кривій, яка з'єднує точки (x_0, y_0) і (x, y). Так як криволінійний інтеграл не залежить від вибору шляху інтегрування, то зручно за шлях інтегрування взяти ламану, ланки якої паралельні осям координат.

Якщо інтегрувати по ламаній ANB, то вздовж AN $y = y_0$, $dy = 0$, а вздовж NB - $x = const$, $dx = 0$, і інтеграл (26) набуває вигляду:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C, \qquad (27)$$

де перший інтеграл обчислюється при постійному y_0, а другий – при постійному x.

Якщо ж інтегрувати по ламаній AMB, де $M(x_0, y)$, то одержимо аналогічну формулу:

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + C. \qquad (28)$$

Приклад 1. Перевірити, чи буде вираз

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy$$

повним диференціалом функції двох змінних $u(x,y)$.
Якщо так, то знайти цю функцію.

Розв'язування. Перевіримо, чи виконується умова повного диференціалу $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ для функції $u(x,y)$.

Маємо:

$$P(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad Q(x,y) = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}.$$

Функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми похідними, за виключенням точки $(0,0)$. Частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ рівні між собою. Значить, заданий вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, а криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$$

не залежить від шляху інтегрування. За фіксовану точку інтегрування (x_0, y_0) найкраще брати точку $(0,0)$. Але в даному випадку при $x = 0,\ y = 0$ функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ не визначені. Тому за початкову точку інтегрування (x_0, y_0) можна взяти, наприклад, точку $A(1,1)$. Тоді, використавши формулу (27), одержимо:

$$u(x, y) = \int_1^x \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1}\right)dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy =$$

$$= \left(\ln x + x\right)\Big|_1^x + \left(2\ln y + \frac{x}{y}\right)\Bigg|_1^y = \ln x + x - \ln 1 - 1 + 2\ln y +$$

$$+\frac{x}{y} - 2\ln 1 - x + C_0 = \ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} - 1 + C_0.$$

Зробимо перевірку. Повинно виконуватися

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} - 1 + C_0\right) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} - 1 + C_0\right) = \frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}.$$

Отже, відповідь: $u(x,y)=\ln x+2\ln y+\dfrac{x}{y}+C,$ де $C=C_0-1.$

<u>Приклад 2</u>. Знайти функцію $u(x,y)$ по її повному диференціалу

$$du(x,y)=\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y\right)dx+\frac{x}{y}dy.$$

<u>Розв'язування</u>. Перевіримо, чи виконується умова повного диференціалу $\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ для функції $u(x,y)$.

Маємо:

$$P(x,y)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y;\quad Q(x,y)=\frac{x}{y};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y}.$$

Отже, заданий вираз є повним диференціалом функції $u(x,y)$. Зафіксуємо точку $A(1,1)$ (точку $O(0,0)$ взяти не можна, так як функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ в цій точці не визначені. За формулою (27), маємо:

$$u(x,y)=\int_1^x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}a+\ln 1\right)dx+\int_1^y\frac{x}{y}dy=$$

$$=(\operatorname{arctg}x-\ln x)\Big|_1^x+x\ln y\Big|_1^y+C_0=\operatorname{arctg}x-\ln x-$$

$$-\operatorname{arctg} 1 + x \ln y + C_0 = \operatorname{arctg} x - \ln x + x \ln y + C,$$

де $C = C_0 - \operatorname{arctg} 1 = C_0 - \frac{\pi}{4}$.

Перевірка.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg} x - \ln x + x \ln y + C\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg} x - \ln x + x \ln y + C\right) = \frac{x}{y}.$$

Отже, відповідь: $u(x, y) = \operatorname{arctg} x - \ln x + x \ln y + C$.

<u>Приклад 3</u>. Розв’язати диференціальне рівняння:

$$\left(\frac{1}{x} - y^3 + 4\right)dx + \left(-\frac{1}{y} - 3xy^2\right)dy = 0.$$

<u>Розв’язування</u>. Позначимо

$P(x, y) = \frac{1}{x} - y^3 + 4, \quad Q(x, y) = -\frac{1}{y} - 3xy^2$. Обчислимо

частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2$. Так як

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то маємо диференціальне рівняння в повних

диференціалах. Запишемо його загальний розв’язок:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x} - {y_0}^3 + 4\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(-\frac{1}{y} - 3xy^2\right)dy = C_0.$$

Проінтегруємо його

$$\ln x\Big|_{x_0}^{x} - {y_0}^3 x\Big|_{x_0}^{x} + 4x\Big|_{x_0}^{x} - \ln y\Big|_{y_0}^{y} - 3x\frac{y^3}{3}\Bigg|_{y_0}^{y} = C_0,$$

$$\ln x - \ln x_0 - {y_0}^3 x + {y_0}^3 x_0 + 4x - 4x_0 -$$

$$-\ln y + \ln y_0 - xy^3 + x{y_0}^3 = C_0.$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - xy^3 + 4x = C, \quad \text{де } C = C_0 + \ln\left|\frac{x_0}{y_0}\right| + 4x_0 - x_0{y_0}^3.$$